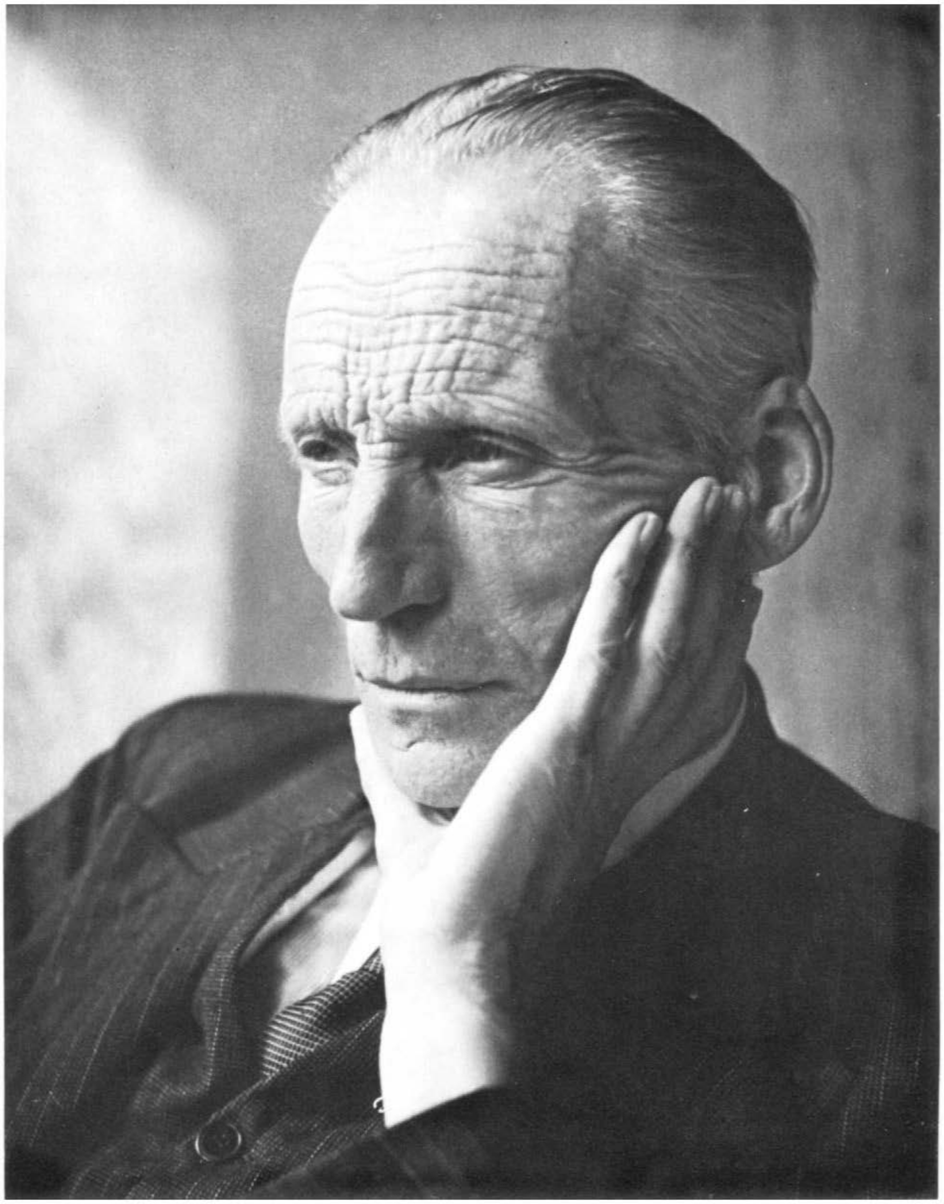


© 1943 Photograph by E. van Moerkerken

L. E. J. BROUWER (1881–1966)

L. E. J. BROUWER

COLLECTED WORKS

1

PHILOSOPHY AND FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

EDITED BY

A. HEYTING

1975

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY – AMSTERDAM · OXFORD

AMERICAN ELSEVIER PUBLISHING COMPANY, INC. – NEW YORK

Library of Congress Catalog Card Number: 73–75529
ISBN North-Holland, Volume 1: 0 7204 2076 8
ISBN American Elsevier: 0 444 10474 7
Printed in The Netherlands

PUBLISHERS:
NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY – AMSTERDAM · OXFORD
SOLE DISTRIBUTORS FOR THE U.S.A. AND CANADA:
AMERICAN ELSEVIER PUBLISHING COMPANY, INC.
52 VANDERBILT AVENUE NEW YORK, N.Y. 10017

INTRODUCTION

Brouwer's scientific publications fall into two almost disjoint parts: the first on philosophy and intuitionism, the second on non-intuitionistic mathematics, mainly topology. They will be published in two volumes, which are almost independent of each other. This volume contains the thesis of 1907 and the papers on philosophy and intuitionistic mathematics.

The thesis, on which he obtained the degree of Doctor in de Wis- en Natuurkunde (Doctor of Mathematics and Physics) on February 19, 1907, is still an important and interesting document for understanding his line of thought. In the framework of his general philosophy of science, Brouwer unfolded his program for the construction of mathematics. The book contains the germ of much of his later work in foundations as well as in the development of mathematics itself. However, he was not yet able to draw all the consequences from his point of view. Many sections are sketchy and had to be revised in later papers.

At the end of chapter I he explained what he intended to do in this chapter: „In het voorgaande is van de fundamentele gedeelten der wiskunde getoond, hoe ze zijn *op te bouwen* uit voorstellingseenheden: ..." (In the preceding pages it has been shown how the fundamental parts of mathematics can be *built up* from units of perception: ...). This program is the basis of all his work on foundations.

As paradigmata for the construction of mathematical theories he chose subjects of fundamental importance which in those days were in course of development. I mention some of them:

1. The application of group theory to arithmetic and to geometry. This section contains important original contributions concerning the weakening of Lie's conditions of differentiability. A more complete paper is: Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie, Math. Annalen 67 (1909), p. 246–267; Math. Annalen 69 (1910), p. 181–203 ⟦Vol. 2, 1909 C, 1910 H⟧.
2. Non-Archimedean geometry.
3. Foundations of set theory. Here Brouwer deviates completely from the classical theory.

Chapter II contains a clearly formulated account of Brouwer's philosophy of science. As a mathematical insertion there is the proof of the theorem that a function is differentiable if the system of its difference quotients for a variable increment satisfies a condition of simultaneous continuity. There follows a criticism, from the mathematical as well as from the philosophical point of view, of Russell's 'An Essay on the Foundations of Geometry', which had appeared in 1897. Kant's conception of time and space is briefly mentioned; it is not placed in the frame of his philosophic system. The chapter ends by a suggestive summary in which the views of Kant, Russell and Brouwer are compared.

Chapter III starts with an exposition of Brouwer's ideas on the relation of mathematics to logic and language. His main point is that mathematics as a mental construction ought not to be confused with its linguistic expression. Further a severe criticism is directed against Cantor's theory of transfinite numbers, against the logistic of Russell and against Hilbert's formalistic approach. In 1907 Hilbert had not yet given his Beweistheorie its definitive form; in particular he had not made the sharp distinction between mathematics and metamathematics. Brouwer makes this distinction quite clearly at the end of chapter III. It is almost certain that Hilbert was influenced by discussions with Brouwer when he conceived his Beweistheorie of 1922.

Classification of papers. The papers which are collected in this volume can be divided with respect to subject matter into the following groups; of course many papers treat more than one subject.

1. Papers immediately connected with the thesis: 1908 A, 1908 B, 1917.
2. General philosophy and mysticism: 1905, 1908 C, 1929, 1933, 1948 C, 1950C.
3. Significs: 1918 A, 1919C, 1937, 1946A, 1946 B.
4. General considerations and philosophical remarks on intuitionism: 1908 C, 1911, 1912A, 1914, 1928A, 1929, 1933, 1947, 1951, 1952 B, 1954 A.
5. Intuitionistic set theory: 1918B, 1919 A, 1919 D, 1921, 1923 C, 1924 B, 1924 F, 1925 A, 1926 A, 1927 A, 1927 C, 1928 B, 1930A, 1930B, 1942C, 1950A, 1950 B, 1951, 1952C, 1954 A.
6. Intuitionistic analysis: 1923A, 1923 B, 1924A, 1924D, 1924G, 1927B, 1942A, 1942 B, 1954A, 1954B, 1954C, 1954 E, 1954F, I, II.
7. Intuitionistic topology and related subjects: 1925 B, 1926 B, 1926C, 1939, 1952 A, 1952 D, 1954 D.
8. Fundamental theorem of algebra: 1924C, 1924 E.
9. Theory of the creating subject: 1948 A, 1948 B, 1948C, 1949A, 1949B, 1952C, 1952 D, 1954 F.

Evolution of ideas. Brouwer's ideas on several subjects underwent a pronounced evolution which is expressed in consecutive papers on one subject. He did not always state explicitly that he had changed his mind. In order to make this evolution clear, I have inserted all these papers, taking into the bargain some repetitions, and clarifying their connections by a system of cross-references. For the rest the annotation is kept within narrow limits: the centre of gravity had to fall in Brouwer's work itself.

Posthumous papers. The papers denoted below by I, II and III were not published by Brouwer. (I) is an abbreviated account of a proof which Brouwer gave in a course of lectures. (II) is taken from a very provisional draft of a lecture. None of them may be considered as authentic work by Brouwer, but they contain some ideas that are not found in his published papers.

The manuscript of the lectures which Brouwer gave at Cambridge in 1946 cannot be published in this edition. The manuscript is in the hands of Prof. van

Rootselaar, who intends to publish it separately. Some remarks about its contents are contained in III.

Literature. For those who desire a more detailed and systematic exposition of intuitionistic mathematics some monographs are available. I mention: C. G. Gibson (1969); A. Heyting (1951), (1956); S. C. Kleene and R. E. Vesley (1965); G. Kreisel and A. S. Troelstra (1970); A. S. Troelstra (1966), (1968 B), (1969 A), (1969 B).

Practical remarks. Editorial additions are placed in ⟦ ⟧; in particular page numbers in ⟦ ⟧ refer to this volume.

The *bibliography* contains only Brouwer's papers on philosophy and foundations of mathematics. They are ranged approximately in chronological order. Brouwer used to publish the same paper in different languages; in such a case all these versions are mentioned under the year of the first publication and distinguished by numbers 1, 2, 3. The bibliography serves at the same time as a table of contents. The papers after which no page number is mentioned are not reprinted. T before the page number means that a translation of the original paper is printed. References without author's name refer to this bibliography. References with author's name refer to the list of literature at the end of the volume. This list contains only papers which are directly connected with Brouwer's work; excluded are formal intuitionistic logic, metatheory and purely philosophical considerations. I have not aimed at completeness. A bibliography of all Brouwer's scientific works is contained in Volume 2 of this edition. References to this bibliography are given as follows: ⟦Vol. 2, 1909 C⟧.

Acknowledgements. Thanks are due to the Wiskundig Genootschap at Amsterdam for sponsoring the edition, to the Nederlandse Organisatie voor Zuiver Wetenschappelijk Onderzoek for a subvention which made the publication possible, and to the authors and publishers who gave their permission to reprint works for which they held the copyright. Dr. Gibson (Liverpool) did important work by correcting the translations from Dutch into English. Dr. van Stigt (London) persuaded me to insert fragments of Brouwer's first publication (1905); the translation of these fragments is almost entirely his work. Mr. de Rijk assisted me in all the work that had to be done for the publication; his contribution to the result is essential.

A. Heyting

LIFE, ART AND MYSTICISM 1905

Excerpts [[1]]

THE SAD WORLD 7
Originally man lived in isolation; with the support of nature every individual tried to maintain his equilibrium between sinful temptations. This filled the whole of his life, there was no room for interest in others nor for worry about the future; as a result labour did not exist, nor did sorrow, hate, fear or lust. But man was not content, he began to search for power over others and for certainty about the future. In this way the balance was broken, labour became more and more painful to those oppressed and the conspiracy of those in power gradually more and more diabolical. In the end everyone wielded power and suffered suppression at the same time. The old instinct of separation and isolation has survived only in the form of pale envy and jealousy.

As part of the balance of the eternal and omnipresent life everyone is called away 8
from this terrestrial life when his time has come. Until then he will suffer in mind and body as fits his evil mood of thrift, his lust for power, his vanity and fear. In his resentment he then starts tampering with the body through medicines and diets, with the mind through hypnosis and make-belief.

Life to the individual is an illusion, an anxious and laborious pursuit of ends, 9
disillusionment. At the time of his death, which he has awaited unprepared and in complete ignorance, he is either startled by the realization that he has wasted his life or his reason is dulled by the comforting thought that without illusions life would have been nothing at all and that on balance at least he will take with him into his grave a large measure of experience.

TURNING INTO THE SELF 13
Having contemplated the sadness of this world look into yourself. In you there is a consciousness, a consciousness which continually changes its content. Are you master of these changes? You say no, for you find yourself placed in a world which you have not created yourself, you are bewildered by its continuous state of flux.

The content of your consciousness, however, is to a great extent determined by your moods and these are within your power. Is the motto 'Control your passions' only an empty phrase to you? Sometimes you must have experienced that religious feeling of escape from your passions, from fear and desire, from time and space, from the whole world of perception. Finally, you do know that very meaningful phrase 'turn into yourself'. There seems to be a kind of attention which centres round yourself and which to some extent is within your power. What this Self is we cannot further say; we cannot even reason about it, since – as we know – all speaking and reasoning is an attention at a great distance from the Self; we cannot even get near it by reasoning or by words, but only by 'turning into the Self' as it is given to us.

This 'turning into oneself' is accompanied by a feeling of effort, it seems as if some inertia has to be surmounted, that your attention is strongly inclined to linger where it is, and that the resistance felt in the move towards the inner Self is much greater than in the move away from it. If, however, you succeed in overcoming all inertia passions will be silenced, you will feel dead to the old world of perception, to time and space and to all other forms of plurality. Your eyes, no longer blindfolded, will open to a joyful quiescence.

15 Now you will recognize your Free Will, in so far it is free to withdraw from the world of causality and then to remain free, only then obtaining a definite Direction which it will follow freely, reversibly. The phenomena succeed each other in time, bound by causality because your coloured view wants this regularity, but right through the walls of causality 'miracles' glide and flow continually, visible only to the free, the enlightened.

16 ⟦Addressing 'the free, the enlightened':⟧
To you the journey through this sad world is a steady passage in a light and colourful cloud, full of love for all that is simple and direct in it, full of love even for your erring and covetous fellow men, for in your eyes it is no longer a reality completely separate from the Self, but directed from within the Self and with the Self.

With a smile you will look back on the reality of the Sad World, your former illusion, of your own fears and desires, your labour and pain. Your happiness is no longer disturbed, even this is an illusion, the illusion of sadness and memory.

MAN'S FALL CAUSED BY THE INTELLECT 19

Without pain you see mankind cast down by fear and desire, by avarice and lust for power, by time and space, aimlessly wandering without wings, incapable of lifting itself in self-reflection, chained to the spawn of time and space, the Intellect, which has become fossilized in the form of the human head, the symbol of man's fall.

This highly esteemed Intellect has enabled and has forced man to go on living in Desire and Fear, rather than – from a salutary sense of bewilderment – take refuge in self-reflection. Intellect has made him forfeit the staggering independence and directness of each of his rambling images by connecting them with each other rather than with the Self. In this way the Intellect made him persevere in a state of apparent security in a 'reality' which man in his arrogance had made himself, which he had tied to causality, but in which eventually he must feel totally powerless.

In this life of lust and desire the Intellect renders man the diabolical service of connecting two images of the imagination as means and end. Once in the grip ⟦2⟧ of desire for one thing he is made by the Intellect to strive after another as a means to obtain the former.

The act aimed at the means always overshoots the mark to some extent; the 20 means has a direction of its own, at an angle, however small, from the end. It acts not only in the direction of the end, but also in other dimensions. Man's blinkered view prevents him from recognizing the sometimes very detrimental effects of such action, but worse the end is gradually lost sight of and only the means remains.

In this sad world, where a clear view of all human activity is impossible, a world dominated by Drill and Imitation, the other offspring of Fear and Desire, many recognize as an end what was originally only a means. They seek what we might call an end of second order and in so doing may discover a means again out of line with the corresponding end. If this deceptive jump from ends to means is repeated several times, it may happen that a direction is pursued which not only deviates into other dimensions but even opposes the direction of the original end and therefore counteracts it.

Industry originally supplied its products in order to create the most favourable conditions for human life. But one ignored the fact that in manufacturing these products from the resources of nature one interfered with and disturbed the balance of nature and of human conditions, thereby causing damage greater than the advantages of these products could ever justify.

⟦3⟧

21 But worse: manufacturing these industrial goods has become an end in itself, new industries were called into existence merely to supply instruments to facilitate production. Another blow was dealt to the balance of nature. Raw materials were recklessly seized from far away lands, commercial and naval enterprises were created with all their physical and moral misery, all leading to oppression of one people by another.

Now that the Self had been abandoned, the Self that knows all about the past and the future, man grew anxious about the future and craved for the power to predict. Science originates in this desire to predict, in its early stages it is completely subservient to industry. Science asserts generalizing propositions in and about the world of perception; these will come true as long as it pleases God, sometimes they are contradicted by the facts. The scientists then exclaim: 'Yes indeed, but we had made this or that tacit assumption.' In their incompetence they then set about complicating the proposition further and making so called improvements.

Science does not remain confined to serving industry, again the means becomes an end in itself and science is practised for its own sake. A further aberration has been the concentration of all bodily awareness in the human head thereby excluding and ignoring the rest of the body. At the same time man became convinced of his own existence as an individual and that of a separate and independent world of perception. At that stage the full extent of the deviation of human scientific thinking became clear, for scientific thinking is nothing but a fixation of the will within the confines of the human head, a scientific truth no more than an infatuation of desire restricted to the human mind. Every branch of science, as it proceeds, will therefore always run into deeper trouble; when it climbs too high it becomes blindfolded in even more restricted isolation, the remembered results of that science take on an independent existence. The 'foundations' of this branch of science are then investigated and this soon becomes a new branch of science. Then one begins to search for the foundations of science in general and knocks up a 'theory of knowledge'. As they climb higher and higher trouble increases and in the end everyone is thoroughly confused. Some in the end quietly give up. Having through for a long time about the elusive link between the intuiting consciousness – which itself develops from the world of phenomena – and this world of phenomena (which again itself exists only through and in the form of the intuiting consciousness) – a confusion which originated in a sinful foundation of the world of intuition, they then plug the hole with the concept of the Ego which was self-created with and at the same time as the phenomenal world. And then they say, 'Yes, of course, something must remain incomprehensible and that something is the Ego that comprehends.' But there are others who do not know when to stop, who keep on and on until they go mad; they grow bald, shortsighted and fat, their stomachs stop working properly, and moaning with asthma and gastric trouble, they fancy that in this way equilibrium is within reach and almost reached. So much for science, the last flower and ossification of culture.

Death repudiates the whole of this life; it is a violent manifestation of the Self 23
in this limited and self-created world, the unavoidable collapse of the Tower of Babel which man in his vanity had built for himself. This kind of manifestation of the Self, however, also occurs before death, during this restricted life in the various aspects of this system of desire and in the world of perception which the intellect has created itself as the carrier of its infatuations and its independent desires and fears. Here it manifests itself in the voice of conscience, in a nostalgic memory of a Paradise Lost, in a faint belief in happiness as man's rightful heritage, in a hankering after bliss, religious certainty and a life of freedom and dedication. All through this sad world this faint hankering becomes a longing and a yearning for the higher, the transcendental. Conscience, however, when speaking in this restricted world is silenced. Even if it penetrates into the enclaved categories, man's attention is diverted away from it by the strongly felt stimulation and satisfaction of other needs, or it is assimilated, i.e. it is recognized as a need within the closed system and capable of satisfaction in the system. The main function of art and poetry but also of religion is to silence the human conscience by recognizing this need
and by apparent but not real satisfaction. Art and religion in this world are only 25
morphine industries, the yearning for a better life is only lulled into sleep or into a state of torpidity.

....

The medical industry was with barbers and quacks in good hands, practised 27
within the confines of the intellect; as a medical science, it is far less effective.

Even within the closed domain of science, the manifestation of the Self creates needs, and within that system these will be satisfied. Even in science there is a yearning for something higher, but this yearning is then appeased with religious doctrines of revelation, metaphysics, ethics, philosophy of art, spiritualism and theosophy. All this leaves mankind in the sinful bonds of science, of faith in reality and of logical thinking.

....

RECONCILIATION 37

This corrupt world, as you now recognize, only exists because of its very corruption, its deviation from the paths of rectitude. A world of righteousness seems to you as contradictory as your own mortality.

....

In this way you have become reconciled with the erring world and accept its
disconsolateness as natural; moreover, you feel it to be your inexorable karma – [3]

to which you have reconciled yourself and which you must fulfil – to see yourself driven away from the Self, placed in Life where pain and labour, desire and fear are your share and where all truth is veiled.

....

37 LANGUAGE

The immediate companion of the intellect is language. From life in the Intellect follows the impossibility to communicate directly, instinctively, by gesture or looks, or, even more spiritually, through all separation of distance. People then try and train themselves and their offspring in some form of communication by means of crude sounds, laboriously and helplessly, for never has anyone been able to communicate his soul by means of language.

....

Only in those very narrowly delimited domains of the imagination such as the exclusively intellectual sciences – which are completely separated from the world of perception and therefore touch the least upon the essentially human – only there may mutual understanding be sustained for some time and succeed reasonably well. Little confusion is possible about the meaning of such words as 'equal' or 'triangle', but even then two different people will never think of them in exactly the same way. Even in the most restricted sciences, logic and mathematics (a sharp distinction between these two is hardly possible), no two different people will have the same conception of the fundamental notions of which these two sciences are constructed; and yet, they have a common will, and in both there is a small, unimportant part of the brain that forces the attention in a similar way.

....

38 Language becomes ridiculous when one tries to express subtle nuances of will which are not a living reality to the speakers concerned, when for example so-called philosophers or metaphysicians discuss among themselves morality, God, consciousness, immortality or the free will. These people do not even love each other, let alone share the same subtle movements of the soul. Sometimes they do not even know each other personally. They either talk at cross purposes or they each build their own little logical system that lacks any connection with reality. For logic is life in the human brain; it may accompany life outside it: it can never guide it by virtue of its own power.

....

40 Language by itself has no meaning; any philosophy which in this way tried to find a firm foundation has come to grief. Lulled into sleep by the mistaken belief in its certainty one later hits upon deficiencies and contradictions. A language which does not derive its certainty from the human will, which claims to live on

in the 'pure concept' is an absurdity. To be able to go on talking without being caught in contradiction or without making a silent assumption is an art to be valued only in an acrobat.

IMMANENT TRUTH 47

The manifestations of the Self within the bounds and in the forms peculiar to this life are irruptions of Truth. Always and everywhere truth is in the air; to the initiated truth is the same wherever it breaks through.

When it does break through, truth points to a life where the Self has been found again never to be lost anymore, where the earthly shackles are accepted in all humility by man, fully conscious of the inevitable karma of this sad world and his own individual place in it.

And yet, truth itself cannot help to find the Self again; this is only possible beyond the bounds of this world by what mystically may be termed 'divine grace'.

Truth, if it points to the inevitability of the karma of this world, and through all the restless human desires reveals Eternal Justice, pointing to the obvious collision of conflicting and irreconcilable interests and guiding man away from appearances, phantoms created by the desires that imprison him, this truth is Immanent Truth.

Truth which guides in this world towards man's individual life, free from the shackles of fear and desire, towards a life where the wisdom and bliss and the quiet jubilation of Self-reflection flourish in humility, poverty and unassuming performance of man's earthly duties – his own inevitable karma – this truth is Transcendent Truth.

Immanent Truth clarifies, Transcendent Truth makes man devout.

Even in science Immanent Truth breaks through. 60

In science whatever is perceived is placed outside the Self, in a world of perception independent of the Self; the bond with the Self, its only source and guide, is lost. It then constructs a mathematical–logical substratum which is completely alien to life, an illusion, and which acts in life as a Tower of Babel with its confusion of tongues.

But in self-reflection man sees the surrounding world as the karma bearing his own guilt and the confusion in this world caused by his activity and his reason as a reckless and self-inflicted aggravation of this karma.

65 TRANSCENDENT TRUTH

Anyone convinced of the immanent truth of the world of perception, who has understood the inescapable disillusion of all human endeavour and the inevitability of his karma, will be guided by this conviction towards reuniting this world with the Self, towards transcendent truth. Transcendent Truth represents the Kingdom of God in this sad world, Self-reflection for ever emanating and resorbing itself, the confluence of all phantasies, the πάντα ῥεῖ of Heraclite.

It denies the existence of definite phantasies-in-themselves, it abolishes desires and fears and also intellectual opinion – which may be something desirable or something to be feared as is the case when the intellect is still the servant of a hardened will, or it may be something objectively true as is the case when the intellect, living all by itself, has run aground.

In this limited life it may appear as something unreal, a welcome pretext, satisfying man's need to salve his conscience. It may also effectively undermine the systems of this limited life: in this disturbing form it is hated by the world and stubbornly banished; nevertheless it always returns.

66 In language transcendent truth – even less than immanent truth – cannot be revealed without causing an outrage. A clear and true statement, seriously and emphatically pronounced, is no more acceptable than the manifest performance of miracles.

67 In language transcendent truth seems to be the prerogative of imitators who have vaguely understood the words of the prophet and recognized them as truth, but only after watering it down to suit themselves.

68 They will liberate the world of all sorts of vices, stupidity and injustice, and be hailed as the benefactors of mankind but leave mankind as miserable as it was.

72 The advice to get rid of the intellect, 'this gift of the devil' is qualified by some added remark in defence of the viewpoint of the repudiated intellect, such as for example: 'The structure of nature is so infinitely subtle and complex that your intellect will never fully grasp it and so you will never find there the stability you aim for.' For those who relinquish the intellect, however, the world is anything but subtle or complex: it is immediately clear; it appears subtle only to the intellect that struggles laboriously and sees no end to its struggle.

Sometimes only the accompaniment of transcendent truth may be heard in life, 74
truth itself is absent, remains outside this limited life and beyond understanding, its expression seems to be completely removed from life of which it is a part. Returning to his humble earthly duties the 'seer' will steadfastly believe in the sudden flashes of imagination received in self-reflection as the accompaniment of higher wisdom recalling the echo of the guiding voice of Self-reflection. These images are the harmonious result of attention to the Self and work in this world. He who lives in self-reflection, in freedom from fear, desire and knowledge, who does not see nor follow any direction in this world, who only does what he is made to do and in this way guards himself against irreversible actions which only aggravate his karma, who is not affected by outside influences and stands aloof of what happens outside him, who does not grow but quietly maintains his position and at the same time feels free to remain motionless outside the world where he has escaped from his karma, from misery, from growing old, from decay and death, this man will see even the flashes of imagination of others as accompanying the truth in his own life, moving high above the world and detached from the forms of this world.

Those imprisoned in life call this mysticism, they think it obscure, but truly, it is the light that is only darkness to those who are in darkness themselves.

LIBERATED LIFE 83

In this world the Self and Transcendent Truth are also simply reflected in the every-day life of those who are free, of those who expiate their old inevitable karma without creating a new one, who humbly accept their incarceration and never try to break out violently, but who, on the other hand, never hesitate to leave as soon as the gate of liberation has been opened to them.

ECONOMY 95

There is yet another aspect which the Free Life carefully shuns during its association with society: economy. Part of this free life is the absolute conviction that foolishness and injustice are essential in human society; indeed, if human society were better, were ruled by love and fraternity, there would be no reason for its existence, it simply would not exist.

The free see their fellow-men as hallucinations, enticing them to share their own way of life and disturbing the real path of life.

No, the world cannot be transformed so as to bring good to man. The condition 98 of life will remain wretched and life for every individual a misery, only aggravated by his hope and efforts to improve his fate and advance his development. Only in complete surrender and resignation his misery would vanish.

Look at this world, full of wretched people, who imagine that they have possessions, afraid they might lose them, always hopefully toiling in an effort to acquire more; look at people who strive after luxury and wealth, at those whose riches is secured, whose stocks and shares are safely deposited, but who nurture an insatiable appetite for knowledge, power, health, glory and pleasure.

Only he who recognizes that he has nothing, that he cannot possess anything, that absolute certainty is unattainable, who completely resigns himself and sacrifices all, who gives everything, who does not know anything, does not want anything and does not want to know anything, who abandons and neglects everything, he will receive all; to him the world of freedom opens, the world of painless contemplation and of – nothing.

OVER DE GRONDSLAGEN DER WISKUNDE

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. J. ROTGANS, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP DINSDAG 19 FEBRUARI 1907 DES NAMIDDAGS TE 3 URE IN DE AULA DER UNIVERSITEIT

DOOR LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER,
GEBOREN TE OVERSCHIE

MAAS & VAN SUCHTELEN
AMSTERDAM—LEIPZIG. MCMVII.

ON THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

1907

I. THE CONSTRUCTION OF MATHEMATICS

Arithmetic of integers 3

'One, two, three, ...', we know by heart the sequence of these sounds (spoken ordinal numbers) as an endless row, that is to say, continuing for ever according to a law, known as being fixed.

Besides this sequence of sound-images we possess other sequences proceeding according to a fixed law, for instance the sequence of the written signs (written ordinal numbers) 1, 2, 3, ...

These things are intuitively clear.

Let me now stop the sequence, e.g. at 23, and let me copy beneath it the same interrupted sequence; then there exists a one-to-one correspondence between the two sequences. If I interchange two of the numbers in the upper sequence, the one-to-one correspondence persists. By such interchanges I can obtain a correspondence between a definite element of the first sequence and the element 1
of the second sequence; then a correspondence between a definite element from 4
the remaining elements of the first sequence and the element 2 of the second sequence, etc. In other words, I can introduce an 'arbitrary order' in the elements of the first sequence, but the sequence of ordinals in the second row corresponding to it remains the same. It follows that any fixed set of signs, once counted, will produce the same 'natural number' if it is counted in a different order, that is to say, the sequence of ordinal numbers to which it is brought into a one-to-one correspondence, will be interrupted at the same number (Fundamental Theorem [[1]]
of Arithmetic).

By $3+4$ I mean the following: First count up to 3, then count on, but let the elements after 3 correspond one-to-one with the sequence of ordinals 1 ... 4. It follows from the fundamental theorem of arithmetic: $3+4 = 4+3$ [1]). Likewise $(3+4)+5 = 3+(4+5)$.

By 9×4 I mean: Count up to 4, write 1 on another line, add 4 on the first line 5
(the operation '$+4$' described above), write 2 on the second line, etc., till 9 has been written on the second line. By 9×4 I mean then the last number on the first line. By applying the fundamental theorem of arithmetic it is easy to deduce:

$9\times 4 = 4\times 9; \qquad (9\times 4)\times 5 = 9\times(4\times 5);$

$9\times(4+5) = (9\times 4)+(9\times 5).$

By 4^5 I mean: First count up to 4, then write on another line the figure 1; [[2]]

[1]) Indeed, $3+4$ leads to 1–2–3–4–5–6–7, where 4–5–6–7 corresponds one-to-one with 1–2–3–4. By permutation I obtain 4–5–6–7–1–2–3. Here 4–5–6–7 still corresponds with 1–2–3–4 and 1–2–3 with itself. Consequently the whole sequence corresponds one-to-one with that obtained by counting off $4+3$.

perform the operation '$4\times$' described above and write the figure 2 on the second line; repeat that operation and write the figure 3, and continue until the figure 5 has been written on the second line. By 4^5 we mean the last number written on the first line.

Negative numbers

Now we can continue the sequence of ordinal numbers to the left by 0, -1, -2, etc., define the addition of integers by counting in two directions, and from this subtraction and multiplication by a positive number; thereupon the operation $-(\ )$ can be introduced and we can prove that this operation commutes with multiplication. From this fact we obtain the definition and the properties of multiplication by a negative number.

Rational numbers

By a rational number we mean a pair of ordinal numbers written in the form $\frac{a}{b}$, wherein we can always take care, by putting $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$, that the second number, the 'denominator', is positive. We order them by putting $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{c}{d}$ if $(a\times d) \gtreqless (b\times c)$
6 and insert them between the ordinal numbers by putting $\frac{a}{1} = a$. By $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ we mean $\frac{ad+bc}{bd}$; by $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ we mean $\frac{ac}{bd}$. The commutative, associative and distributive properties are now easily proved; it also follows easily, if we define '$-$' and ':' in the well-known way from '$+$' and '$\times$', that $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ and that $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Irrational numbers

Next we can introduce successively the usual irrationals (first of all the expressions containing fractional exponents) by writing them as symbolic aggregates of previously introduced numbers [1]) and then looking upon each of these as defining a partition of the earlier introduced numbers into two classes, of which the second follows as a whole after the first and has no first element [2]); the ordering relation (that is to say the condition for $\gtreqless$) of the newly introduced numbers
[3] between the old ones is then defined on the basis of this partition; likewise the

[1]) Thus, for instance, a root of an algebraic equation will be read as a symbolic aggregate of its coefficients, completed by a number which orders the roots e.g. first after their absolute value and, in the case of equal absolute values, after the argument.

[2]) while in some cases the first class may have one of the previously introduced elements as its last element (like 2 in the case of $4^{\frac{1}{2}}$).

[16]

operations with the new numbers, which in their turn may give rise to new num- 7
bers, and finally the numbers introduced earlier are brought into one-to-one correspondence with part of the new symbols, viz. with those which in the old numbers determined a lower class with a last element. The symbolic aggregates which have been introduced can contain any finite number of previously introduced numbers. This implies that at each stage of development of the theory the set of the numbers known remains denumerable [1]). Indeed, a denumerable set of denumerable sets is denumerable, as Cantor established by a simple argument (Journ. Math. 84 (1878), p. 243 ⟦Ges. Abh. p. 120⟧).

Further the set of numbers which have been introduced at any stage in the development of the theory, has the property of being *everywhere dense in itself*, this means that between any two of them there are other elements [2]). Consequently, according to Cantor (Math. Annalen 46 (1895), p. 481–512 ⟦Ges. Abh. p. 282–351⟧) it has the order type η, that is, it can be mapped on the system of 8
the rationals by an orderpreserving mapping.

It would not be difficult to introduce the new numbers in such a way that the order type η would not be obtained – we shall see examples of this when we shall build up geometry – but it is done in the way indicated above for reasons of efficiency, connected with the creation of the *measurable continuum*, which we shall now take into consideration.

The continuum

In the following chapters we shall go further into the basic intuition of mathematics (and of every intellectual activity) as the substratum, divested of all quality, of any perception of change, a unity of continuity and discreteness, a possibility of thinking together several entities, connected by a 'between', which is never exhausted by the insertion of new entities. Since continuity and discreteness occur as inseparable complements, both having equal rights and being equally clear, it is impossible to avoid one of them as a primitive entity, trying to construe it from the other one, the latter being put forward as self-sufficient; in fact it is impossible to consider it as self-sufficient. Having recognised that the intuition of continuity, of 'fluidity', is as primitive as that of several things conceived as forming together a unit, the latter being at the basis of every mathema- 9
tical construction, we are able to state properties of the continuum as a 'matrix
of points to be thought of as a whole'. ⟦4⟧

First of all, there is neither a first nor a last point; it is easy to construct on the continuum a sequence of points having the order type of the positive and negative

[1]) that is to say, it can be brought into uniform correspondence with the sequence of the real numbers.

[2]) In particular between any two of them there is an infinity of rational numbers, a property which we express by saying that the system of the rationals is *relatively dense* in the set of the numbers introduced at that stage.

whole numbers; if we add a point in every interval, then again in each of the intervals so obtained, and so on, we obtain the order type η on the continuum, which in this way comes to correspond with the system of finite dual fractions [1]), but we might read it as well as one of the dense systems of numbers introduced above; now we see immediately that on the continuum there are still points which have not been reached by a finite number of the operations described above, each being the insertion of a point in every interval [2]); for we can, having fixed a point P, take care to avoid it in the construction of the scale. We can even arrange the construction in such a way that the approximation of the point by an infinite dual
10 fraction is given by an arbitrarily given law of progression, though the continuum with the scale constructed in this way differs in no respect from a continuum on which the scale is constructed in complete freedom. Conversely we see that for any scale which has been constructed on the continuum, there exists a point corresponding to any conceivable law of progression.

However, we can never consider the approximating sequence of a *given definite* point as being *completed*, so we must consider it as partly unknown.

From the fact that every conceivable approximating sequence occurs it can be deduced, following Cantor (Jber. Deutsch. Math.-Ver. 1 (1890–91), p. 77 ⟦Ges. Abh. p. 278–280⟧; compare Schoenflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten I, Jber. Deutsch. Math.-Ver. 8, part 2, Leipzig 1909, p. 20) that it is impossible to enumerate all the points of the continuum, i.e. there are points lying outside any denumerable set of points (whereas we have seen that the system of *constructed* numbers, which likewise can be approximated by a finite or infinite dual fraction, remains denumerable at every stage of the theory).

The measurable continuum

If we construct the dual scale arbitrarily, then it is not certain that it will be everywhere dense, i.e. that it will penetrate into every segment of the continuum. But we agree to contract every segment not penetrated by the scale into one point, in other words, we consider two points as different only when their approximating
11 dual fractions differ after a finite number of digits. Finally, if we take some point on the constructed scale as the zero point, then the scale has made the continuum into a *measurable continuum.* From the measurability we conclude that every denumerably infinite set of points, lying in the segment determined by two points as its endpoints, has at least one limit point, i.e. at least one point such that on at least one of its sides in every segment contiguous to it there are other points of

[1]) i.e. the fractions written in the dual system, in which before and after the point no other digits than 0 and 1 occur.

[2]) We may call this operation the 'bisection' of the intervals.

the set [1]). (For otherwise there would be a shortest distance between points and this could be held only a finite number of times in the finite segment.) [[5]]
12

The translation

We proceed to consider point transformations on the measurable continuum, and we start with the *translation*, which we denote by $+a$, a being the point into which the zero point is transformed. This notion is immediately clear in virtue of the scale, and we see that these operations form a *group* (this is a consequence of the associative property of addition) and also that it is commutative (this means that $a+b = b+a$, i.e. the operation $+b$ applied to a gives the same result as the operation $+a$ applied to b). [2]) [[8]]

The following properties hold for this group:

1°. It is a *one-parameter continuous* group, i.e. its transformations can be arranged in a linear continuum in such a way that, if a point moves continuously in this image-continuum, then the corresponding transformations bring about simultaneous continuous movements for the points of the continuum to which they are applied.

2°. It is *uniform*, that is: every transformation maps any two different points to different points. 13

3°. It is *closed*, that is: if $A_1, A_2, A_3 \ldots$ is a denumerably infinite sequence of points having A as a limit point on the measurable continuum, and if likewise $B_1, B_2, B_3 \ldots$ is a denumerably infinite sequence of points having B as a limit point, while there is a transformation in the group which maps the pair of points A_1B_1 to A_2B_2, likewise a transformation which maps A_1B_1 to A_3B_3, and so on, then there is a transformation which maps A_1B_1 to AB.

Definition of addition on the continuum in terms of a group

Let there now be given an arbitrary group of transformations on the measurable continuum, having the 3 properties mentioned above, thus being one-parameter

[1]) By constructing on an open interval between two points of the continuum a sequence of points having the order type of the positive and negative whole numbers, and approaching indefinitely, according to the measure of the dual scale, the endpoints of the interval, and by constructing in this sequence a new dual scale, penetrating into every subinterval of the given interval, we show that this interval, considered as a matrix of points, is equivalent to the whole continuum; both of them form a so-called *open continuum*. [[6]]

Starting from here we can construct as follows the *closed continuum*. $\alpha \quad \gamma \overset{P}{\cdot} \delta \quad \beta$ Any point P on an open continuum $\alpha\beta$ has to its left and to its right two new open continua $\alpha\gamma$ and $\delta\beta$. Conversely, out of two open continua $\alpha\gamma$ and $\delta\beta$ we construct a new open continuum $\alpha\beta$ coupling them together by means of a single point P. But now we can repeat this operation analogously by coupling together α and β, inserting a single point; thus we obtain a closed continuum. [[7]]

[2]) For points of the constructed scale commutativity is a consequence of the fact that addition of rational numbers is commutative; for points a and b not on the scale $a+b$ and $b+a$ give the same sequence of approximating points of the scale, and their equality follows then from the measurability of the continuum.

continuous, uniform and closed. Then we can derive the following further properties.

4°. The order of the points must remain unchanged by every transformation, for otherwise two points whose order is reversed would have met on their continuous paths and uniformity would be disturbed.

5°. Two different points cannot be brought arbitrarily near to each other by transformations in the group. For then, because the group is closed, they could be mapped together on a common limitpoint, and this contradicts uniformity.

6°. The image of a limitpoint of a sequence of points is a limitpoint of the
14 image of the sequence. For if we select from the first sequence a subsequence p in which each point is to the right (resp. to the left) of the preceding point, and which approximates in this way the limitpoint P, then this sequence is mapped to a denumerably infinite sequence q, in which each point is to the right (to the left) of the preceding one. Let Q be the image of P, then there is no point between Q and all the points q, because there is no point between P and all the points p, so Q is limitpoint of q.

Now let us choose some point as the zero point. We start with a transformation in the group which maps the point 0 to the point a and denote this transformation by '$+a$'. Further we denote the image of a by $2a$, the image of $2a$ by $3a$, etc. The transformation now determines a uniform correspondence between the segments constructed in this way.

Somewhere between the point 0 and the point a there must be a point b such that the transformation that carries 0 to b, carries b to a, so that the operation '$+b$', when applied twice in succession, is equivalent with the operation '$+a$'. We put $b = \frac{1}{2}a$ and the corresponding points in the further segments between na and $(n+1)a$ analogously $= \frac{3}{2}a, \frac{5}{2}a$, etc. The continuum is now divided into
15 segments $= b = \frac{1}{2}a$, and the points of all these segments are in uniform correspondence.

Continuing in this way, we construct from the operation '$+c$' which, when applied twice in succession, is equivalent with '$+b$', a division of the continuum into segments $= c = \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}a$, and finally we obtain a complete dense dual scale on the continuum, which has the following properties:

a. It has neither to the left nor to the right a limiting point; for otherwise the points a, $2a$, $3a$, etc. would have a limitpoint, and the points a and $2a$ could be brought arbitrarily near to each other in the neighbourhood of that limitpoint, which contradicts the property mentioned under 5°.

b. It is dense on the measurable continuum, that is to say it penetrates every segment of the measurable continuum. For, to begin with, it is clear that the scale possesses arbitrarily small segments; suppose now that there were on the measurable continuum a segment in which the scale did not penetrate, then we could choose in that segment two points A and B, and for any segment of the scale there would be transformations mapping those two points to points of that segment; as there exist arbitrarily small segments of the scale, A and B could be brought arbitrarily near to each other, again in contradiction to property 5°.

It follows from the properties a) and b) that the scale, belonging to the group, has made the continuum measurable in a new way, leading to the property: 16

7°. The group is commutative.

Finally we remark that by repetition of an arbitrary continuously applied transformation from the group *any* transformation from the group will be passed; we express this fact by

8°. The group parameter is measurable.

Thus we have seen that a continuum, once it is known to be measurable, can be measured in an unlimited number of ways, for to every one-parameter continuous, uniform, closed group there corresponds a measure; conversely to every measure there corresponds a one-parameter continuous, uniform, closed group.

If we leave out condition 3° for the group, then also property 5° lapses. It is still possible to construct a dense scale corresponding to the group, but the properties a) and b) can no longer be proved by the method indicated above, nor can the properties 7° and 8° for the group. However, let us consider more closely such a scale, dense in itself, but not satisfying property b).

We see then that, while in the corresponding group a point of the continuum moves inside a free interval, the limit points of the scale remain invariant. Thus we have transformations which, even repeated indefinitely, leave some points invariant, which do move by other transformations; repetition of continuous 17
transformations of the first kind never yields a transformation on the other side of a transformation of the second kind. We express this phenomenon by calling the group *non-measurable* or *non-Archimedean.* But further we find in this group transformations which map the whole free interval to a single limiting point of the scale, thus the group is not uniform. It follows that property b) of the scale is a consequence of the properties 1° and 2° of the group.

Things are different for property a). For the group of translations corresponding to a dense scale on the continuum, which is bounded to the left or to the right or on both sides by a limiting point, is one-parameter continuous in the domain of the scale. Only we must remark that the points in the domain can overstep the boundary points by no transformation of the group and that the boundary points themselves are invariant. We see further that properties 3° (closure) and 5° hold for the domain of the scale, provided we exclude explicitly the boundary points, for there it does happen that two different points become arbitrarily near to each other, while there is no transformation of the group which transforms both into the boundary point.

The points outside the domain of the scale can remain invariant by the group, 18
or can be transformed inside domains of other scales, separated by invariant boundary points. Thus the group determines on the measurable continuum a finite or infinite sequence of contiguous intervals, each of which is either ⟦point-

wise]] invariant or is transformed according to a one-parameter continuous group, closed outside the boundary points.

The invariant boundary points of the segments are called the *fixed points* of the group.

The group is commutative in every segment between two fixed points, and the group parameter is measurable. (Both properties follow from the density of the scales.)

Summarizing, we have stipulated that certain groups on the continuum are

1° one-parameter continuous,

2° uniform,

and we have deduced for every such group the further properties:

3° it divides the continuum in finite intervals of which the boundary points,
[[9]] the fixed points of the group, are invariant, and each of which is either transformed by a one-parameter uniform group without fixed points, or is [[pointwise]] invariant.

19 4° The order of the points of the continuum remains unchanged by the transformations of the group.

5° The group is closed outside its fixed points.

6° Outside the fixed points two different points cannot be brought arbitrarily near to each other.

7° A limitpoint of a sequence of points is transformed by every transformation of the group into the limitpoint of the transformed sequence.

8° On an interval between two fixed points, which is not [[pointwise]] invariant, the group defines a dense scale [[after the choice of the points 0 and 1]].

9° The group is commutative.

10° The group parameter is measurable.

Thus, having previously characterized the *group of additions on the open continuum* as a one-parameter continuous uniform closed group on the measurable continuum, we can now give a more ample characterization as a one-parameter uniform group on the measurable continuum, restricted to the domain between two of its fixed points. – Now one can consider these fixed points, being the endpoints of the domain of the group, as coinciding points, thus obtaining the *operation of addition on the closed continuum*; the locking-point, arising from the coinciding boundary points, is called the *point at infinity* of the group. (In order to map the transformations of the group on the points of its domain, we have introduced another special point, the *zero point*, which however does not, like
20 the point at infinity, play a special part for the group itself.)

With respect to a given scale an arbitrary one-parameter continuous uniform group can be very complicated, but on its own scale, as we have constructed it from the group, it is represented on every interval, bounded by two successive fixed points, by the group of additions. Let us consider, for instance, the group

[[22]]

of multiplications on a given scale [1]); it has the point 0 as a fixed point, so it has two separate domains, namely between $-\infty$ and 0 and between 0 and $+\infty$; its own scale coincides on the latter domain with the scale of $\log x$, on the former with that of $\log(-x)$; on its own scale the group is in either domain the group of additions.

Definition of multiplication on the continuum in terms of a group

We now intend to find the most general set of two one-parameter continuous uniform groups that can be combined to a two-parameter continuous group [2]), and to represent this group as simply as possible on a special scale. First of all we remark that, no matter how the fixed points of the component one-parameter groups are distributed, we can divide the continuum in segments, each bounded 21
by two fixed points of one of the groups, and containing at most one fixed point of the other group. We investigate the construction of the two-parameter group in each of these segments. The most general two-parameter group consists of a juxtaposition of such segments, each having a two-parameter group with the structure described below. We choose the scale on the segment to be that of the one-parameter group which has the endpoints of the segment as its fixed points; with respect to this scale our group is the complete group of additions, and its domain with respect to an arbitrarily chosen unity of the scale extends from $-\infty$ to $+\infty$. Let us take this domain as the X-axis in a Cartesian coordinate system, and assign to each point of this axis its increment by some transformation of the second group as a Y-coordinate; then the transformations of the second group will be represented by a system of curves which, apart from a possible common intersection with the X-axis (the possible fixed point of the second group) are disjoint. We write the equations of these curves as:

$$y = f_\alpha(x), \qquad [\![10]\!]$$

and our condition amounts to stipulating that an arbitrary sequence of transformations, each belonging to one of the two groups, can be replaced by one transformation of the second group, followed by one transformation of the first 22
group, so that it can be represented by

$$x' = x + f_\alpha(x) + \beta.$$

We choose as the origin some point on the X-axis, and consider the case when the group under consideration has no fixed point, so that the curves $y = f_\alpha(x)$ are disjoint. If one chooses the group-parameter in such a way that the curve $y = f_\alpha(x)$ intersects the Y-axis in the point $(0, \alpha)$, the curve $y = f_\alpha(x) - \alpha$ passes through the origin. Now we know that the result of applying successively two transformations giving respectively the increments $f_\gamma(x) - \gamma$ and $f_\delta(x) - \delta$ is a

[1]) i.e. the group of operations of multiplication by a positive number.

[2]) i.e. a group whose transformations are determined by two continuous parameters.

transformation giving the increment $f_\zeta(x)+\sigma$; but this must be 0 for $x = 0$, so it can be nothing else but $f_\zeta(x)-\zeta$.

In other words, the transformations $x' = x+f_\alpha(x)-\alpha$ form a one-parameter continuous group which, as well as that represented by $x' = x+f_\alpha(x)$, is uniform, and which can be combined with $x' = x+\alpha$ to the same two-parameter group as $x' = x+f_\alpha(x)$. But now the group $x' = x+f_\alpha(x)-\alpha$ has a fixed point. Thus the case when the second group has no fixed point between two consecutive fixed points of the first group, has been reduced to the case when it possesses one such point, and we need only consider this latter case.

23 We choose the origin as the fixed point on the X-axis; now the increment functions $f_\alpha(x)$ intersect in 0 and have no other point in common. Our object is to prove that these functions are differentiable.

Let us denote by ${}_\alpha\varphi_\Delta(x)$ the increment of the function $f_\alpha(x)$ between the abscissae x and $x+\Delta$. As $f_\alpha(x)$ is continuous, so too ${}_\alpha\varphi_\Delta(x)$. Let us suppose that ${}_\alpha\varphi_\Delta(x)$ assumes equal values for two different values of x, say x_1 and x_1+p.

In that case the system consisting of the curves $y = f_\alpha(x)+\beta$ and $y = f_\alpha(x+p)$ would contain two curves which intersect for $x = x_1$ and for $x = x_1+\Delta$, so the system, consisting of the curves $y = f_\alpha(x+x_1)+\beta$ and $y = f_\alpha(x+x_1+p)$, would contain two curves which intersect for $x = 0$ and for $x = \Delta$. But this system is contained in the system of curves $y = f_\alpha(x)+\beta$, and in this system two curves which intersect for $x = 0$, cannot intersect again – unless they are the same curve. This would mean for the original curve $y = f_\alpha(x)$ that its path from $x = x_1$ on would be homothetic to its path from $x = x_1+p$ on, in other words it would have a periodically homothetic path with period p. Then we have ${}_\alpha\varphi_p(x_1+k) = {}_\alpha\varphi_p(x_1)$ for any value of k, and this results in a periodically homothetic path with period
24 k in the same way as ${}_\alpha\varphi_\Delta(x_1+p) = {}_\alpha\varphi_\Delta(x_1)$ entailed a periodically homothetic path with period p. But if $y = f_\alpha(x)$ has a periodically homothetic path for any period whatever, then it is necessarily a straight line, and certainly a differentiable curve.

We are now sure that, if the curve $y = f_\alpha(x)$ is not a straight line, then ${}_\alpha\varphi_\Delta(x)$ cannot assume twice the same value. So for given α and Δ this function must either always increase or always decrease, and it is immediately clear that, for a given α, it either increases for every Δ or it decreases for every Δ. (For if it increases for Δ, then also for $\frac{1}{2}\Delta$, $\frac{1}{4}\Delta$, etc., and also for 2Δ, 3Δ, etc.) Let us denote the difference quotients of $f_\alpha(x)$ between 0 and Δ, Δ and 2Δ, 2Δ and 3Δ etc. respectively by ${}_1Z$, ${}_2Z$, ${}_3Z$, etc.; then those between 0 and $\frac{1}{2}\Delta$, $\frac{1}{2}\Delta$ and Δ, Δ and $1\frac{1}{2}\Delta$ etc. by ${}_1Z_0$, ${}_1Z_1$, ${}_2Z_0$, etc.; then those between 0 and $\frac{1}{4}\Delta$, $\frac{1}{4}\Delta$ and $\frac{1}{2}\Delta$, $\frac{1}{2}\Delta$ and $\frac{3}{4}\Delta$, etc. by ${}_1Z_{00}$, ${}_1Z_{01}$, ${}_1Z_{10}$, ${}_1Z_{11}$, ${}_2Z_{00}$, etc.; in this way we obtain an arbitrary number of indices behind the Z, and we know that if ${}_aZ_p$ and ${}_aZ_q$ have the same number of indices, and if the endpoint of the interval of ${}_aZ_p$ is the starting point of that of ${}_aZ_q$, then ${}_aZ_q$, ${}_aZ_{q0}$, ${}_aZ_{q00}$ etc. will decrease, but remain greater than ${}_aZ_p$; likewise ${}_aZ_p$, ${}_aZ_{p1}$, ${}_aZ_{p11}$, ${}_aZ_{p111}$ etc. increase, but remain less

than ${}_aZ_q$. Therefore the first sequence has a lower limit to which it tends and the latter sequence has an upper limit. That establishes the existence of a derivative at every point for $y = f_\alpha(x)$, but it has not been established that the derivatives on 25
the left and on the right cannot be different.

However this is not necessary for our purpose, for the sheer existence of the derivatives allows us, in the case of our problem, namely the investigation of the most general two-parameter continuous uniform group, to apply the fundamental formula of LIE [1]) which for a two-parameter differentiable group takes the form:

$$\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2 - \varphi_2 \mathrm{d}\varphi_1 = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2,$$

where φ_1 and φ_2 denote the increments by very small transformations from the two generating one-parameter groups. To begin with, let us assume that $c_2 = 0$, so that we have

$$\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2 - \varphi_2 \mathrm{d}\varphi_1 = c_1 \varphi_1. \tag{1}$$

If we determine the points of the continuum between two successive fixed points of the group φ_1 by a coordinate x, measured on the scale of φ_1, then we can write:

$$\varphi_1 = \varepsilon_1,$$

and for φ_2 we obtain the differential equation:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}x} = \varepsilon_2$$

$$\varphi_2 = \varepsilon_2(x+h),$$

so that we find as the finite group with c as group parameter: 26

$$(x'+h) = c(x+h),$$

and the combined two-parameter group becomes:

$$x' = c_1 x + c_2.$$

In this way we have completed the one-parameter group to a two-parameter one by reading it as the group of additions on a scale, and afterwards taking for the two-parameter group that of addition and multiplication, combined on that scale. And we obtained for the second one-parameter group, to be combined with the first one, the group of multiplications on that scale with respect to an arbitrary zero point.

Next suppose that c_2 is not 0, then we can put $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = \varphi_3$, and between φ_1 and φ_3 we find the relation:

$$\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_3 - \varphi_3 \mathrm{d}\varphi_1 = c_2 \varphi_3 \tag{2}$$

[1]) cf. Math. Ann. 8 (1875) p. 103; Göttinger Nachr. 1874, p. 529–542; Theorie der Transformationsgruppen I, p. 150.

or, working again on the scale of φ_1,

$$\frac{d\varphi_3}{dx} = k\varphi_3; \quad \varphi_3 = \varepsilon e^{kx}; \quad \varphi_2 = \varepsilon_1 e^{kx} + \varepsilon_2 .$$

Thus by the transformation φ_2, x suffers an increment of

$$dx = \varepsilon_1 e^{kx} + \varepsilon_2 ,$$

and e^{-kx} suffers an increment of:

$$d(e^{-kx}) = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 e^{-kx},$$

27 so that, if we put $e^{-kx} = \xi$, and if we work in the scale of the translation group of ξ:

either $\quad \varphi_2(\xi) = \varepsilon_4(\xi + h) \quad$ or $\quad \varphi_2(\xi) = \varepsilon_3$,

which gives as the finite group:

either $\quad \xi' + h = c(\xi + h) \quad$ or $\quad \xi' = \xi + c.$

The original one-parameter group becomes in the scale of ξ:

$$\xi' = c\xi,$$

and the combined two-parameter group becomes:

$$\xi' = c_1\xi + c_2 .$$

We might also have gathered directly from equation (2) that, working on the scale of φ_3, we find for φ_1 a multiplication-group, consequently for φ_2 one of the groups:

$$(x' + h) = c(x + h).$$

In this way we have completed the one-parameter group to a two-parameter one by reading it as 'multiplication-group between the points 0 and ∞' of a scale (i.e. by taking the scale of e^{-kx} if x is the scale of the group as a group of additions [1])) and afterwards taking as the two-parameter group that of addition and
28 multiplication combined on that scale. The second component one-parameter group is either the group of additions on that scale, or the multiplication-group with a zero-point (i.e. fixed point) different from the zero-point of the first group. The completion can take place in different ways, depending upon the value of k; to every completion there corresponds a scale which plays the part of the group of additions in the two-parameter group, and by the choice of the scale of the

[1]) Properly speaking, we obtain the 'multiplication-group between 0 and ∞' only for negative k; if k is positive we find $\xi = \infty$ for $x = -\infty$; as in this case, in order to have an increasing scale for x, we prefer to use the scale of $-e^{-kx}$ instead of that of e^{-kx}, we obtain our original group as 'multiplication-group between $-\infty$ and 0'.

group of additions it is determined how the group will be completed. Also the chosen group of additions is the only one with respect to which *both* the one-parameter groups which occur as the components of the two-parameter group, and consequently also the two-parameter group itself, play the part of *similarity transformations* [1]); in particular the two-parameter group is with respect to that scale the group of all the similarity transformations, and by the two-parameter group as a group of similarity transformations the scale on the whole domain in question is determined.

Further we have remarked that in this case one of the bounding fixed points of the original one-parameter group remains a fixed point for the two-parameter group, but the other does not; the second component one-parameter group has within the domain of the original group one or no fixed point.

Let us now consider again the two one-parameter groups which could be 29
combined into one two-parameter group, extended over the whole continuum, as we originally imagined them; let us denote by P_α the fixed points for *both* groups, which consequently are fixed points as well for the two-parameter group which is combined from them, by Q_α those of the first and by R_α those of the second group. Any two points Q, and likewise any two points R, will be separated by at least one point P; in other words, between two points P there can be at most one point Q and one point R.

Next we consider the domain between two consecutive points P, P_1 and P_2 say; and we imagine between them a point Q and a point R.

$$P_1 \quad Q \quad R \quad P_2$$

If then we apply the last results on the domain between two consecutive fixed points of one of the component groups in turn to the domain QP_2 and to the domain P_1R, we find:

Between Q and P_2 there is a scale, bounded in Q [2]) but unbounded towards P_2; the first component one-parameter group consists of the similarity transformations of this scale with Q as their fixed point, the second consists of the similarity transformations with R as their fixed point; the resulting two-parameter 30
group consists of *all* similarity transformations. The part of the scale between Q and R is the only scale between Q and R with respect to which the two-parameter group can play the part of a similarity group.

Also between P_1 and R there is a scale, bounded in R, but unbounded towards P_1; the first component one-parameter group consists of the similarity transformations on that scale with Q as their fixed point; the second consists of the similarity transformations with R as their fixed point; the resulting two-parameter group consists of *all* similarity transformations. The part of the scale between Q

[1]) By this we understand: both with invariant proportions and the same orientation.

[2]) For concision we call a scale bounded in a point when that point can be reached according to the translation group built on that scale.

and R is the only scale between Q and R, with respect to which the two-parameter group plays the part of a similarity group. Thus the part of *this* scale between Q and R is identical with the part between Q and R of the scale considered above, so that we can say now:

Between P_1 and P_2 there exists a scale, unbounded in both directions; the first component one-parameter group consists of the similarity transformations with Q as their fixed point (group of multiplications with Q as zero); the second consists of the similarity transformations with R as their fixed point (group of multiplications with R as zero). The resulting two-parameter group is the similarity group (or combined group of multiplication and addition).

31 Let us now suppose that between P_1 and P_2 there is only a point R, but no point Q; this happens only in our first way of completing a one-parameter group to a two-parameter one, namely where we consider the first one-parameter group as a group of additions between two consecutive of its fixed points, and where we choose as the second one-parameter group the group of multiplications with an arbitrary zero; again the two-parameter group becomes the similarity group on the scale constructed between P_1 and P_2.

Finally it is impossible that between P_1 and P_2 there is neither a point Q, nor a point R, for we have seen that between consecutive fixed points of a one-parameter group we cannot add a further one-parameter group to yield a two-parameter group conserving the two fixed points without having another fixed point between them.

We have now deduced the following results about two one-parameter continuous uniform groups, on the measurable continuum, which can be combined to a two-parameter group:

On the measurable continuum there is a finite or an infinite sequence of contiguous finite segments, the boundary points of which are invariant for the two-parameter group and are called *fixed points* of the two-parameter group. On each
32 of these segments there can be constructed a dense scale, unbounded on both sides, so that each component one-parameter group plays one of the following parts on each segment:

either it leaves the segment ⟦pointwise⟧ invariant,

or it plays there the part of a group of additions,

or it plays there the part of a multiplication group with an arbitrary zero point.

Generally speaking, the same one-parameter group will play different parts in different segments.

The resulting two-parameter group will, in general, play in each segment the part of a similarity group, but there may be certain segments where it is reduced to a one-parameter group (which then can be read as a group of additions) or which it leaves ⟦pointwise⟧ invariant.

On a given scale an arbitrary two-parameter continuous uniform group can be very complicated, but on its own scale, which can always be constructed from the group, it is represented on each segment, bounded by consecutive fixed points, by the group of additions and multiplications.

The object of the foregoing development was to define the operations of addition and multiplication on the complete measurable continuum as follows (meaning by multiplication only that by a positive factor):

Operation of addition on the complete measurable continuum:

One-parameter continuous uniform group on the measurable continuum 33
between two consecutive fixed points.

Operation of multiplication on the complete measurable continuum:

One-parameter continuous uniform group between the same fixed points as the preceding one, which can be combined with it to a two-parameter group.

We can also start by defining the combination of addition and multiplication as the two-parameter continuous uniform group on the measurable continuum between two consecutive fixed points, then addition either as the only one-parameter subgroup without fixed point in that domain, or as the only invariant subgroup, and multiplication as any other one-parameter subgroup. [1])

Redundant part of the distributive property

This group-theoretical definition of the arithmetical operations on the measurable continuum shows that, in the axiomatic definition of these operations, after the associative and commutative properties of addition and of multiplication have been given, the complete distributive property is no longer necessary in order to
define completely the operations. For if we denote the operation of addition by 34
f_α, that of multiplication by φ_α, then the distributive property affirms that

$$\varphi_\alpha\{f_\beta\} = f_{\varphi_\alpha(\beta)}\{\varphi_\alpha\},$$

while we have shown that the following condition is sufficient:

$$\varphi_\alpha\{f_\beta\} = f_\gamma\{\varphi_\delta\}.$$

Inversion of sign and multiplication by a negative factor

If we add now the transformation $x' = -x$, we see that it can be associated with the group of additions; the result is still a one-parameter uniform group, but with a discontinuity in the group-parameter. Likewise it can be associated with the group of multiplications, giving a group of multiplications by a positive or negative factor, which is also a uniform one-parameter group with a discontinuity; and finally also the combined two-parameter group can be doubled by it over a discontinuity. [2])

[1]) On the *closed continuum* we can make both bounding fixed points coincide; thus the group of addition and multiplication can also be understood as the general two-parameter continuous uniform group on the closed measurable continuum with only one fixed point.

[2]) This means here for a two-parameter group: a line of discontinuity in the parameter plane.

Taking the inverse. The projective group

Let us now add the transformation $x' = \frac{1}{x}$; it can be associated with the complete group of multiplications, giving a uniform one-parameter group with a new discontinuity; and with the complete two-parameter similarity group, giving
35 a uniform three-parameter group, the so-called *projective group*, of the transformations $x' = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. [1])

LIE has proved for differentiable transformations that there exists only one construction for a three-parameter continuous group on the measurable continuum, namely the projective group. Above it has been proved independently of the differentiability that there exists only one construction for a one-parameter, respectively a two-parameter continuous uniform group; it is left here as a problem to relax the condition of differentiability for the three-parameter group as well. [2]) ⟦Brouwer solved this problem in Math. Annalen 67 (1909), p. 246–267 (Vol. 2, 1909 C); Math. Annalen 69 (1910), p. 181–203 (Vol. 2, 1910 H). See (1917), remark 1 ⟦p. 145⟧.⟧

Projective geometry

In order to build up projective geometry we take $n+1$ open continua, each with a translation group and a zero (then on each of them there is also defined a multiplication group). We can map all or part of these $n+1$ translation groups with
36 their zeros on one another; every continuum participating in the mapping can do that in two directions. The agglomeration of these groups, as they take part in the mapping, is called a *point* P. In the agglomeration the same group can occur more than once; then we can replace these different mappings by a new mapping, in which for the corresponding points in the components their sum is substituted. However, the groups of different continua cannot be united in the sum.

The groups of an arbitrarily chosen point can be transformed, each by a multiplication-operator, in those of another arbitrary point, and for these multiplications only the ratio of the factors is determined. If we take the first point as a basis point, then any other point is determined by these ratios, its *coordinates*. We see here that a point cannot be given directly by coordinates, i.e. numbers from a continuum with a scale, but only with respect to another point.

As the different groups of one and the same point depend together upon one

[1]) This three-parameter group also has a surface of discontinuity in the parameter-space, separating the transformations with one orientation from those with the opposite orientation.

[2]) If we think of the projective group on the closed continuum and if we keep some point fixed, then it is clear that we are left with a two-parameter group which has that point as its only fixed point; consequently this group can be read as a *group of arithmetical operations*; compare F. SCHUR's 'Rechnen mit projektiven Strecken' (Math. Annalen 55 (1902), p. 265–292) and also HILBERT's 'Endenrechnung' (Math. Annalen 57 (1903), p. 137–151 ⟦Anhang III in 'Grundlagen der Geometrie'⟧).

parameter, we can also consider the point as a single translation group with a zero point. And we can map upon one another the translation groups of two, three, ..., $n+1$ points, and take the sum of the groups occurring in the mapping; this sum will always give one of the points defined above. The points which are derived in this way by the mapping upon one another of the points A_1 and A_2, are said to 37
lie on the straight line $(A_1 A_2)$; those derived from the mapping upon one another of $p+1$ points $A_1, \ldots, A_{p+1}$ are said to *lie in the flat* ^{p}*space* $(A_1 A_2 \ldots A_{p+1})$. We see that, if A_1 lies in $(A_2 A_3 \ldots A_q)$, then A_2 lies in $(A_1 A_3 \ldots A_q)$, etc., and that the flat spaces are represented in the coordinates by systems of linear equations. Further it can be proved that, if $A'_1, \ldots, A'_{p+1}$ are points of the flat ^{p}space $(A_1 A_2 \ldots A_{p+1})$, not lying in a ${}^{p-1}$space, then every point of the ^{p}space can be derived from the points A' as well as from the points A; likewise, that a ^{p}space and a ^{q}space in a ${}^{p+q}$space have one point or a straight line or a ^{2}space etc. in common.

Let us consider a ^{p}space in which we take as basis points $A, B_1, \ldots, B_p$, and let us call the corresponding coordinates $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_p$. Let $F_1, \ldots, F_p$ be points on $(AB_1), (AB_2), \ldots, (AB_p)$; let G_1 and G_2 be points in $(B_1 \ldots B_p)$, and C_1 and C_2 the points of intersection of AG_1 and AG_2 with $(F_1 \ldots F_p)$. Let us suppose that we obtain G_2 from G_1 by multiplying the coordinates $\beta_1, \ldots, \beta_p$ of G_1 by $h_1, \ldots, h_p$. Then the same holds for C_2 and C_1, for these points have the same coordinates $\beta_1, \ldots, \beta_p$ as G_2 and G_1. But now let us determine C_2 and C_1 with respect to $A, F_1, \ldots, F_p$, and suppose that from C_1 to C_2 we must multiply the coordinates $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ by factors $h'_1, \ldots, h'_p$. Then we have:

$$C_1 = \varphi_1 \kappa_1 (B_1 + a_1 A) + \ldots + \varphi_p \kappa_p (B_p + a_p A) =$$ 38

$$= \varphi_1 \kappa_1 B_1 + \ldots + \varphi_p \kappa_p B_p + \sum \varphi_i \kappa_i a_i A.$$

$$C_2 = h'_1 \varphi_1 \kappa_1 B_1 + \ldots + h'_p \varphi_p \kappa_p B_p + \sum h'_i \varphi_i \kappa_i a_i A.$$

But the coefficients of $A, B_1, \ldots, B_p$ in these formulae are the coordinates α, $\beta_1, \ldots, \beta_p$ in the original system; thus we see that the h are the same as the h'. Consequently the relative coordinates of points in one and the same ^{p}space are *projective*, in particular this holds for the cross ratio of 4 collinear points.

Once these principles have been given, the further development of projective geometry, in the first place the construction of the quadratic loci, provides no more difficulties.

Cartesian geometry

In order to build up Cartesian geometry, we take n open continua and we understand by a point of ^{n}R the combination of n points of these different continua. Such a point of ^{n}R can be defined by n coordinates, to wit numbers taken from one continuum, provided with a scale, if we choose on each of the n given continua a scale, unbounded in both directions (thus a translation group), and a unit segment.

Euclidean geometry

The Cartesian geometry further becomes a *Euclidean geometry* if, in addition, we define the *distance* between two points by $\sqrt{\sum (x_i'' - x_1')^2}$.

Then one observes that the transformation group

$$X_1 = {}_1\alpha_1\, x_1 + {}_1\alpha_2\, x_2 + \dots {}_1\alpha_n\, x_n + \beta_1$$

etc.

39 with $\sum_q {}_p\alpha_q^2 = 1$ and $\sum_q {}_p\alpha_q\, {}_r\alpha_q = 0$ leaves the distance between any two points invariant, and that conversely the group is determined by the condition that $\sqrt{\sum (x'' - x')^2}$ is invariant. The group is called the *Euclidean congruence group* of ^{n}R.

The similarity group

If one writes in the left members of the equations cX_1, cX_2, etc. instead of X_1, X_2, etc., then one obtains the *group of similarity transformations*, by which all the distances are multiplied by the same factor.

The group of complex operations

In ^{2}R the subgroup of the similarity transformations with positive determinant becomes:

$$X_1 = ax_1 - bx_2 + d_1$$
$$X_2 = bx_1 + ax_2 + d_2.$$

We call it the *group of complex operations*, after having understood by a complex number $x_1 + ix_2$ a point of ^{2}R with coordinates x_1 and x_2. The transformation above is then *read* as

$$X_1 + X_2 i = (a + bi)(x_1 + x_2 i) + (d_1 + d_2 i),$$

or

$$\xi = \alpha x + \delta,$$

where the letters represent complex numbers. In this way the two-dimensional scale of complex numbers becomes a group under addition and multiplication, just as the one-dimensional scale did. But the former yields the advantage of greater
40 generality; first of all, any point is a power of any other point. Therefore the projective, as well as the Cartesian, ^{n}space is often built up from $n+1$ (n respectively) complex scales instead of real scales, as we did above.

Further, by adding in the usual way an '${}^{n-1}$space at infinity' one can complete Cartesian ^{n}space to the connection of a projective ^{n}space. Of course this way of completing is completely arbitrary; one might as well add a sphere at infinity, as it is sometimes useful in potential theory, or again, one might add a single point at infinity, thereby making the Cartesian space into a two-sided closed space.

Projective definition of the group of complex operations
If we do the latter, in particular for a plane, then we can map it on an oval quadric in ordinary space in such a way that the group of complex operations appears as *the group of those projective transformations of the space, which leave invariant the oriented quadric with a single point* (namely the point corresponding to the 'point at infinity' of the Euclidean plane). In this way the group of complex operations can be defined independently of the Euclidean congruence group. [1])

Group of complex projective transformations 41
The group of complex operations, considered on an oval quadric, permits an extension to the *general projective transformation group of that quadric with invariant orientation*; mapping back on the Euclidean plane we obtain the *conformal transformation group of the plane with invariant orientation*, which again can be read as the *projective transformation group of the complex scale.*

Characterization of the projective group
The group of projective transformations in ^{n}space can be characterized after LIE as the *finite continuous* (i.e. generated by continuous change of a finite number of parameters) *Lie group, for which* $n+3$ (*and no smaller number*) *of different points have an invariant.* [2])

The non-Euclidean groups
Selecting from the projective group those transformations which leave a quadratic $^{n-1}$space invariant [3]) we find the so-called *non-Euclidean groups of* ^{n}*space.* For two points any function of their anharmonic ratio with respect to the quadric remains invariant. As 'distance' one chooses that function which is additive along the straight lines, i.e. the logarithm, multiplied by some constant. For this choice the straight lines turn out to be geodesics. Since it is not desired to admit lines on which the distances would reduce to 0, there remain only 3 kinds of fundamental $^{n-1}$quadrics, namely the general oval, which in its interior gives rise to

[1]) By this method of defining a set of operations as a group (which can also be applied to quaternions and to higher complex numbers) the mapping of the parameter continuum on the transformed continuum plays a secondary part. In the case of the ordinary complex operations the group definition avoids the necessity of letting some point and some line play a special part as the zero point and the line of reals.

[2]) Here and elsewhere LIE supposes that his groups are generated by differentiable infinitesimal transformations. Sometimes he even supposes them to be analytic. In this respect his theories are open to many improvements. See also p. 51 ⟦p. 39⟧.

[3]) If one wishes to keep an $^{n-1}$space invariant and still retain a projective group with $\frac{1}{2}n(n+1)$ (the number for the Euclidean congruence group) parameters, one can take for this invariant space nothing else than one of the first or second degree, as LIE has shown (Theorie der Transformationsgruppen III, with reference to an investigation of KLEIN and LIE in Math. Annalen 4 42
(1871), p. 50–84 ⟦see F. Klein, Ges. math. Abh., p. 424–459⟧).

hyperbolic geometry, the general imaginary (with real equation), which gives rise to elliptic geometry, and as a transition between these two the imaginary ${}^{n-2}$quadric, giving rise to Euclidean geometry. Of these three the hyperbolic and the Euclidean group can be mapped on the (not completed) Cartesian space; and as uniform continuous groups the Euclidean and the hyperbolic group have a
[[11]] discontinuity which divides them into two subgroups, called *groups of motions.*

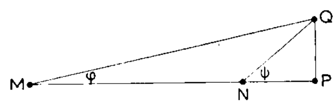
Deduction of the differential of the arc for the Euclidean and the non-Euclidean groups

[[12]] It is possible in different ways to characterize together the Euclidean and non-
43 Euclidean motions. In the first place one can start by considering in general an ^{n}space where the distance between two adjacent points is defined by a positive definite expression of the form $\sqrt{\sum f_{pq}(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_p \mathrm{d}x_q}$ with determinant different from 0 (the f twice differentiable functions), in other words, where Euclidean geometry is valid locally (which, for instance, is always the case for curved spaces, imbedded in higher Euclidean spaces). We then wish to find a transformation group leaving invariant the elements of distance, consequently also the geodesics. We require that every point can be transformed into every other point; that after fixation of a single point P_1 a second point P_2 can still move freely on a 'geodesic ${}^{n-1}$sphere' around P_1, in such a way that the geodesic ${}^{n-1}$spheres around P_1 completely fill up the space; that, after the fixing of P_2, a third point P_3 on that geodesic sphere moves freely on an ${}^{n-2}$sphere around P_2, while these ${}^{n-2}$spheres around P_2 completely cover the above-mentioned ${}^{n-1}$sphere, etc.

We solve this problem first for a ^{2}space, choosing as coordinates the geodesic lines starting from a point M and the geodesic circles around M. Because of the free mobility *around* M the arc length ds must be of the form $\sqrt{\mathrm{d}r^2+f(r)^2\mathrm{d}\varphi^2}$. From this we find the general differential equation of the geodesic lines:

$$\mathrm{d}s = \frac{f(r)^2}{c}\,\mathrm{d}\varphi.$$

44



In the figure MP, MQ and NQ are geodesic lines, PQ is a small geodesic arc around M, and the angles φ and ψ are very small, thus for NQ c is very small. We put MN $= r_1$; MP $= r_2$, and we have:

$$\psi = \frac{f(r_1)\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = f(r_1)\,\frac{c}{f(r_1)^2} = \frac{c}{f(r_1)}\,.$$

Further:

$$\varphi = c\int_{N}^{Q}\frac{ds}{f(r)^2} = c\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{f(r)^2}$$

and from this:

$$PQ = cf(r_2)\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{f(r)^2}\,.$$

As the plane must be structured around N in the same way as around M, we must also have

$$PQ = \psi\cdot f(r_2-r_1).$$

$$f(r_2-r_1) = f(r_1)\cdot f(r_2)\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{f(r)^2}\,. \tag{H}$$

From this, taking ε to be very small,

$$\int_{\varepsilon}^{r_1}\frac{dr}{f(r)^2} = \frac{f(r_1-\varepsilon)}{f(r_1)f(\varepsilon)} =$$

$$= \frac{1}{f(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)}\cdot\frac{f'(r_1)}{f(r_1)} + \frac{\varepsilon^2}{2f(\varepsilon)}\cdot\frac{f''(r_1)}{f(r_1)}\dots$$

Similarly

$$\int_{\varepsilon}^{r_2}\frac{dr}{f(r)^2} = \frac{1}{f(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)}\cdot\frac{f'(r_2)}{f(r_2)} + \frac{\varepsilon^2}{2f(\varepsilon)}\cdot\frac{f''(r_2)}{f(r_2)}\dots$$

By subtraction from the last two equations:

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{f(r)^2} = \frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)}\cdot\left\{\frac{f'(r_1)}{f(r_1)} - \frac{f'(r_2)}{f(r_2)}\right\}\dots$$

$$= \frac{f'(r_1)}{f(r_1)} - \frac{f'(r_2)}{f(r_2)}\dots$$

But also

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{f(r)^2} = \frac{f(r_2-r_1)}{f(r_1)f(r_2)}\,.$$

Thus

$$f(r_2-r_1) = f'(r_1)f(r_2) - f'(r_2)f(r_1). \tag{1}$$

Now $f(\varepsilon) = \varepsilon + \ldots$, so we know that

$$f(0) = 0.$$
$$f'(0) = 1.$$

Substituting $r_1 = \varepsilon$ in (1) we obtain:

$$f(r_2) - \varepsilon f'(r_2) = f(r_2) + \varepsilon f''(0) f(r_2) - \varepsilon f'(r_2). \tag{2}$$

So $f''(0) = 0$.

Let us differentiate (1) with respect to r_1, obtaining

$$f'(r_2 - r_1) = f'(r_1) f'(r_2) - f''(r_1) f(r_2). \tag{3}$$

If we put $r_1 = \varepsilon$ in this equation, we obtain

$$\begin{aligned} f'(r) - f''(r_2)\varepsilon &= f'(0) f'(r_2) + \varepsilon f''(0) f'(r_2) \text{ (cancelled)} - \\ &- f''(0) f(r_2) \text{ (cancelled)} - \varepsilon f'''(0) f(r_2). \\ f''(r_2) &= f'''(0) f(r_2). \end{aligned} \tag{4}$$

46 If we put $f'''(0) = a$, then we have for f the differential equation:

$$\frac{d^2 f}{d r^2} = af,$$

which has three groups of solutions, depending upon the sign of a, namely

(I) $f = c_1 \sin(\alpha r + c_2)$,

or, because $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$,

$$f = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha r.$$

(II) $f = c_1(r + c_2)$,

or, because $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$,

$f = r$.

(III) $f = c_1 \operatorname{sh}(\alpha r + c_2)$,

or, because $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$,

$$f = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha r.$$

All three solutions turn out to satisfy (H). If we desire only surfaces without singularities, then (II) gives the ordinary Euclidean plane, (III) the hyperbolic plane and (I) either a sphere (two-sided) or an elliptic plane (one-sided, having the connection of the projective plane).

Finally these four surfaces turn out to have the required homogeneous structure.

Let us now investigate the ^{3}spaces which satisfy the conditions of the problem. We know that the geodesic spheres around a point must admit free mobility in themselves; but as these spheres are firstly finite and secondly two-sided we can take for them, out of the four surfaces found above, only ordinary spheres. Investigating which function of the radius the arc lengths on these spheres can be, we find first that the geodesic lines lie in *planes through* M (here defined as surfaces generated by the geodesics from M to a great circle on a sphere around M), and then, that again only the three functions mentioned above, and consequently only the four ^{3}spaces constructed from them, are possible. 47

In the same way as from 2 to 3 the transition from 3 to 4 dimensions is effected, etc. For any number of dimensions there exist only the four types of spaces mentioned above, in other words, there are no other types of transformation groups satisfying the conditions of the problem.

Of the two groups corresponding to the arc length I the spherical can be applied to a Cartesian space completed with a single point, and the elliptical to a Cartesian space completed with an ${}^{n-1}$space.

These characterizations of the groups of Euclidean and non-Euclidean motions are very near to those originally given by RIEMANN [1]). The assumptions that the arc length is quadratic, and that the coefficients are differentiable, are somewhat arbitrary. LIE [2]) has weakened the conditions a little by characterizing the Euclidean and non-Euclidean motions as those Lie-groups which firstly leave invariant a quadratic arc length with non-zero determinant, and secondly transform the ${}^{n-1}$directions through a fixed point in such generality as is admitted by the invariance of the equation obtained by putting the arc length equal to 0 (which of course determines a quadratic space in the sheaf of line-elements). If the first condition is replaced by the requirement that the equation which puts the arc length equal to 0 must remain invariant, we obtain in addition: firstly the group consisting of Euclidean motions and similarity transformations, and secondly that consisting of Euclidean motions, similarity transformations and transformations on reciprocal radii (the *conformal group*). 48

Characterization of the Euclidean and non-Euclidean groups by HELMHOLTZ

HELMHOLTZ [3]) has tried to free the characterization from the existence of an arc length. He investigated in an ^{n}space all the invertible continuous groups with $\frac{1}{2}n(n+1)$ parameters, such that the functions which represent the transformations admit a certain number of derivatives (namely so many as he needs for his considerations), that two points have one single invariant, giving for every pair of points a *real* restriction, that more than two points have no new invariant, and [[13]] 49

[1]) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abh. Königl. Ges. Wiss. Göttingen 13 (1868), p. 1; Gesammelte Werke 1e Aufl. p. 254, 2e Auflage p. 272–287.

[2]) Theorie der Transformationsgruppen III, Abt. IV, Kap. 17.

[3]) Ueber die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Göttinger Nachr. 1868, p. 193–221; Ges. Wiss. Abhandl. II, p. 618–693.

finally that these invariants express the only restrictions to the freedom of motion of the points. [1])

Finally he adds the so-called *monodromy postulate*, requiring that after fixation of $n-1$ points an nth point can still describe a *periodic* orbit.

Correction of HELMHOLTZ' *characterization by* LIE

He then proves that only the Euclidean and the non-Euclidean motions satisfy all these conditions. However, LIE has shown later on [2]) that:

1°. HELMHOLTZ' argument is invalid, i.e. he tacitly introduces more conditions. These come to the same thing as saying that from the assumption of his conditions for pairs of points at a finite distance from each other he derives their validity for pairs of points infinitely near to each other; LIE shows by counterexamples
50 that this conclusion is faulty in respect of the invariant of two points, free mobility and monodromy.

He shows further how HELMHOLTZ' calculations become correct when his conditions for pairs of points at a finite distance from each other are replaced by others, valid for pairs of points which are infinitely near to each other.

2°. That after this more correct formulation of HELMHOLTZ' axioms they still contain redundant components. Namely, LIE shows that the following characterization is sufficient: An invertible Lie-group admitting in one single point of general position *free mobility in the infinitesimal* (i.e. the possibility of continuous motion after fixing the point, a line-element through the point, a plane element through the line-element, a ^{3}element through the plane element, ... and an $^{n-2}$-element through the $^{n-3}$element, but no longer if in addition an $^{n-1}$element through the $^{n-2}$element must remain fixed). Only when $n = 2$ does this characterization give in addition the group of spiral transformations, which we ought to exclude by a special axiom, for instance by HELMHOLTZ' monodromy postulate.

3°. That even if one wishes to characterize the groups, as HELMHOLTZ originally tried, by the behaviour of pairs of points at finite distance, his formulation contains too much. LIE proves that the following characterization is sufficient: 'An
51 invertible Lie-group such that after fixing one point another point can still move freely in a so-called pseudo-spherical space, which does not contain the fixed point and which has in general $n-1$ dimensions. Further within some finite domain, after fixation of $q < n-1$ points, a point of general position can still move freely in the intersection of the pseudo-spherical spaces determined by the fixed points.'

[1]) LIE (Theorie der Transformationsgruppen III, pp. 487 and 505) has made the remark that the existence of a 'distance' (i.e. an invariant) for two points at a finite distance from each other, and the existence of an invariant element of arcs (i.e. of an invariant 'length' for every curve) are two mutually independent conditions.

[2]) Leipziger Berichte 42 (1890), p. 284–321, 355–418; Theorie der Transformationsgruppen III, Abt. V.

The characterization of the plane congruence group independent of differentiability by HILBERT

It is natural to try, for each of the above-mentioned characterizations of groups, to free them from the restriction to Lie-groups [1]), more in general to aim at the ⟦14⟧
construction of a theory of groups independent of postulates on differentiability (cf. HILBERT, Mathematische Probleme, Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congresse Paris 1900, Problem no. 5, Göttinger Nachrichten 1900, p. 269 ⟦Ges. Abhandlungen III, p. 290–329⟧), as we have carried it through 52
above for a most simple case, namely the group of fundamental operations with natural numbers.

Another case that has been settled concerns the group of Euclidean or non-Euclidean motions in the plane. HILBERT [2]) has characterized them as *the group of invertible uniform transformations leaving invariant the connections of incidence and forming a closed system* (i.e. if there are transformations in the group which make a definite set of points approximate another definite set of points, then there is also a transformation in the group transforming the first set into the second), *and for which every 'circle'* (i.e. the set of points into which, after fixing one point, another point can still be transformed) *consists of an infinity of points.* [3])

From this he proves first that every circle is a closed continuous curve without double points (a closed 'Jordan curve'), that the circles around a point, enclosing each other, fill up the whole plane, and that by a rotation of the plane around P all the points together describe their circles according to functions of one continuous parameter; further that any point can be transformed by a motion into 53
any other point and that after fixing two points the whole plane is fixed. The second part of his argument then serves to introduce straight lines. Between two points he constructs the straight line connecting them by constructing the dense scale of middle points, where he means by the middle point of AB the centre of the rotation that transforms A into B and B into A (so-called half-turn), and he proves that this sequence of points in the plane has no gaps, and consequently together with its limit points forms a continuous curve. Further the straight line

[1]) KLEIN (Zur ersten Verteilung des Lobatchefsky-Preises, Math. Annalen 50 (1898), p. 583–600; ⟦Ges. math. Abh. I, p. 384–401⟧) defends the restriction to differentiable functions in LIE's investigations on the foundations of geometry by the remark that any empirical function can be represented by an analytical function with as good an approximation as we desire. But a priori it is very well conceivable that there exist non-Lie groups such that the approximating analytical transformations do not constitute a group (though they 'almost' constitute a group, i.e. they approximate the group property without being able to attain it as long as they remain analytical).

[2]) Math. Annalen 56 (1903), p. 381–422 ⟦Grundlagen der Geometrie, Anhang IV⟧. In this case as well the analytical character of the functions turns out to be a *consequence* of the group property.

[3]) However, because he does not complete the Cartesian plane either by a point or by a line at infinity, he finds only the Euclidean and the hyperbolic groups of motions.

is produced beyond its endpoints by performing half-turns around these endpoints; thereupon it is proved that two straight lines have at most one point in common and that two points are always connected by a straight line, and of course not by more than one. Finally the theorems on congruence are proved, whence, depending on the parallel postulate added, Euclidean or hyperbolic geometry can be built up.

Characterization of the linear system of the elliptic or projective space

One can ask, given a space having the connection of a projective space, for the characterization of a system of curves, surfaces, spaces etc., having the properties of the projective system of straight lines, planes, plane ^{3}spaces etc. The following is sufficient:

54 Two points always determine one straight line; through a straight line and a point outside it there goes a plane which contains every straight line having two points in common with it; through a plane and a point outside it there goes a ^{3}space containing every straight line that has two points in common with it; etc.; further: a straight line and an $^{n-1}$space have a point of intersection.

It is easy to deduce from these properties the unicity of the quadrangle construction for the 4th harmonic in a line of points, in a pencil of lines, etc. Now choose arbitrarily $n+1$ points, and let them correspond with the $n+1$ basis points of a projective ^{n}space, constructed as above; then assign an arbitrarily chosen $(n+2)$th point to the unit point of the projective space. By successive quadrangle constructions (that is, solely by projections and intersections) one can construct, from the arbitrarily chosen $n+2$ points, enough points to ensure that every point in the projective ^{n}space with rational coordinates corresponds with one of them. It follows from a proof of LÜROTH and ZEUTHEN, communicated by KLEIN (Math. Annalen 7 (1874), p. 531–537 ⟦Ges. math. Abhandlungen I, p. 344–350⟧), that the points constructed in this manner lie everywhere dense. And from this it follows that the one-one correspondence between the points of the two spaces holds for the irrational points as well. [1]

55 *Characterization of the linear system of the Cartesian or Euclidean and of the hyperbolic space*

A system corresponding to the straight lines, planes, ^{3}spaces etc. of a Euclidean or hyperbolic ^{n}space (in both cases the class of points fills a Cartesian ^{n}space) can be characterized as follows:

Two points always determine one straight line; through a straight line and a point outside it there passes a plane, containing every straight line that has two

[1]) It seems that by this mapping on a projective space that had been constructed beforehand, KLEIN's developments (Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie, Göttingen 1893, p. 319–353 ⟦2. Auflage, bearbeitet von W. Rosemann, Berlin 1928, p. 153–163⟧), aiming at a direct proof of further theorems from the axioms of projective geometry, become superfluous.

points in common with it; through a plane and a point outside it there passes a ^{3}space containing every straight line that has two points in common with it, etc.; further: every $^{n-1}$space divides the ^{n}space in two parts in such a way that every straight line connecting a point of one part with a point of the other part, intersects the $^{n-1}$space in a point lying between these two points. In fact, following SCHUR (Math. Annalen 39 (1891), p. 113–124), one can prove that this system can be completed by its 'ideal elements' to the projective system considered above. If, in addition, we require that EUCLID's axiom of parallels holds, then necessarily the linear system of Cartesian ^{n}space (or of projective ^{n}space stripped of a single plane $^{n-1}$space) turns up; if however we require LOBATCHEFSKY's axiom of paral- 56
lels, then one obtains the linear system of a Cartesian (or also of a projective) space, lying inside an arbitrary convex oval, which can be joined to the given system as its 'oval of limitpoints'.

Thus we have the linear system of hyperbolic ^{n}space only if the oval of limitpoints is a quadratic $^{n-1}$space; this can be enforced by requiring that the given system admits a projective uniform group with $\frac{1}{2}n(n-1)$ parameters.

Variational problems leading to linear systems

Now one may ask how to determine a curve between any two points of a Cartesian space in such a way that these curves satisfy the characterizations of a linear system as given above; one will think firstly of variational problems for which these curves are extremals.

We know that the required system of curves can be mapped uniformly either on the straight lines of a Cartesian space completed by a space at infinity, or on those simply of a Cartesian space, or on those of a Cartesian space lying inside a convex oval.

Consequently one looks for variational problems in Cartesian space which give as their extremals the straight lines, for in the most general uniform continuous 57
transformation of the solution of this problem one finds the general variational problem for which the extremals possess the same incidence properties as the linear system.

Investigations on this problem have been made by HAMEL (Math. Annalen 57 (1903), p. 231–264) for the plane, and in outline for ^{3}space; we shall précis them for the plane. HAMEL puts the question from a somewhat different point of view than is taken here; by so doing he subjects the required integral to some restrictions, so that it more or less coincides with the ordinary conception of length in metrical geometry, and so that the extremals which he looks for are more specially *minimal* curves.

Thus he looks for minimal curves of the integral

$$\int \mathrm{d}s \cdot f(x, y, \operatorname{tg} \vartheta) \equiv \int \mathrm{d}x \cdot \mathfrak{g}(x, y, \operatorname{tg} \vartheta),$$

[[15]] where f denotes a positive, single-valued (because the element of length must be invertible), and in general continuous function, differentiable with respect to each of its three arguments. As the differential equation of the variational problem must take the form

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

g must satisfy the differential equation:

58 $$\frac{\partial^2 g}{\partial p\,\partial x} + p\frac{\partial^2 g}{\partial p\,\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \left(\text{putting}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\right).$$

By differentiation of this equation with respect to p one obtains an equation in $\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}$, with the general solution:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} = W(p, y-px);$$

from which we finally find for g:

$$g = \int_c^p\int_c^p W(p, y-px)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p + \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial y}$$

(u being an arbitrary function of x and y).

Remarking that

$$\int_c^p\int_c^p v(p)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p = \int_c^p (p-\xi)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

and putting $W = \cos^3\vartheta\cdot w$, we obtain:

$$g = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \cos\tau\cdot w(\operatorname{tg}\tau, y-x\operatorname{tg}\tau)(\operatorname{tg}\vartheta-\operatorname{tg}\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{tg}\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$g = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{1}{\cos\vartheta}\cdot\sin(\vartheta-\tau)\cdot w\cdot\mathrm{d}\tau + \frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{tg}\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$f = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\cdot w\cdot\mathrm{d}\tau + \frac{\partial u}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\vartheta.$$

Here the condition that we have a minimum is that

w is positive for every x, y and ϑ;

[[42]]

whilst, because f is single-valued, there follows further: 59

a) w is single-valued.

$$b)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} \sin\tau \cdot w \cdot \mathrm{d}\tau.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} \cos\tau \cdot w \cdot \mathrm{d}\tau.$$

Thus finally the arc length becomes:

$$\mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}s}{2}\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\cdot w(\mathrm{tg}\,\tau,\ y-x\,\mathrm{tg}\,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Now HAMEL first asks when the straight lines of the plane, including the line at infinity, belong to the minimal curves – so that the variational problem determines a *projective* linear system –; he finds as the condition that $\int \mathrm{d}l$ remains finite along every straight line and has the same value along every straight line.

Hereupon he gives a category roughly coinciding with a geometry which MINKOWSKI constructed in his 'Geometrie der Zahlen', where every straight line, but not the line at infinity, belongs to the minimal curves – thus the variational problem determines here a complete Euclidean linear system –; he supposes w to be independent of its second argument, and $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}$ to be constant, but relaxes the invertibility of the arc length. In this way he finds as calibration-curve, i.e. 60
the set of points at distance 1 from the origin: ⟦16⟧

$$F(r,\vartheta) = 1 - r\left\{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\cdot w(\tau)\cdot \mathrm{d}\tau + \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta\right\} = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\vartheta^2} + \frac{1}{r} = w(\vartheta).$$

And, as the first member of this equation, multiplied by a positive factor, is the radius of curvature, while the only restriction on F is that w must be everywhere positive, he finds for the only restriction on the calibration-curve that it is everywhere convex.

Finally he gives as an example of a solution which represents a Euclidean linear system inside a convex oval, the so-called Hilbert geometry: in Math. Annalen 46 (1895), p. 91–96 ⟦Grundlagen der Geometrie, Anhang I⟧ HILBERT defines the distance between two points as the logarithm of the anharmonic ratio which they form with the points of intersection of their connecting line with a convex oval, inside which they lie; he shows that by this definition the sum of two sides of a triangle is greater than the third side. HAMEL shows now how this geometry as well can be derived from his general formula.

For this purpose he tries to determine functions W and u such that

61

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{c}^{p} \mathrm{d}p \int_{c}^{p} \mathrm{d}p \; W + u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = \log \frac{(x_1 - v_1)(x_2 - v_2)}{(x_2 - v_1)(x_1 - v_2)},$$

and he finds, putting $y - px = b$,

$$W[p, y - px] = \left[\frac{\partial^2 (v_2 - v_1)}{\partial b^2}\right]_p$$

for which expression he easily proves that it is positive (negative) for ϑ in the first or third (second or fourth) quadrant; from this it follows that in every case w is positive, as is required for the minimum property.

He finds further that

$$u = \log \frac{x - v_2(c, y - cx)}{x - v_1(c, y - cx)}.$$

We can produce the Minkowski geometry mentioned above (with an invertible arc length) as a special case of this Hilbert geometry.

MINKOWSKI takes the arc length $\mathrm{d}s f(\vartheta)$, and HILBERT

$$\mathrm{d}s \left\{ \frac{1}{s - s_1} + \frac{1}{s_2 - s} \right\};$$

if we let Hilbert's limiting oval tend to infinity, preserving its shape, then $\frac{1}{s - s_1} + \frac{1}{s_2 - s}$ becomes infinitely small, but at the same time equal for parallel directions,
62 so after multiplication by an infinite constant it becomes a function of the direction alone, and the arc length assumes the form $\mathrm{d}s f(\vartheta)$.

[[17]] *The possible pointsets*

In the beginning of this chapter we have constructed two sorts of linearly ordered sequences of points, namely the order type ω of the enumerated positive ordinal numbers and the inverse type ω^*; also we have the everywhere dense denumerable sequence (the ordertype η of the rationals, all of them, or between 0 and 1, or also the dual scale, complete or between 0 and 1 [1])). Moreover, we have considered the

[1]) where we shall be free to include 0 an 1 or not, as we please, in the sequence of points.

intuitive continuum as a measurable continuum, and we have seen that every point on it admits an approximation by a dual scale. However, the *continuum as a whole* was given to us by intuition; a construction for it, an action which would create from the mathematical intuition 'all' its points as individuals, is inconceivable and impossible.

The mathematical intuition is unable to create other than denumerable sets of individuals. But it is able, after having created a scale of ordertype η, to superimpose upon it a *continuum as a whole*, which afterwards can be taken conversely as a measurable continuum, which is the matrix of the points on the scale.

It follows that a given continuum can be covered with gaps by another con- 63
tinuum; for this purpose it is sufficient to construct on the first continuum an order type η which does not cover it everywhere densely, and then to construct the continuum over that order type η; we can always identify a point on the second continuum with the limit point on the first continuum of its approximating sequence. In this sense we can say: 'The points of the second continuum are a part of those of the first one'; and in this sense we have now three methods for the construction of 'pointsets on the continuum', namely:

1°. We can construct on the continuum discrete, individualized sets of points which are finite, of order type ω, of order type η, or can be obtained from such sets of points by alternation or subordination. [1]) The number of these points is 64
always denumerable, and likewise the number of the intervals determined on the ⟦18⟧
continuum by pairs of points from the set is denumerable. In each of these intervals, and also in its totality, the set may be dense or not (by *dense* we mean: of the order type η after every well-ordered or inversely well-ordered subset has been contracted to a single point).

We can also say: in any segment of the continuum (and also in the whole continuum) the set may be dense or not; a closer investigation shows that the latter

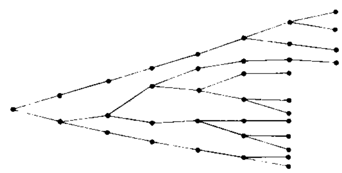
[1]) If we use only the order type ω in combination with finite sets, then we obtain the so-called well-ordered sets. In such a set an element that is introduced later in the construction, comes also ⟦19⟧
later in the order. Of course, in the construction one may take as elements of the finite sets, or of the sets of ordertype ω, all the well-ordered sets that have been previously constructed. In this way we obtain successively $1,\ 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega.2, \ldots, \omega^2, \omega^2+1, \ldots, \omega^3, \ldots,$ $\omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \varepsilon_1$ (i.e. $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot}}}}$, exponentiation being iterated ω times), ...

A well-ordered set has the property that it and each of its subsets has a first element. Besides the well-ordered sets we can also construct inversely well-ordered sets. The only way to construct sets which are not well-ordered or inversely well-ordered is by ω times repeated insertion of well-ordered sets in well-ordered sets; by this process dense (see above) subsets can be constructed.

Compare in this connection a theorem of Bernstein (Math. Annalen 61 (1905), p. 144):

Any ordered denumerable set (and consequently any individually constructible set, for even if in the construction I say nothing about order, I can tacitly consider what is constructed later on as following after what had been previously constructed) can be mapped on a part of the ordertype η preserving the order relation.

distinction works out as follows if we approximate the set by a dense dual scale
65 which has been constructed on the segment under consideration as a unit segment: in determining each dual digit the preceding ones either determine it or they leave open the choice between two digits; in the latter case, the next digit is again either determined or can be chosen from two digits, etc. This can be illustrated by a drawing of the form:



and so on.

If in this structure we cut off every branch which ceases to branch [1]) we are left either with nothing or with a continually multiplying dual branching. In the
[[20]] latter case the set is dense in the interval under consideration, in the former it is not.

66 2°. In the intervals where the set constructed under 1° is dense, we can transform it by the contractions described above into an everywhere dense set, and then apply to this set the operation of 'completion to a continuum'; it is always possible to define clearly the intervals which we select for this operation, for, as their number is denumerable, they are individualized.

3°. We can construct a set of points by deleting from a continuum a dense scale constructed on it in some interval.

Solution of the continuum problem

If now in the construction of a set of points the operation 2° (whether or not in combination with 3°) has been applied, it can be 'mapped' on a continuum. This must be understood as follows: in both sets (the continuum and the given set) a well defined, and consequently denumerable, pointset is chosen in such a way that all the other points can be obtained by approximation from everywhere dense parts of this set. Then the undefined points are brought into one-to-one correspondence by mapping the everywhere dense parts, with respect to which the infinitely proceeding approximations must be taken, onto each other; then the points which were defined can still be brought into correspondence with each other, because they are denumerable in both sets.

It follows that every set of points on the measurable continuum (and con-
67 sequently also on the simple intuitive continuum, which in fact we can only handle

[1]) from left to right according to the rank of the dual digit of the point of ramification; after the cutting operation is achieved for all ω ranks, it is applied again to the residue that was left.

after having made it measurable [1]) – or built up out of individualized measurable parts) which is not denumerable, has the power of the continuum. ⟦21⟧

Thus the 'continuum problem', put forward by CANTOR in 1873 ⟦G. Cantor, J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 258–262, Ges. Werke p. 115–118, proved that the continuum is not denumerable. In J. reine angew. Math. 84 (1878), p. 242–258, Ges. Werke p. 119–133 he conjectured that the cardinal number of the continuum follows immediately after the denumerable.⟧ and mentioned by HILBERT (Mathematische Probleme, Problem no. 1, p. 263 ⟦Göttinger Nachr. 1900, p. 253–297; Ges. Abhandlungen III, p. 290–329⟧) as still open, seems to be solved, by keeping strictly to the view that a continuum as a set of points must be considered with respect to a scale of ordertype η.

Non-Archimedean uniform groups on the one-dimensional continuum

We can imagine a Cartesian space of ω dimensions, or of $\omega^* + \omega$ dimensions, and consider in it all the points whose coordinates of index less that a given number are zero. [2])

We can go further and imagine a Cartesian space of $(\omega^* + \omega)^n$ dimensions. Then every coordinate carries as indices n positive or negative integers, and we 68
restrict ourselves to those points whose coordinates are different from zero only if, given the preceding indices, every index is greater than a given number, so that the numbers of the remaining coordinates form a well-ordered set. ⟦23⟧

These points can be linearly ordered by defining the order relation for two points by means of the coordinate of least number in which they are different. Now the problem is to construct on such a pseudo-continuum (which is an ordinary measurable continuum with all sorts of points between an arbitrary point on it and a segment having that point as its boundary, and in addition with all sorts of points to the left and to the right of all points of the ordinary continuum) a group of operations which for the ordinary continuum yields a group of arithmetical operations. We can start by constructing for each of the coordinates a scale and from that an ordinary group of additions. In that way we construct at the same time a group of additions for the whole space, which is associative and commutative, and by which any point can be transformed into any other point.

If we choose on each of the scales a 1-point, then the operation of 'multiplication by a point of the ordinary continuum' (i.e. by a point for which every coordinate is zero except that with number 0) is self-explanatory; it is associative and 69

[1]) The non-Archimedean pseudo-continua, which will be discussed below, must be considered, according to our conception of the continuum, as higher-dimensional continua (ordered in a special way and subject to a special group of transformations); however according to CANTOR higher-dimensional, and even denumerably-infinite-dimensional continua, can be mapped on one-dimensional continua, so the theorem holds also for higher-dimensional as well as for non-Archimedean continua.

[2]) Compare in this connection HILBERT, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen ⟦Grundlagen der Geometrie⟧, § 33. ⟦22⟧

distributive with respect to the group of additions. Let us look for an associative operation which increases by 1 the numbers of the coordinates and which we shall denote by '$a_1 \times$' in particular '$1_1 \times$' if it always maps 1-points to each other (for which purpose we can always make an appropriate choice of our 1-points). As it must transform the groups inside the single coordinates into each other, we have generally

$$1_1 \times a_\alpha = a_{\alpha+1}.$$

Let us look further for an associative operation which increases all the numbers of coordinates by ω, and which we shall denote by '$a_\omega \times$', in particular by '$1_\omega \times$' if it transforms the 1-point of the 0-coordinate into that of the ω-coordinate, that of the ω-coordinate into that of the 2ω-coordinate, etc.

As, again, it must transform the groups inside the single coordinates into each other, we have, if α is a finite number:

$$1_\omega \times a_\alpha = \{p_\alpha a\}_{\omega+\alpha}.$$

As the operations 1_1 and 1_ω must be associative in their combinations, we have further:

$$\{p_2 a\}_{\omega+2} = 1_\omega \times a_2 = (1_\omega \times 1_1) \times a_1 = p_1 \times 1_1 \times 1_\omega \times a_1 = \\ = p_1 \times 1_1 \times \{p_1 a\}_{\omega+1} = \{p_1^2 a\}_{\omega+2},$$

70 and obtain, continuing in this way,

$$p_\alpha = p^\alpha.$$

And in general, if τ is any finite or infinite number:

$$\{p_{\tau+1} a\}_{\tau+\omega+1} = 1_\omega \times a_{\tau+1} = (1_\omega \times 1_1) \times a_\tau = p_1 \times 1_1 \times (1_\omega \times a_\tau) = \\ = p_1 \times 1_1 \times \{p_\tau a\}_{\tau+\omega} = \{p_1 p_\tau a\}_{\tau+\omega+1}$$

so that in general

$$p_\tau = p^\alpha,$$

where α is the finite part of the transfinite number τ.

By the same method we introduce the operation $1_{\omega^2} \times$ such that

$$1_{\omega^2} \times a_\tau = \{q_\tau a\}_{\tau+\omega^2},$$

and find from the associative property firstly:

$$q_\alpha = q^\alpha$$
$$q_{\beta\omega} = r^\beta,$$

where α and β are finite numbers.

We now have, if $\tau = \zeta + \beta\omega + \alpha$, where ζ contains only terms of higher than the first degree in ω:

71 $$\{q_\tau\}_{\tau+\omega^2} = 1_{\omega^2} \times 1_\tau = 1_{\omega^2} \times 1_\alpha \times 1_{\beta\omega} \times 1_\zeta = q^\alpha \times 1_\alpha \times 1_{\omega^2} \times 1_{\beta\omega} \times 1_\zeta = \\ = q^\alpha \cdot r^\beta \times 1_\alpha \times 1_{\beta\omega} \times 1_{\omega^2} \times 1_\zeta = \{q^\alpha \cdot r^\beta\}_{\tau+\omega^2},$$

so that

$$q_\tau = q^\alpha r^\beta.$$

That further these conditions for p_τ and q_τ, which have been found necessary, are also sufficient, is proved by calculating:

$$1_{a_1+b_1\omega+c_1\omega^2} \times (1_{a_2+b_2\omega+c_2\omega^2} \times 1_{a_3+b_3\omega+c_3\omega^2})$$

and

$$(1_{a_1+b_1\omega+c_1\omega^2} \times 1_{a_2+b_2\omega+c_2\omega^2}) \times 1_{a_3+b_3\omega+c_3\omega^2}.$$

We then find for both expressions

$$p^{b_1a_2+b_1a_3+b_2a_3} \cdot q^{c_1b_2+c_1b_3+c_2b_3} \cdot r^{c_1a_2+c_1a_3+c_2a_3} \times 1_{(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)\omega+(c_1+c_2+c_3)\omega^2}.$$

Continuing in this way we can define '$1_{\omega^3}\times$', ..., '$1_{\omega^n}\times$' and, if we understand by multiplication by a sum, multiplication by the terms and then summation, noticing, that for the reciprocal of a number all the coordinates in succession can be approximated, so that also division can be applied, we have a complete set of arithmetical operations on our linear pseudo-continuum, for which the associative and distributive properties hold, but, if $n > 1$, not necessarily the commutative one; for instance:

$$1_1 \times 1_\omega = 1_{\omega+1},$$ 72

but

$$1_\omega \times 1_1 = p_{\omega+1},$$

whereas in the case of the ordinary measurable continuum we have seen above that no group of operations can be constructed for which the commutative [[24]] property fails.

Because of the lack of measurability the pseudocontinuum constructed above may be called a *non-Archimedean continuum*; moreover it lacks another property of the ordinary continuum, namely Dedekind continuity [1]), which admits the following formulation: If the set of points of the continuum is divided into two parts in such a way that every point of one part is higher in rank than every point of the other part, then either the lower part has a greatest point and the higher part has no least point, or the higher part has a least point and the lower part has no greatest point. In fact measurability can be immediately derived from Dedekind continuity.

The non-Archimedean continuum does possess *Veronese continuity* [[G. Veronese, Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten, translated from the Italian, Leipzig 1894]], which may be defined as follows: If the set of points of the continuum is divided into two parts in such a way that every point of one part is higher in rank than every point of the other part, and if furthermore I can choose from both parts 2 points whose

[1]) cf. DEDEKIND, Stetigkeit und irrationale Zahlen [[Braunschweig 1872]].

difference can be made smaller than any given quantity, then either the lower
73 part has a greatest point and the higher part has no least point, or the higher part has a least point and the lower part has no greatest point. (If the condition that the difference can be made indefinitely small is not fulfilled, then it may happen that the lower part has no greatest point and the higher part has no least point.)

Non-Archimedean and non-Pascalian geometries

By the same method as we constructed projective geometry from $n+1$ ordinary continua or complex continua, provided with a group of operations, we may now do the same with non-Archimedean continua. The proofs for the linear equations of straight lines, planes etc. (where however we must remember to put the coefficients to the right of the coordinates) remain valid without change; consequently all the theorems which we have mentioned above (see p. 54 ⟦p. 40⟧) as characterization of the system of straight lines, planes etc. in an ordinary projective space remain valid as well.

It follows also that DESARGUES' theorem ('If for two triangles the lines connecting corresponding vertices pass through one point, then the points of intersection of corresponding sides lie on one line') and, equivalently, the theorem on the uniqueness of the 4th harmonic point, remain valid; likewise the projectivity of harmonic pairs still holds.

74 But the theorem on the projectivity of relative coordinates turns out to depend on the validity of the commutative property of multiplication. The same is true for the equivalent PAPPUS' theorem ('If on each of two intersecting lines 3 points are given, the 3 points of intersection of the lines which crosswise connect pairs of corresponding points lie on a straight line'), which HILBERT (Grundlagen der Geometrie, in particular Chapter VI) calls PASCAL's theorem. (It can be considered as the special case for a degenerate conic of the theorem known under this name.) Thus when multiplication is not commutative, PASCAL's theorem together with several incidence theorems fail, for instance the theorem on the unicity of the common harmonic pair for two pairs of points on a straight line, and the so-called *fundamental theorem of projective geometry*: If two straight lines are related by a sequence of projectivities, then three pairs of related points determine the point corresponding with any other point.

Pascal's theorem follows from the existence of a projective congruence group.

If a *congruence group*, i.e. a group having similar properties as the elliptic, resp. hyperbolic (Euclidean) congruence group [1]) exists for the non-Archimedean

[1]) Such a group can be characterized as a projective group which

1° can transform any point into any other point,

2° admits free mobility in the infinitesimal around every point, and determines 'spheres' around the point intersecting every halfline from the point once,

3° inverts any segment and interchanges the equal sides of any isosceles triangle;

it consists of congruent and symmetric transformations (the latter only to be mentioned expressly for the hyperbolic and Euclidean groups.)

projective geometry, or for its part inside a convex oval [1]), (or in the limit inside a double counted plane $^{n-1}$space), then, as HILBERT has shown (Grundlagen der Geometrie, Chapter III; Neue Begründung der Bolyai-Lobatcheffskyschen Geometrie, Math. Annalen 57 (1903), p. 137–151 ⟦= Grundlagen der Geometrie, Anhang III⟧; compare also TH. VAHLEN, Abstrakte Geometrie, p. 251), *every* incidence theorem holds, so that multiplication must be commutative. 75

For a non-Archimedean projective geometry inside a convex oval VAHLEN (Abstrakte Geometrie, Leipzig 1905 ⟦2. Auflage 1940, p. 148–169⟧) has shown that every theorem on congruence, in particular Pascal's theorem, and hence commutativity of multiplication, can be derived solely from the existence of an *affine group*, i.e. a projective group which transforms any point into any other point and admits free mobility in the infinitesimal around every point.

Semi-congruent groups in non-Archimedean geometry 76

For non-Archimedean plane geometry HILBERT established still another property (Ueber den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, Proc. London Math. Society 35 (1903), p. 50–68 ⟦Grundlagen der Geometrie, Anhang II⟧). If the ordinary (Euclidean or non-Euclidean) congruence groups exist, then, as we have seen, Pascal's theorem holds; but then beside these groups there exist *semi-congruent groups of motions*, possessing all the properties of the congruent groups of motions, though the plane is not symmetric with respect to that group and an isosceles triangle need not have equal angles at the base. The non-monodrome spiral group of HELMHOLTZ in ordinary Archimedean geometry has similar properties, but there a segment is not invertible, for a rotation through π changes its 'length', i.e. its invariant with respect to the group of translations; moreover, having fixed a point, any trajectory intersects every half-line emanating from that point more than once. In Hilbert's semicongruent group this is prevented by letting only the second of the two parts of the rotation angle (namely the finite and the infinitely small part; for angles there exists no infinitely large part) induce a proportional enlargement. Here every point does describe a spiral, but only with respect to the infinitely small part of the angle, which at the periods π and 2π is always 0. Thus the finite part of the distance to the centre 77
remains constant during the rotation, so that the origin cannot be indefinitely approached; further any half-line from the centre is intersected only once by the trajectories, and finally the invertibility of segments is preserved.

Mathematics can deal with no other matter than that which it has itself constructed ⟦25⟧

In the preceding pages it has been shown for the fundamental parts of mathematics how they can be *built up* from units of perception, by simple juxtaposition,

[1]) If only the bounded part is given with the characterizing properties (see p. 55 ⟦p. 40⟧), then the completion by ideal elements after F. SCHUR (Math. Annalen 39 (1891), p. 113–124) can be effected unchanged for the non-Archimedean geometry.

by building sequences of type ω or η, or by building continua, while at every stage in the process complete systems which have been constructed before can be taken as new units.

In the third chapter it will be explained why no mathematics can exist which has not been intuitively built up in this way, why consequently the only possible foundation of mathematics must be sought in this construction under the obligation carefully to watch which constructions intuition allows and which not, and why any other attempt at such a foundation is condemned to failure.

Often it is quite simple to construct inside such a structure, independently of how it originated, new structures, as the elements of which we take elements of the original structure or systems of these, arranged in a new way, but bearing in mind
78 their original arrangement. The so-called 'properties' of a system express the possibility of constructing such new systems having a certain connection with the given system.

And it is exactly this *imbedding* of new systems in a given system that plays an important part in building up mathematics, often in the form of an inquiry into the possibility or impossibility of an imbedding satisfying certain conditions, and in the case of possibility into the ways in which it is possible.

Examples have been treated above as inquiries into the possibility of imbedding transformation groups satisfying certain conditions *into given systems.* (There we may consider the continuum of group parameters as the system to be imbedded, and the character of that continuum as a continuum of group parameters, as the condition of the imbedding.) And in this form we have given, among other things, substrata of several recent investigations which were intended to shed light upon the foundations of mathematics, and which have mathematical meaning only in the sense of our interpretation – this last on the basis of ideas to be defended in the third chapter, for which the preceding development can be considered as an illustration.

II. MATHEMATICS AND EXPERIENCE

The intellect and the jump from the end to the means 81

Proper to man is a faculty which accompanies all his interactions with nature, namely the faculty of taking a *mathematical view* of his life, of observing in the world repetitions of sequences of events, i.e. of causal systems in time. The basic phenomenon therein is the simple intuition of time, in which repetition is possible in the form: 'thing in time and again thing', as a consequence of which moments of life break up into sequences of things which differ qualitatively. These sequences thereupon concentrate in the intellect into mathematical sequences, not *sensed* but *observed*. And human behaviour includes attempts to observe as many of these mathematical sequences as possible, in order, whenever in the real world intervention at an earlier member of such a sequence seems more successful than at a later member, to choose the earlier one as a guide for his actions, even when
his instinct is only affected by the later one. (Substitution of the *means* for the *end*.) 82
Nevertheless the non-instinctive nature of this intellectual action renders the certainty that the parts of a sequence really belong together, anything but perfect. Consequently it can always be falsified, which is observed in the discovery that 'the rule no longer applies'.

However, in general the consideration of sequences and consequent going back from the end to the means, where intervention appears easier, show themselves very efficient tactics from which mankind derives its power. Man succeeds in discovering regularities in a limited field of phenomena independent of other phenomena which consequently can remain completely latent in the intellectual consideration of the former.

In order to maintain as long as possible the certainty of an observed regularity, one tries to *isolate* systems, i.e. to exclude those observations which disturb the regularity; in such a way man *makes* far more regularity in nature than originally occurred spontaneously; he *desires* this regularity, because it strengthens him in the struggle for life, rendering him capable of predicting, and taking action.

Mathematical systems, containing more than given reality

This intellectual manner of looking at the world expands, because man builds up
pure mathematics out of the basic intuition of the intellect, without reference to 83
immediate applicability, and thus obtains a ready supply of unreal causal sequences which only wait for an opportunity to be projected into reality. Here it must be remembered that in those mathematical systems in which no time-coordinate appears, it is found that in practical applications all their relations still become relations in time. Thus, for instance, Euclidean geometry when applied to reality

gives the causal relations between the results of different measurements executed with the aid of the group of the rigid bodies. – Needless to say in the application usually only a small portion of the elements and subconstructions of a mathematical system find their counterpart in reality: the others only facilitate the understanding of the whole. [1]

Extension of applicability of mathematics by actual intervention

Similarly, after only a little development of the method, the observed sequences will no longer consist solely of phenomena observed independently of man's will, but will be complemented by phenomena evoked by man (deeds without any
84 direct instinctive aim, but executed only to complete the causal system so that it will become more easily manageable); the simplest example of this being the sound-image [2] of a cardinal number obtained by the process of counting, or the sound-image [2] of the measuring number obtained by the process of measurement.

Extension by induction from the real to the possible

Mathematical science does not however derive its great power solely from the observation of sequences which are approximately equivalent for the instinct, but from combining a very large number of such sequences from one point of view by means of a mathematical system built up with the aid of mathematical induction. Such a system is called a *law*; the difference between two sequences falling within it, depends only on a difference in values of the parameters occurring in the law. [3] Next to the really observed sequences with their determined parameter values, sequences with other parameter values are postulated as *possibilities*; the fact that only the observed values of the parameters occurred in reality is considered *accidental*.

On the other hand it appears that one can often successfully consider a quantity occurring in one single observed sequence as an accidental parameter value, and can thus correctly predict new sequences by means of induction.

85 The simplest inductive extension to a group of possible phenomena takes place by using the coordinates of space and time as parameters. The physicist considers
⟦1⟧ it accidental that a sequence realized itself *there* and *then* and not in another space and not at another time.

Continuity of functions in physics

After observing sequences and combining them by induction, the mathematical

[1] In particular one often applies to observed finite sequences the extension to sequences of ω terms, which is hypothetical since it exists only mathematically; on the introduction of such a sequence depends, for example, the infinite length of the time-coordinate.

[2] or written symbol.

[3] The most important application of combining by induction is found in the causal relations between numbers, i.e. between results of counting or measuring.

action on the world proceeds further. To be able to apply a large number of processes which are dependent on the measurable continuum, the discrete observations are in the first place completed to continuous functions [1]; it is not only the time-coordinate which is rendered continuous (for which ample justification is given by the intuition), but also every functional relation between measured quantities which have nothing to do with the time-coordinate. That again is an arbitrary act which is only justified because it apparently 'works'. Rendering the observed functions continuous is done by means of the well-known method of interpolation. This is again an arbitrary act which is not refuted by practice. By interpolation one obtains analytic functions, which one is inclined to use exclusively in the study of nature anyhow. Why?

Differentiability of physical functions

Mainly because of an arbitrary act of interpreting nature anthropomorphically: one notices from the observed resistance after one's own intervention that one 86
can change all conditions gradually. Consequently one postulates nearly equal behaviour in closely adjacent argument values for functions in nature which can be measured in practice. [2] If a function belongs to this category its difference quotients of various orders will also belong to it (for they are determined from the ⟦1a⟧
same measurements as the function itself); hence also the derivatives of various orders, and their difference quotients, *if these derivatives exist.* We shall show the latter to be the case. Let x_α be one of the independent variables and $\varepsilon_\Delta(x_\alpha)$ the maxi- ⟦2⟧
mum of the oscillations between x_α and $x_\alpha+\Delta$ of the difference quotients corresponding to the different increments of the independent variable x_α, where the increments successively take all the values between 0 and an arbitrary small but fixed value a. Then it follows from the above postulate that ε_Δ approaches 0 with Δ. Furthermore we have, if p/n is a proper fraction,

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha}=\frac{1}{n}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha}+\frac{1}{n}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha+\frac{1}{n}\Delta}+\dots+\frac{1}{n}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha+\frac{n-1}{n}\Delta};$$

$$\left(\frac{\Delta f}{\frac{p}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha}=\frac{1}{p}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha}+\frac{1}{p}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha+\frac{1}{n}\Delta}+\dots+\frac{1}{p}\left(\frac{\Delta f}{\frac{1}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha+\frac{p-1}{n}\Delta}.$$ 87

From this and the definition of $\varepsilon_\Delta(x_\alpha)$ given above it follows that

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha}-\left(\frac{\Delta f}{\frac{p}{n}\Delta x_\alpha}\right)_{x_\alpha}<\varepsilon_\Delta(x_\alpha)$$

in absolute value.

[1]) see however footnote 1 on page 90 ⟦note 3, p. 57⟧.

[2]) which does not alter the fact that often discontinuities are introduced in the mathematical image as an approximation to simplify calculations, where in nature no more than a rapid transition is postulated.

Hence the oscillation $\sigma_\Delta(x_\alpha)$ of the difference quotients for increments of x_α equal to a proper fraction of Δ, is smaller than $2\varepsilon_\Delta(x_\alpha)$.

Assuming in a given point an infinite series of indefinitely decreasing increments δ, in rational proportions to Δ, the oscillations $\sigma_\delta(x_\alpha)$ will decrease indefinitely in length, whilst each consecutive oscillation is contained within the previous one; the oscillations therefore converge to a single point. This result can immediately be extended to irrational δ (because of the continuity of the functions). The difference quotient for an increment δ falls within the oscillation $\sigma_\delta(x_\alpha)$; thus the former, as well as the latter, converges to the same point. Thus there exists a limiting value for the difference quotient, viz. the derivative. Analogously, starting
88 from the same postulate, the existence of all higher derivatives can be proved. [1]) (Here the basic idea was that the primitive arbitrary scales, e.g. measurement of time by means of a pendulum, measurement of length by means of a measuring rule, possess a kind of absolute truth, that is a kind of absolute equality for adjacent equal parts of the scale: these scales have in any case been constructed in a fairly intuitive manner.) [2])

Principles of mechanics

Further [3]) it was not assumed arbitrarily, but observed in practice a posteriori, that a large group of observed phenomena can be expressed by means of differential equations of the second order ('principle of inertia'). On the basis of this observation *force* could be introduced as a fertile auxiliary concept (the name
89 'force' being chosen in analogy with the influences exerted by our own bodies, which, roughly speaking, only exert an influence on the second differential quotients).

It was also observed that appropriate coefficients for bodies, called *mass*, could be introduced in such a way that very often systems could be considered as what is called *almost isolated*. This happens when one observes that the motion of the centre of gravity is approximately rectilinear and there can be shown to be an almost invariable axis of maximal momentum of the relative motion, through the centre of gravity.

[1]) whereby however the certainty that the function is analytic has not yet been obtained; see the remarks by Pringsheim, Math. Annalen 44 (1904), p. 41–56.

[2]) Where it was necessary to introduce different behaviour for functions in ranges of different order of magnitude (e.g. for molecular theories) it was endeavoured to retain the differentiability for both ranges of magnitude, even when it is assumed, in order to simplify calculations, that one measure is infinitely small compared with the other. In this case however one is often confronted by difficulties in the range of the larger measure. Thus, for some time it seemed difficult to retain the indefinitely continued differentiability of the potential function determined by means of Dirichlet's principle (see Hilbert, Ueber das Dirichletsche Prinzip, Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 8 (1899), p. 184–188 ⟦Ges. Abhandlungen III, p. 10–14⟧ and Math. Annalen 59 (1904), p. 161–186 ⟦Ges. Abhandlungen III, p. 15–37⟧, where nevertheless the indefinitely continued differentiability is proved).

[3]) For this and the following four paragraphs see Poincaré, La science et l'hypothèse, Chap. 10.

As a consequence the principle of equivalence of action and reaction was introduced in mathematical mechanics and systems were called isolated only when the motion of the centre of gravity was strictly rectilinear and uniform. And it turns out that a dynamics of rigid bodies, as well as a theoretical astronomy, can be practically controlled by mathematics built up on the notions of force and mass.

Mechanical interpretations of nature

The essential issue has been condensed into LAGRANGE's equations of motion; and it has turned out that nearly all sections of physics in which one is concerned with reversible changes can be represented by analogous equations. [1])

POINCARÉ [2]) has proved that for all these phenomena an interpretation in terms of a rigid mechanism is possible. That so often such interpretations have 90
been sought even in those fields in which another interpretation based on the existence of continuous and elastic matter seems more plausible (e.g. in the modern theory of gases and in WILLIAM THOMSON's explanation of elasticity by means of the principle of the gyrostatic spring), is probably the result of the fact that man is more familiar with the setting up of rigid constructions and mechanisms, and that he can control rigid bodies in their behaviour more easily; and that therefore the idea that nature only builds rigid mechanisms removes its mystery in so far as nature were to build things which man could not imitate building from matter; and also of the fact that in this way the considerable reliance on the invariability of the laws governing rigid bodies strengthens the illusion that 'nature can be controlled'. [3])

Since the interpretations of LAGRANGE's equations in terms of rigid mechanics 91
generally become very complicated and reduction to other, e.g. electrodynamical, phenomena could be made just as well as to the rigid group, it would perhaps be better to admit all groups of phenomena which can be represented by LAGRANGE's equations as having equal rights, and forgo constructing them by

[1]) while all other sections can be controlled by appealing to the principles of thermodynamics.

[2]) l.c. Chap. 12.

[3]) Or is the cause rather that a rigid body is the familiar example of an object determined by a finite number of coordinates, so that in this way, in the totality of the possibilities of a physical phenomenon, only a finite number of variables will enter and never an arbitrary function? The further consequence of this tendency would be that the remaining coordinates could only show discontinuous variations and could therefore be determined by means of integers, so that nature would only possess the order of freedom of a permutation group; everything possible in nature could be imitated by the juxtaposition in time and space of a finite number of elements in different admissible combinations (Compare here the remarks on p. 85 ⟦p. 54, 55⟧). That would bring nature still closer to the material structures of man, and to the limited freedom experienced in their creation.

Of course even with this conception the usual continuous functions for the description of nature would remain in use; they would appear as approximations of large numbers with small discontinuous variations.

means of elementary phenomena in the microscopic realm, as long as such a construction does not suggest us ways to the discovery of new phenomena.

Value of the 'explanation' of phenomena

For the value of explanations does not lie in substituting for a wonderful phenomenon a less wonderful one, nor in the greater perspicuity with which they allow the observed sequences to be catalogued [1]), but in the splitting up of
92 observations into *essential* and *accidental* components; also in the direction indicated by the splitting up, in which the actually observed can be extended to a larger field of *possibilities*, whereby new phenomena subject to regularity can be predicted. [2])

In other words, an effective 'explanation' opens a field of induction; when that field is grazed, then the explanation loses its topical significance; of what remained essential a new part will be separated and considered as accidental [3]) so as to create a new field of induction.

Both the occasion and the indication for the choice of this separation are often provided by the discovery that two groups of phenomena which were previously not known to be connected and each of which was governed by its own regularity, can come under each other's influence, i.e. that they can disturb each other's isolation when brought into proximity. Then science tries to choose the essential
93 part in the mathematical image of each in such a way that they appear as two accidental modifications of one and the same continuous region of possibilities, and that the common essential element is rendered as large as possible. In this way effective fields of induction, in which many phenomena which were previously unknown could be forecast with accuracy, have often been opened up.

Let us remark further that it can never be said afterwards that an explanation, which served its purpose in extending the region of known sequences by mean of induction, was shown to be incorrect. For, in that case, a clash with experience proves no more than that on the strength of the explanation a field of induction was opened which was *too large*. In such a case the explanation can always be saved by re-extending the essential parts in the mathematical image of the phenomena on which it was based, at the expense of the part which had been assumed as essential.

Such an explanation keeps a historical significance as the origin of a certain field of induction; but a more advanced significance is reserved for no explanation

[1]) As such different explanations are often equally suitable; consider e.g. the different hypotheses concerning the interaction of elements of currents, which showed themselves able to replace the hypothesis given by AMPÈRE; nor is it excluded that next to the molecular theories other equivalent theories will be developed.

[2]) in other words in the indication of quantities in the mathematical picture of the phenomena, which can be considered to be accidental values of a variable parameter.

[3]) He who believes in the reality of hypotheses will speak of 'going deeper into the nature of the phenomena'.

whatever. For, any new explanation which, in replacing an old one, covers a larger field of induction, will in its turn have to disappear when the limits of that field are reached; because man will always wish, and be able, to extend the totality of inductively summarized phenomena, in the realm of which he can *forecast results* and consequently intervene successfully.

Problems of space and time 94

We shall now touch upon the classical problems of *space* and *time* by enquiring generally in how far *objectivity* and *apriority* can be ascribed to mathematical systems. These questions, which still played an important part for RIEMANN and HELMHOLTZ, have since only interested philosophers and have been left aside by mathematicians in their researches on the foundations of their science. Only quite recently a book has been published which raises the above mentioned philosophical problems again in the light of the most recent results of mathematics. This work by B. A. W. RUSSELL, 'An essay on the Foundations of Geometry' ⟦Cambridge 1897⟧, has drawn general attention. It led to prolonged discussions in the Revue de Métaphysique et de Morale ⟦1898, 1899⟧ between POINCARÉ, COUTURAT, LECHALAS and the author himself, in which it came to light that some of the propositions in the book were untenable, but at the end of which a large part of the results was conceded to possess permanent value. COUTURAT even speaks of a κτῆμα εἰς ἀεί and of no less than a perfectioning of KANT's Transcendental Aesthetic.

We shall start by taking up our own stand with respect to the subject, after which we shall discuss the work of RUSSELL in greater detail by first drawing attention to a few mathematical errors in it, and then investigating in how far 95
the purport of the book can be vindicated.

Objectivity ⟦3⟧

First, then, about *objectivity*: the *mass* of bodies is called objective, and there one thinks of its indestructibility; we have seen above however that mass is nothing but a coefficient whose introduction simplifies the mathematical image of nature, and which remains invariant for mathematical transformations representing natural phenomena. If now natural phenomena would be discovered whose representation would be simplest by assuming variable mass, then mass could only go on being called objective on the ground of its invariance for a *very important group of phenomena* in the image of nature. It must however be remembered that this image of nature would have been arbitrarily chosen, for its simplicity and suitability to be sure, but nevertheless arbitrarily; that on the one hand the image might have been constructed, though forcing the issue, in such a way that the mass remains invariant for *all* the known phenomena, but on the other hand also in such a way that it remains invariant for only very few phenomena or that it even does not appear at all.

One can consequently only speak of objectivity (for quantities or laws) with
96 respect to a given mathematical image of nature and relative to a given group of phenomena. Or if one wants to speak of objectivity per se, it can mean nothing but:

either invariance for a *certain given* interpretation of all phenomena which are so far known; in which case it would be a property which we could introduce arbitrarily, albeit at the price of having to construct forced systems;

or invariance for the simplest or the most common interpretation of *all* phenomena so far known; in which case it would be a property which could disappear at any moment;

or invariance for the simplest or most common interpretation of a *very important* group of phenomena;

the last definition is the greatest mainstay, and though there remains a factor of subjective appreciation in it, one will not hesitate to call for example mass, energy and the Newtonian attraction objective in this sense, while objectivity is denied for example to temperature, magnetization and magnetic attraction.

Let us adhere to the last definition, and ask for example *in how far physical time and space are objective.* The answer must be that they possess this graduated property very completely, perhaps more completely than any other physical entity.

For in the first instance the fictive one-dimensional coordinate, on which the
97 one-parameter group, being the *scientific measure of time*, is constructed, penetrates into nearly all mathematical images of nature always with the same group, which assumes the character of an unalterable invariant.

This is valid to an even greater extent for the three-dimensional Cartesian space with the six-parameter group constructed on it (the Euclidean group), which is the *physical space*; because *all* known physical phenomena can be referred to it and without it the mathematical projection of those phenomena would become extraordinarily difficult. (It is perhaps not too risky to connect this with the fact that the fictive Euclidean space is derived from the group of motions of physical rigid bodies, and that we have to rely on those bodies for all our measurements. Since it is possible to measure magnitudes only in so far as they are related to the rigid bodies, it is not surprising that the mathematical image of the group of motions of the rigid bodies continues to play such an integral part in the mathematical image of the relations between magnitudes.)

Apriority

Next the *apriority*; this can mean one of two things:

1°. Existence independent of experience.
98 2°. Necessary condition for the possibility of science.

If the first alternative is meant, then it follows from its intuitive construction that all mathematics is a priori, e.g. the non-Euclidean geometry as much as the Euclidean, the metrical as much as the projective.

Now let the second alternative be meant. Where scientific experience finds its origin in the application of intuitive mathematics to reality and, apart from experimental science, no other science exists barring only the properties of intuitive mathematics [1]), we can call a priori only that one thing which is common to all mathematics and is on the other hand sufficient to build up all mathematics, namely the intuition of the many-oneness, the basic intuition of mathematics.

And since in this intuition we become conscious of time as change per se, we 99
can state:

The only a priori element in science is time. [2])

Coming to RUSSELL's book, we first point out the following inaccuracies:

⟦We refer to the first edition, 'An essay on the Foundations of Geometry', ⟦4⟧
Cambridge 1897.⟧

1. *Space as a Zahlenmannigfaltigkeit does not presuppose free mobility.*
RUSSELL tries to prove that the axiom of RIEMANN and HELMHOLTZ, namely that space is a 'Zahlenmannigfaltigkeit', presupposes the axiom of free mobility.

From his none too brief reasonings on this point we cite those parts which are most clearly formulated:

(§ 62) '... for all the necessary adjectives of space are presupposed in any judgment of spacial quantity, and cannot, therefore, be consequences of such a judgment.' ... 'In formulating the axioms of metrical geometry, our question should 100
be: What axioms, i.e. what adjectives of space, must be presupposed, in order that quantitive comparison of the parts of space may be possible at all?' ...

(§ 64) 'But if 'measurement *consists* in a superposition of the magnitudes compared', does it not follow immediately that measurement is logically possible *only* where such superposition leaves the magnitudes unchanged? And therefore that measurement, as above defined, involves, as an *a priori* condition, that magnitudes are unchanged by motion?' ...

(§ 144) 'We require, then, at the very outset, some criterion of spatial equality; without such a criterion metrical Geometry would become wholly impossible. It might appear, at first sight, as though this need not be an axiom, but might be a

[1]) Strictly speaking the construction of intuitive mathematics in itself is an *action* and not a *science*; it only becomes a science, i.e. a totality of causal sequences, repeatable in time, in a mathematics of the second order, which consists of the *mathematical consideration of mathematics* or *of the language of mathematics*; only there one meets with causal connections in the way in which mathematical systems on the one hand, mathematical symbols, words or ideas on the other hand, succeed one another. But there, as in the case of theoretical logic, we are concerned with an *application of mathematics*, that is with an *experimental science*. Cf. in this connection the developments of the third chapter.

[2]) Of course we mean here *intuitive time* which must be distinguished from *scientific time*. By means of experience and very much a posteriori it appears that scientific time can suitably be introduced for the cataloguing of phenomena, as a one-dimensional coordinate having a one-parameter group.

⟦5⟧ mere definition. In part this is true, but not wholly.' ... 'It follows that the application of the conception of magnitude to figures in space involves the following axiom: *Spatial magnitudes can be moved from place to place without distortion.*' ... 'that metrical Geometry, if it refused this axiom, would be unable, without a logical absurdity, to establish the notion of spatial magnitude at all' ...

(§ 153) 'We spoke above of the Geometry on an egg, where Free Mobility does
101 not hold. What, I may be asked, is there about a thoroughly non-congruent Geometry, more impossible than this Geometry on the egg? The answer is obvious. The Geometry of non-congruent surfaces is *only* possible by the use of infinitesimals, and in the infinitesimal all surfaces become plane. ... *If we had not our Euclidean measure, which could be moved without distortion, we should have no method of comparing small arcs in different places.*' ... ⟦italics of Brouwer⟧

This last sentence is wide open to disproof. For we can construct a Cartesian space in which arbitrary systems of surfaces are taken as coordinate-planes, while in each coordinate an arbitrary one-parameter group is fixed as basis for the determination of measurement; then we can define an arbitrary function of the infinitesimal increments of coordinates as an element of arc, and as distance between two points, their geodesic distance. To be able to compare quantities in different parts of space, we need consequently not assume the possibility of displacement for three-dimensional bodies, but only for one-dimensional threads. And here we do not even necessarily obtain in the infinitesimally small a geometry with free mobility, witness for example the Minkowski geometry (see Chapter I, p. 59 ⟦p. 43⟧).

102 **2.** *A space constant variable in time is easily conceivable.*

In § 100 the author states that it is *inconceivable* that the space constant could vary with the time.

'This would involve a causal connection between space and other things, which seems hardly conceivable, and which, if regarded as possible, must surely destroy Geometry, since Geometry depends throughout on the irrelevance of Causation. Moreover in all operations of measurement, some time is spent; unless we knew that space is unchanging throughout the operation, it is hard to see how our results could be trustworthy, and how, consequently, a change in the parameter could be discovered.' ⟦The words 'unless ... operation' are left out in the French translation.⟧

If this means that a space with a variable constant is inconceivable, we can reply: Imagine an expanding sphere. All rigid bodies on it are deformed in a definite manner; with respect to each other these bodies will also be deformed, but at every moment the deformation is invariant with respect to displacements. Consequently the rigid group remains a rigid group but the space constant for the displacement group is changed. If it means that the empirical space-constant can never vary, then it is in fact true that we can never discover a variance, because all we do is to catalogue our empirical phenomena in a Euclidean space

created by ourselves. We can maintain the Euclidean space independent of the phenomena; but we can catalogue just as well in a space which has a different 103
curvature at different moments.

The observations with our astronomical instruments are catalogued most simply if we assume a continuation of the usual terrestrian Euclidean space in celestial space and in it a rectilinear prolongation of light rays, which strike our telescopes. It is, however, not impossible that observations of stars with very small parallax could be catalogued more simply as follows: instead of assuming for the bundle of directions of light rays centred at the observation-point the relation at very great distances between the measure *along* the rays and that *between* the rays in the form

$$ds_{\text{perpendicular to } r} = r\,d\varphi,$$

we assume it in the form

$$= \frac{1}{\alpha} \sin \alpha r \cdot d\varphi$$

or

$$= \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha r \cdot d\varphi$$

(where α is so small, that only for very great distances a perceptible difference with the formula $= r d\varphi$ would occur). We could even assume other relations which would not give the same constant in every point of space.

Nor can we give an a priori reason why this space constant, and therefore this principal group of motions could not vary, for example under mutual influences of different systems of celestial bodies. One could even state:

At the moment when the suitability of the constant α were to be discovered, 104
the space would suddenly turn from Euclidean into non-Euclidean; in the same way as POINCARÉ put it that the earth only rotated from the time that COPERNICUS stated it.

3. *There are no circular reasonings in the construction of geometry.*

In § 108 it is stated: 'All geometrical reasoning is, in the last resort, circular: if we start by assuming points, they can only be defined by the lines or planes which relate them: and if we start by assuming lines or planes, they can only be defined by the points through which they pass.' The *construction* of the Euclidean geometry already proves the inaccuracy of this statement.

4. *For experience a higher-dimensional continuum is not a necessary condition.*

In § 186–192 the following proposition is discussed: 'The existence of diverse but interrelated things would be unknowable, if there were not, in sense-perception, some form of externality.' The essential point of reasoning amounts to pointing out that what we have called the basic intuition of mathematics, is indispensable for every intellectual function. In § 191 in particular the author tries to prove that *time alone* is not sufficient, on the argument that in that case no

objects could be perceived. We answer: The simplest causal sequences which man
105 can perceive have in reality for their mathematical substratum only *time* as a one-dimensional intuitive continuum; it does not matter that in them no other objects, that is invariants, than time itself, appear. Objects only appear in portions of experience with a more complex mathematical substratum, in the same way as invariants enter only in mathematical systems of greater complexity.

In connexion with the above mentioned proposition, it is maintained in § 135 that the form of externality, which should, next to time, be admitted as a necessary condition for experience and which will have to appear as empirical space, must of necessity have more than one dimension. 'For in a one-dimensional form, the various contents may be arranged in a series, and cannot, without interpenetration, change the order of contents in the series. But interpenetration is impossible, ... A form of one dimension, therefore, could not, by itself, allow that change of the relations of externality by which alone a varied world of interrelated things can be brought into consciousness.' To which we answer again that such a world of *objects* (*things*) is not a necessary condition for experience; that empirical space is an arbitrary creation to enable us, all the same, with the aid of mathematical induction to bring *different* causal sequences (of results of measurements) together *under one point of view*; and that the creation of such an idealizing summary of real experiences as parts of a fictive totality of possible
106 experiences, does not entail the result that invariants which merit the name of objects will enter into real experience.

The only remark which can be made in this connection in the direction of RUSSELL's line of thought is that, as soon as mathematical induction enters in the mathematical image of experience as a means of taking together *different* sequences, the basic intuition of mathematics will enter there twice independently and in different ways; that will lead to a higher-dimensional continuum if we understand it as continuous in both cases; but the mathematical *existence* of a higher-dimensional continuum is independent of experience, and its applicability to experience is a posteriori.

A higher-dimensional form of externality per se is a fortiori not necessary for experience.

If the introduction of a higher-dimensional continuum is therefore not necessary a priori, it is even less so for a higher-dimensional continuum with such relations between the elements that it can be considered as a form of externality per se, as in the case of the one-dimensional intuitive continuum.

And only on the basis of these incorrect opinions RUSSELL (§ 129–139) develops the following properties of empirical space as being necessary for experience,
107 deducing them [1]) from the conception of the *form of externality per se*, realized in a higher-dimensional continuum:

[1]) These deductions are themselves also incorrect; see POINCARÉ, Des fondements de la géometrie § 4, Revue de Métaphysique et de Morale, 1899, p. 251–279.

I. 'Space is continuous and infinitely divisible; the result of infinite division, the zero of extension, is called a *point*. All points are qualitatively similar and can only be distinguished by the fact that they are mutually external to one another.'

II. 'Any two points determine a unique figure, called a straight line. Two straight lines, like two points, are qualitatively similar and can only be distinguished by the fact that they are mutually external to one another.'

III. 'Any three points which are not collinear determine a unique figure, the plane, and four points not lying in one plane determine a figure of three dimensions. This progression can as far as one can judge *a priori* be prolonged up to five or n points without excluding in any way the possibility of a projective Geometry. But projective Geometry demands, through its axioms, that this progression stops at a positive integral number of points, after which every new point must be contained in the figure determined by those which are already given. If this progression stops at $(n+1)$ points, it is said that the space has n dimensions.'

5. *Projective geometry is not necessary for experience.*

Further it is a mathematical blunder to describe the above mentioned axioms as
a complete characterization of projective geometry. [1]) For the core of the projec- 108
tive axioms, namely the properties that the ^{p}space determined by $(p+1)$ points contains every straight line having 2 points in common with it, and that a straight line and an $^{n-1}$space must intersect, are missing, and cannot be deduced from RUSSELL's axioms. In fact, in a Cartesian space we can construct an arbitrary number of systems of curves, surfaces etc., which satisfy the projective axioms. Thereupon we can define the relation between 2 points as the straight line of any one system, and the relation between 3 points as a plane from another system; in this way the axioms of RUSSELL are satisfied, but not the projective axioms.

The creation of the projective system is not only unnecessary, but also anything but primitive or simply determined, as appears clearly from the developments of HAMEL which I summarized in Chapter I, p. 57 ⟦p. 41⟧ seq., and which show how the linear systems can be determined in many different ways. These ways can again be multiplied indefinitely by arbitrary uniform point transformations; for in this way the intrinsic properties of the straight lines are retained in the geodesic curves into which the lines are transformed, so that they will always allow a transformation group, isomorphic with the projective group.

6. *Free mobility is not necessary for experience.* 109

The author also tries to deduce the axiom of free mobility from the concept of *form of externality per se* (in particular § 143–157).

(§ 62) 'The conditions of measurement themselves, though not results of any conception of magnitude, will be *a priori*, if it can be shown that, without them, experience of externality would be impossible.'

[1]) See POINCARÉ, l.c. § 3.

(§ 145) 'Space must, since it is a form of externality, allow only of relative, not of absolute, position, and must be completely homogeneous throughout.'

We shall not discuss the reasonings relative to this question, which form perhaps the weakest part of the work; it is, of course, clear that what was proved to be incorrect for the projective group, can a fortiori not hold for the more special groups of the Euclidean and of the non-Euclidean motions.

We only remark that Couturat (criticism of Russell, Revue de Métaphysique et de Morale 6 (1898), p. 372 seq.) infers a perfectly correct consequence from the above mentioned thesis. Russell states in § 145: 'Space must, since it is a form of externality, allow only of relative, not of absolute, position, and must be completely homogeneous throughout.' In other words (§ 144): 'Shapes do not in any way depend upon absolute position in space.'

110 Couturat then points out that where a reason can be found to deny any influence of absolute *orientation*, as much reason can be given to deny the influence of absolute *magnitude*, since at most relative quantities, and in no case absolute quantities, can occur in the concept of the *form of externality per se*. And from this he deduces that not only the axiom of free mobility, but also the Euclidean axiom of parallel lines and consequently the whole Euclidean geometry must be considered to be a priori.

Couturat is correct in his criticism of Russell, but we repeat: The form of externality is only a priori in *one* dimension, and there neither absolute, nor even relative, quantities occur in it. Relative quantities only appear after a one-parameter continuous and uniform group has been constructed as an arbitrary mathematical construction on the one-dimensional continuum (in such a construction the *element*, i.e. the basic intuition of the form of externality, is unalterable and a priori, but what remains arbitrary is the *way* of linking together the repeated applications of the basic intuition to that which has been previously constructed or parts thereof).

7. *The projective distance does not presuppose 'ordinary' distance.*

In § 37 the author tries to retain *distances* on a straight line as primitive conceptions. It is said that Klein's projective introduction of distances by means of the quadrilatical construction arbitrarily defines *something other* than distance,
111 and that this definition is impossible without a previous conception of what Russell calls 'distance in the ordinary sense'.

As an illustration we cite (§ 37): 'If A, B, C be three different points on a line, there must be *some* difference between the relation of A to B and of A to C, for otherwise, owing to the qualitative identity of all points, B and C could not be distinguished. But such a difference involves a relation, between A and B, which is independent of other points on the line; for unless we have such a relation, the other points cannot be distinguished as different. Before we can distinguish the two fixed points, therefore, from which the projective definition starts, we must already suppose some relation, between any two points on our line, in which they are independent of other points; and this relation is distance in the ordinary sense. ...Distance, in the ordinary sense, remains a relation between *two* points, not between four.'

Here he loses sight of the fact that one can very well conceive a continuum without being able to compare 'magnitudes' thereon. This becomes possible only after preference is given to an arbitrary one-parameter group. (As a matter of fact Russell himself touches upon this difference between 'intensive' and 'extensive' magnitudes in § 178 and emphasizes it later in his 'Principles of Mathematics' ⟦p. 182⟧.) Furthermore it is incorrect to call the linear distance a relation between 112
two points, it can only occur in relations between two distances, hence in relations between at least *three* points. This insight is also obtained from the one-parameter group with which every scale, and hence every determination of distance, is equivalent.

8. *Lie's results*

In § 45 the results of Lie are reproduced incorrectly. It is stated: '*In two dimensions*, if free mobility is to hold *universally*, there are no groups satisfying Helmholtz's first three axioms, except those which give the ordinary Euclidean and non-Euclidean motions; but if it is only to hold *within a certain region*, there is also a possible group in which the curve described by any point in a rotation is not closed, but an equiangular spiral. To exclude this possibility, Helmholtz's axiom of monodromy is required.'

But this is not so. If free mobility is to apply to the whole space, [1]) then all
Euclidean and non-Euclidean motions can no longer be taken into consideration, 113
but only the non-Euclidean elliptic group (see Lie, 'Ueber die Grundlagen der Geometrie', Leipziger Berichte 1890, p. 289).

Consequently the postulate of free mobility *over the whole space* cannot serve to retain the Euclidean and non-Euclidean motions and to exclude the spiral group. One must postulate either that pseudocircles do not contain their centre (not even as a limiting point) or Helmholtz's postulate of monodromy.

Further it is stated:

'If, in three dimensions, free mobility, within the specified region, holds only of every point *of general position*, while the points of a certain line, when one point is fixed, are only able to move on that line, not on the surface; when this is the case, other groups are possible, and can only be excluded by Helmholtz's fourth axiom.'

Lie's result however amounts to this: 'and cannot be excluded even by Helmholtz's fourth axiom'.

[1]) Lie means the complete projective space, for which the Euclidean and hyperbolic groups have their fundamental conic as unattainable points, and such an unattainable point does not possess the property that if it is fixed together with an arbitrary line-element through it, the whole plane will then be fixed.

KANT's *point of view*

We now come to the main purport of the work, which was intended to rectify KANT's point of view on apriority in the experience and bring it up to date.

KANT defends the following thesis on space:

114 The perception of an external world by means of a three-dimensional Euclidean space is an invariable attribute of the human intellect; another perception of an external world for the same human beings is a contradictory assumption.

KANT proves his thesis as follows: [1])

Of empirical space we notice two things:

1°. We obtain no external experiences barring those placed in empirical space, and cannot imagine those experiences apart from empirical space (l.c. under (1) and (2));

2°. For empirical space the three-dimensional Euclidean geometry is valid (l.c. under (3));

from which it follows that the three-dimensional Euclidean geometry is a necessary condition for all external experiences and the only possible receptacle for the conception of an external world so that the properties of Euclidean geometry must be called *synthetic judgments a priori* for all external experience.

Both premisses serve to demonstrate in a certain sense (which is stronger than that meant by us on page 96 ⟦p. 60⟧) the *objectivity* in the first instance of empirical space per se, without which no external experience is said to be accessible
115 to thought (this probably only means a three-dimensional Cartesian space), and secondly of the group of Euclidean motions constructed thereon. But it can immediately be objected that we *obtain* our experiences apart from all mathematics, hence apart from any space conception; mathematical classifications of groups of experiences, hence also the creation of a space conception, are free actions of the intellect, and we can arbitrarily refer our experiences to this catalogization, or undergo them unmathematically.

Consequently the addition to the first premiss, that we cannot imagine our known external experiences apart from our space conception, is definitely false. With it the conclusion basing the *apriority* of three-dimensional Euclidean geometry mainly on this addition, must also be rejected.

But even accepting KANT's premisses, we can advance the following argument against the conclusion: cannot the human intellect be organized as well in such a way that it can place the conception of an external world in other receptacles, without this being realized *in practice*; for instance because little effect can be obtained from it and consequently our capacity for it receives very little practice? Empirical rigid bodies are the only ones to which the human measuring instinct can apply itself; that explains why the group of motions of these rigid bodies
116 gradually became the schema of human understanding on results of measurements.

[1]) Kritik der reinen Vernunft, ed. Kehrbach, p. 50–52 ⟦B 50–52⟧.

But though our virtuosity in relating the phenomena of the world of experience to this schema is considerable, this does not exclude us from practising not only to construct other schemas, but also to relate our experiences to them. The human intellect undergoing external experiences can therefore, if that is the case, disengage itself very well from three-dimensional Euclidean geometry.

Russell's point of view

This last point is also upheld by RUSSELL, but he wants to retain as necessary properties of the receptacle the properties of projective geometry and the axiom of free mobility, so that only a choice remains between the Euclidean, elliptic and hyperbolic geometries of a certain number of dimensions.

Furthermore he is of the opinion, that, although the human intellect is organized for these different geometries, experience teaches us that only the three-dimensional Euclidean geometry can be serviceable for this accidentally given reality, for which it would be true to a high degree of approximation (see e.g. § 209).

We have pointed out above how RUSSELL deduces the first of these two propositions:

for projective geometry out of an incorrect claim that the mathematical sub-
stratum of experience possesses more than one dimension, and the incorrect 117
extension to space constructed from more dimensions of the conditions which a *form of externality per se* must satisfy;

for metrical geometry out of the arbitrary introduction of *measurability* (which can only be done by the construction of a group, as indicated here in the first chapter, and which is not a necessary condition for experience), and further again out of the incorrect generalization to higher-dimensional spaces of postulates which are only justified for one dimension.

As for the second proposition, *there does not exist a definite empirical space*: we can catalogue all phenomena in every space, with any number of dimensions, and curved as grotesquely as we wish, hence also without free mobility. Empirical *science* is bound up with mathematics, but experience can never compel us to the choice of one *definite* mathematical system.

The three-dimensional Euclidean geometry is a six-parameter group, in which the motions of empirical rigid bodies in our immediate neighbourhood can be represented with a very high degree of approximation. Further a substratum of the phenomena of nature, which are studied by man, can often be easily submitted to a law in the group of motions of empirical rigid bodies (the most appropriate method for this being in practice the construction, by means of the said
group, of empirical curves which are called *straight lines*, and the construction on 118
these straight lines of scales, called *scales of distances*). This substratum can be used as a means to control these phenomena for many purposes, and has enabled man to construct serviceable measuring implements for technology and physics based on empirical rigid bodies. In this way Euclidean geometry, that is the

Euclidean mathematical *group* became the basis for all understanding of man on all phenomena of his world of experience.

Through its constant use Euclidean geometry has become a most generally serviceable part of mathematics, but it can very well be imagined that with the same organization of human intellect another mathematical construction would have become as popular.

Summary of the relation between mathematics and experience

Summing up our point of view with regard to both main points of KANT's Transcendental Aesthetic:

a). *With respect to what is inseparable from external experience*: Not only does, as was stated on p. 98 ⟦p. 60⟧, mathematics exist independently of all experience, but all experience is also independent of all mathematics. Human experience is not passively subjected to any single mathematical system; not even to the coordinate of time, nor even to the time-continuum devoid of measure.

119 b). *With respect to the necessary occurrence in the mathematical receptacle of experience*: The necessity exists only for the primitive intuition of mathematics, because the mathematical receptacle of experience is not subject to any restriction barring mathematics itself. Mathematics develops out of its basic intuition in a self-multiplication guided by an entirely free choice. The only synthetic judgments a priori generally, are therefore those which are obtained as possibilities of mathematical constructions by virtue of the basic intuition of time, or of many–one-ness, in other words which are obtained as possibilities of sets of points on the continuum. [1]) Consequently there can be mentioned as such judgments:

1°. the very possibility of mathematical synthesis, of thinking many–one-ness, and of the repetition thereof in a new many–one-ness.

2°. the possibility of intercalation (namely that one can consider as a new element not only the *totality* of two already compounded, but also that which

120 *binds* them: that which is not the totality and not an element).

3°. the possibility of infinite continuation (axiom of complete induction).

Experience a posteriori can teach us nothing about the necessity of the occurrence of definite mathematical systems in experimental *science*.

121 The following summary gives a ready comparison between the points of view of KANT and RUSSELL and that developed here:

[1]) One must however not try to base mathematics or experience on these judgments: the latter are the result of the *mathematical contemplation* of the basic intuition and hence presuppose the basic intuition in the contemplation as well as in that which is contemplated; they belong to what we shall call in the next chapter *mathematics of the second order*.

	In KANT'S Transcendental Aesthetic	In RUSSELL'S Foundations of Geometry	In this work
Inseparably linked up with external experience is:	the threedimensional Euclidean space and the time devoid of measure.	the threedimensional Euclidean space and the measurable time-coordinate.	nothing.
Necessarily appearing in the mathematical receptacle of experience is:			
a) by virtue of the organization of the human intellect:	the threedimensional Euclidean space and the time devoid of measure.	the projective space, free mobility in space and the measurable time-coordinate.	the basic intuition of mathematics or the intuition of time.
b) by virtue of experience:	nothing.	the three-dimensionality of space and the parallel-axiom of Euclid.	nothing.

III. MATHEMATICS AND LOGIC

125 *Mathematics is independent of logic.*

We want to show that mathematics is independent of the so-called *logical laws* (laws of reasoning or of human thought). This seems paradoxical, for usually mathematics is expressed, orally or in writing, in the form of argumentation, deduction of properties, by means of a chain of syllogisms. But the conceptions which are evoked by the words used in such an explanation, consist in the following: Where mathematical objects are given by their relations to the basic or complex parts of a mathematical structure [1]), we transform these given relations by a sequence of tautologies [2]) and thus gradually proceed to the relations of the object to other components of the structure.

The proofs which we gave in Chapter I for the very first theorems of mathe-
126 matics, taught us to read these theorems as tautologies. The fact that in more complicated cases a theorem is not immediately clear, but is only understood after a chain of tautologies, proves merely that we build our structures too complicated to be comprehended in one view.

In one particular case the chain of syllogisms is of a somewhat different kind, which seems to come nearer to the usual logical figures and which actually seems to presuppose the hypothetical judgment from logic. This occurs when a structure is defined by some relation in another structure, while it is not immediately clear how to effect its construction. Here it seems that the construction is *supposed* to be effected, and that starting from this hypothesis a chain of hypothetical judgments is deduced. [3]) But this is no more than apparent; what actually happens is the following: one starts by setting up a structure which fulfills part of the required relations, thereupon one tries to deduce from these relations, by means of tautologies, other relations, in such a way that these new relations, combined with those that have not yet been used, yield a system of conditions, suitable as a starting-
127 point for the construction of the required structure. Only by this construction will it be proved that the original conditions can be fulfilled.

'But', the logician will retort, 'it might have happened that in the course of these reasonings a contradiction turned up between the newly deduced relations

[1]) this means that the object in question is built in connection with the components to which it is said to be related.

[2]) i.e. by fixing one's attention on different substructures of the mathematical system.

[3]) Consider for instance the unicity proofs by HILBERT and LIE for transformation groups with given properties, or even the usual elementary construction problems in geometry, like the construction of a common harmonic pair to two given pairs of points, or the problems of APOLLONIUS.

and those that had been kept in store. This contradiction, to be sure, will be observed as a logical figure, and this observation will be based upon the principium contradictionis.' To this we can reply: 'The words of your mathematical demonstration merely accompany a mathematical *construction* that is effected without words. At the point where you enounce the contradiction, I simply perceive that the construction no longer *goes*, that the required structure cannot be imbedded in the given basic structure. And when I make this observation, I do not think of a principium contradictionis.

Logic depends upon mathematics.
While thus mathematics is independent of logic, logic does depend upon mathematics: in the first place *intuitive logical reasoning* is that special kind of mathematical reasoning which remains if, considering mathematical structures, one restricts oneself to relations of whole and part; the mathematical structures themselves are in no respect especially elementary, so they do not justify any priority of logical reasoning over ordinary mathematical reasoning. It could be put forward: The *successor* relation, which is essential in mathematics proper, 128
does *not yet* occur in the mathematics of logical reasoning. Then the reply must be: It is true that this relation *no longer* occurs *explicitly*, but here as well as in all mathematics it is presupposed; for it accompanies any mathematical construction, albeit that when the construction is ready, it is no longer immediately apparent for some relations between the elements.

People try by means of sounds and symbols to originate in other people copies of mathematical constructions and reasonings which they have made themselves; by the same means they try to aid their own memory. In this way the *mathematical language* comes into being, and as its special case the *language of logical reasoning.* [1])

With which mathematical notions a spoken or written symbol will be made to correspond, this choice will take into account as economically as possible the most common mathematical systems and methods of reasoning; therefore it will in general differ according to the milieu. In particular, the answer to the question 129
which domains of mathematics will be accompanied by a language not only among professional mathematicians, but also in daily life, will depend for every nation anew upon the question, which domains of mathematics have found most applications to the guidance of action or as a means of understanding about action.

Therefore it is easily conceivable that, given the same organization of the

[1]) Even in domains of mathematics where no relations of whole and part enter, *the relations which were in the mind are often transformed into relations of whole and part,* when they must be communicated verbally to other people; hereby the usual language of mathematics in general is imbued with that of logical reasoning. However, this fact is due only to the centuries-old tradition of logical terms in language, in connection with its limited vocabulary.

human intellect and consequently the same mathematics, a different language would have been formed, into which the language of logical reasoning, well known to us, would not fit. Probably there are still peoples, living isolated from our culture, for which this is actually the case. And no more is it excluded that in a later stage of development the logical reasonings will lose their present position in the languages of the cultured peoples.

Man, inclined to take a mathematical view of everything, has also applied this bias to mathematical language, and in former centuries exclusively to the language of logical reasonings: the science arising from this activity is *theoretical logic.*

⟦1⟧ It is only in the last twenty years (though the earliest traces go back to LEIBNITZ) that people have started looking in the same way at *mathematical language in general*: this is the content of *logistic*, insofar as it is studied without overrating its value. [1])

130 We infer that theoretical logic as well as logistic are *empirical sciences* and that they *apply* mathematics; consequently they can yield no information whatsoever on the organization of the human intellect; there would be better reasons to reckon them under *ethnography* than under *psychology.*

And the language of logical reasonings is no more an *application of theoretical logic* (for that matter, if this were the case, of which science would the language of theoretical logic itself be an application?) than the human body is an application of anatomy.

Let us, by way of illustration, consider the classical syllogism:

All men are mortal.
Socrates is a man.
ergo: Socrates is mortal.

The thoughts accompanied by these words are the following:

We start by projecting in the world of perception a mathematical system, namely a finite set of 'subjects', each of which is connected with some (none or one or more) elements of another set whose elements are called 'predicates'.
131 It turns out that in the human intellect a part of the world of perception can approximately be projected on such a system.

Why, in such a system it is a *mathematical* tautology that, if the elements bearing the predicate 'man' are part of those bearing the predicate 'mortal', that then the element 'Socrates' from the first set also belongs to the second set. We have here one of the very simplest forms of mathematical reasoning, namely passing by a tautology from one relation to another.

However, looking at the *words* that accompany this primitive form of mathematics, we notice in them a surprising mechanism with a regularity which is not clear a priori. That is to say, it is possible to project on these words a new

[1]) see p. 159 seq. ⟦p. 88 seq.⟧. The systems of logistic developed until now consider a mathematical language which uses excessively the words of theoretical logic, and which sometimes, where excessive use leads to illicit use, gave rise to error.

simple mathematical system; speaking about this system we explain the *theory of the syllogism.* But the mathematical systems which function in this theory are of a very simple kind, and therefore no logic is required to understand them.

While in the syllogism a mathematical element could be discerned, the proposition:

A function is either differentiable or not differentiable

says *nothing*; it expresses the same as the following:

If a function is not differentiable, then it is not differentiable.

But the logician, looking at the *words* of the former sentence, and discovering a regularity in the combination of words in this and in similar sentences, here again
projects a mathematical system, and he calls such a sentence an *application of* 132
the tertium non datur. ⟦2⟧

Further we emphasize that the syllogism and the other logical principles may be reckoned to hold for the language of logical reasonings on finite sets, on denumerably infinite sets, on domains in continua, but in any case exclusively on mathematically constructed systems; the conviction that we may rely on that applicability, is based on the *certainty* that mathematically constructed systems are under discussion.

On the basis of linguistic images which accompany basic mathematical truths in actual mathematical structures, it is sometimes possible to build up *linguistic* structures, sequences of sentences, proceeding according to the logical laws. If it turns out that such a structure can never produce the linguistic form of a contradiction, then all the same it belongs to mathematics only in its quality of a linguistic structure, and it has nothing to do with mathematics outside of it, such as ordinary arithmetic or geometry.

So the idea that by means of such linguistic structures we can obtain knowledge of mathematics apart from that which can be constructed by direct intuition, is mistaken. And more so is the idea that we can lay in *this* way the *foundations* of
mathematics, in other words, that we can assure in this way the reliability of the 133
mathematical theorems.

We shall now, on the basis of the considerations given above, discuss successively in more detail:

1°. The foundation of mathematics on axioms.
2°. CANTOR's theory of transfinite numbers.
3°. The logistic of PEANO–RUSSELL.
4°. The logical foundations of mathematics after HILBERT.

Ad 1°

EUCLID *improved*

Here the classical example is the geometry of EUCLID. It has been convincingly demonstrated by recent investigations of PASCH, SCHUR, HILBERT, PEANO, PIERI

and others, that as a logical linguistic structure it is imperfect, namely that here and there tacitly axioms are introduced, but these mathematicians had little trouble to improve it in this respect. However they, especially HILBERT, have occupied themselves by building linguistic structures for *pathological geometries.* The purpose of these constructions is to show, which properties (i.e. sentences, expressing geometrical properties in Euclidean geometry) can, and which cannot, be preserved if some of the axioms are dropped (following the tracks of LOBATCHEWSKI, who investigated what remains of EUCLID's logical structure if the
134 axiom of parallels is dropped [1])). In particular they aimed at minimizing the necessary axioms for each of the logical structures obtained in this way. Thus HILBERT has shown for most of the axioms put forward in his Festschrift ⟦Grundlagen der Geometrie⟧ that the geometry loses part of its properties if the axiom is left out. [2])

We must remark however that EUCLID cannot be blamed for incompleteness of his axioms if he conceived his mathematical structure of Euclidean geometry as being already *finished* (in the form of a Cartesian space with a group of motions), and if his reasonings serve no other purpose than to accompany the transition by
135 a chain of tautologies from clearly perceived relations (i.e. substructures) to new relations which are not immediately perceived; in other words, if they accompany the exploration of a structure built by himself. In this case his work belongs to pure mathematics, and the fact that he does not introduce coordinates in order to operate with them, is no more than a flaw in his method.

Of course it is also possible that EUCLID has not seen it this way and that he lapsed into the mistake which so many people made, thinking that they could reason logically about other subjects than mathematical structures built by themselves, and overlooking the fact that, wheresoever in logic the word *all* or *every* is used, this word, in order to make sense, tacitly involves the restriction: *insofar as belonging to a mathematical structure which is supposed to be constructed beforehand.* [3])

[1]) Though it is not difficult to deduce from LOBATCHEWSKI's calculations a *proof of existence*; it is not impossible that he himself meant it that way; see for instance Pangeometrie, Kazan 1856, § 8 ⟦Gesammelte geometrische Abhandlungen, Kazan 1883–1886, p. 617–680; see also Géometrie imaginaire, J. reine angew. Math. 17 (1837)⟧.

[2]) Still, even if he had proved this for each of his axioms – he does not investigate the 'Axiome der Verknüpfung' nor the 'Axiome der Anordnung'; he motivates this by the hazy reason that they 'bei unserer Darstellung den übrigen Axiomen zu Grunde liegen' – even then the proof of minimality would not be complete. For any axiom in which the word *every* occurs, can be split up, already in the axiom for *every except one* and that for *that last one*, and in each case it ought to be shown that the second part does not follow from the first; possibly this can be done, but certainly not quite simply, and in this respect HILBERT has left his research unfinished.

[3]) Besides this delusion on the *freedom* of logic stands as an analogous overrating the idea of ARISTOTLE and the scholastics – which still influenced SPINOZA strongly and KANT somewhat less, and from which philosophy seems not to have emancipated before the 19th century – namely that logic would be able to uncover secrets of nature which are not clear a priori. In reality the

LOBATCHEWSKI, BOLYAI 136

However this may be, posterity has in most cases conceived EUCLID's work as such a logical structure. LOBATCHEWSKI (perhaps) and BOLYAI (for certain) also built up logical structures without bothering about mathematical systems which they might accompany.

RIEMANN

RIEMANN was the first to show the right way for research on the foundations of geometry by starting from the idea that space is a *Zahlenmannigfaltigkeit*, thus a system built up by ourselves. However, he emphasizes that this is an arbitrary hypothesis, and he does not say that in *any* case we must choose a mathematical system at the basis, and that we choose the Zahlenmannigfaltigkeit for reasons of efficiency.

HILBERT *c.s.*

So it can be understood that PASCH, HILBERT and others, because they considered 137
his hypothesis as arbitrary, resumed the logical foundation of geometry, trying to better EUCLID by constructing, as we have explained above, linguistic structures[1]) developed from axioms solely by means of the formal syllogism and the other logical principles. They introduce intuitive mathematics in the sphere of their considerations only for proofs of consistency (indicating a system with the property that a certain set of axioms, and consequently all the theorems deduced from it, can be held to express properties of that system [2])) and for *proofs of*

---

conclusions reached by this method do not hold for nature itself, but only for the mathematical system which has been arbitrarily projected on nature (and only part of which covers what has been directly perceived, while the rest has been added by induction). One should verify for every conclusion anew (and every verification ought to be completed by mathematical induction) that it is also true for nature (i.e. that it is efficient as a guide for human action). Such a verification is necessary even if the premisses are completely true, in the same way as every new consequence of a physical hypothesis ought to be expressly checked, no matter how useful the hypothesis has proved so far.

Moreover this verification can lead to different results for different persons, because they check the words of the conclusion with different mathematical systems which they mentally connect with these words. It is also possible that, lacking such mathematical systems, verification is impossible for the time being and that it must wait for further experience, i.e. for the building of new mathematical systems.

[1]) HILBERT even declares explicitly that in connection with words like 'Punkt', 'Gerade', 'zwischen' etc. he does not think of a mathematical interpretation.

[2]) It is clear that indicating a mathematical system such that the axioms *might* accompany properties of that system, suffices to prove that never two contradictory theorems can be deduced from the axioms, for contradictory theorems cannot hold for a mathematical structure. For that matter, the fact that mathematical systems were put forward to establish the existence of logical systems, shows that it was still felt that the mathematical system itself needed no further existence proof besides its intuitive construction. That HILBERT lost this conviction later, appears

[[3]] from his note 'Über den Zahlbegriff' (Jahresberichte Deutsch. Math. Ver. 8 (1899), p. 180–184 [[Anhang VI in 'Grundlagen der Geometrie']]), where he considers the number systems which he had introduced to prove the existence of his geometries, as being defined in their turn by a purely axiomatic method; therefore the consistency of these number systems must again be proved without recurring to intuition. But he ought to remember that, giving this proof, he intuitively constructs a mathematical system (the system of the theorems deduced from the axioms) following logical laws, and that consistency enters in his proof as a mathematical property of that mathematical system, which can only be proved by methods based on intuition. But he is not willing to admit intuitive mathematics, so he will be forced to look at the latter proof again as a linguistic structure, as a reasoning based on axioms (namely axioms on the 'Verknüpfung' of the elements which are the theorems of the system, among which occurs *certainly* the axiom of complete induction); again it will be his duty to prove that these axioms are consistent. But 1° he is now no further forward than at the preceding stage, 2° the consistency of the axioms does not involve the existence of the corresponding mathematical system, 3° even if the mathematical system of reasonings exists, this does not entail that it is *alive*, i.e. that it accompanies a sequence of thoughts, and even if the latter is the case, this sequence of thoughts need not be a *mathematical* development, so it need not be convincing.

We shall see later on how HILBERT tried to escape from this difficulty and in how far he succeeded.

Let us recall in this connection DEDEKIND's famous monograph 'Was sind und was sollen die Zahlen?', in which he aims at proving logically the arithmetic of whole numbers, starting from the most primitive notions. For this purpose he constructs a logical system (i.e. a mathematical system of words), the axioms of which are the linguistic images of the connections between the basic notions (*whole and part*, *correspondence between elements*, *mapping of systems*, etc.) and which further is *finitely* constructed following the logical laws (thus without using complete induction, i.e. the mathematical intuition of 'and so on'). In order to have mathematical significance, this system ought to be completed by a mathematical existence proof. But in order to give that, we shall certainly be forced to use the intuition 'and so on', and then we see at once that we can obtain all the arithmetical theorems much more easily than by DEDEKIND's contrived system; accordingly DEDEKIND does not give the existence proof. He does give in § 66 a proof for: 'Es gibt unendliche Systeme', but 1° a proof is needed for: 'Es gibt einfach unendliche Systeme', what is more, and 2° his proof, which introduces 'meine Gedankenwelt' is false, for 'meine Gedankenwelt' cannot be viewed mathematically, so it is not certain that with respect to such a thing the ordinary axioms of whole and part will remain consistent. Consequently DEDEKIND's system has no mathematical significance; in order to give it logical significance, an independent consistency proof would have been needed, but DEDEKIND does not give such a proof. If he had given it, he would necessarily have appealed to the intuition of 'and so on', and by recognizing this intuition, he would have seen that using it he could have constructed arithmetic in a very simple way, and from that moment on his logical system would have appeared to him gratuitous as well as cumbersome. He would not have maintained any longer that anybody who calculates, passes unconsciously through all the phases of his logical system. (See Vorrede, p. IX: 'Ich erblicke gerade in der Möglichkeit, solche Wahrheiten auf andere, einfachere, zurückzuführen, mag die Reihe der Schlüsse noch so lang und scheinbar künstlich sein, einen überzeugenden Beweis dafür, dass ihr Besitz oder der Glaube an sie niemals durch innere Anschauung gegeben, sondern immer nur durch eine mehr oder weniger vollständige Wiederholung der einzelnen Schlüsse erworben ist.')

On the same grounds as DEDEKIND's work, MANNOURY's paper: 'De zoogenaamde grondeigenschap der Rekenkunde' (Handelingen 8e natuur- en geneeskundig congres, Rotterdam 1901, p. 121–147), which elaborates more simply the same idea, must be rejected as a foundation of arithmetic. [[See the reply to MANNOURY's criticism of BROUWER's thesis (1908B) [[p. 105]] and remark 8 in (1917) [[p. 147]].]]

independence (i.e. in order to prove that some axiom cannot be logically deduced 138
from some other axioms, a mathematical system is indicated such that the latter 139
axioms can, but the former cannot be held to express properties of that system), 140
and in this sense they consider, among other things, non-Archimedean and non-Pascalian geometries, such as we have constructed at the end of Chapter I. [1]) Thus these rather inharmonic, painfully concocted systems achieve, because they represent a more restricted set of axioms, some sort of priority above the simple, lucid Euclidean geometry. [2]) Such disturbing consequences follow when language,
which is a means, however imperfect, for the communication of mathematics, but 141
which has nothing to do with mathematics as such, except as an accompaniment, is considered as essential for mathematics, and when the laws governing the succession of sentences, the logical laws, are seen as directives for acts of mathematical construction.

Of course the modern axiomaticians still keep to their purpose of seeing an application of their logical systems, and therefore they have only built up such linguistic systems as are suitable to accompany constructible mathematical systems. Now the following question arises: suppose we have proved by some method, without thinking of mathematical interpretations, that the logical system, built up out of certain linguistic axioms, is consistent, i.e. that two contradictory theorems can occur at no stage of development of the system; suppose further that afterwards we find a mathematical interpretation of the axioms (which of cause will require the construction of a mathematical system whose elements satisfy certain given mathematical relations); does it follow from the consistency of the logical system that such a mathematical system *exists*? Such a conclusion has never been proved by axiomaticians, not even for the case where the given conditions involve that it is a mathematically constructible system that is required.
Thus, for instance, it has nowhere been proved that a finite number, subjected to 142
a provably consistent system of conditions, must always exist. [3])

[1]) The geometries indicated by HILBERT (Grundlagen der Geometrie § 34) and VAHLEN (Abstrakte Geometrie p. 42, 110) are special cases of the group of geometries which I constructed there.

[2]) From our point of view we can see in HILBERT's pathological geometries no more than special generalizations of the Euclidean group of motions. These generalizations remain one-sided in this respect, that (in contrast to those of LIE) they are restricted to projective groups and that (also differently from LIE's work) they do not lead to the *general* group satisfying certain conditions; but the latter cannot succeed before, by an arbitrary restriction, a *definite* basic mathematical system is given, in which the group, that must satisfy certain additional intrinsic conditions, must be imbedded.

[3]) A fortiori it is not certain that any mathematical problem can either be solved or proved ⟦4⟧
to be unsolvable, though HILBERT, in 'Mathematische Probleme', believes that every mathematician is deeply convinced of it.

But for this question as well it is of course uncertain whether it will ever be possible to settle it, i.e. either to solve it or to prove that it is unsolvable (a logical question is nothing else than a mathematical problem).

But the assertion is certainly *not* true if the given conditions do *not* involve that
the system must be constructible. Thus, for instance, according to HILBERT the
properties which CANTOR formulated for the well-ordered set consisting of *all*
[[5]] the numbers of the second number class, are consistent, but the set does not exist
in mathematics.

Ad 2°

Rejection of the logical foundations of set theory

In chapter I we have seen that there exist no other sets than finite and denumerably
infinite sets and continua; this has been shown on the basis of the intuitively clear
fact that in mathematics we can create only finite sequences, further by means of
143 the clearly conceived 'and so on' the order type ω, but only consisting of *equal*
elements [1]); (consequently we can, for instance, never imagine *arbitrary* infinite
dual fractions as finished, nor as individualized, since the denumerably infinite
sequence of digits cannot be considered as a denumerable sequence of *equal*
[[6]] objects), and finally the intuitive continuum (by means of which we have further
constructed the ordinary continuum, i.e. the *measurable continuum*), but no other
sets.

CANTOR and his disciples however think that they have knowledge of all sorts
of further sets; their fundamental principle is (CANTOR, Grundlagen einer all-
gemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883 [[Ges. Abh. p. 207]]: 'Der Vorgang
bei der correcten Bildung von Begriffen ist m.E. überall derselbe; man setzt ein
eigenschaftsloses Ding, das zuerst nichts anderes ist, als ein Name oder ein Zeichen
A und giebt demselben ordnungsmässig verschiedene, selbst unendlich viele ver-
ständliche Prädicate, deren Bedeutung an bereits vorhandenen Ideeën bekannt ist
und die einander nicht widersprechen dürfen; dadurch werden die Beziehungen
von A zu den bereits vorhandenen Begriffen und namentlich zu den verwandten
bestimmt; ist man hiermit vollständig zu Ende, so sind alle Bedingungen zur
144 Weckung des Begriffes A, welcher in uns geschlummert, vorhanden und er tritt
fertig ins Dasein, versehen mit der intrasubjektiven Realität, welche überall von
Begriffen nur verlangt werden kann; seine transiente Bedeutung zu constatiren ist
alsdann Sache der Metaphysik.'

We see that it comes to about the same as the standpoint of the axiomaticians.

Above we have shown that this principle is unjustified, and therefore we now assert that the several paradoxes of the 'Mengenlehre', for which a solution is so fervently sought, have no right to exist; rather it would have been the duty of Cantorians, immediately to reject a notion which gives rise to contradictions, because it is certainly not built up mathematically.

Let us discuss some points in detail.

[1]) The expression 'and so on' means the indefinite repetition of *one and the same* object or operation, even if that object or that operation is defined in a rather complex way.

CANTOR's *second number class does not exist.*
We know that the definition of *well-ordered sets* after CANTOR (see Chapter I, p. 63 ⟦p. 45⟧) is consistent; for there exist well-ordered sets, in the first place the ordertype ω of the sequence of finite ordertypes: 0, 1, 2, ... And further there is no objection to the introduction of ω as a new ordinal number and again starting to count

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, 2\omega, 2\omega+1, \ldots, m\omega+n, \ldots. \qquad ⟦7⟧$$

No more is there any objection to the introduction of ω^2 after all the numbers that can thus be formed; in this way we open a still larger domain of ordinal 145
numbers, building a well-ordered sequence whose terms can be expressed by the general form

$$m_1 \omega^{p_1} + m_2 \omega^{p_2} + \ldots \qquad (p_r > p_{r+1}).$$

As the next ordinal number we can introduce ω^ω. In this way we can go on, and CANTOR shows (Grundlagen, p. 35) ⟦Ges. Abh. p. 197⟧ that every ordertype introduced by this method, and consequently the set of the numbers that have been introduced at each stage, remains denumerable. But then he continues:

'Wir definieren daher die zweite Zahlenclasse als den Inbegriff aller mit Hülfe der beiden Erzeugungsprinzipe (he means by those two principles: *add one unit* and: *take for an ordertype ω the next higher element, the limit-element*) bildbaren, in bestimmter Succession fortschreitenden Zahlen:

$$\omega, \omega+1, \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \alpha, \ldots$$

welche der Bedingung unterworfen sind, dass alle der Zahl α voraufgehenden Zahlen, von 1 an, eine Menge von der Mächtigkeit der ersten Zahlenclasse bilden.'

Take notice of 'den Inbegriff aller'; here he mentions something which cannot be thought of, i.e. which cannot be mathematically constructed; for a totality constructed by means of 'and so on' can only be thought of, if 'and so on' refers to an 146
ordertype ω of equal objects, but *this* 'and so on' does not refer to an ordertype ω, nor to equal objects. Here CANTOR *loses contact with the firm ground of mathematics.* According to his fundamental principle, which we cited above, he must be indifferent to this, but in any case he ought to take care that the introduction of 'Inbegriff aller' does not give rise to contradictions. He fails to do this, but it can be done by the method by which HILBERT introduces the logical entity 'Inbegriff aller' and proves its consistency. [1])

Now CANTOR goes on and talks about his second number class as if he had it before his eyes as a real object; the way he expresses himself does not suggest at all that he has in mind no more than a logical system. In his proof of the theorem that the second number class has a higher power than the first one, more exactly

[1]) Verhandlungen internat. Mathematiker-Congress Heidelberg 1904, p. 183, 184. ⟦Grundlagen der Mathematik, Anhang VII.⟧

the next higher power, he considers this equality, respectively inequality, of power as the possibility, respectively impossibility, of a one-to-one mapping between two *existing* number classes.

147 From our point of view these reasonings with the meaning which CANTOR puts into them, *make no sense*; the best we can make of it, changing it a little, is the following triviality: If the logical entity T (power of the second number class) is introduced, then the axiom $T = A$ (A is the power of ω) will lead to a contradiction in the logical structure; likewise the introduction of a logical entity I, playing the part of a cardinal number, which would be supposed to satisfy the axioms $A < I < T$. This is the logical result, without any value for mathematics, of these proofs by CANTOR. If one wishes to look at it in the light of mathematics, then one finds no more than the following: The next two statements are *false*:

1°. The second number class is conceivable and denumerable.

2°. The second number class is conceivable and there is a cardinal number between its power and that of the first number class.

But that these two statements are false, we knew already, for we knew that the first part of both (the second number class is conceivable) is false.

And as to the mathematical argument running parallel to the developments contained in CANTOR's proofs, there remains only the following: 'Certainly there is no sequence, having power A, of well-ordered sets such that I could not
148 construct a new well-ordered set not belonging to that sequence. But the totality of well-ordered sets which I have introduced in some mathematical system, is cetarinly denumerable.' (In this *mathematical* theorem we do not use the expression 'numbers of the second number class', because here the word *class* does not awaken a clear notion; nor do we speak explicitly of the *denumerable* well-ordered
[[8]] sets, for we can construct no other well-ordered sets than denumerable ones.)

The denumerably unfinished sets

If we wish nevertheless to speak of 'the totality of well-ordered numbers' and to say something about its power, then this succeeds, in connection with the above theorem, if we construe it in a somewhat different sense, by the following statement:
[[9]] *The power of the totality of well-ordered numbers is denumerably unfinished*; here we call a set *denumerably unfinished* if it has the following properties: we can never construct in a well-defined way more than a denumerable subset of it, but when we have constructed such a subset, we can immediately deduce from it, following some previously defined mathematical process, new elements which are counted to the original set. But from a strictly mathematical point of view this set does not exist as a whole, nor does its power exist; however we can introduce these words here as an expression for a known intention.

As further examples of denumerably unfinished sets we mention: the totality
149 of definable points on the continuum, and a fortiori the totality of all possible mathematical systems.

While constructing, without ever coming to an end, a denumerably unfinished set, we can map the elements in succession on the sequence of the well-ordered sets, which likewise is never exhausted. Extending the notion of equality in power, so that it may be applied to this case, we can say:

All denumerably unfinished sets have the same power. [1])

Thus we distinguish for sets the following cardinal numbers, in order of magnitude:

1°. the different finite numbers.
2°. the denumerably infinite.
3°. the denumerably unfinished.
4°. the continuous.

The continuum problem

The continuum problem, concerning which papers appear constantly with the 150
aim of furthering the solution, requires a proof that the continuum and the 'totality of numbers in the second number class' have the same power. Now neither the totality of numbers of the second number class, nor the continuum as a system of individualized points, exist mathematically; therefore it appears from what we said above, that the only clear idea which we can find behind this problem, is the following logical theorem, which belongs outside mathematics proper:

'*It is possible to introduce as logical entities the totality of numbers of the second number class and the totality of points of the continuum in such a way that it is non-contradictory to suppose a one-to-one mapping between them, leaving out no element of one of them.*'

But if we introduce the logical entity: *totality* of the points of the continuum, abandoning the intuition of a continuum, we shall be forced to define *the points of the continuum*, and this is only possible by *definable laws of progression for approximating dual fractions.* Now in this sense the continuum is denumerably unfinished, and so is the second number class. Consequently the logical theorem is proved.

The related *mathematical* question (that all the sets which can be defined on the continuum are either denumerable or have the power of the continuum) has been 151
treated in chapter I (p. 62–67) ⟦p. 44–47⟧. ⟦10⟧

The paradox of BURALI–FORTI

Following CANTOR further, we see how he introduces Ω as the first ordinal number

[1]) Still, in a certain sense, one can say that denumerably unfinished sets have the same power as denumerable sets, for every denumerably unfinished set can be mapped on ω^2 (every part which I add in the course of the construction of the denumerably unfinished set, can be mapped on ω, for it is denumerable; constructing such a mapping for each added part, I map the unfinished set on $\omega+\omega+\omega+\dots=\omega^2$; only this mapping remains *always unfinished*; the proof that a mapping of a denumerably unfinished set on a denumerable set is impossible, holds only for a *finished* mapping.

after all the ordinal numbers of the second class; he calls it the first ordinal number of the third number class. But *in mathematics Ω does not exist*; probably it is easy to give the logical proof for the consistency of the newly introduced object, but this is unimportant.

CANTOR's disciples undauntedly went still further on. They created as many number classes and cardinal numbers as they could create ordinal numbers, bothering neither about the question whether they were conceivable in mathematics, nor about their logical consistency. Finally they introduced *the totality of all ordinal numbers*, but now they noticed a logical contradiction, which, for that matter, they signalled as a mathematical paradox and for which they assiduously sought a *mathematical* solution (by mathematical we always mean: lying within the realm of what is intuitively conceivable), without being aware of the fact that they had long ago left the realm of mathematics.

It is BURALI–FORTI's paradox (Una questione sui numeri transfiniti, Rendiconti del circolo matematico di Palermo 11 (1897), p. 154–164): '*Let us denote by O the totality of well-ordered types, ordered by magnitude, then O itself is a well-*
152 *ordered type, and because every well-ordered type occurs as a subset of O, O must be the largest well-ordered type. But if O is a well-ordered type, $O+1$ is so as well, and $O+1 > O$, consequently O is not the largest well-ordered type.*'

Firstly the paradox would be easily redressed if we did not assign to O the property (which was assigned only by arbitrarily assumed axioms to the well-ordered types which were created earlier) that $O+1$ is again a well-ordered type.

Secondly there is no reason to consider such a result as paradoxical: if we create logical structures without mathematical structures which they accompany as their linguistic counterpart, every such structure may be contradictory as well as consistent.

The well-ordering of an arbitrary set

Another famous problem from the theory of transfinite numbers is: '*Prove that any set can be well-ordered.*' CANTOR enounced this problem ('Grundlagen', p. 6 ⟦Ges. Abh. p. 169⟧) as a 'Denkgesetz'; of course there is no motive for this at all, so his disciples tried to prove the theorem. In Math. Annalen 59 (1904), p. 514–516, ZERMELO gives such a proof based on the following axiom:

"Jeder Teilmenge M' einer Menge M kann man ein beliebiges Element m'_1 zugeordnet denken, das in M' selbst vorkommt und das 'ausgezeichnete' Element von M' genannt werden möge."

153 BOREL justly remarks in Math. Annalen 60 (1905), p. 194–195, that if one introduces such an axiom, he might as well take the theorem itself as an axiom.

Now we know that besides the denumerable sets, for which the theorem *certainly holds*, there exists only the continuum, for which the theorem *certainly does not hold*, firstly because the greater part of the elements of the continuum must be considered as unknown, and consequently can never be individually ordered, secondly because every well-ordered set is denumerable. Thus this question also turns out to be illusory. [[11]]

BERNSTEIN's *theorem*

The theorem of BERNSTEIN–SCHRÖDER is usually mentioned as the main theorem in the theory of transfinite numbers.

'Let A and B be sets and let A be mapped one-to-one onto a subset of B, and likewise B onto a subset of A, then A can be mapped one-to-one onto B',

or, what comes to the same (we introduce the symbol '$a \sim b$', to read: *a equivalent to b*, expressing that a and b can be mapped one-to-one onto one another):

If

$$A = A_1 + B + C$$
$$A \sim A_1$$

then also

$$A \sim A_1 + B.$$

(For let the theorem be proved in the latter form and suppose

154

$$A = H_1 + C \qquad H = A_1 + D$$
$$H \sim H_1 \qquad A \sim A_1,$$

then we have also

$$H_1 = A_{11} + D_1$$

where

$$A_{11} \sim A_1 \sim A$$
$$D_1 \sim D.$$

Now from

$$A = A_{11} + D_1 + C$$

there follows, by the second form of the theorem,

$$A \sim A_{11} + D_1 \sim H.)$$

This second form of the theorem is proved as follows: Let us apply the operation which divides A into a part, equivalent to the whole, and two other parts, another time to A_1, obtaining

$$A_1 = A_2 + B_1 + C_1,$$

then to A_2, etc., then we obtain finally:

$$A = B + B_1 + B_2 + \ldots + C + C_1 + C_2 + \ldots + D,$$

where D is the set common to all the consecutive A's. Obviously

$$C + C_1 + C_2 + \ldots \sim C_1 + C_2 + \ldots.$$

Consequently

$$A \sim B + B_1 + B_2 + \ldots + C_1 + C_2 + \ldots + D \sim A_1 + B;$$

and the required mapping is obtained by mapping C to C_1, C_1 to C_2, C_2 to C_3, etc..

155 For sets which exist only as consistent logical entities this theorem shows that if

$$A = A_1 + B + C,$$

and a one-to-one mapping of A onto A_1 is given, then it is consistent to assume that also A and $A_1 + B$ are equivalent. Mathematically it also provides us with a method actually to construct a one-to-one mapping of A onto $A_1 + B$, but only for those elements of A which *have been defined*, which are *known*, i.e. for a denumerably unfinished part. For the unknown elements it does not furnish such a mapping. For instance, if A is a continuum, we shall for an arbitrary element, which is only known by an ever unfinished approximation, never know whether or not it belongs to one of the C's, and if it does, to which C it belongs; consequently we can say nothing on the approximation of its image.

From the mathematical point of view the theorem, in the form in which we proved it above, makes sense only for finite, denumerable and denumerably unfinished sets. But for these it is evident.

As we knew for a long time (see Chapter I, p. 62–67 ⟦p. 44–47⟧), the theorem holds
⟦12⟧ also for continua, but the proof given above is worthless in this case.

As the theorem turns out to be insignificant, we may expect that the many
156 applications which the Cantorians make of it are equally devoid of content. Let us examine by way of example a paper by BERNSTEIN in Math. Annalen 61 (1905), p. 117–155. In order to bring the continuum problem nearer to its solution he derives next to the well-known theorem:

The cardinal number of all well-ordered types with cardinal number A (*the first cardinal number*) *is F* (*the second cardinal number*) an analogous theorem:

The cardinal number of all order types with cardinal number A is C (*cardinal number of the continuum*).

By means of his theorem on equivalence he deduces this theorem from the following two lemmas:

a) *The continuum is equivalent to a subset of the totality O_A of all ordertypes with cardinal number A.*

b) *The set O_A is equivalent to a subset of the continuum.*

He proves the former by assigning to an infinite dual fraction the ordertype obtained by inserting between each two consecutive digits an ordertype $\omega^* + \omega$, and then deleting every digit 0 and replacing every digit 1 by a single element.

His proof for the second lemma is incorrect. The method by which he constructs the ordertypes of cardinal number A (namely by placing first one element, then the second, for which there are two possible places, then the third, for which
157 there are 3, etc.) never yields more than a special group of types, which is denumerable, namely $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots$. In the case of the dual fractions in the continuum a number A of operations could be thought of as finished, but this was

only possible on account of the *intuition* of the continuum; *here* an analogous intuitive possibility does not exist.

Consequently we can consider here only the ordertypes for which a *law* of progression is given, but then the set of *all* ordertypes is considered as a denumerably unfinished set of laws of progression. Thus the given mapping is from O_A considered as a set of laws of progression onto a part of the continuum.

Let us go back to the first lemma. We can read it in two ways, namely either:

'*All* points of the continuum are equivalent to a part of *all* members of O_A.' or:

'*All* laws of approximation for points of the continuum are equivalent to a part of *all* laws of approximation for members of O_A.'

It is only the second version that can be combined with the second lemma, insofar as it may be considered as proved by BERNSTEIN. But what does there now remain of the result? This, that *all* laws of progression in O_A are equivalent to *all* laws of approximation in the continuum, but this is obvious, for both sets are denumerably unfinished.

The transfinite exponentiation 158

Besides the sequence of well-ordered classes another method is employed in the theory of transfinite sets to ascend to higher cardinal numbers. It is based on exponentiation by a transfinite exponent.

By M^N there is meant the *insertion-set* of N by M, i.e. the set consisting of all manners in which we can make an element of M correspond to each element of N.

Then it can be proved that for $M > 1$,

$$M^N > N$$

(see for instance SCHOENFLIES, Bericht über die Mengenlehre, Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 8 (1899), Heft 2, p. 26; there it is proved that $N^N > N$, but the proof can easily be extended to the theorem given above).

The first higher cardinal number obtained by this method is

$$C = M^A$$

where M is finite or denumerably infinite and A is the denumerably infinite power; we can conceive this insertion-set because we can conceive the continuum.

But we are already not able to conceive the next insertion-set of the sequence:

$$F = M^C,$$

thus the theorem that F (for instance the set of all functions of one real variable) 159
$> C$, retains no more mathematical content than the following statement:

'It is possible to make a different function correspond to each element of C, but it is false that F is conceivable and that it can be mapped on C.'

But this we knew of course without the proof or the theorem, because we knew that F is inconceivable. ⟦13⟧

Ad 3°

Propositional functions and classes
Classical logic was inadequate to account for mathematics. Logicians aimed at extending it in such a way that it would become equal to this task. Now we have seen that classical logic studies the linguistic counterpart [1]) of logical reasonings, i.e. of reasonings on *relations of whole and part* for arbitrary mathematically constructed systems; from the fact that we *see* these mathematical systems we may
160 conclude that *here* the sentences succeeding one another according to classical logic, will never show contradictions, because they correspond to acts of mathematical construction. Thus here we safely introduce the *logical sum*, the *logical product* and the *complementset*, i.e. the set having as its predicate the negation of the predicate of the given set; and we safely apply the *principles of identity*,
⟦14⟧ *syllogism*, *distribution* [2]), *contradiction* and *tertium non datur*.

The logicians, conversely, start from these principles and as the fundamental domain of operations, within which the relations meant by the words or symbols must exist, they choose not some mathematical system, but the chimerical 'everything' – as we saw above (p. 138 seq. ⟦p. 78⟧, footnote), Dedekind also wrongly tried to start from this notion – from which they define various *classes* by what they call *propositional functions*.

By a propositional function they mean a *statement* about x, or about x and y, more generally about a certain number of variables, in which *every* substitution for these variables is allowed; they reckon that by that statement a *class* is defined, consisting of *all* things (or, for more variables, groups of things) which by substitution make the statement *true*.

161 They write $x\ni\varphi x$ for *all things for which the statement φx is true*; the reciprocal sign ε is introduced in such a way that $k\varepsilon(x\ni\varphi x) = \varphi k$, in other words: in the case that the propositional function determines a class a, $k \varepsilon a$ means: *k belongs to the class a*.

⟦15⟧ PEANO preferred to call the sign ε primary; RUSSELL rather starts with $\ni$, because he considers it uncertain that every propositional function defines a class.

Herein he is right, however he works with his propositional functions as with the predicates of ordinary logic, so he acts all the same as if the function does always define a class.

But in the intellect one cannot give a linguistic system of statements and propositional functions priority over mathematics, for no assertions about the external world can be intelligently made besides those that presuppose a mathematical system that has been projected on the external world. No matter which

[1]) As well as any mathematical language this language can without much trouble be condensed into symbols. See for such a symbolical language (called 'Algebra der Logik') for instance A. N. Whitehead, A treatise on Universal Algebra, Cambridge University Press 1898, p. 35 seq.

[2]) i.e. $(a+b)c = ac+bc$, where the logical sums and products are meant.

way one turns, the foundation of mathematics remains mathematics itself, and over its entire domain it grows freely and intuitively.

On the contrary the logisticians, considering the propositional functions as the free origin of logic and mathematics, utter as such various sentences which are built in (falsely presumed) analogy to mathematical properties, and they postulate that these sentences define classes and that it is allowed to reason about these classes according to the laws of classical logic.

The contradiction 162

Therefore it is not surprising that they, just like the Cantorians, *came up against contradictions* [1]) and their own surprise can only be due to confusion of ideas.

RUSSELL (The principles of mathematics, Part I, Chapter 10) discusses most amply the following contradiction:

'There are classes which, considered themselves as one, occur amongst their [[16]] own elements, for instance the class of all classes, the class of all things that are not alive, and others. Now I consider the class of all classes which do not possess the property which I mentioned just now, namely to occur amongst their own elements. Does this class possess the property in question? *If it does*, then it occurs amongst its own elements, so it is one of the classes which do not possess the property, so it does not have the property. And vice-versa: *If it does not*, then it is on equal terms with its own elements, so it does have the property.'

RUSSELL suggests various methods to escape from the contradiction, but he ends by rejecting them; he believes that a deep-searching reconstruction of logic will be needed for the solution. He is inclined to the opinion that a theory is 163 required which does not admit every class, considered as one, to be made into a logical subject. 'Another suggestion', he says, 'would be to demur to the notion [[16]] of *all objects*, but in any case the notion of *every object* must be retained, for there are truths, viz. the logical principles, which hold for every object.'

But this is mistaken: the logical principles hold exclusively for words with a mathematical content. And exactly because RUSSELL's logic is no more than a linguistic system, deprived of a presupposed mathematical system to which it would be related, there is no reason why no contradictions would appear.

For that matter, it is evident to common sense at which point the reasoning, which leads to the contradiction, ceases to be alive and consequently is no longer reliable; it is even unnecessary to give up the illusion of the chimerical 'everything'. For let us suppose that I know an 'everything' with a 'totality' of relations existing between the objects, and a system of propositions which may hold for the objects. Then, given a propositional function, I can decide for *any object* by means of its given relations whether or not it satisfies the function, in other words, to which of the two classes defined by the function it belongs.

[1]) Obviously in such a contradictory system almost no reasoning is possible, because the main tool of reasoning, the principium contradictionis, can no longer be applied.

164 But when I wish to decide whether the object which is the class involved in the contradiction, satisfies the given propositional function, then I see that the decision is only possible under the condition that it has already been completed. Consequently the decision *cannot be taken*, and hereby the contradiction is explained. We have here a propositional function which defines two complementary classes which do not satisfy the tertium non datur. This is not surprising, for the logical principles hold only for the language of mathematics; for other linguistic systems, however akin to that of mathematics they may be, the principles need not hold.

RUSSELL gives the contradiction in another form on p. 80 and p. 102. There he says:

[[16]] 'There are predicates which hold for their own expression in words, and others which do not. The simplest example of the first kind is: *being a predicate*. But does this property hold for: *not holding for its own expression in words*? If it does, then it does not; if it does not, then it does.'

He tries to solve it by saying that *not holding for its own expression in words* is not a predicate, but of course nobody will assent to this.

And no more will anybody assent to what he proposes on p. 88, in order to escape from the contradiction in a third form, originating from the division of the propositional functions into such as do hold and such as do not hold for themselves, namely that it would be inconceivable to apply a propositional function to itself.

165 For that matter, the two latter contradictions can be explained in the same way as the first one.

The logic of relations

So far about the part played by *classical logic*; in logistics it is extended by the so-called *logic of relations*, and the final conclusion runs as follows: *Pure mathematics* can be nothing else than a system built up from a few *basic notions* of logic, by means of some *basic principles* of logic (RUSSELL counts 9 of the former and 20 of the latter); it is only in this way that it remains on solid ground and that it can be certain of progression. Perhaps there still exists some sort of intuitive mathematics, but then this consists in nothing more than the application of the pure mathematics to material objects (see e.g. COUTURAT, Les Principes des Mathématiques, Introduction, p. 4).

But we know that pure mathematics is neither the former, nor the latter.

The logic of relations, then, starting from the word *following after*, which expresses the most elementary act of mathematical construction, as it immediately springs from the basic intuition, studies the language of mathematics in general, just as classical logic studies that of the special mathematics of whole and part.

It is self-evident that in the language which accompanies mathematics, the succession of words obeys certain laws, but to consider these laws as directing the building up of mathematics, it is therein that the mistake lies.

Arithmetic of PEANO 166

Let us, by way of illustration, go into the theory of the positive integers, i.e. ordinary arithmetic, as it is treated by the logisticians.

PEANO (Sul concetto di numero, Rivista di Matematica 1 (1891), p. 87–102, 256–267; see also COUTURAT, Les Principes des Mathématiques, p. 54) introduces in addition to classical logic *three* new basic notions: 0, N (finite ordinal number) and *seq* (successor), and *five* basic principles which hold for them:

1°. 0 *is an N.*

2°. *there is no N, for which* 0 *is the seq.*

3°. *the seq of each N is an N.* [1]

4°. *Two N's are equal if their seq's are equal.*

5°. *A class which contains* 0 *and which, with every N which it contains, contains also its seq, contains every N.*

But in his deduction of arithmetic from these principles, PEANO again edifies a logical system which is supported neither by an existence proof, nor by a consistency proof.

Therefore it must be rejected on the same grounds as DEDEKIND's system (see p. 138 seq. ⟦p. 78⟧, footnote).

Arithmetic of RUSSELL

RUSSELL (The Principles of Mathematics, p. 127) considerably improves PEANO's method. He starts by defining *cardinal numbers* as classes of equivalent classes, and he says further: ⟦17⟧

1°. 0 *is the class of classes whose only member is the null-class*; the null-class 167
itself is defined (l.c. p. 75) as the class of all class-concepts which give no members for the corresponding class and therefore it is considered (or postulated as a principle?) to exist – consequently the null-class exists.

2°. 1 *is the class of all classes which are not null and are such that, if x belongs to the class, the class without x is the null-class.*

The class 1 exists, for it has already a member belonging to it, namely the class 0 defined just now.

3°. $n+1$ is the class of classes which are equivalent to a class, obtained by adding a number to a class belonging to the class n. Consequently the class $n+1$ exists, provided n exists.

4°. *Finite numbers are those belonging to every class s to which belongs* 0 *and to which* $n+1$ *belongs if n belongs.*

All PEANO's postulates are satisfied by the class of finite numbers as above defined; it was unnecessary to introduce new basic notions or basic principles. Therefore, according to RUSSELL, they can serve as an existence proof (if we consider $n+1$ as the seq of n). COUTURAT (reply to POINCARÉ, Revue de Méta-

[1]) Here it ought to be added (POINCARÉ, Revue de Métaphysique et de Morale 13 (1905), p. 833): every number has a successor, *every N has a seq.*

physique et de Morale 14 (1906), p. 208–250) strongly emphasizes this existence proof which, he contends, does not need the intuition of ω, or of complete induction, so that the logical system would here be built up independently of in-
168 tuition and would have been shown consistent without the use of complete induction.

But we have found above that it is contradictory to assume that every definition determines a class, therefore the consistency of a logical system can never be based on the fact that it runs parallel to pseudo-mathematical operations in classes, which only exist by their definitions.

All the same RUSSELL dauntlessly applies complete induction, which he refuses to enounce as an axiom. Namely he proves that $n+1$ is the cardinal number of the class of the numbers 0, 1, 2, ..., n, as follows: 1 is the cardinal number of the class 0; 2 (defined as $1+1$) that of the class 0, 1; 3 (defined as $2+1$) that of the class 0, 1, 2; *and so on.*

Likewise he applies complete induction to prove that a finite number cannot
⟦18⟧ be equivalent to one of its parts (l.c. p. 121, 123).

Infinite numbers
After the finite numbers have been defined, they yield immediately the definition of the cardinal number A of the class which contains all of them (the first transfinite cardinal number). RUSSELL proves easily that this cardinal number is not finite, because it does contain parts equivalent to the whole; he further shows that any infinite class contains parts with cardinal number A (l.c. p. 122, 123).

But the way in which the logisticians further develop mathematics, no longer
169 displays special features, except that the language *is condensed* as far as possible *in symbolic signs.* It merges in the methods of Cantorians and of axiomaticians.

Conclusions on logistics
The conclusions on logistics must be: It can teach us nothing about the foundations of mathematics, because it remains irrevocably separated from mathematics; on the contrary, in order to maintain an existence on its own account, i.e. to safeguard itself against contradictions, it must reject all its own special principles and acquiesce to be a faithful, automatic, stenographic copy of the *language of mathematics*, which itself *is not mathematics*, but no more than a defective expedient for men to communicate mathematics to each other and to aid their memory for mathematics.

Ad 4°

Consistency proofs for formal systems, independent of their interpretation
The most uncompromising conclusion of the methods we attack, which illustrates most lucidly their inadequacy, has been drawn by HILBERT (Verhandlungen Intern. Math. Congress Heidelberg 1904, p. 174 ⟦Grundlagen der Geometrie, An-

hang VII⟧). In 'Ueber den Zahlbegriff' (Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 8 (1899), p. 180–184 ⟦Grundlagen der Geometrie, Anhang VI⟧) he had formulated the axioms for the arithmetical operations on the measurable continuum and put forward the problem of proving the consistency of these axioms independently of any mathematical intuition (see also 'Mathematische Probleme', Problem no. 2, 170
Göttinger Nachr. 1900, p. 264 ⟦Ges. Abh. III, p. 290–329⟧).

Evidently this can only be attained by considering the very signs which express the axioms as a mathematical system, by formulating the principles of logic, in the manner of the algebra of logic, as rules allowing to extend this system, and by proving mathematically that these rules taken from the algebra of logic can never lead to an equation together with its negation. Obviously the set of equations deducible from the basic equations formulated in the axioms, is denumerably infinite. [1])

HILBERT loc. cit. sketches in outline how to realize these consistency proofs [2]), not only for the axioms describing the arithmetical operations, which I mentioned just now, but also for those of various other parts of mathematics. For instance, in order to lay the foundations of set theory, he introduces on p. 182–184 the class symbol, but only in relation to other symbols which were introduced before; 171
thus he protects himself from the contradictions obtained by RUSSELL, who introduced classes as parts of the universe, delimited by definitions.

HILBERT however, as he says explicitly in his introduction, aspires to start from nothing and to develop mathematics and logic together. But in the reasonings, mentioned above, on the consistency of axioms, he applies again and again intuitive terms such as *one*, *two*, *three*, *some* (by which he means *a certain finite number*), and further he intuitively applies all the laws of logic and even complete induction.

Attempt to make these proofs independent of intuition

In order to get rid of this burden of intuitive notions, he ends (loc. cit. p. 184, V) by suddenly looking back at the words which he had written, considering this complex of words and reasonings as a mathematical structure which again develops from the beginning to the end according to certain rules, and he contends:

'I have proved just now that the rules from which I have seen this linguistic ⟦19⟧
structure develop, are consistent and therefore correct. In other words, the reasonings which I have made in that language justify at the same time the intuitive element in the act by which they were made.'

[1]) For the set of all combinations of a finite number of the signs which have been introduced (in which the sign = is included and which are finite in number for each mathematical theory) remains denumerable, a fortiori this holds for the set of those special combinations of signs which may be read as *true* equations.

[2]) In one place he makes a mistake, namely on p. 181, where he gives a consistency proof by means of an *example*, which is of course inadmissible from his point of view.

This is mistaken for the following reasons:

Firstly the ground on which he stands *remains* the intuition under discussion,
172 for he only knows: *provided* this intuition is correct, then it follows that the words accompanying it develop according to a consistent logical system. But this is nothing new; who will try to prove a mathematical theorem by deducing it once more from the theorem itself, and say afterwards: 'Now the hypothesis of the theorem is justified at the same time'?

But conversely: The consistency of the linguistic system, deduced by means of the mathematical intuition, does not prove the mathematical intuition. This we have shown above when we treated the axiomatic foundations (see also Poincaré, Revue de Métaphysique et de Morale 13 (1905), p. 834).

The method which we reject here surpasses that of the logicians in that it takes, several times in succession, the unjustified step from the original mathematical domain to another by means of the linguistic act, and because it does not, as the logisticians do, maintain the intuitive connection between the two mathematical domains which are connected only through the intermediary of language. It continues to treat them as dissimilar, but in the end it confuses them and puts them on the same level. The logisticians take the step once and then operate alternately on both domains, maintaining the significance of each; Hilbert takes the step decisively and definitively and *remains* on the second level, returning to the first only to give it a sense in the second, then he takes a further step, again
173 definitively, *remains* on the third level which he so creates, and uses the first and second only to give them a sense in the third.

[[20]] We explain this more amply by enumerating in genetic order the different stages which can be distinguished:

Enumeration of the stages which are confused in the logical treatment of mathematics

1. The pure construction of intuitive mathematical systems which, if they are applied, are turned outward in life by taking a mathematical view of the world.

2. The linguistic parallel to mathematics: mathematical speaking or writing.

3. The mathematical study of language: we notice logical linguistic structures, raised according to principles from ordinary logic or from its extension by the logic of relations, i.e. logistics, but the elements of these linguistic structures accompany mathematical structures or relations.

4. Forgetting the sense of the elements of the logical figures mentioned just now, and imitating the construction of these figures by a new mathematical system of *second* order, provisionally without a language parallel to the construction; this is the system of the logisticians, which, if it is in the least generalized by a free extension, is very well pervious to contradiction, unless Hilbert's precautions are taken; these precautions form the main content of Hilbert's paper.

174 5. The language of logistics, i.e. the words which accompany the logical con-

struction and account for it. It is true that PEANO tried as far as possible also to connect the thoughts which accompany the construction with symbolic signs; nevertheless it remains possible to split up his system into the pure structure and the principles by which the structure develops. Even when these principles themselves are also formulated by means of symbols, such formulations must be considered as heterogeneous with respect to the other formulas. The former are applied to the latter not in their capacity of formulations, but in that of intuitive acts, for which the formulations are no more than a linguistic counterpart.

HILBERT needs these intuitive acts, and therefore the language connected with them, more than PEANO, because he aims at proving the consistency of the logical system *in itself*, a problem which PEANO does not care about.

The verbal content of HILBERT's paper up to p. 184, V, belongs to the fifth stage.

6. The mathematical study of this language. This step is essential in HILBERT's work, in contrast to that of PEANO and RUSSELL. He observes, looking back at his own words, logical figures developing after logical and arithmetical principles, among them the theorem of complete induction; the elements of these logical figures, such as the words *mehrere*, *zwei*, *Fortsetzung*, *an Stelle von*, *beliebig*, etc. 175
correspond in the language to acts of construction in the mathematical system of the second order mentioned above.

7. Forgetting the sense of the logical figures, and imitating their construction in a new mathematical system of the third order, provisionally without a corresponding language.

HILBERT performs the transition from 6 to 7 *in his mind* loc. cit. p. 184–185, under V, first paragraph.

8. The language corresponding to the mathematical system of the third order, which accounts for the construction of that system and shows that it is consistent.

This stage is, in the *words* of the paragraph on p. 184–185, mentioned just now, the last to be found in HILBERT's paper.

It would be possible to go on still further, but the mathematical systems of higher order would almost be copies of one of them, therefore it does not make sense further to continue the process.

For that matter, even the stages mentioned above, from the third on, are deprived of mathematical significance. Mathematics has its place only in the first; in practice it cannot remain aloof from the second, but this stage remains an unconscious non-mathematical act. It may afterwards be guided and supported by *applied mathematics*, but it can never obtain priority relative to intuitive mathematics.

POINCARÉ's *criticism* 176

Logistics and Cantorism have already been sharply criticized by POINCARÉ (Revue de Métaphysique et de Morale 13 (1905), p. 815–835; 14 (1906), p. 17–34, 294–317, 866–868). He blames mainly in logistics the petitio principii and in Cantorism the hypothesis of the actual infinite. But hereby he does not touch upon the heart of the question, which is situated deeper, namely in the confusion between the act of constructing mathematics and the language of mathematics.

In a sense the petitio principii is allowable, for where it occurs in the act of construction of the linguistic system, it does not as such affect the perfection of that linguistic system; in mathematics we would only have an unjustified petitio principii where on the basis of a primary mathematical intuition the same intuition would appear in a later phase of the mathematical construction, if there it were presented as not primary.

But the mistake of logistics lies in the fact that it creates nothing else than a linguistic structure, which can never be transformed into mathematics proper. [1])

And as to the actual infinite of the Cantorians, it does exist, provided we confine it to that which can be intuitively constructed, and refrain from extending it by logical combinations that cannot be realized.

177 How far POINCARÉ is from taking the intuitive *construction* as the only basis of his criticism, appears from his words (loc. cit. p. 819):

'Les mathématiques sont indépendantes de l'existence des objets matériels; en mathématiques le mot exister ne peut avoir qu'un sens, il signifie *exempt de contradiction.*'

It might almost have been written by his opponent RUSSELL. It is true that mathematics is quite independent of the material world, but *to exist* in mathematics means: to be constructed by intuition; and the question whether a corresponding language is consistent, is not only unimportant in itself, it is also not a test for mathematical existence.

Making a mathematical study of linguistic symbols, no matter whether they are words or Peanean symbols, can teach us nothing about mathematics; mathematical formulas ought not to be considered as 'truths' existing independently, but only as an expedient to remind us as efficiently as possible by means of symbols of the way in which a certain structure was imbedded in another structure. For instance, the formula

$$13 = 6+7$$

reminds us of the fact that a set originating by juxtaposition of two sets along which we could count up to 6, respectively up to 7, was imbedded in a set along which we could count up to 13.

[1]) Obviously the petitio principii does become unjustified as soon as one tries, like HILBERT, to reason from the linguistic system to the primary intuition which it accompanies.

SUMMARIZING: 179
Mathematics is created by a free action independent of experience; it develops from a single aprioristic basic intuition, which may be called *invariance in change* as well as *unity in multitude.* [1])

Further, projecting mathematical systems on experience is also a free action,
which shows itself efficient in the struggle for life; in this respect one mathematical 180
system can appear more practical, more economical than another, at least relative to a definite kind of purpose which one wishes to attain: none of them is absolutely efficient, neither Euclidean geometry, nor logical reasonings, nor the theory of electrons.

In mathematics mathematical definitions and properties ought not to be studied again by mathematical methods; they ought to be no more than a means of conducting as economically as possible one's own memory and communication with other people. In the system of definitions there are elements of mathematical construction which must remain irreducible and which therefore, when communicated, must be understood from a single word or symbol; these are the elements of construction which are immediately conceived in the basic intuition
or intuition of the continuum. Notions such as *continuous*, *entity*, *once more*, *and* ⟦21⟧
so on are irreducible.

A logical construction of mathematics, independent of the mathematical intuition, is impossible – for by this method no more is obtained than a linguistic structure, which irrevocably remains separated from mathematics – and moreover it is a contradictio in terminis – because a logical system needs the basic intuition of mathematics as much as mathematics itself needs it.

⟦22⟧

1) The first act of construction has *two* discrete things thought together (also according to CANTOR, Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Kassel 1903); F. Meyer (Verhandl. internat. Math. Congr. Heidelberg 1904, p. 678) says that *one* thing is sufficient, because the circumstance that I think of it can be added as a second thing; this is false, for exactly this *adding* (i.e. setting it while the former is retained) *presupposes the intuition of two-ity*; only afterwards this simplest mathematical system is projected on the first thing and the *ego which thinks the thing*.

STATEMENTS

⟦to be defended together with the thesis⟧

I

SCHUBERT (Enz. der Math. Wiss. I A 1 § 1) is wrong where he states: 'Dinge zählen heisst: sie als gleichartig ansehen, zusammen auffassen, und ihnen einzeln andere Dinge zuordnen, die man auch als gleichartig ansieht.' ... 'Wegen der Gleichartigkeit der Einheiten unter einander ist die Zahl unabhängig von der Reihenfolge, in welcher den *Einheiten* die *Einer* zugeordnet werden.'

II

It is not only impossible to prove the admissibility of complete induction, but it ought neither to be considered as a special axiom nor as a special intuitive truth. Complete induction is an act of mathematical construction, justified simply by the basic intuition of mathematics.

III

The language of Euclidean geometry, and likewise that of the corrections which PASCH and HILBERT have made therein, is reliable only because the mathematical systems and relations, which are symbolized by the words of that language as conventional signs, have been constructed beforehand independently of that language.

From this point of view Euclidean geometry, and likewise the different pathological geometries of HILBERT, consist in the study of groups of transformations with given properties, which can be applied to certain mathematical systems.
⟦(1907), p. 75–80⟧.

IV

KLEIN's defence (Zur ersten Verteilung des Lobatcheffsky-Preises, Math. Annalen 50) of the restriction to analytical transformations in LIE's research on the foundations of geometry lacks foundation.
⟦(1907), p. 30, 40; Math. Annalen 67 (1909), p. 246–267 ⟦Vol. 2, 1909 C⟧.⟧

V

The arithmetical operations on the measurable continuum ought to be defined by means of group theory.
⟦(1907), p. 19–30; Math. Annalen 67 (1909), p. 246–267 ⟦Vol. 2, 1909 C⟧⟧.

VI

In physics a distinction between phenomenological and theoretical reasonings cannot be maintained. In particular there is no fundamental difference between the explanation of the properties of gases and liquids by molecules and that of the properties of light by electrical vibrations.

VII

Attributing 'objectivity' to physical notions like *mass* and *number* is based upon their invariability with respect to an important group of phenomena in the mathematical image of nature.
⟦(1907), p. 59–60⟧.

VIII

Human understanding is based upon the construction of common mathematical systems, in such a way that for each individual an element of life is connected with the same element of such a system.

IX

Mathematics is independent of logic; practical logic and theoretical logic are applications of different parts of mathematics.
⟦(1907), Chapter 3⟧.

X

Logical reasonings about the world can only be secure when they are connected with mathematical systems that have been previously constructed and projected on the world. The contradictions in logistics must be explained by the lack of such a system, KANT's antinomies by the fact that he applies different mathematical systems in the course of one and the same reasoning.
⟦(1907), Chapter 3⟧.

XI

HOUËL (Cours de calcul infinitésimal, tome I, pag. 3) is wrong where he states:
'Une Science fondée sur des hypothèses qui sont compatibles entre elles, et qui ne sont pas réductibles à un moindre nombre, est absolument vraie au point de vue rationnel et abstrait, quand même elle ne se trouverait pas conforme aux faits réels qu'elle était destinée à représenter'.

XII

Besides the finite there are no other cardinalities than:
denumerably infinite
ever denumerable, ever unfinished
continuous.
⟦(1907), p. 83⟧.

XIII

Cantor's second number class does not exist.
⟦(1907), p. 81⟧.

XIV

Clausius (Die Potentialfunktion und das Potential[4], Leipzig 1885, p. 127) postulates the following 4 conditions for a scalar function U in order that it is equal to

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla^2 U}{r}:$$

1°. $\lim U = 0$.
2°. $\lim R\,\dfrac{\partial U}{\partial r} = 0$.
3°. U and its first and second derivatives become nowhere infinite.
4°. Within a certain bounded domain $\nabla^2 U$ can take any values, but outside that domain it is everywhere 0.

The last three of these four conditions are superfluous. It is necessary to take into account ∇^2 in the infinite, but with respect to the gradient this can be neglected.

XV

Clausius (l.c. p. 125) derives from the conditions which he postulated on page 118, namely that $\lim Ru$ and $\lim R^2 \dfrac{\partial u}{\partial R}$ do not become infinite at infinite distance, that Green's function is unique.

It is sufficient to postulate that u becomes 0 at infinite distance.

XVI

Blumental ⟦sic⟧ proves (Math. Ann. 61, p. 235 seq.) for vector distributions which become 0 at infinite distance, postulating finiteness and differentiability, that

$$V = \{\nabla_2 - \nabla_{20}\}\int\frac{\nabla_1 V}{r} + \{\nabla_1 - \nabla_{10}\}\,\frac{\nabla_2 V}{r} + V^0.$$

This theorem holds independently of finiteness and differentiability.

XVII

In order to verify that a singular solution which has been derived from a differential equation, does satisfy the equation, it is not necessary, as is generally stated, to substitute it in the equation.

Cayley, Messenger of mathematics II, p. 6–12; VI, p. 23–27.

Forsyth, A treatise on differential equations, p. 30–36.

Houël, Cours de calcul infinitésimal, tome II, § 855.

XVIII

Laurent (Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géometrie, p. 9) omits to prove that in a system of homogeneous quantities a quantity which has the effect zero with respect to one other quantity, has the same property with respect to every other quantity.

Further (p. 20 and 23) a proof for the Archimedean axiom is wanting.

XIX

In logistics one ought strictly to distinguish the formal system that is constructed from the principles according to which it is constructed.
⟦(1907), p. 92, 94⟧.

XX

To secure the reliability of mathematical reasonings one cannot succeed solely by starting from some sharply formulated axioms and further strictly adhering to the laws of theoretical logic.
⟦(1907), p. 75–80⟧.

XXI

The following conviction of Hilbert (Göttinger Nachr. 1900, p. 261 ⟦Ges. Abhandlungen III, p. 297⟧) is unfounded:

'dass ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, dass es gelingt, die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es dass die Unmöglichkeit der Lösung und damit die Notwendigkeit des Misslingens aller Versuche dargetan wird.'

L. E. J. BROUWER

1908 A

DIE MOEGLICHEN MAECHTIGKEITEN

[[1]] Wenn man untersucht, wie die mathematischen Systeme zustande kommen, findet man, dass sie aufgebaut sind aus der Ur-Intuition der Zweieinigkeit. Die Intuitionen des continuierlichen und des discreten finden sich hier zusammen, weil eben ein Zweites gedacht wird nicht für sich, sondern unter Festhaltung der Erinnerung des Ersten. Das Erste und das Zweite werden also *zusammengehalten*, und in dieser Zusammenhaltung besteht die Intuition des continuierlichen (continere = zusammenhalten). Diese mathematische Ur-Intuition ist nichts anderes als die inhaltslose Abstraction der Zeitempfindung, d. h. der Empfindung von « fest » und « schwindend » zusammen, oder von « bleibend » und « wechselnd » zusammen.

Die Ur-Intuition hat in sich die Möglichkeit zu den beiden folgenden Entwickelungen:

1) Die Construction des Ordnungstypus ω; wenn man nämlich die ganze Ur-Intuition als ein neues Erstes denkt, kann man ein neues Zweites hinzudenken, das man « drei » nennt, u. s. w.

2) Die Construction des Ordnungstypus η; wenn man die Ur-Intuition empfindet als den Uebergang zwischen dem « Ersten für sich » und dem « Zweiten für sich », ist die « Zwischenfügung » zustande gekommen.

Natürlich kann man stets ein ganzes schon mittelst der Ur-Intuition aufgebautes mathematisches System als neue Einheit nehmen, und hieraus erklärt sich die unendliche Fülle der in der Mathematik möglichen Systeme, die indes alle auf die beiden genannten Ordnungstypen zurückzuführen sind.

In dieser Weise betrachtet, würde es nur eine unendliche Mächtigkeit geben, nämlich die abzählbare, und andere als abzählbare fertige discrete Systeme sind in der Tat nicht aufzubauen. In zwei Weisen hat aber eine höhere Mächtigkeit in der Mathematik Sinn:

1) Man kann eine Methode zur Bildung eines mathematischen Systems angeben, die aus jeder gegebenen zum Systeme gehörigen abzählbaren Menge ein neues gleichfalls zum Systeme gehöriges Element erzeugt. Mit einer solchen Methode sind aber wie überall in der Mathematik nur abzählbare Mengen zu construieren, das ganze System ist niemals zu construieren, weil es eben nicht abzählbar sein kann. Es ist

unrichtig, dieses ganze System eine mathematische Menge zu nennen, denn es ist nicht möglich, es aus der mathematischen Ur-Intuition fertig aufzubauen. Beispiele sind: das Ganze der Zahlen der zweiten Zahlenklasse, das Ganze der definierbaren Punkte auf dem Continuum, das Ganze der mathematischen Systeme.

2) Man kann das mit dem discreten gleichberechtigten Continuum als Matrix von Punkten oder Einheiten betrachten, und annehmen, dass zwei Punkte dann und nur dann als verschieden zu betrachten sind, wenn sie sich in ihrer Lage auf einer gewissen Skala von Ordnungstypus η unterscheiden lassen. (Man könnte hinsichtlich der Unterscheidung der Punkte andere Annahmen machen, wie die nicht-Archimedischen Continua zeigen, aber diese Annahmen sind immer auf die erste zurückzuführen). Man bemerkt dann, dass das in dieser Weise definierte Continuum sich niemals als Matrix von Punkten erschöpfen lässt, und hat der Methode zum Aufbau mathematischer Systeme hinzugefügt die Möglichkeit, über eine Skala vom Ordnungstypus η ein Continuum (im jetzt beschränkten Sinne) hinzulegen.

Sei nun eine beliebige Menge M Teilmenge einer Menge von der Mächtigkeit des Continuums, so kann man dieses Continuum auf ein lineares Continuum zwischen 0 und 1 abbilden, und erscheint somit die Teilmenge auf diesem Continuum linear geordnet. In der Menge M existiert nun eine abzählbare Teilmenge M_1, mit Hülfe deren sie zu definieren ist. Diese Menge M_1 kann in folgender Weise in Beziehung gesetzt werden zur Skala der Zahlen $\frac{a}{2^n}$ zwischen 0 und 1.

Die Gesamtheit der Punkte von M_1 approximieren wir durch Dualbrüche. Jede Ziffer ist entweder durch die ihr vorangehende bestimmt, oder lässt noch die Wahl zwischen 0 und 1 offen; wir construieren nun eine Verzweigungskette, in der jeder Zweig sich einfach fortsetzt, falls die Wahl nicht frei ist, und sich in zwei Zweige spaltet, falls sie frei ist, und vernichten sodann jeden Zweig, der sich an keiner weiteren Stelle mehr spaltet. Ist dies, von der ersten Dualstelle anfangend, an allen Stellen vollführt, so wird am gebliebenen Residu noch einmal diese Vernichtungsoperation vorgenommen, Schliesslich ist dann übriggeblieben entweder nichts, oder eine unendliche Verzweigung, in der jeder Zweig sich weiterhin wieder spaltet. Im zweiten Falle enthält die Menge M_1 Teilmengen vom Ordnungstypus η; im ersten Falle nicht.

Es kann nun sein, dass ausser der abzählbaren Menge M_1 von der angegeben ist, dass sie zu M gehört, die Definition von M noch Angabe einer zweiten abzählbaren Menge M_2 erfordert, die zu M sicher nicht gehören darf (1), aber nach Aufstellung dieser beiden Mengen kann die Bestimmung von M nur noch in einer Weise vervollständigt werden, nämlich, im Falle dass M_1 Teilmengen vom Typus η besitzt, durch die Vollführung der Operation des Continuierlichmachens in einer oder mehreren dieser Mengen, natürlich unter Tilgung der durch M_2 ausgeschlossenen Punkte.

(1) Falls man in der Menge der ausgeschlossenen Punkte auch die Operation des Continuierlichmachens hätte ausgeführt, so kommt dies schliesslich auf dasselbe hinaus, als ob man nur eine abzählbare Reihe von Punkten hätte angegeben für M_1 und M_2, während das weitere nur auf eine [[2]]
Vorgreifung in die spätere Wahl zwischen Vollführen oder Unterlassen des Continuierlichmachens für die verschiedenen Teilmengen von M_1 vom Typus η hinauskommt.

Wird die Operation wenigstens einmal vollführt, so ist die Mächtigkeit von M jene des Continuums; wird sie nicht vollführt, so ist M abzählbar.

Es existiert also nur eine Mächtigkeit für mathematische unendliche Mengen, nämlich die abzählbare. Man kann aber hinzufügen:

1) *die abzählbar-unfertige*, aber dann wird eine *Methode*, keine Menge gemeint;

2) *die continuierliche*, dann wird freillch etwas Fertiges gemeint, aber nur als *Matrix*, nicht als Menge.

Von anderen unendlichen Mächtigkeiten, als die abzählbare, die abzählbar-unfertige, und die continuierliche, kann gar keine Rede sein.

⟦104⟧

In the review by Mannoury (Nieuw Arch. Wisk. (2) 8 (1907), p. 175–180) there occur the following points which require a reply in order to prevent misunderstanding about the purport of the book under review. ⟦1⟧

1°. On page 176 Mannoury writes:

'He who considers mathematics as produced by the human intellect, must be the first to acquire the conviction that the components of this mental complex are intimately connected with the nature of that intellect. Thus in most of the research on the foundations of mathematics done in the last half century the main question was not whether, but where and how mathematics takes its origin from (internal or external) experience. Therefore it seems to me that even if we admit the intuition of the continuum as the alpha and omega of all mathematics, this does in no respect affect the soundness of the mathematical-logical method. While therefore the author's defense of his point of view seems least strong against the more rigorous symbolists (Dedekind, Peano), there is one remark made by the author which we are glad to acknowledge as perfectly justified. Namely, where he blames the symbolists for lavishly using, in the consistency proofs which they usually join to their systems of formulas, examples taken from (mathematical) experience, thereby suddenly deviating from the formal course. However, the author again goes too far where he concludes from this bad practice of many symbolists (as, for instance, Dedekind in "Was sind und was sollen die Zahlen") that the consistency proofs cannot be supplied *without* such examples from experience, in a purely formal way. This is in my opinion one of the most important problems which symbolic logic has still to solve.' ⟦2⟧

The reply to this last remark must be that the considerations in 'Over de grondslagen der wiskunde' ⟦the thesis⟧ pp. 138, 139, 170, 171 ⟦p. 78, 93⟧ most positively purport at showing explicitly, albeit briefly, that such purely formal consistency proofs are impossible.

2°. . . . . ⟦3⟧

3°. On page 179 Mannoury bases some considerations about the main content of the book on the following contradiction which he has found: 'The author mentions as an example (of a denumerably unfinished set) the set of definable points on the continuum, i.e. the set of the points or numbers which can be defined individually by a finite number of symbols, no matter whether digits, signs or words (for instance $\sqrt{3}$, e, etc.). However, as the author justly remarks in another place, this set is denumerably infinite.'

But this contradiction is no more than apparent. For the denumerably infinite system mentioned on p. 170 (footnote) ⟦p. 93⟧ of 'Grondslagen' is that of the possible combinations of a *finite* number of symbols which have been previously introduced, while for the denumerably unfinished system of the definable points on the continuum at any moment new symbols can be introduced, which may replace, if it is useful, an infinite number of symbols which were introduced before.

4°. On page 180 Mannoury writes:

'So we suppose that the author will be obliged to recognize that his reasoning is insufficient, when he tries to apply it to a concrete example, for instance to prove that the set of all (continuous and discontinuous) functions $y = f(x)$ belongs not to the third, but to a lower number class.'

Indeed the author will not try to prove that the set of all functions $y = f(x)$ belongs to a lower number class than the third, for this reason that 'set of all functions $y = f(x)$' as well as 'third number class' are senseless combinations of words.

Finally it must be remarked that the intention of the work under discussion is not to propose considerations about which different persons can have different opinions, but to establish truths which, just like mathematical truths, anybody who has once understood will forever affirm.

THE UNRELIABILITY OF THE LOGICAL PRINCIPLES 1908 C

1. *Science* is concerned with the repetition in time of sequences in time which are qualitatively different but may be considered as mutually identifiable. In this process the idea is isolated so that it becomes perceptible and thereby repeatable, and this happens after an unreligious separation[1]) between the subject and an attainable but still unattained aim which by this act is constituted as *something different* from the subject. The impulse to attain aims is directed in the intellect along immediately attainable ends by means of a mathematical system consisting of entities which are brought forth by abstraction out of repeatable phenomena. [[1]]

Anything that can appear as an attainable but still unattained aim, can be made understandable in systems of entities, even religion, but then the *science* of religion is itself unreligious; it may serve to salve one's conscience, or to be merely a game, or to pursue some specific purpose.

And, like any unreligious consciousness, science has neither religious reliability nor reliability in itself. In particular, a mathematical system of entities can never remain reliable as a guide along our perceptions, when it is indefinitely extended beyond the perceptions which it made understandable.

Consequently logical deductions which are made independently of perception, being mathematical transformations in the mathematical system, may lead from scientifically accepted premisses to an inadmissable conclusion.

The classical approach, based on the experience that in geometry logical reasoning deduced only undisputable results from accepted premisses, concluded that logical reasoning is a method for the construction of science and that the logical principles enable man to construct science.

But geometrical reasoning is only valid for a mathematical system which can be mentally constructed without reference to any experience whatever, and the fact that such a popular field of experience as geometry conforms so lastingly to the corresponding mathematical system ought to be distrusted, like any successfull part of science.

Because we now understand that logical deductions are unreliable in science, Aristotle's conclusions on the structure of nature do not convince us without practical verification; we feel the wisdom that blooms in Spinoza's work as completely independent of his logical system; we are no longer annoyed by Kant's antinomies or by the absence of physical hypotheses which can be carried through to their extreme consequences.

[1]) A faculty which originates from the fundamental sin of apprehension or of desire, but which afterwards comes into action even without living fear or desire.

Moreover, the function of the logical principles is not to guide arguments concerning experience subtended by mathematical systems, but to describe regularities which are subsequently observed in the language of the arguments. To follow such regularities in speech, independently of any mathematical system, is to run the risk of paradoxes like that of Epimenides.

2. In religious truth, i.e. in *wisdom*, which abolishes the discernment between the subject and something different, and where the perception of time is no longer admitted, there is no mathematical understanding, let alone reliability of logic. On the contrary, the language of introspective wisdom appears disorderly, illogical, because it can never proceed by systems of entities which have been imprinted on life, but can only accompany their rupture and in this way perhaps aid the un-
⟦2⟧ folding of the wisdom that causes the rupture.

3. The question remains whether the logical principles are firm at least for mathematical systems exempt of living sensation, i.e. systems constructed out of the abstraction of repeatable phenomena, out of the intuition of time, void of living content, out of the basic intuition of mathematics. Throughout the ages logic has been applied in mathematics with confidence; people have never hesitated to accept conclusions deduced by means of logic from valid postulates. However, recently paradoxes have been constructed which appear to be mathematical paradoxes [1]) and which arouse distrust against the free use of logic in mathematics. Therefore some mathematicians abandon the idea that logic is presupposed in mathematics; they try to build up logic and mathematics together [2]), using the methods of the school of *logistics*, founded by Peano. But it can be shown that these paradoxes rise from the same error as that of Epimenides, to wit that they originate where regularities in the language which accompanies mathematics are extended to a language of mathematical words which is not connected with mathematics. Further we see that logistics is also concerned with the language of mathematics instead of with mathematics itself, consequently it cannot throw light on mathematics. Finally all the paradoxes vanish when we confine ourselves to speaking about systems which can be built up explicitly from the basic intuition, in other words, when we consider mathematics as presupposed in logic, instead of logic in mathematics.

[1]) G. Burali-Forti, Rend. Circ. Mat. Palermo 11 (1897), p. 154–164. E. Zermelo, Math. Annalen 59 (1904), p. 514–516. J. Koenig, Math. Annalen 61 (1905), p. 156–160. J. Richard, Rev. Gen. Sci. 16 (1905), p. 551 ⟦Acta math. 30 (1906), p. 295–296⟧. B. Russell, The Principles of Mathematics, Part I, Chapter 10. For attempts at a solution for these paradoxes see, besides the papers mentioned above,: H. Poincaré, Rev. Métaphys. Morale 1905, 1906. J. Mollerup, Math. Annalen 64 (1907), p. 231–238. A. Schoenflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, 2. Teil (Jahresber. Deutsch. Math. Ver., Ergänzungsband 2), Leipzig 1908, Kap. I, § 7.

[2]) In particular Hilbert (Verh. 3. intern. Math. Kongress Heidelberg 1904, p. 174 ⟦Grundlagen der Geometrie, Anhang VII, p. 246⟧.

Thus there remains only the more special question: 'Is it allowed, in purely mathematical constructions and transformations, to neglect for some time the idea of the mathematical system under construction and to operate in the corresponding linguistic structure, following the princples of *syllogism*, of *contradiction* and of *tertium exclusum*, and can we then have confidence that each part of the argument can be justified by recalling to the mind the corresponding mathematical construction?'

Here it will be shown that this confidence is well-founded for the first two principles, but not for the third.

First, then, the *syllogism*. It concludes from the imbedding of a system b into a system c, joined to the imbedding of a system a into the system b, to a direct imbedding of the system a into the system c. This is nothing more than a tautology.

Likewise the principle of *contradiction* is indisputable: The results that we perform the imbedding of a system a into a system b in a prescribed manner, and that we are arrested by the impossibility of such an imbedding, exclude each other.

Now consider the principium *tertii exclusi*: It claims that every supposition is either true or false; in mathematics this means that for every supposed imbedding of a system into another, satisfying certain given conditions, we can either accomplish such an imbedding by a construction, or we can arrive by a construction at the arrestment of the process which would lead to the imbedding. It follows that the question of the validity of the principium tertii exclusi is equivalent to the question *whether unsolvable mathematical problems can exist*. There is not a shred of a proof for the conviction, which has sometimes been put forward [1]) that there exist no unsolvable mathematical problems.

Insofar as only finite discrete systems are introduced, the investigation whether an imbedding is possible or not, can always be carried out and admits a definite result, so in this case the principium tertii exclusi is reliable as a principle of reasoning. [2])

The tool by which we cope with infinite systems in a finite process is *complete induction*; [3]) it enables us to command the infinite sequence of the natural numbers by observing properties, i.e. imbeddings, which hold for *any natural number*, in particular also contradictions, i.e. impossible imbeddings, holding for any natural number. However, the fact that from the systems occurring in a problem a new system can be derived to which complete induction can be applied by means of

[1]) See D. Hilbert, Mathematische Probleme, Göttinger Nachr. 1900, p. 253–297 ⟦Ges. math. Abh. III, p. 290–329⟧. Schoenflies (l.c.) also maintains unconditionnally the method of indirect proof, which he erroneously considers as depending only upon the principium contradictionis.

[2]) This investigation can even in every case be made by a machine or by a trained animal, it does not require the basic intuition of mathematics, living in a human mind. But with respect to questions regarding infinite sets the basic intuition is indispensable; by disregarding this fact, Peano and Russell, Cantor and Bernstein have fallen into errors.

[3]) Only Poincaré seems to have recognized complete induction as 'le raisonnement mathématique par excellence'. See La Science et l'Hypothèse, Paris 1902, Chap. I.

an invariant over a denumerably infinite sequence, thus solving the problem, appears only a posteriori, after the construction of such a system has succeeded. For the totality of the systems which can be derived from the problem, is *denumerably unfinished*, consequently it cannot be methodically examined for the existence or non-existence of a system which solves the problem. It cannot even be excluded that, by such a lucky break as often leads to the solution, we shall be able to survey the denumerably unfinished system of possible developments so as to prove the unsolvability of the problem.

We conclude that in infinite systems the principium tertii exclusi is as yet not reliable. Still we shall never, by an unjustified application of the principle, come up against a contradiction and *thereby* discover that our reasonings were badly founded. For then it would be contradictory that an imbedding were performed, and at the same time it would be contradictory that it were contradictory, and
⟦3⟧ this is prohibited by the principium contradictionis.

An instructive example is provided by the following unproved proposition which, on the basis of the principium tertii exclusi, is generally trusted and applied in the theory of transfinite numbers, namely that every number is either finite or infinite. This means that for any number γ we can construct:

either a mapping of γ into the sequence of the natural numbers in such a way that some number α from this sequence is the *last one* (while the numbers $\alpha+1$, $\alpha+2$, $\alpha+3$, ... remain free),

or a mapping of γ or of one of its parts onto the full sequence of the natural numbers. [1])

So long as this proposition is unproved, it must be considered as uncertain whether problems like the following are solvable:

Is there in the decimal expansion of π a digit which occurs more often than any other one?

Do there occur in the decimal expansion of π infinitely many pairs of consecutive equal digits?

And it likewise remains uncertain whether the more general mathematical problem:

Does the principium tertii exclusi hold in mathematics without exception?

is solvable. [2])

[1]) If this theorem is false, its falsehood can never be shown by a contradiction, for it is impossible that the construction of the free sequence $\alpha+1$, $\alpha+2$, $\alpha+3$, ... would be contradictory and that at the same time it would be contradictory that it were contradictory.

[2]) Consequently the theorems which are usually considered as *proved* in mathematics, ought to be divided into those that are *true* and those that are *non-contradictory*. Equalities in algebra and analysis belong to the former class; also the geometrical incidence theorems, and the theorem
⟦4⟧ that a pointset can have no other cardinality than the finite, the denumerably infinite, the denumerably unfinished and the continuous. To the latter class belong the theorems that a pointset has certainly one of these cardinalities; also that a closed pointset can be divided into a perfect and a denumerable set.

Summarizing:

In wisdom there is no logic.

In science logic often leads to the right result, but it cannot be trusted to do so if its application is indefinitely repeated.

In mathematics it is uncertain whether the whole of logic is admissible and it is uncertain whether the problem of its admissibility is decidable.

x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x

Author's note to the 1919 reprint (1919B):

This essay might be written to-day in the same form. The opinions which it defends have as yet not found many supporters.

1909 THE NATURE OF GEOMETRY

⟦1⟧

In order to understand the nature of geometry, it is necessary to account for its connections with experimental science, for its position in mathematics, and for the point of departure from which it proceeds to its more general points of view.

Up to about a century ago the word 'geometry' always meant: three-dimensional Euclidean geometry. The statements in this science were drawn from experience; of course they could hold only approximately, but they held good again and again with unlimited precision, and this was the case even for all the properties derived from them by logical reasoning; therefore people came to consider these statements as exact, instead of approximative, truths, and they looked for another basis of their certainty than mere experience. For instance, Kant considered Euclidean geometry as a form of perception, present in the human mind, into which any experience of an external world must necessarily enter. To-day this conception of space as a priori, in the same or in a related form, is still alive in many philosophers as well as outsiders.

However, in the course of the last century mathematics has developed in such a way that Kant's theory on geometry had to be refuted, and that the relation of Euclidean geometry to experience was clarified in another manner, this time with perfect certainty.

⟦2⟧ To find the origin of this development we must go back to Descartes' theory of coordinates. This theory can be briefly described as follows. If we understand by a *point* the combination of three real numbers, called the *coordinates* of the point, then the points defined in this manner constitute a so-called three-dimensional Cartesian space. Herein we call any set of points represented by a linear equation between the coordinates, a *plane*, and any set of points defined by two such equations, a *straight line*.

Further we can define the *distance* between two points as the square root of the sum of the squares of the differences of their coordinates, and we can call the continuous group of transformations of space into itself which leave the distance of every pair of points invariant, the *Euclidean group of transformations*. Then Euclidean geometry is the study of those properties of figures in space which are not destroyed by the Euclidean transformations. Defined in this way, it fully coincides with Euclidean geometry of the Greeks.

But the exactness of this coordinate geometry is no longer problematic, for it is perfectly explained by the exactness of the numerical operations.

Consequently it is natural to consider the geometry determined by a transformation group in a Cartesian space as the only exact Euclidean geometry and to see its approximative realization in the world of experience as a physical phenom-

⟦112⟧

enon, which on principle has the same character as, for instance, Boyle's law, and which can be formulated as follows:

'In the world of experience there occur certain objects called *rigid bodies*. They admit a group of transformations called *motions*. This group can be mapped with a high degree of approximation on the six-parameter group of the Euclidean transformations in a three-dimensional Cartesian space. By this mapping the light-rays in the world of experience are mapped on the straight lines in the Cartesian space.'

If somebody objects that not only the motions of rigid bodies and the propagation of light, but all physical phenomena whatever happen for us in a three-dimensional Euclidean space, then we can reply that this holds only insofar as measurements are made on these other phenomena by means of lightrays or of the group of motions of rigid bodies, for instance to determine directions, lengths or volumes; in other words, insofar as we restrict ourselves with respect to these other phenomena to their *substratum* in the space of the propagation of light and of rigid bodies.

However, as long as the human mind had not constructed by means of numbers other groups, comparable in wealth of properties to the Euclidean, a mathematical origin of the Euclidean group independent of the realm of numbers was still conceivable. But this position became untenable when in the course of the last century projective and non-Euclidean geometries were discovered.

In order to obtain projective geometry, we define a *point* as the ratio of four real numbers, called the *coordinates* of the point; *three-dimensional projective space* as the set of the points defined in this way, *projective transformations* as transformations by which the coordinates of the image are linear functions of those of the original point, and *projective geometry* as the theory of the properties of figures in space which are not destroyed by the group of projective transformations.

By withdrawing a single plane from a projective space we obtain a Cartesian space; conversely a Cartesian space can be completed to a projective space by adding a so-called 'plane at infinity'. Then the Euclidean transformation group in the Cartesian space can be considered as a Euclidean transformation group in the projective space; as such it is a subgroup of the projective transformation group. Thus properties invariant for the projective group are a fortiori invariant for the Euclidean group, so projective geometry can still be considered as part of Euclidean geometry, and the existence of the former is compatible with the mathematical apriority of the latter.

However, besides the Euclidean group the projective group contains the non-Euclidean groups, which also depend upon six parameters and which are as rich in properties as the Euclidean group. They satisfy the same axioms except the axiom of parallels which must be replaced by another axiom. Each of these groups gives rise to a trigonometry in which there occurs a constant, called *curvature*, which is characteristic for the group. If the curvature is positive, then the geometry is called elliptic, if negative, then hyperbolic; in Euclidean geometry the curvature is zero.

But a non-Euclidean group contains no Euclidean group, the non-Euclidean invariants are in general not invariant for the Euclidean group; consequently non-Euclidean geometry cannot be considered as a part of Euclidean geometry. Thus in coordinate geometry Euclidean and non-Euclidean geometry have equal rights, but they contradict each other, and it can no longer be maintained that the former is *a priori in mathematics.*

At the same time it must be admitted that with respect to physical space, i.e. the space of lightrays and rigid bodies, it is conceivable that more refined measuring instruments would show that it could be mapped with better approximation on a non-Euclidean space with very small curvature than on a Euclidean space.

Still some philosophers deny this possibility in virtue of the argument that, though it be conceded that the axiom of parallels is not a priori in mathematics, our faculty of cognition can assimilate the world of experience only in the form of Euclidean geometry; in this sense Euclidean geometry would conserve *physical apriority.* Of course these philosophers will not be forced to change their opinion before experience makes it necessary to represent the motions of rigid bodies by a non-Euclidean transformation group. It is true that as yet such a revolution is out of the question, though in physics and mechanics something is happening that makes their position extremely weak.

Besides the geometry of rigid bodies at rest there appears in mechanics another Euclidean geometry, that of velocity bodies, i.e. of the systems of velocities which the points of a mechanism can have at a certain moment. For a velocity body of a mechanism remains a velocity body of that mechanism, firstly when to each of its velocities one and the same velocity is added, and secondly when the mechanism is rotated and thereby the velocity body is also rotated; consequently the velocity body behaves exactly like a rigid body in a three-dimensional Euclidean space.

Now, in modern mechanics this behaviour must be revised as follows: The three-dimensional geometry of velocity bodies is not Euclidean, but hyperbolic with a very small curvature. The sphere with the velocity of light as its radius is for this geometry the infinite, thus velocities surpassing the velocity of light cannot be realized. Here the transition from a three-dimensional Euclidean geometry to a non-Euclidean geometry has actually taken place, and therefore it is no longer possible to maintain that the other original Euclidean geometry of experience is a priori in physics.

There would still be room for the theory of the English philosopher Russell, who adopts as a priori in physics only the projective axioms which hold in Euclidean as well as in non-Euclidean geometry, leaving experiment to determine the curvature and the number of dimensions of the space. ⟦B. A. W. Russell, An essay on the foundations of geometry, § 129–139.⟧

However, even this standpoint becomes untenable in the light of modern mechanics, because space and time are no longer considered as independent, and therefore are not unambiguously defined.

For if space and time are each of its own right a priori for the whole world of experience, then it must be unambiguously defined whether two events are simultaneous or not, in other words, in the four-dimensional world (x, y, z, t) of space and time there must pass through each point one definite three-dimensional *space of simultaneity*, containing 'the state of the world at one moment'.

In classical mechanics this condition is satisfied; here there exists in the (x,y,z,t)-space a well defined pencil of parallel three-dimensional spaces of simultaneity. Such spaces of simultaneity can be constructed on a rigid body in rest by transporting clocks from one point to another in order to adjust resting clocks in different places with respect to each other.

If a part of this system is fixed while a translation is imparted to another part, then the space of simultaneity in the latter part will be the same as when it was at rest. But if the two spaces of simultaneity were determined by means of light signals, then the latter space of simultaneity would be distorted with respect to the former. Thus, according to classical mechanics, and from the point of view of the a priori, the latter space of simultaneity must be considered as *false*, or at least as *apparent*. For that matter, it could be decided by means of experiments on velocities or on the interference of light, which of the two is the true space of simultaneity, for in the moving system the direction of the motion would play a special part in these experiments. The fundamental reason for this can be formulated as follows: rigid dynamics and the propagation of light admit different linear transformationgroups, so that a translation brings about different transformations for each of them and thus changes their mutual behaviour.

However, this theory is contradicted by the fact that the influence of the earth's motion on phenomena of light, where it could be expected, has never been found. This fact underlies the so-called *relativity postulate*, due to Lorentz, which assigns the group of the propagation of light, i.e. the group of the so-called Lorentz transformations, to mechanics as well, of course abandoning its original group. According to this relativity postulate it will firstly be impossible to determine from the phenomena in some rigid system, whether it is at rest or in uniform motion; consequently the notion of absolute motion loses its sense.

Further it is no longer true that of the two spaces of simultaneity mentioned above one is false or apparent; on the contrary both have equal rights and we are no longer entitled to speak of *the* space of simultaneity, i.e. *the* space in the narrower sense of the word.

The change in the relation of simultaneity is always attended with a change in the relation of collocality, in such a way that two different events can be made either simultaneous or collocal, but never both, by a suitable Lorentz transformation in the (x, y, z, t)-space without interfering with the laws of nature. An exception and at the same time a transition between both categories is formed by such pairs of events of which one is started by a light signal emitted by the other.

Mentioning finally that space can be measured by time, in that every distance is equal to $\sqrt{-1}$ times the time which light needs to cover it, we have certainly supplied in this connection sufficient arguments to show, should the theory persist, how difficult it will be to maintain that space and time are a priori, and that consequently the same holds for Euclidean geometry.

Must it be concluded that there is no a priori form of perception at all for the world of experience? There is, but only in so far as any experience is perceived as spatial or non-spatial *change*, whose intellectual abstraction is the *intuition of*
⟦3⟧ *time* or *intuition of two-in-one*. From this intuition of time, independent of experience, all the mathematical systems, including spaces with their geometries, have been built up, and subsequently some of these mathematical systems are chosen to catalogue the various phenomena of experience. Here it must be remarked that in order to catalogue sequences of phenomena, which are always finite, mostly infinite mathematical systems are applied, in which the finite sequences are extended by induction. It is by no means determined a priori *which* mathematical systems will be chosen for this purpose; this is a question of convenience, of taste, or of custom. On the contrary, in exchange for its intuition of time, experience receives the free disposition of *all* the mathematical systems. What we had to reject as a priori just now, was not the mathematical intuition of time, which is a *measureless one-dimensional continuum conceived by one single subject*, in which two different time-intervals are absolutely different and cannot be measured by each other, it was the *scientific time-coordinate*, which firstly is measurable, and secondly passes by for all the points of a three-dimensional space together, so that, if it were a priori, the statement that some event has lasted ten seconds, would have an unambiguous sense, immune to any scientific theory.

It follows from what has been said that it is impossible to segregate a particular part of mathematics, calling it *geometry*, on the grounds that it is a priori. The question arises if such a special denomination can be justified by a purely mathematical delimitation. It seems that only the following definition merits consideration in this respect:

Geometry is concerned with the properties of spaces of one or more dimensions. In particular it investigates and classifies sets, transformations and transformation groups in these spaces.

The spaces under consideration are built up out of one or more Cartesian simplices, which can be connected in different ways; consequently a space is not completely defined by its dimension alone.

According to our definition all investigations in which only finite sets occur (e.g. on permutations and groups of permutations) must be considered as falling outside geometry, though they can in many cases be applied in geometry; the same holds for investigations on denumerable sets, for instance number fields; on the other hand it holds also for theories of more general spaces, such as Veronese and Hilbert have built up from non-Archimedean numbers.

According to our definition the arithmetical operations with real numbers do belong to geometry, namely to one-dimensional geometry; likewise those with complex numbers belong to two-dimensional geometry.

Usually several different geometries are studied in one and the same space; they are distinguished because each of them is based on a different group of transformations. A property of a figure is interesting in a given geometry only when it is invariant under the fundamental group. For instance the divisibility properties of real numbers are based on the similarity group in one-dimensional space; those of complex numbers on that in two-dimensional space; the projective properties of one complex variable and the real plane geometry of circles are based on the conformal group of the sphere; the study of an automorphic function is based on a discontinuous subgroup of the last group; elementary Euclidean geometry is based on the group of motions; the general theory of plane algebraic curves either on the group of projective or on that of birational transformations of the complex projective plane, i.e. a group in a four-dimensional space.

Now a more general light is thrown on the properties of a geometry each time that we succeed in exhibiting its basic group as a subgroup of a larger group. Firstly those of its properties which admit the larger group are either discovered at this moment, or their importance immediately increases; but also with respect to the other properties a more general and in most cases simpler point of view is reached by subordinating them to the former.

For instance in elementary geometry the projective properties were developed only after the projective group was chosen as its basis, but a better survey of the special Euclidean properties could be obtained by considering them as projective properties with respect to a degenerate fundamental surface at infinity, and because this fundamental surface can just as well be chosen in the finite, they can be generalized at the same time.

A similar result is obtained by considering the group of addition and multiplication as a subgroup of the projective group in one dimension or by considering the similarity group in n dimensions as a subgroup of the conformal group for which the point at infinity is fixed. In the latter case we find at once the corresponding properties for groups which result by fixing some finite point.

Finally it can often be shown that figures and operations with which we became acquainted in the smaller group, can be completely defined by properties invariant for the larger group; they can then be *more generally characterized*, though perhaps it may be useful for special questions afterwards to consider the smaller group. An example is supplied by the potential functions in two dimensions, which at first were characterized in Euclidean geometry; after a point at infinity had been added and the conformal group had been introduced, it could be shown that such a function is completely defined by its invariants for the conformal group and that the Euclidean group is inessential for it.

In such cases it always turns out that a figure only unfolds its internal properties when for its definition only invariants of the largest possible group are used.

Now the largest group we can strive to make sufficient for the definition of a geometrical figure, function or group, is that of the one-to-one continuous transformations, in other words, the group of analysis situs. It is only in recent years that people have tried to take full advantage of this group in every domain of geometry. As results obtained in this way we can mention the reduction of the axioms for the main arithmetical operations, and of the plane Euclidean and non-Euclidean geometries; the latter have been characterized by Cayley in the projective group, by Lie in the group of analytical transformations, and by Hilbert
⟦4⟧ in the group of analysis situs.

Further results are the characterization of the translation by domains as the most general one-to-one continuous transformation of space into itself, and of the anal-
⟦5⟧ ytical Lie-groups as the most general finite continuous transformation groups, though all this has as yet only been rigorously proved for one and two dimensions.

Probably also the algebraic functions admit a simple characterization for analysis situs in the class of continuous, in general m-to-n transformations of a surface into itself. At least in the simplest case it is known that a continuous transformation of a sphere into itself, which is at most one-to-two, is the one-to-one continuous image of the extraction of the square root.

No less important is research on the general character of a system of several one-to-one continuous transformations of a surface into itself, and on the classes of discontinuous groups built from such transformations. In the first place the problem arises under which conditions these groups are isomorphic with the fundamental groups for the automorphic functions.

But it will only be possible to solve these problems when we are supported by a *classification for analysis situs of the sets of points in a space*; so here lies the field that in the first place deserves attention for research; for that matter a very special part of it has long since drawn general interest, namely the classification of spaces as a whole, in particular the distinction between different spaces of the same dimension; this is analysis situs in the narrow sense, studied since Riemann, and of paramount importance also for group theory, because spaces of the same dimension but of different shape admit totally different transformation groups and thus totally different geometries.

An immediately related problem is, in how far spaces of different dimension are different for our group. Most probably this is always the case, but it seems extremely hard to prove, and probably it will remain an unsolved problem for a long
⟦6⟧ time to come.

As to the classification of *subsets* of a space, for one dimension it is straightforward, in so far as it is important. But already in two dimensions we are immediately surrounded by an intricate multitude of problems, some of them very complicated. That they are so difficult to tackle is caused by the fact that at the

⟦118⟧

outset no differentiable or monotone functions can occur; so we cannot proceed by calculation, but are thrown back upon the small number of notions, invariant for analysis situs, which have thus far been defined, such as *limit point*, *connexion*, *domain*, *boundary*.

One of the most important notions that have recently been added to these is that of an *open or closed Jordan curve*, i.e. the *one-to-one continuous image of a circle or of an arc of a circle*. For this notion holds the fundamental theorem extremely important in this field of research, that in the plane an open Jordan curve determines one domain, while a closed Jordan curve determines two domains, and that the boundary of each of the domains coincides with the Jordan curve. ⟦7⟧

The fact that this theorem, which seems quite evident, requires an elaborate proof and that the numerous fruitless attempts to simplify it fill an extensive litterature, throws a clear light on the limitations to which reasoning in this field is subjected.

For that matter, it is not true that any curve which divides the plane into two domains, having the curve as their common boundary, is a closed Jordan curve. On the other hand, in spite of many efforts no satisfactory proof has as yet been given for the seemingly very slight extension of Jordan's theorem, that the one-to-one continuous image of a closed curve is again a closed curve. ⟦8⟧

No more are we certain that a closed Jordan surface, i.e. a one-to-one continuous image of a spherical surface, divides the three-dimensional Cartesian space into two domains. ⟦9⟧

A further most fertile notion is that of a point on the boundary of a plane domain being *attainable*. It was introduced by Schoenflies and it means that from the domain an open Jordan curve, lying inside the domain and ending in the point, can be drawn. The theorem on the closed Jordan curve can be supplemented by the statement that all its points are attainable from both domains into which it divides the plane. And the converse also holds: A curve that divides the plane into two domains in such a way that each of its points is attainable from both domains, is a closed Jordan curve.

It is above all the introduction of the notion of an attainable point that has improved our understanding of the structure in analysis situs of the closed (i.e. containing all their limit points) plane sets of points. It enabled us to subject them to a splitting process, ending after a denumerable number of steps in points and Jordan curves. But hereby only a first step is taken towards the end: the classification for analysis situs of the plane sets of points.

Another remark: An example of a theory developed only by reasonings belonging to analysis situs can be found in the classical treatment of projective geometry without coordinates. For as a matter of fact this treatment is based (let us restrict ourselves to three dimensions) on a system of Jordan surfaces and curves, called planes and straight lines; concerning these surfaces and curves certain axioms are adopted, which contain much that is redundant, but which at least are expressed in terms belonging to analysis situs, and derivations of further properties are expressed in the same terms, without the use of coordinates.

An appropriate system of coordinates, establishing the consistency of the axioms, can subsequently be constructed by the method of Von Staudt; this is also useful for a quicker solution of several special problems.

In the same way it will not be necessary completely to banish coordinates and formulas from other theories when they have been successfully based on analysis situs, but the treatment without formulas, the 'geometrical' treatment, will be the point of departure, the analytical method will become a dispensable tool.

It was my main intention to demonstrate that it is possible and desirable to give priority to the geometrical method also in parts of mathematics where this has not yet been realized.

x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x

Author's note to the 1919 *reprint* (1919B):
If this lecture were given to-day, it would certainly mention in its first part the 'general theory of relativity', contrived after 1909, but this would not affect the conclusions on the theory of knowledge. Nor has the purport of the second part lost its actuality by the fact that several of the problems mentioned there have now been solved.

FROM THE REVIEW OF: G. MANNOURY, METHODOLOGISCHES UND PHILOSOPHISCHES ZUR ELEMENTARMATHEMATIK (HAARLEM 1909)

⟦After a short survey of the book Brouwer continues:⟧
Finally the book expresses the author's conviction about the origin of the mathematical truths, and there he defends the 'formalist' conception, which has also been advocated by Dedekind, Peano, Russell, Hilbert and Zermelo, against 'intuitionists' like for instance Poincaré and Borel. This formalist conception recognizes no other mathematics than the mathematical language and it considers it essential to draw up definitions and axioms and to deduce from these other propositions by means of logical principles which are also explicitly formulated beforehand. This has two consequences, which appear absurd to many people, but which Mannoury accepts, namely the priority of infinite over finite numbers and the belief in higher cardinalities than that of the continuum.

Concerning the formalist position the following questions arise again and again: 'What is the reason why exactly these axioms, definitions and rules of inference are accepted, and what is the origin of the conviction that in this way mathematics is produced and not nonsense talked?' The earlier partisans of the school, like Dedekind and Peano, did not worry much about these questions, but Russell and Hilbert tried to obviate them, the former by making it plausible that entities verifying his axioms 'logically exist', the latter by proving that the logical figure of 'contradiction' cannot be derived in his system. However, neither of them has been able to avoid the intuitive application of complete induction, and therefore they have invigorated by their reasonings rather intuitionism than formalism.

Accordingly Mannoury tries to evade the difficulty in another way; he wishes to put the study of the special part which the language of mathematics plays among the infinite diversity of nonsense, on the shoulders of psychology. But even so it is impossible for him to attain his purpose, for like every science of experience (i.e. generalization of experience) psychology presupposes mathematics at least up to the first infinite cardinal number inclusive.

Therefore still no mathematical significance can be attributed to purely mathematical reasonings, like the author's proof of the main theorem of arithmetic, and the leak in formalism has not been stopped by Mannoury, no more than by Russell or Hilbert.

....

Though it must be admitted that in several places in the book successful arguments are put up against intuitionism, this must be imputed mainly to the slovenly redaction of his arguments by Poincaré, the only opponent whom Mannoury combats in this respect. Examples of such careless formulations, which expose intuitionism to criticism, are the rejection of every infinite number, including the denumerable, and the identification of mathematical existence with non-contradictority. It is only after these mistakes have been redressed, and after the basic intuition of two-ity has been accepted, that intuitionism becomes invulnerable.

....

INTUITIONISM AND FORMALISM.†

BY DR. L. E. J. BROUWER.

(Inaugural address at the University of Amsterdam, read October 14, 1912.)

THE subject for which I am asking your attention deals with the foundations of mathematics. To understand the development of the opposing theories existing in this field one must first gain a clear understanding of the concept "science"; for it is as a part of science that mathematics originally took its place in human thought.

By science we mean the systematic cataloguing by means of laws of nature of causal sequences of phenomena, i. e., sequences of phenomena which for individual or social pur-

† Translated for the BULLETIN by Professor ARNOLD DRESDEN.

poses it is convenient to consider as repeating themselves identically,—and more particularly of such causal sequences as are of importance in social relations.

That science lends such great power to man in his action upon nature is due to the fact that the steadily improving cataloguing of ever more causal sequences of phenomena gives greater and greater possibility of bringing about desired phenomena, difficult or impossible to evoke directly, by evoking other phenomena connected with the first by causal sequences. And that man always and everywhere creates order in nature is due to the fact that he not only isolates the causal sequences of phenomena (i. e., he strives to keep them free from disturbing secondary phenomena) but also supplements them with phenomena caused by his own activity, thus making them of wider applicability. Among the latter phenomena the results of counting and measuring take so important a place, that a large number of the natural laws introduced by science treat only of the mutual relations between the results of counting and measuring. It is well to notice in this connection that a natural law in the statement of which measurable magnitudes occur can only be understood to hold in nature with a certain degree of approximation; indeed natural laws as a rule are not proof against sufficient refinement of the measuring tools.

The exceptions to this rule have from ancient times been practical arithmetic and geometry on the one hand, and the dynamics of rigid bodies and celestial mechanics on the other hand. Both these groups have so far resisted all improvements in the tools of observation. But while this has usually been looked upon as something accidental and temporal for the latter group, and while one has always been prepared to see these sciences descend to the rank of approximate theories, until comparatively recent times there has been absolute confidence that no experiment could ever disturb the exactness of the laws of arithmetic and geometry; this confidence is expressed in the statement that mathematics is
⟦1⟧ "the" exact science.

On what grounds the conviction of the unassailable exactness of mathematical laws is based has for centuries been an object of philosophical research, and two points of view may here be distinguished, *intuitionism* (largely French) and *formalism* (largely German). In many respects these two viewpoints have become more and more definitely opposed to each other; but during recent years they have reached agreement as to this, that the exact validity of mathematical laws as laws of nature is out of the question. The question where mathematical exactness does exist, is answered differently by the two sides; the intuitionist says: in the human intellect, the formalist says: on paper.

In Kant we find an old form of intuitionism, now almost completely abandoned, in which time and space are taken to be forms of conception inherent in human reason. For Kant the axioms of arithmetic and geometry were synthetic a priori judgments, i. e., judgments independent of experience and not capable of analytical demonstration; and this explained their apodictic exactness in the world of experience as well as in abstracto. For Kant, therefore, the possibility of disproving arithmetical and geometrical laws experimentally was not only excluded by a firm belief, but it was entirely unthinkable.

Diametrically opposed to this is the view of formalism, which maintains that human reason does not have at its disposal exact images either of straight lines or of numbers larger than ten, for example, and that therefore these mathematical entities do not have existence in our conception of nature any more than in nature itself. It is true that from certain relations among mathematical entities, which we assume as axioms, we deduce other relations according to fixed laws, in the conviction that in this way we derive truths from truths by logical reasoning, but this non-mathematical conviction of truth or legitimacy has no exactness whatever and is nothing but a vague sensation of delight arising from the knowledge of the efficacy of the projection into nature of these relations and laws of reasoning. For the formalist therefore mathematical exactness consists merely in the method of developing the series of relations, and is independent of the significance one might want to give to the relations or the entities which they relate. And for the consistent formalist these meaningless series of relations to which mathematics are reduced have mathematical existence only when they have been represented in spoken or written language together with the mathematical-logical laws upon which their development depends, thus forming what is called symbolic logic.

Because the usual spoken or written languages do not in the least satisfy the requirements of consistency demanded of this symbolic logic, formalists try to avoid the use of ordinary language in mathematics. How far this may be carried is shown by the modern Italian school of formalists, whose leader, Peano, published one of his most important discoveries concerning the existence of integrals of real differential equations in the *Mathematische Annalen* in the language of symbolic logic; the result was that it could only be read by a few of the initiated and that it did not become generally available until one of these had translated the article into
[[2]] German.

The viewpoint of the formalist must lead to the conviction that if other symbolic formulas should be substituted for the ones that now represent the fundamental mathematical relations and the mathematical-logical laws, the absence of the sensation of delight, called "consciousness of legitimacy," which might be the result of such substitution would not in the least invalidate its mathematical exactness. To the philosopher or to the anthropologist, but not to the mathematician, belongs the task of investigating why certain systems of symbolic logic rather than others may be effectively projected upon nature. Not to the mathematician, but to the psychologist, belongs the task of explaining why we believe in certain systems of symbolic logic and not in others, in particular why we are averse to the so-called contradictory systems in which the negative as well as the positive of certain propositions are valid.*

As long as the intuitionists adhered to the theory of Kant it seemed that the development of mathematics in the nineteenth century put them in an ever weaker position with regard to the formalists. For in the first place this development showed repeatedly how complete theories could be carried over from one domain of mathematics to another: projective geometry, for example, remained unchanged under the interchange of the rôles of point and straight line, an important part of the arithmetic of real numbers remained valid for various complex number fields and nearly all the theorems of elementary geometry remained true for non-archimedian

* See Mannoury, "Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik," pp. 149–154.

geometry, in which there exists for every straight line segment another such segment, infinitesimal with respect to the first. These discoveries seemed to indicate indeed that of a mathematical theory only the logical form was of importance and that one need no more be concerned with the material than it is necessary to think of the significance of the digit groups with which one operates, for the correct solution of a problem in arithmetic.

But the most serious blow for the Kantian theory was the discovery of non-euclidean geometry, a consistent theory developed from a set of axioms differing from that of elementary geometry only in this respect that the parallel axiom was replaced by its negative. For this showed that the phenomena usually described in the language of elementary geometry may be described with equal exactness, though frequently less compactly in the language of non-euclidean geometry; hence, it is not only impossible to hold that the space of our experience has the properties of elementary geometry but it has no significance to ask for *the* geometry which would be true for the space of our experience. It is true that elementary geometry is better suited than any other to the description of the laws of kinematics of rigid bodies and hence of a large number of natural phenomena, but with some patience it would be possible to make objects for which the kinematics would be more easily interpretable in terms of non-euclidean than in terms of euclidean geometry.*

However weak the position of intuitionism seemed to be after this period of mathematical development, it has recovered by abandoning Kant's apriority of space but adhering the more resolutely to the apriority of time. This neo-intuitionism considers the falling apart of moments of life into qualitatively different parts, to be reunited only while remaining separated by time as the fundamental phenomenon of the human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking, the intuition of the bare two-oneness. This intuition of two-oneness, the basal intuition of mathematics, creates not only the numbers one and two, but also all finite ordinal numbers, inasmuch as one of the elements of the two-oneness may be thought of as a new two-oneness, which process may be

* See Poincaré, La Science et l'Hypothèse, p. 104. ⟦3⟧

repeated indefinitely; this gives rise still further to the smallest infinite ordinal number ω. Finally this basal intuition of mathematics, in which the connected and the separate, the continuous and the discrete are united, gives rise immediately to the intuition of the linear continuum, i. e., of the "between," which is not exhaustible by the interposition of new units and which therefore can never be thought of as a mere collection of units.

In this way the apriority of time does not only qualify the properties of arithmetic as synthetic a priori judgments, but it does the same for those of geometry, and not only for elementary two- and three-dimensional geometry, but for non-euclidean and n-dimensional geometries as well. For since Descartes we have learned to reduce all these geometries to arithmetic by means of the calculus of coordinates.

From the present point of view of intuitionism therefore all mathematical sets of units which are entitled to that name can be developed out of the basal intuition, and this can only be done by combining a finite number of times the two operations: "to create a finite ordinal number" and "to create the infinite ordinal number ω"; here it is to be understood that for the latter purpose any previously constructed set or any previously performed constructive operation may be taken as a unit. Consequently the intuitionist recognizes only the existence of denumerable sets, i. e., sets whose elements may be brought into one-to-one correspondence either with the elements of a finite ordinal number or with those of the infinite ordinal number ω. And in the construction of these sets neither the ordinary language nor any symbolic language can have any other rôle than that of serving as a non-mathematical auxiliary, to assist the mathematical memory or to enable different individuals to build up the same set.

For this reason the intuitionist can never feel assured of the exactness of a mathematical theory by such guarantees as the proof of its being non-contradictory,* the possibility of defining its concepts by a finite number of words,* or the practical certainty that it will never lead to a misunderstanding in human relations.†

As has been stated above, the formalist wishes to leave to the psychologist the task of selecting the "truly-mathe-

⟦4⟧ * See however Poincaré in *Scientia*, No. XXIV, p. 6.

† See however Borel in *Revue du Mois*, No. 80, p. 221.

matical" language from among the many symbolic languages that may be consistently developed. Inasmuch as psychology has not yet begun on this task, formalism is compelled to mark off, at least temporarily, the domain that it wishes to consider as "true mathematics" and to lay down for that purpose a definite system of axioms and laws of reasoning, if it does not wish to see its work doomed to sterility. The various ways in which this attempt has actually been made all follow the same leading idea, viz., the presupposition of the ex stence of a world of mathematical objects, a world independent of the thinking individual, obeying the laws of classical logic and whose objects may possess with respect to each other the "relation of a set to its elements." With reference to this relation various axioms are postulated, suggested by the practice with natural finite sets; the principal of these are: "*a set is determined by its elements*"; "*for any two mathematical objects it is decided whether or not one of them is contained in the other one as an element*"; "*to every set belongs another set containing as its elements nothing but the subsets of the given set*"; the axiom of selection: "*a set which is split into subsets contains at least one subset which contains one and not more than one element of each of the first subsets;* the axiom of inclusion: "*if for any mathematical object it is decided whether a certain property is valid for it or not, then there exists a set containing nothing but those objects for which the property does hold*"; the axiom of composition: "*the elements of all sets that belong to a set of sets form a new set.*" ⟦5⟧

On the basis of such a set of axioms the formalist develops now in the first place the theory of "finite sets." A set is called finite if its elements can not be brought into one-to-one correspondence with the elements of one of its subsets; by means of relatively complicated reasoning the principle of complete induction is proved to be a fundamental property of these sets;* this principle states that a property will be true for all finite sets if, first, it is true for all sets containing a single element, and, second, its validity for an arbitrary finite set follows from its validity for this same set reduced by a single one of its elements. That the formalist must give an explicit proof of this principle, which is self-evident for the

* Compare, e. g., Zermelo, "Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète," *Acta Mathematica*, 32, pp. 185–193.

finite numbers of the intuitionist on account of their construction, shows at the same time that the former will never be able to justify his choice of axioms by replacing the unsatisfactory appeal to inexact practice or to intuition equally inexact for him by a proof of the non-contradictoriness of his theory. For in order to prove that a contradiction can never arise among the infinitude of conclusions that can be drawn from the axioms he is using, he would first have to show that if no contradiction had as yet arisen with the nth conclusion then none could arise with the $(n + 1)$th conclusion, and secondly he would have to apply the principle of complete induction intuitively. But it is this last step which the formalist may not take, even though he should have proved the principle of complete induction; for this would require mathematical certainty that the set of properties obtained after the nth conclusion had been reached, would satisfy for an arbitrary n his definition for finite sets,* and in order to secure this certainty he would have to have recourse not only to the unpermissible application of a symbolic criterion to a concrete example but also to another intuitive application of the principle of complete induction; this would lead him to a vicious circle reasoning.

In the domain of finite sets in which the formalistic axioms have an interpretation perfectly clear to the intuitionists, unreservedly agreed to by them, the two tendencies differ solely in their method, not in their results; this becomes quite different however in the domain of infinite or transfinite sets, where, mainly by the application of the axiom of inclusion, quoted above, the formalist introduces various concepts, entirely meaningless to the intuitionist, such as for instance "*the set whose elements are the points of space*," "*the set whose elements are the continuous functions of a variable*," "*the set whose elements are the discontinuous functions of a variable*," and so forth. In the course of these formalistic developments it turns out that the consistent application of the axiom of inclusion leads inevitably to contradictions. A clear illustration of this fact is furnished by the so-called paradox of Burali-Forti.† To exhibit it we have to lay down a few definitions.

[[3]] * Compare Poincaré, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1905, p. 834.
† Compare *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1897.

A set is called ordered if there exists between any two of its elements a relation of "higher than" or "lower than," with this understanding that if the element a is higher than the element b, then the element b is lower than the element a, and if the element b is higher than a and c is higher than b, then c is higher than a.

A well-ordered set (in the formalistic sense) is an ordered set, such that every subset contains an element lower than all others.

Two well-ordered sets that may be brought into one-to-one correspondence under invariance of the relations of "higher than" and "lower than" are said to have the same ordinal number.

If two ordinal numbers A and B are not equal, then one of them is greater than the other one, let us say A is greater than B; this means that B may be brought into one-to-one correspondence with an initial segment of A under invariance of the relations of "higher than" and "lower than." We have introduced above, from the intuitionist viewpoint, the smallest infinite ordinal number ω, i. e., the ordinal number of the set of all finite ordinal numbers arranged in order of magnitude.* Well-ordered sets having the ordinal number ω are called elementary series. [[6]]

It is proved without difficulty by the formalist that an arbitrary subset of a well-ordered set is also a well-ordered set, whose ordinal number is less than or equal to that of the original set; also, that if to a well-ordered set that does not contain all mathematical objects a new element be added that is defined to be higher than all elements of the original set, a new well-ordered set arises whose ordinal number is greater than that of the first set.

We construct now on the basis of the axiom of inclusion the *set s which contains as elements all the ordinal numbers arranged in order of magnitude;* then we can prove without difficulty, on the one hand that s is a well-ordered set whose ordinal number can not be exceeded by any other ordinal number in magnitude, and on the other hand that it is possible, since not all mathematical objects are ordinal numbers, to create an

* The more general ordinal numbers of the intuitionist are the numbers constructed by means of Cantor's two principles of generation (compare *Math. Annalen*, vol. 49, p. 226). [[3]]

ordinal number greater than that of s by adding a new element to s,—a contradiction.*

Although the formalists must admit contradictory results as mathematical if they want to be consistent, there is something disagreeable for them in a paradox like that of Burali-Forti because at the same time the progress of their arguments is guided by the principium contradictionis, i. e., by the rejection of the simultaneous validity of two contradictory properties. For this reason the axiom of inclusion has been modified to read as follows: "*If for all elements of a set it is decided whether a certain property is valid for them or not, then the set contains a subset containing nothing but those elements for which the property does hold.*"†

In this form the axiom permits only the introduction of such sets as are subsets of sets previously introduced; if one wishes to operate with other sets, their existence must be explicitly postulated. Since however in order to accomplish anything at all the existence of a certain collection of sets will have to be postulated at the outset, the only valid argument that can be brought against the introduction of a new set is that it leads to contradictions; indeed the only modifications that the discovery of paradoxes has brought about in the practice of formalism has been the abolition of those sets that had given rise to these paradoxes. One continues to operate without hesitation with other sets introduced on the basis of the old axiom of inclusion; the result of this is that extended fields of research, which are without significance for the intuitionist are still of considerable interest to the formalist. An example of this is found in the theory of potencies, of which I shall sketch the principal features here, because it illustrates so clearly the impassable chasm which separates the two sides.

* It is without justice that the paradox of Burali-Forti is sometimes classed with that of Richard, which in a somewhat simplified form reads as follows: "Does there exist a *least integer, that can not be defined by a sentence of at most twenty words?* On the one hand *yes*, for the number of sentences of at most twenty words is of course finite; on the other hand *no*, for if it should exist, it would be defined by the sentence of fifteen words formed by the words italicized above."

The origin of this paradox does not lie in the axiom of inclusion but in the variable meaning of the word "*defined*" in the italicized sentence, which makes it possible to define by means of this sentence an infinite number of integers in succession.

† Compare Zermelo, *Math. Annalen*, vol. 65, p. 263.

Two sets are said to possess the same potency, or power, if their elements can be brought into one-to-one correspondence. The power of set A is said to be greater than that of B, and the power of B less than that of A, if it is possible to establish a one-to-one correspondence between B and a part of A, but impossible to establish such a correspondence between A and a part of B. The power of a set which has the same power as one of its subsets, is called infinite, other powers are called finite. Sets that have the same power as the ordinal number ω are called denumerably infinite and the power of such sets called aleph-null: it proves to be the smallest infinite power. According to the statements previously made, this power aleph-null is the only infinite power of which the intuitionists recognize the existence.

Let us now consider the concept: "denumerably infinite ordinal number." From the fact that this concept has a clear and well-defined meaning for both formalist and intuitionist, the former infers the right to create the "set of all denumerably infinite ordinal numbers," the power of which he calls aleph-one, a right not recognized by the intuitionist. Because it is possible to argue to the satisfaction of both formalist and intuitionist, first, that denumerably infinite sets of denumerably infinite ordinal numbers can be built up in various ways, and second, that for every such set it is possible to assign a denumerably infinite ordinal number, *not* belonging to this set, the formalist concludes: "aleph-one is greater than aleph-null," a proposition, that has no meaning for the intuitionist. Because it is possible to argue to the satisfaction of both formalist and intuitionist that it is impossible to construct* a set of denumerably infinite ordinal numbers, which could be proved to have a power less than that of aleph-one, but greater than that of aleph-null, the formalist concludes: "aleph-one is the second smallest infinite ordinal number," a proposition that has no meaning for the intuitionist.

Let us consider the concept: "real number between 0 and 1." For the formalist this concept is equivalent to "elementary

* If "construct" were here replaced by "define" (in the formalistic sense), the proof would *not* be satisfactory to the intuitionist. For, in Cantor's argument in *Math. Annalen*, vol. 49, it is not allowed to replace the words "können wir bestimmen" (p. 214, line 17 from top) by the words "muss es geben." [[7]]

series of digits after the decimal point,"* for the intuitionist it means "law for the construction of an elementary series of digits after the decimal point, built up by means of a finite number of operations." And when the formalist creates the "set of all real numbers between 0 and 1," these words are without meaning for the intuitionist, even whether one thinks of the real numbers of the formalist, determined by elementary series of freely selected digits, or of the real numbers of the intuitionist, determined by finite laws of construction. Because it is possible to prove to the satisfaction of both formalist and intuitionist, first, that denumerably infinite sets of real numbers between 0 and 1 can be constructed in various ways, and second that for every such set it is possible to assign a real number between 0 and 1, not belonging to the set, the formalist concludes: "the power of the continuum, i. e., the power of the set of real numbers between 0 and 1, is greater than aleph-null," a proposition which is without meaning for the intuitionist; the formalist further raises the question, whether there exist sets of real numbers between 0 and 1, whose power is less than that of the continuum, but greater than aleph-null, in other words, "whether the power of the continuum is the second smallest infinite power," and this question, which is still waiting for an answer, he considers to be one of the most difficult and most fundamental of mathematical problems.

For the intuitionist, however, the question as stated is without meaning; and as soon as it has been so interpreted as to get a meaning, it can easily be answered.

If we restate the question in this form: "Is it impossible to construct† infinite sets of real numbers between 0 and 1, whose power is less than that of the continuum, but greater than aleph-null?," then the answer must be in the affirmative; for the intuitionist can only construct denumerable sets of mathematical objects and if, on the basis of the intuition of the

⟦3⟧ * Here as everywhere else in this paper, the assumption is tacitly made that there are an infinite number of digits different from 9.

† If "construct" were here replaced by "define" (in the formalistic sense), and if we suppose that the problem concerning the pairs of digits in the decimal fraction development of π, discussed on p. 95, *can not be solved*, then the question of the text must be answered negatively. For, let us denote by Z the set of those infinite binary fractions, whose nth digit is 1, if the nth pair of digits in the decimal fraction development of π consists of unequal digits; let us further denote by X the set of all finite binary fractions. Then the power of $Z + X$ is greater than aleph-null, but less than that of the continuum.

linear continuum, he admits elementary series of free selections as elements of construction, then each non-denumerable set constructed by means of it contains a subset of the power of the continuum.

If we restate the question in the form: "Is it possible to establish a one-to-one correspondence between the elements of a set of denumerably infinite ordinal numbers on the one hand, and a set of real numbers between 0 and 1 on the other hand, both sets being indefinitely extended by the construction of new elements, of such a character that the correspondence shall not be disturbed by any continuation of the construction of both sets?," then the answer must also be in the affirmative, for the extension of both sets can be divided into phases in such a way as to add a denumerably infinite number of elements during each phase.*

If however we put the question in the following form: "Is it possible to construct a law which will assign a denumerably infinite ordinal number to every elementary series of digits and which will give certainty a priori that two different elementary series will never have the same denumerably infinite ordinal number corresponding to them?," then the answer must be in the negative; for this law of correspondence must prescribe in some way a construction of certain denumerably infinite ordinal numbers at each of the successive places of the elementary series; hence there is for each place c_ν a well-defined largest denumerably infinite number α_ν, the construction of which is suggested by that particular place; there is then also a well-defined denumerably infinite ordinal number α_ω, greater than all α_ν's and that can not therefore be exceeded by any of the ordinal numbers involved by the law of correspondence; hence the power of that set of ordinal numbers can not exceed aleph-null.

As a means for obtaining ever greater powers, the formalists define with every power μ a "set of all the different ways in which a number of selections of power μ may be made," and they prove that the power of this set is greater than μ. In particular, when it has been proved to the satisfaction of both

* Calling *denumerably unfinished* all sets of which the elements can be individually realized, and in which for every denumerably infinite subset there exists an element not belonging to this subset, we can say in general, in accordance with the definitions of the text: "*All denumerably unfinished sets have the same power.*" [[3]]

formalist and intuitionist that it is possible in various ways
to construct laws according to which functions of a real variable
different from each other are made to correspond to all elemen-
[[8]] tary series of digits, but that it is impossible to construct a law
according to which an elementary series of digits is made to
correspond to every function of a real variable and in which
there is certainty a priori that two different functions will
never have the same elementary series corresponding to them,
the formalist concludes: "the power c' of the set of all func-
tions of a real variable is greater than the power c of the con-
tinuum," a proposition without meaning to the intuitionist;
and in the same way in which he was led from c to c', he comes
from c' to a still greater power c''.

A second method used by the formalists for obtaining ever greater powers is to define for every power μ, which can serve as a power of ordinal numbers, "the set of all ordinal numbers of power μ," and then to prove that the power of this set is greater than μ. In particular they denote by aleph-two the power of the set of all ordinal numbers of power aleph-one and they prove that aleph-two is greater than aleph-one and that it follows in magnitude immediately after aleph-one. If it should be possible to interpret this result in a way in which it would have meaning for the intuitionist, such interpretation would not be as simple in this case as it was in the preceding cases.

What has been treated so far must be considered to be the negative part of the theory of potencies; for the formalist there also exists a positive part however, founded on the theorem of Bernstein: "If the set A has the same power as a subset of B and B has the same power as a subset of A, then A and B have the same power" or, in an equivalent form: "If the set $A = A_1 + B_1 + C_1$, has the same power as the set A_1, then it also has the same power as the set $A_1 + B_1$.

This theorem is self-evident for denumerable sets. If it is to have any meaning at all for sets of higher power for the intuitionist, it will have to be interpretable as follows: "If it is possible, *first* to construct a law determining a one-to-one correspondence between the mathematical entities of type A and those of type A_1, and *second* to construct a law determining a one-to-one correspondence between the mathematical entities of type A and those of types A_1, B_1, and C_1, then it is possible to determine from these two laws by means of a finite number of operations a third law, determining a one-to-one correspondence between the mathematical entities of type A and those of types A_1 and B_1."

In order to investigate the validity of this interpretation, we quote the proof:

"From the division of A into $A_1 + B_1 + C_1$, we secure by means of the correspondence γ_1 between A and A_1 a division of A_1 into $A_2 + B_2 + C_2$, as well as a one-to-one correspondence γ_2 between A_1 and A_2. From the division of A_1 into $A_2 + B_2 + C_2$, we secure by means of the correspondence between A_1 and A_2 a division of A_2 into $A_3 + B_3 + C_3$, as well as a one-to-one correspondence γ_3 between A_2 and A_3. Indefinite repetition of this procedure will divide the set A into an elementary series of subsets $C_1, C_2, C_3, \ldots$, an elementary series of subsets $B_1, B_2, B_3 \ldots$, and a remainder set D. The correspondence γ_C between A and $A_1 + B_1$ which is desired is secured by assigning to every element of C_ν the corresponding element of $C_{\nu+1}$ and by assigning every other element of A to itself."

In order to test this proof on a definite example, let us take for A the set of all real numbers between 0 and 1, represented by infinite decimal fractions, for A_1 the set of those decimal fractions in which the $(2n - 1)$th digit is equal to the $2n$th digit; further a decimal fraction that does not belong to A_1 will be counted to belong to B_1 or to C_1, according as the above-mentioned equality of digits occurs an infinite or a finite number of times. By replacing successively each digit of an arbitrary element of A by a pair of digits equal to it, we secure at once a law determining a one-to-one correspondence γ_1 between A and A_1. For of the element of A_1 that corresponds to an arbitrary well-defined element of A, such as, e. g., $\pi - 3$ we can determine successively as many digits as we please; it must therefore be considered as being well-defined.

In order to determine the element corresponding to $\pi - 3$ according to the correspondence γ_C, it is now necessary to decide first whether it happens an infinite or a finite number of times in the decimal fraction development of $\pi - 3$ that a digit in an odd-numbered place is equal to the digit in the following even-numbered place; for this purpose we should either have to invent a process for constructing an elementary series of such pairs of equal digits, or to deduce a contradiction from the assumption of the existence of such an elementary series. There is, however, no ground for believing that either of these problems can be solved.*

Hence it has become evident that also the theorem of Bernstein, and with it the positive part of the theory of potencies, does not allow an intuitionistic interpretation.

So far my exposition of the fundamental issue, which divides the mathematical world. There are eminent scholars on both sides and the chance of reaching an agreement within a finite period is practically excluded. To speak with Poincaré: "Les hommes ne s'entendent pas, parce qu'ils ne parlent pas la même langue et qu'il y a des langues qui ne s'apprennent pas."

* Such belief could be based only on an appeal to the principium tertii exclusi, i. e., to the axiom of the existence of the "set of all mathematical properties," an axiom of far wider range even than the axioms of inclusion, quoted above. Compare in this connection Brouwer, "De onbetrouw-
[[9]] baarheid der logische principes," *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, 2e jaargang, pp. 152–158.

1914

A. Schoenflies und **H. Hahn, Die Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen.** Erste Hälfte. Allgemeine Theorie der unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen. Von A. Schoenflies. (XI u. 389 S.) Leipzig u. Berlin 1913, B. G. Teubner. [[1]]

Die vorliegende Neubearbeitung des ersten Teiles des Schoenfliesschen Werkes über die Mengenlehre bedeutet für die mathematische Literatur eine Bereicherung mit einem hervorragenden und außerordentlich nützlichen Werke, das sowohl als Lehrbuch wie als Nachschlagebuch einem dringenden Bedürfnisse entgegenkommt, und der Verfasser hat durch die Opfer an Zeit und Arbeitskraft, die er zur Sammlung des sehr verschiedenartigen und zerstreuten Materials hat bringen müssen, und durch die Gewissenhaftigkeit und Sorgfalt, mit der er die organische Zusammenstellung dieses Materials durchgeführt hat, seine Fachgenossen aufs höchste verpflichtet. Wurzelte ja bei der einheitlichen Verarbeitung des Stoffes eine ganz besondere und dem Wissenszweig der Mengenlehre eigentümliche Schwierigkeit in der noch immer dauernden Divergenz der (stillschweigenden oder ausgesprochenen) philosophischen Grundanschauungen der verschiedenen Forscher, welche zueinander vielfach in kontradiktorischem Gegensatz stehen und derzufolge z. B. mancher Formalist der Borelschen Maßtheorie (Journ. de Math. (6) VIII) und mancher Intuitionist dem Zermeloschen Wohlordnungssatz (Math. Annalen 59, 65) jeden mathematischen Sinn absprechen muß. Schoenflies hat diese Schwierigkeit so umgangen, daß er von seinem Werke jede Philosophie ferngehalten, vielmehr ihm sozusagen eine möglichst weitherzige Axiomatik zugrunde gelegt hat, welche ohne sich um Nichtkontradiktorität oder außeraxiomatische Existenz zu kümmern, jeder bisher veröffentlichten mengentheoretischen Entwickelung ihren Platz läßt, solange sie sich noch nicht (wie z. B. der Begriff vom „All") ad absurdum hat führen lassen. Nur in dieser Weise konnte es ohne Inkonsequenz gelingen, dem Buche einen fast enzyklopädischen Inhalt zu geben, aus dem jede Sekte sich das Ihrige herausschälen kann; mit Ausnahme freilich der Axiomatiker, weil es in Übereinstimmung mit der Gesamtanlage nicht möglich war, auch den Untersuchungen über die Beziehungen zwischen den verschiedenen speziellen Axiomsystemen einen Platz einzuräumen; indes wird wahrscheinlich auch diese Lücke ausgefüllt werden durch das für die zweite Hälfte in Aussicht gestellte axiomatische Schlußkapitel des Werkes.

Bei dem im obigen geschilderten Sachverhalt kann es keinen wundern, daß das Buch namentlich für den auf intuitionistischer Grundlage arbeitenden Mathematiker vieles Überflüssige enthält. Um dies näher zu beleuchten, erinnere ich daran, daß für den Intuitionisten nur wohlkonstruierte unendliche Mengen existieren, welche sich zusammensetzen aus einem Teile erster Art, das sich als eine einzige Fundamentalreihe erzeugen läßt, und einem Teile
[[2]] zweiter Art, dem eine Fundamentalreihe f als Fréchetsche V-klasse[1]) zugrunde liegt, während seine Elemente in solcher Weise durch je eine Folge von Auswahlen unter den Elementen einer endlichen Menge oder einer Fundamentalreihe bestimmt werden, daß jeder Folge von Auswahlen eine Folge von einander einschließenden Teilgebieten von f mit gegen Null konvergierender Breite entspricht, und in den je zwei verschiedenen Folgen von Auswahlen entsprechenden Gebietsfolgen zwei außerhalb voneinander liegende Endsegmente existieren.[2])

Folgende Eigenschaft der wohlkonstruierten Mengen leuchten unmittelbar ein:

1. Die Summe einer endlichen Zahl oder einer Fundamentalreihe von elementefremden wohlkonstruierten Mengen ist wiederum eine wohlkonstruierte Menge.[3])

2. Jede abgeschlossene wohlkonstruierte Punktmenge setzt sich aus einer perfekten und einer abzählbaren Punktmenge zusammen, d. h. das Cantorsche Haupttheorem bedarf für den Intuitionisten keines Beweises.

3. Jede nichtabzählbare wohlkonstruierte Punktmenge enthält eine perfekte Teilmenge, d. h. die „total imperfekten" Punktmengen (vgl. S. 361—364 des Schoenfliesschen Werkes) sind für den Intuitionisten illusorisch.

---

1) Wie aus dem Briefe von Fréchet an Hedrick (Amer. Trans. XIV, S. 320 bis 324) gefolgert werden kann, läßt sich die abzählbare V-klasse auch unabhängig vom „voisinage"-Begriff definieren, indem nämlich zu jedem Elemente e einer abzählbaren L-klasse eine Fundamentalreihe von einander einschließenden „Umgebungen" $E_1, E_2, \ldots$ gegeben wird in solcher Weise, daß erstens jede Folge von Elementen $e_1, e_2, \ldots$, welche der Reihe nach in $E_1, E_2, \ldots$ enthalten sind, gegen e konvergiert, zweitens jede gegen e konvergierende Folge in jedem E_ν ein Endsegment besitzt, drittens die „enclosable property" stattfindet.

2) Die Zerlegung in eine Teilmenge erster und eine Teilmenge zweiter Art braucht nicht eindeutig bestimmt zu sein. Natürlich kann auch einer von den beiden Teilen in Fortfall kommen.

3) Diese Eigenschaft läßt sich weder auf die Differenz noch auf die Vereinigungsmenge ohne weiteres ausdehnen. Z. B. ist die Punktmenge: „alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit Ausnahme der endlichen Dualbrüche", nur deshalb eine wohlkonstruierte Menge, weil die duale Entwicklung einer willkürlichen Zahl dieser Menge eine Fundamentalreihe von endlichen Gruppen von gleichen Ziffern (abwechselnd 0 und 1) liefert, so daß die Menge sich mittels einer Fundamentalreihe von Auswahlen unter den endlichen Zahlen bestimmen läßt. Dieser Schritt geht
[[3]] freilich weiter als mein römischer Vortrag (Atti del 4. congr. int. III, S. 570), und auch weiter als die Borelschen Ausführungen über wohlkonstruierte Mengen (Journ. de Math. (6) VIII, S. 170); er erscheint mir aber als eine notwendige Konsequenz des Intuitionismus.

[[140]]

Ein Beispiel einer nichtwohlkonstruierten Menge ist folgendes: Eine zwischen 0 und 1 schwankende Funktion $f(x)$ einer zwischen 0 und 1 variierenden reellen Variablen x werde so definiert, daß die duale Entwickelung von $f(x)$ an der m-ten Stelle dann und nur dann eine 1 besitzt, wenn m die größte zweier solcher Zahlen μ und ν ist, daß sowohl die ν-te Dezimalstelle von x, wie die μ-te Dezimalstelle von π die gleiche Ziffer besitzt wie die auf sie folgende Stelle, und es in beiden dezimalen Entwickelungen zum n-ten Male ist, daß diese Eigenschaft auftritt. Diese Funktion ist wohldefiniert, weil für jedes x der Wert von $f(x)$ sich gleichzeitig mit x mit jedem Grade der Ge- ⟦4⟧
nauigkeit approximieren läßt. Hierauf gründet der nicht intuitionistisch Denkende die Existenz der Menge derjenigen Werte von x, für welche $f(x)$ rational ausfällt, ein Begriff, der dem Intuitionisten dunkel bleibt, solange die fragliche Menge ihm nicht in der Form einer wohlkonstruierten Menge dargeboten wird, was sicher nicht gelingen kann ohne einen Beweis, entweder daß die Zahl der bei der dezimalen Entwicklung von π auftretenden Paare von aufeinander folgenden gleichen Ziffern endlich, oder daß sie unendlich ist. Und die Behauptung, daß von diesen beiden Aussagen jedenfalls eine die richtige ist, würde einen intuitionistischen Sinn erst dann bekommen, wenn ein Weg angegeben würde, der nach einer endlichen (wenn auch vielleicht sehr großen) Zahl von Schritten notwendig zu einem der beiden Sätze führen müßte. Mit anderen Worten: Der Intuitionist erkennt zwar vom logischen Satz vom Widerspruch, nicht aber vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten die mathematische Zulässigkeit an. Oder auch: Der Intuitionist kann von einem mathematischen Problem die Möglichkeit der Unlösbarkeit nicht a priori verwerfen.[1])

Wir sahen oben, daß das Cantorsche Haupttheorem für den Intuitionisten keines Beweises bedarf, und wollen uns nunmehr die Frage vorlegen, ob vielleicht dennoch die üblichen mengentheoretischen Beweise dieses Theorems, welche sich ja nicht nur auf wohlkonstruierte Mengen, sondern auf einen allgemeineren Mengenbegriff beziehen, eine intuitionistische Interpretation zulassen, nach der sie etwas Nichtselbstverständliches lehren. Diese Beweise zeigen aber genau genommen ausschließlich die Kontradiktorität der Existenz einer wohlgeordneten Punktmenge vom Ordnungtypus Ω, von welcher jeder Punkt von abzählbarer Ordnung wäre, bzw. von der Menge der auf ihn folgenden Punkte einen endlichen Abstand besäße. Die aus dieser Kontradiktorität gezogene Folgerung, daß die Menge der Punkte abzählbarer Ordnung bzw. die Menge der von einer abgeschlossenen Punktmenge der Reihe nach als isoliert abgespaltenen Punkte, sich abzählen lasse, beruht auf dem Satz vom ausge-

---

1) Betreffs der Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für die Mathematik und speziell für die formalistische Mächtigkeitstheorie vgl. Tijdschrift voor Wijsbegeerte II, S. 156—158; Amer. Bull (2) XX, S. 92 Akg. 2 u. S. 96 Akg. 1. ⟦5⟧
Durch die obige Auffassung werden auch die im Schoenfliesschen Buche gemachten Unterschiede zwischen „logischer Entscheidbarkeit" und „konstruktiver Herstellbarkeit" einerseits (S. VI) und zwischen „praktischer Entscheidbarkeit" und „interner Bestimmtheit" andererseits (S. 6) hinfällig. Und daß unabhängig von dem Vorhandensein der Lösung des Problems der Transzendenz der Eulerschen Konstante C, die Menge der algebraischen Zahlen dennoch existiert, beruht für den Intuitionisten nicht, wie für Cantor und Schoenflies, auf der „internen Bestimmtheit" dieser Lösung, sondern einfach auf der Tatsache, daß man die algebraischen Zahlen als eine Fundamentalreihe abzählen kann.

⟦6⟧ schlossenen Dritten, und ist deshalb vom intuitionistischen Standpunkte unerlaubt[1]); die Kontradiktorität selbst aber lehrt den Intuitionisten nichts
⟦7⟧ Neues. Eine wohlkonstruierte Punktmenge, welche eine Teilmenge zweiter Art besitzt, läßt sich nämlich nur so linear ordnen, daß in einer gewissen Teilmenge zweiter Art τ eine Folge $i_1, i_2, \ldots$ von aus der entsprechenden Fundamentalreihe f gebildeten endlichen Gruppen elementefremder Gebiete der Reihe nach als endliche Mengen linear geordnet werden, und zwar in solcher Weise, daß $\mathfrak{S}\{i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots\}$ für jedes k die ganze Menge τ ausfüllt und jedes Gebiet von $i_{\nu+1}$ entweder ganz außerhalb von i_ν liegt oder in einem der Gebiete von
⟦8⟧ i_ν enthalten ist, während jede Folge von Gebieten $e_1, e_2, \ldots$, welche der Reihe nach zu $i_1, i_2, \ldots$ gehören, gegen einen einzigen Punkt von τ konvergiert[2]); weiter folgt, daß die Gebietsmengen $i_1, i_2, \ldots$ sich als eventuell auch unendliche Gebietsmengen immer so angeben lassen, daß jedes i_ν für sich die ganze Menge τ ausfüllt und jedes Gebiet von i_ν beim Übergang zu $i_{\nu+1}$ in Teilgebiete zerlegt wird. Durch diesen Prozeß bekommen aber nur diejenigen Punkte von τ einen „nächstfolgenden" Punkt, welche von einem gewissen ν an bei jeder Zerlegung ihres Gebietes zum „letzten" Teilgebiet gehören; sie lassen sich mithin mittels einer Fundamentalreihe abzählen, so daß eine wohlkonstruierte
⟦7⟧ Menge, welche eine Teilmenge zweiter Art enthält, sich nicht in ihrem Ganzen wohlordnen läßt, und nichtabzählbare wohlgeordnete Mengen überhaupt nicht existieren.[3])

Aus dem Vorstehenden folgt, daß der Intuitionist im Schoenfliesschen Buche einerseits den Entwicklungen, welche sich um das Cantorsche Haupttheorem gruppieren, nur einen sehr beschränkten Sinn beilegen kann, andererseits allen denjenigen Theorien, in welche nichtabzählbare Ordnungszahlen eingehen, insbesondere also den höheren Alefs und dem Kontinuumproblem jeden Sinn absprechen muß.

Daß auch der Äquivalenzsatz (den, nebenbei bemerkt, Schoenflies auf S. 33 in etwas leichtfertiger Weise als partiellen Beleg für den Größencharakter der Mächtigkeiten einführt) für den Intuitionisten bedeutungslos ist, habe ich bei einer früheren Gelegenheit auseinandergesetzt.[4])

Die Erörterung des Vergleichbarkeitsproblems unabhängig vom Ordnungsbegriff soll nach dem Verfasser (S. V u. 47) ihre Berechtigung finden in ihrer

1) Der Intuitionist unterscheidet die mittels der klassischen Logik hergeleiteten mathematischen Theoreme in richtige und nichtkontradiktorische Theoreme. Nur die erste Kategorie hat für ihn mathematische, die zweite ausschließlich scholastische Bedeutung. Die positive Aussage des Cantorschen Haupttheorems gehört aber zur zweiten Kategorie.

2) Damit das Obige einen intuitionistischen Sinn habe, muß natürlich die Menge aller zu den verschiedenen i_ν gehörigen Gebiete sich als eine einzige Fundamentalreihe tatsächlich abzählen lassen.

3) Dem Ω muß der Intuitionist schon deshalb skeptisch gegenüberstehen, weil er das Komprehensionsaxiom, auf Grund dessen im allgemeinen „alle" mathematischen Dinge, welche eine bestimmte Eigenschaft besitzen, zu einer Menge, und im besonderen „alle" abzählbaren Ordnungszahlen zur zweiten Zahlklasse (S. 109 des Schoenfliesschen Werkes) vereinigt werden, nicht anerkennt. Durch die obige Überlegung hat man aber überdies von vornherein völlige Sicherheit, daß in der intuitionistischen Mathematik niemals eine Menge vom Ordnungstypus Ω wird auftreten können. Vgl. auch eine hiermit verwandte, übrigens nicht gleichwertige Aussage über die Nichtäquivalenz der zweiten Zahlklasse mit dem Kontinuum, Amer. Bull. (2) **XX**, S. 93.

⟦9⟧ 4) Amer. Bull. (2) **XX**, S. 94—96.

⟦142⟧

Analogie mit den bekannten Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Es besteht indes ein sehr wesentlicher Unterschied. In der Geometrie untersucht man die Existenz von mathematischen Systemen, welche nur einem Teile des geometrischen Axiomsystems, mit Ausschluß eines anderen Teiles, genügen; bei der Schoenfliesschen Vergleichbarkeitstheorie aber weiß man im voraus, daß für die mathematischen Systeme, welche der beibehaltenen Axiomgruppe genügen, auch die fortgelassenen Axiome ihre Gültigkeit behalten, womit die Sache jedes intuitionistische Interesse verliert.

Bietet mithin das Buch auf der einen Seite dem Intuitionisten zu viel, so wird auf der anderen Seite mancher Formalist im Aufbaue der Theorie einen sehr wesentlichen Punkt vermissen, weil von den endlichen Zahlen nicht nur alle Eigenschaften (einschließlich des Prinzips der vollständigen Induktion), sondern auch die außeraxiomatische Existenz ohne weiteres vorausgesetzt werden. Indes wird er wegen dieses Mangels dem Verfasser deshalb keinen Vorwurf machen können, weil von einem formalistischen Aufbaue der Mathematik unabhängig von diesen Annahmen bisher nur die allerersten Anfänge in der Literatur vorliegen.

Auch unabhängig vom eingenommenen philosophischen Standpunkt gibt einiges im Buche zu Bedenken Anlaß.

Was der Verfasser unter einer unendlichen Menge versteht, wird nicht deutlich genug ausgesprochen: auf die Dedekindsche Begriffsbildung von S. 9 werden ja die weiteren Entwickelungen nicht gestützt; es wird im Gegenteil folgende Definition fast überall stillschweigend vorausgesetzt: „Jede mathematische Menge, welche nicht zu den endlichen Mengen, wie wir alle sie kennen, gehört, soll eine unendliche Menge heißen“; diese Definition hätte aber ausdrücklich formuliert und ihre Gleichwertigkeit mit der Dedekindschen nach Cantor[1]) ausdrücklich bewiesen werden müssen.

Schon in der Vorrede betont der Verfasser, daß er die transfinite Induktion an die Spitze seiner Entwicklungen gestellt hat; mit dem ausgedehnten Gebrauch, den er von diesem Prinzip das ganze Buch hindurch gemacht hat, werden aber in seinem vollen Umfange wenige Fachgenossen einverstanden sein. So wird der Zermelosche Beweis des Wohlordnungssatzes, dessen scholastische Schärfe auch der strengste Intuitionist bewundern muß, von Schoenflies denaturiert, wo er ihn (S. 171—173) abzukürzen versucht durch Anwendung der transfiniten Induktion auf eine nicht präexistierende, sondern erst an der Hand der transfiniten Induktion schrittweise zustande kommende Abbildung, wobei übrigens überdies nur der Satz, daß die Menge M eine der Menge der Ordnungszahlen oder einem Abschnitte derselben ähnliche Teilmenge enthält, also nur ein Bestandteil des Zermeloschen Satzes bewiesen wird.

Auch die Anwendung der transfiniten Induktion zum Beweise der Definierbarkeit bzw. Konstruierbarkeit der Ordnungszahlen mittels der Cantorschen Erzeugungsprinzipien (S. 109 und 142), ist unberechtigt. Das Wort „Definierbarkeit“ kann hier nämlich nur im Sinne von „endlicher Definierbarkeit“ verstanden werden[2]), und auf diesen Begriff ist die transfinite Induktion

1) Mathem. Annalen 46, S. 495.

2) Eine Definition mittels einer unendlichen Zahl von Anwendungen der beiden Erzeugungsprinzipien würde nämlich der Herstellung der Ordnungszahl durch Juxtaposition von Einheiten ohne weiteres gegenüber, keinen prinzipiellen Unterschied aufweisen.

nicht anwendbar, weil innerhalb einer Fundamentalreihe von Ordnungszahlen die endliche Zahl der zur Definition der einzelnen Ordnungszahlen nötigen Schritte unbeschränkt zunehmen könnte, in welchem Falle die zugehörige Limeszahl nicht endlich definierbar zu sein brauchte.

Die S. 39 gegen Padoa gerichtete Kritik scheint mir auch mit dem Zusatz von S. 389 unbegründet, diejenige gegen Young auf S. 244 nur insofern berechtigt, als sie sich auf den ursprünglichen Youngschen Beweis in Palermo Rend. 21 bezieht; die spätere Modifikation davon in Mess. of Math. 1909 ist meiner Ansicht nach vollkommen einwandfrei.

Ein Buch wie das vorliegende soll indes nicht nach Detailmängeln beurteilt werden. Sein hauptsächlicher Zweck war, im Wissensgebiet der Mengenlehre sowie in deren Teildisziplinen eine schnelle Orientierung zu ermöglichen, und dieser Zweck ist durch die selbstlose Arbeit des Verfassers in dankenswertester und vollkommenster Weise erreicht worden. Nur eines bleibt zu wünschen übrig, nämlich daß der im Erscheinen begriffenen zweiten Hälfte ein sich über beide Hälften erstreckendes Autoren- und Sachregister angehängt werde.

Amsterdam. L. E. J. Brouwer.

ADDENDA AND CORRIGENDA TO 'ON THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS'[1]

1917

Today the following remarks must be made in relation to my book [2]) 'Over de Grondslagen der Wiskunde' (Amsterdam, Maas & Van Suchtelen 1907), which appeared ten years ago ⟦(1907)⟧.

1. The group-theoretic characterisation of the arithmetic operations on the measurable continuum (p. 12–35) ⟦p. 19–30⟧ has been developed in detail in Math. Ann. 67 (1909), p. 246–267 ⟦Vol. 2, 1909 C⟧. In particular one will find there on page 258 the proof of the properties mentioned in the book at the bottom of p. 20 and at the bottom of p. 22 ⟦p. 23 and 24⟧, regarding the fixed points of the component one-parameter groups [3]); on pages 260–262 the justification of the transition on p. 25 ⟦p. 25⟧ from mere differentiability of the increment functions to the application of Lie's fundamental formula; on pages 264–265 the solution of the problem concerning the projective group, proposed on page 35 ⟦p. 30⟧.

2. The deduction of the arc length for the two-dimensional Euclidean and non-Euclidean geometries following Riemann's conception, which was performed on pages 43–46 ⟦p. 34–36⟧ by differentiations [4]), has been accomplished by synthetic methods in Handelingen Nederl. Nat. Geneesk. Congr. 12 (1909), p. 192–196 ⟦Vol. 2, 1909 E⟧. The same result has been reached earlier by means of other infinitesimal methods by W. Killing (Einführung in die Grundlagen der Geometrie I, Paderborn 1893, p. 80–89) and by C. Flye-S^{te} Marie (Théorie des parallèles, p. 12–19). The deduction of the *n*-dimensional from the two-dimensional arc length has been developed in more detail in Handelingen Nederl. Nat. Geneesk. Congr. 12 (1909), p. 196–199.

3. The consequent sustainment of the intuitionist point of view (see (1914), p. 79) ⟦p. 140⟧ demands that the third of the construction principles for sets of points, mentioned on pages 63–66 ⟦p. 45–46⟧ and also in (1908 A) must be deleted. In the second principle not only ramifications with two branches, but also with any finite or denumerable infinite number of branches, must be admitted for the infinite tree to which the operation 'completion to the continuum' is applied after the ramifi- ⟦1⟧

[1]) Reprinted from Verslagen Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam 25 (1917), p. 1418–1423, observing the erratum to that publication.

[2]) A discussion on this book has been held by G. Mannoury and the author. See Nieuw Archief Wiskunde (2) 8 (1908), p. 175–180, 326–328. ⟦A translation of the most important parts of Brouwer's reply to Mannoury is included in this volume (1908 B)⟧

[3]) Thus the deduction of the latter property from the former, given on pages 21–22 ⟦p. 23–24⟧ becomes superfluous for the proof.

[4]) Where differential quotients are used in this deduction, their existence is obvious.

cation has been carried out [5]). Hereby the first construction principle becomes a special case of the second. The solution of the continuum problem which follows from the construction principles, remains valid after these changes. In each of the three places cited above, and also in (1912A), p. 92–93 ⟦p. 134–135⟧ the evidence for the denumerable or continuous cardinality of a set of points (and also for the possibility of splitting a closed set into a perfect and a denumerable one) are based upon two essential suppositions, namely in the first place that the set can be constructed in such a way that it is individualized, i.e. so that different infinitely proceeding branches of the tree produce different points, and further that the individualized pointset can be *internally dissected*, i.e. that the process of breaking off the branches which do not ramify any more, which must terminate after a denumerable number of steps, really can be effected. Now it is true that from the intuitionist point of view the unrestricted comprehension axiom cannot be used (see below under 7); therefore it is impossible to avoid special hypotheses about the way in which the pointsets under consideration are constructed, and thereby about the limitation of the domain of set theory. This implies the right to consider as contained in the construction principles such hypotheses as are desirable for the viability of the theory. However it has lately become clear to me, as I hope to explain in a paper that will shortly appear [6]), that the limits of set theory can be extended leaving out the two suppositions, mentioned above, on the construction principles, whilst preserving the viability of the theory. As a consequence the solution of the continuum problem turns out the other way. An example of a subset of the continuum with a cardinal number between the denumerable and the continuous is given in (1912A) p. 92 in a footnote ⟦p. 134, footnote †⟧.

4. In the construction of examples of non-Archimedean operations on page 68, line 4 ⟦p. 47⟧ in stead of: 'if all their indices are greater than those of a given coordinate' should be read: 'if, given the preceding indices, every index is greater than a given number'. Further, on page 69, lines 1, 3 and 12 ⟦p. 47,48⟧ in stead of 'index', 'indices' should be read 'number', 'numbers', and on page 71 line 13 ⟦p. 49⟧ the letters q and r must be interchanged. Meanwhile extensive possibilities for the construction of commutative non-Archimedean operations have been developed by Hahn (Wiener Sitzungsber. 116 (1907), p. 601–655).

⟦1a⟧ 5. The deduction on pages 85–88 ⟦p. 55–56⟧ of the differentiability of a function from the continuity of the system of its difference quotients has been developed in more detail and extended to higher differential quotients and to functions of several variables in Proc. Nederl. Akad. Wet. 11 (1908), p. 59–66 ⟦Vol. 2, 1908 D⟧.

6. The point of view about objectivity and apriority of space and time defended on pages 95–99 and 118–121 ⟦p. 59–61 and 69–71⟧ has been confirmed by the

[5]) As a matter of fact this was already done in a special manner on p. 158 ⟦p. 87⟧.

[6]) (1918)

services which the theory of relativity has rendered to physics. See the considerations on this point in (1909), ⟦p. 112–120⟧, in particular as an illustration of the necessity of the definition of objectivity on page 96 ⟦p. 60⟧.

7. In the argument that logic depends upon mathematics, on pages 131–132 ⟦p. 74–75⟧ the applications in mathematics of the principle of *tertium exclusum* (or principle of *tertium non datur*) are called tautologies giving no information at all. This is an error; on the contrary these applications are often unjustified petitiones principii, as has been explained in (1908C), p. 152–158 ⟦p. 109–111⟧. Further on page 135 ⟦p. 76⟧ the comprehension axiom (saying that the set of all mathematical entities having a certain property exists) is restricted to mathematical entities belonging to a previously constructed mathematical system *s*. Here we must add, in agreement with page 177 ⟦p. 96⟧, the condition that the set postulated in the axiom must itself be a constructible mathematical system. (The condition formulated by Zermelo in Math. Ann. 65 (1908), p. 263, which according to him is essential for modern formalism, namely that it must be determined for every entity in *s* whether the property in question holds for it or not, is from the intuitionist point of view much too weak or much too strong, depending on whether the *solvability of all mathematical problems* is accepted or not.)

8. Mannoury's paper cited on page 140 ⟦p. 78⟧ has in the mean time been reproduced with minor changes in his book 'Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik', p. 59–72 and a paper containing a very similar reasoning on the same subject has been published by Zermelo in Acta Mathematica 32 (1909), p. 185–193. Both argumentations suffer from the mathematical mistake that they use without restriction the comprehension axiom and the principium tertii exclusi, and from the logical mistake that they do not contain a consistency proof. Moreover Mannoury's argument postulates on p. 71 the *existence* of an O–R, namely that of the written ordinal numbers; this postulate is equivalent with admitting the intuition of complete induction. Finally he assumes at the top of p. 72 without proof that a set *a* containing a subset equivalent to the set of all subsets of a set *b* also contains a subset equivalent to *b* [7]); while Zermelo l.c. p. 190 needs for this proof the logical petitio principii expressed in the *axiom of choice* (see (1912A1), p. 15 ⟦p. 129⟧).

9. Concerning the discussion on the second number class on pages 144–149 ⟦p. 81–82⟧ see (1912A2), p. 91 ⟦p. 133⟧; in the footnote the cited expressions: 'muss es geben' and 'können wir bestimmen' have been interchanged by a confusing printer's error.

10. Concerning the logically and mathematically precise formulation of the continuum problem given on pages 149–151 ⟦p. 82–83⟧ and the corresponding solutions, see (1912A2), p. 91 ⟦p. 133⟧; note the restriction mentioned above under 3., regarding the solution of the first formulation given l.c..

[7]) Another objection that was made in (1911) against the same passage can easily be obviated by a small modification to the proof.

11. Concerning the well-ordering problem it can be remarked (in agreement with (1914), p. 81 ⟦p. 142⟧, where however the wording is not so exact as might be desired) that a non-denumerable set of points, defined by an infinite tree, can only be linearly ordered in the sense that successively a fundamental sequence of finite sets $i_1, i_2, \ldots$ of finite branches which are not continuations of each other, is linearly ordered; in this process it must be certain for each k that $\mathscr{S}\{i_k, i_{k+1}, \ldots\}$ contains an initial segment of every infinite *final* branch. Let us denote by j_k the denumerable set of finite branches, obtained by deleting from $\mathscr{S}\{i_k, i_{k+1}, \ldots\}$ every branch which is a continuation of a preceding branch in this set; it can be proved in each branch τ of j_ν for at most one point (namely the point determined by choosing for $\mu > \nu$ in each consecutive j_μ the *last* continuation in the order) that it has a next element in the resulting order for the pointset. Consequently the set of the points for which this can be proved cannot have a higher cardinality than the denumerable; therefore a point set of higher cardinality than the denumerable can certainly not be well-ordered.

12. The criticism of Bernstein's equivalence theorem has been made precise and illustrated by an example in (1912A), p. 94–96 ⟦p. 136–138⟧. The criticism of the mapping, defined by Bernstein, of the denumerable order types on points of the continuum (p. 156–157 ⟦p. 86–87⟧) can be better formulated as follows. Bernstein's method does not provide us with a means of constructing the point corresponding to a given denumerable order type; consequently the mapping can only be applied to the order types for which a definite choice has been made among the possible ways in which the order relation can be gradually determined parallel
⟦2⟧ to the enumeration of its elements; these order types form at most a denumerable set.

13. The proposition discussed on pages 158–159 ⟦p. 87⟧, that F (the set of functions of a real variable) has a higher cardinality than C (the set of points of the continuum) is sometimes interpreted as follows: 'It is possible to make different functions correspond to all the points of the continuum, but to any infinite tree of such functions a function can be found that does not belong to it' (see (1912A), p. 94 ⟦p. 136⟧). But by closer inspection this interpretation also turns out to be untenable, namely because of the circumstance that a discontinuous function, defined in the Cartesian XY-plane, does not necessarily define a function of x on the line $x = y$.

⟦3⟧ 14. On page 160 ⟦p. 88⟧ it is stated that even with respect to infinite mathematical systems the *logical sum*, *the logical product* and the *complement set* can always be safely introduced; this is based on the form of the comprehension axiom which has been criticized above under 7.; therefore it cannot be maintained. Likewise the principle of *tertium non datur*, which was maintained on the same page, and also on pages 163–164 ⟦p. 89–90⟧ for mathematical subjects and predicates, as opposed to non-mathematical subjects and predicates, has been rejected above under 7., even for mathematical systems.

15. With respect to Russell's arithmetic it must be remarked that though the reasonings discussed on page 168 ⟦p. 92⟧ ('The Principles of Mathematics' p. 121–123) are based on the intuition of complete induction, the author explicitly stresses that these reasonings are only provisional; indeed the properties in question can also be derived independently of this intuition on the basis of the system of definitions cited on page 167 ⟦p. 91⟧. But this does not corroborate Russell's standpoint, for this system of definitions can only be applied after the addition of a postulate saying that at least one class satisfying the conditions of the last axiom exists; such a postulate is not implied by the comprehension axiom and it is practically equivalent with admitting complete induction.

Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Erster Teil:

1918 B
ALLGEMEINE MENGENLEHRE.

[[1]]

1. *Die Kardinalzahlen.*

Der Mengenlehre liegt eine unbegrenzte Folge von Zeichen zu Grunde, welche bestimmt wird durch ein erstes Zeichen und das Gesetz, das aus jedem dieser Zeichen das nächstfolgende herleitet. Unter den mannigfachen hierzu brauchbaren Gesetzen erscheint dasjenige am geeignetesten, welches die Folge ζ der Ziffernkomplexe 1, 2, 3, 4, 5,..... erzeugt.

Eine *Menge* ist ein *Gesetz*, auf Grund dessen, wenn immer wieder ein willkürlicher Ziffernkomplex der Folge ζ gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder ein bestimmtes Zeichen, oder nichts erzeugt, oder aber die Hemmung des Prozesses und die definitive Vernichtung seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes n nach
[[2]] jeder ungehemmten Folge von $n - 1$ Wahlen wenigstens ein Ziffernkomplex angegeben werden kann, der, wenn er als n-ter Ziffernkomplex gewählt wird, *nicht* die Hemmung des Prozesses herbei-
[[3]] führt. Jede in dieser Weise von der Menge erzeugte Zeichenfolge (welche also im allgemeinen nicht fertig darstellbar ist) heisst ein *Element der Menge.* Die gemeinsame Entstehungsart der Elemente einer Menge M werden wir ebenfalls kurz als *die Menge M* bezeichnen.

Wenn verschiedene Wahlfolgen immer zu verschiedenen Zeichenfolgen führen, so heisst die Menge *individualisiert.*

Die Bestimmungsgesetze endlicher Zeichengruppen sowie unbegrenzter Zeichenfolgen von der Art der Folge ζ, bilden besondere Fälle von Mengen, deren Elemente von den einzelnen Zeichen gebildet werden. Die Menge der Ziffernkomplexe von ζ werden wir mit A bezeichnen.

Mengen und Elemente von Mengen werden *mathematische Entitäten* genannt.

Unter einer *Species erster Ordnung* verstehen wir eine Eigen-

E 1*

[[150]]

schaft, welche nnr eine mathematische Entität besitzen kann, in welchem Falle sie ein *Element der Species erster Ordnung* genannt wird. Die Mengen bilden besondere Fälle von Species erster Ordnung.

Unter einer *Species zweiter Ordnung* verstehen wir eine Eigenschaft, welche nur eine mathematische Entität oder Species erster Ordnung besitzen kann, in welchem Falle sie ein *Element der Species zweiter Ordnung* genannt wird.

In analoger Weise definieren wir *Species n-ter Ordnung*, wo n ein beliebiges Element von A repräsentiert.

Zwei Species M und N heissen *kongruent*, wenn weder ein von jedem Elemente von N verschiedenes Element von M noch ein von jedem Elemente von M verschiedenes Element von N existieren kann, anders ausgedrückt: wenn jede für die eine Species unmögliche Eigenschaft auch für die andere Species unmöglich ist; mithin sind M und N, wenn sie beide einer dritten Species P kongrnent sind, auch einander kongruent.

Wenn überdies jedes Element von M ebenfalls Element von N ist, so heissen M und N *halbidentisch*. Wenn schliesslich auch jedes Element von N ebenfalls Element von M ist, so heissen M und N *identisch*.

Die Species, welche diejenigen Elemente umfasst, welche sowohl zur Species M wie zur Species N gehören, heisst der *Durchschnitt* von M und N, und wird bezeichnet mit $\mathfrak{D}(M, N)$. Der Durchschnitt zweier Mengen braucht keine Menge zu sein.

Die Species, welche diejenigen Elemente umfasst, welche entweder zur Species M oder zur Species N gehören, heisst die *Vereinigung* von M und N, und wird bezeichnet mit $\mathfrak{S}(M, N)$. Die Vereinigung zweier Mengen ist wiederum eine Menge, die Vereinigung zweier individualisierter Mengen braucht aber keine individualisierte Menge zu sein.

Zwei Species M und N heissen *elementefremd*, wenn kein Element existieren kann, das sowohl zu M wie zu N gehört.

Die Species M heisst eine *Teilspecies* der Species N, wenn jedes Element von M ebenfalls Element von N ist. Lässt sich überdies ein Element von N angeben, das *nicht* Element von M ist, so heisst M eine *echte Teilspecies* von N.

Sind M' und M'' elementefremd, und $\mathfrak{S}(M', M'')$ und N kongruent, so sagen wir, dass N sich aus M' und M'' *zusammensetzt*, und nennen M' und M'' *Komplementärspecies* voneinander in N.

Sind M' und M'' elementefremd, und $\mathfrak{S}(M', M'')$ und N identisch, so sagen wir, dass N in M' und M'' *zerlegt* ist, und nennen M' und M'' *konjugierte Zerlegungsspecies von* N, und sowohl M' wie M'' eine *abtrennbare Teilspecies* von N.

In analoger Weise wie den Durchschnitt und die Vereinigung von zwei Species, definiert man den Durchschnitt und die Vereinigung einer willkürlichen Species von Species.

In analoger Weise wie zwei Komplementärspecies in N resp. zwei Zerlegungsspecies von N, definiert man eine Species von Komplementärspecies in N resp. eine Species von konjugierten Zerlegungsspecies von N.

Wenn zwischen zwei Species M und N eine eineindeutige Beziehung hergestellt werden kann, d.h. ein Gesetz, welches jedem Elemente α von M ein Element β von N zuordnet in solcher Weise, dass dabei jedes Element von N einem und nur einem bestimmten Elemente von M zugeordnet wird, so schreiben wir $M \sim N$, und sagen, dass M un N dieselbe *Mächtigkeit oder Kardinalzahl* besitzen, oder *gleichmächtig* sind. Die Menge der Ziffernkomplexe 2, 3, 4, ... ist z. B. gleichmächtig mit der Menge der Ziffernkomplexe 1, 2, 3, ...

Wenn jedem Elemente α von M ein verschiedenes Element β von N zugeordnet ist in solcher Weise, dass die Species der β mit N identisch ist, so heissen M und N *halbgleichmächtig*. Eine individualisierte Menge ist z. B. halbgleichmächtig mit der entsprechenden Species ungehemmter Wahlfolgen.

Eine Species E heisst *endlich*, wenn sie mit der Menge der
[[4]] Ziffernkomplexe eines gewissen Anfangssegmentes der Folge ζ gleichmächtig ist.

Eine Species U heisst *unendlich*, wenn jedes Element von A einem verschiedenen Elemente w von U zugeordnet werden kann. Im Falle dass die Elemente w eine mit A gleichmächtige abtrennbare Teilspecies von U bilden, heisst U *reduzierbar unendlich*.

Es existiert kein Grund zu behaupten, dass jede Menge oder Species entweder endlich oder unendlich sei. Dagegen steht fest, dass eine Species nicht gleichzeitig endlich und unendlich sein kann, und zwar auf Grund des folgenden Satzes:

Haupteigenschaft der endlichen Species. *Für jede Herstellungsweise der eineindeutigen Beziehung zwischen einer endlichen Species E und der Menge der Ziffernkomplexe eines Anfangssegmentes von ζ, kurz: für jede Zählungsweise von E, wird dasselbe Anfangssegment von ζ benutzt.*

Beweis. Seien zwei Zählungen von E gegeben, von denen die „erste" das Anfangssegment 1, 2, 3, ... τ von ζ benutzt, während die andere (als „neue Zählung" zu bezeichnen), *nicht weniger* als 1, 2, 3, ... τ benutzt. Die Zählung, in welche die erste Zählung durch Verwechselung der Elemente, denen bei der ersten und bei

[[152]]

der neuen Zählung die Ziffer 1 zugeordnet ist, übergeht, werden wir als „zweite Zählung" bezeichnen. Alsdann benutzen die erste und die zweite Zählung dasselbe Anfangssegment von ζ, während bei der zweiten und bei der neuen Zählung die Ziffer 1 demselben Elemente von E zugeordnet ist. Die Zählung, in welche die zweite Zählung durch Verwechselung der Elemente, denen bei der zweiten und bei der neuen Zählung die Ziffer 2 zugeordnet ist, übergeht, werden wir als „dritte Zählung" bezeichnen. Alsdann benutzen die erste und die dritte Zählung dasselbe Anfangssegment von ζ, während bei der dritten und bei der neuen Zählung die Ziffern 1 und 2 je demselben Elemente von E zugeordnet sind. In dieser Weise fortfahrend, gelangen wir schliesslich zu einer „letzten Zählung", welche einerseits dasselbe Anfangssegment von ζ, wie die erste Zählung, also das Segment $1, 2, 3, \ldots \tau$ benutzt, andererseits die Ziffernkomplexe $1, 2, \ldots \tau$ je demselben Elemente von E zuordnet, wie die neue Zählung. Hieraus folgern wir hinsichtlich der neuen Zählung, dass, nachdem wir die Ziffernkomplexe $1, 2, \ldots \tau$ denjenigen Elementen von E zugeordnet haben, denen sie bei der neuen Zählung entsprechen, die Menge E erschöpft ist, d. h. dass *die neue Zählung dasselbe Anfangssegment von ζ benutzt wie die erste Zählung*, w. z. b. w.

Auf Grund der Haupteigenschaft dürfen wir die Kardinalzahl einer endlichen Species mit dem letzten Ziffernkomplex der Folge ζ, der bei der Zählung der Menge benutzt wird, bezeichnen. Die Kardinalzahl einer Species ohne Element heisst *Null* und wird mit 0 bezeichnet.

Aus der Haupteigenschaft folgt unmittelbar, dass *eine echte Teilspecies einer endlichen Species E nicht mit E selbst gleichmächtig sein kann* (die entgegengesetzte Annahme führt nämlich sofort auf einen Widerspruch). Insbesondere *kann eine endliche Species nicht gleichzeitig unendlich sein.*

Sei U eine reduzierbar unendliche Species; U_1 die abtrennbare, mit A gleichmächtige Teilspecies; $e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots$ die Elemente von U_1; U_2 die zu U_1 in U konjugierte Zerlegungsspecies. Indem wir e_1 mit e_2, e_2 mit e_3, usw., und jedes Element von U_2 mit sich selbst korrespondieren lassen, erzeugen wir eine eineindeutige Beziehung zwischen U und einer echten Teilspecies von U. Mithin gilt der Satz:

Jede reduzierbar unendliche Species U enthält mit U gleichmächtige echte Teilspecies.

Das einfachste Beispiel einer unendlichen Menge bildet die Menge A selbst, deren Kardinalzahl wir mit a bezeichnen werden. Species, welche diese Kardinalzahl besitzen, heissen *abzählbar unendlich*, sodass folgende Aussage gilt: *Jede unendliche Species enthält eine mit einer abzählbar unendlichen halbidentische Teilspecies.*

Einfache Beispiele von abzählbar unendlichen Species lassen sich in mannigfacher Weise angeben. Die Menge der positiven und negativen ganzen Zahlen (d. h. genau genommen, die Menge der diese Zahlen bezeichnenden Zeichenkomplexe) erscheint als abzählbar unendlich, wenn wir diese Zahlen nach steigenden absoluten Werten ordnen. Die Species der rationalen Zahlen x erscheint als abzählbar unendliche Menge, wenn wir jede dieser Zahlen als Wurzel einer bestimmten Gleichung $px + q = 0$ (in welcher p und q möglichst kleine ganze Zahlen sind und p positiv ist) betrachten, und diese Gleichungen nach der Summe der absoluten Werte von p und q ordnen.

Um zu beweisen, dass auch die Species der algebraischen Zahlen eine abzählbar unendliche Menge ist, verstehen wir unter dem *Grade* einer algebraischen Zahl θ den Minimalwert der Grade der algebraischen Gleichungen mit ganzen Koeffizienten, welche θ als Wurzel besitzen, und unter den Koeffizienten einer algebraischen Zahl θ vom Grade n, die Koeffizienten derjenigen θ als Wurzel besitzenden algebraischen Gleichung $f(x) \equiv c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0$, in welcher c_0 positiv ist und alle Koeffizienten möglichst kleine ganzzahlige Werte besitzen. Diese Koeffizienten von θ sind eindeutig bestimmt; wäre nämlich ϑ Wurzel von zwei verschiedenen Gleichungen $\phi(x) \equiv x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0$ und $\psi(x) \equiv x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots + \beta_n = 0$ mit rationalen Koeffizienten, so wäre sie auch Wurzel der Gleichung $\phi(x) - \psi(x) = 0$, deren Grad kleiner wäre als n. Die Species der algebraischen Zahlen erscheint nunmehr als abzählbar unendliche Menge, wenn wir diese Zahlen nach steigenden Werten der Summe von ihrem Grade und den absoluten Beträgen ihrer Koeffizienten ordnen.

Eine Species heisst *abzählbar*, wenn ein Gesetz existiert, das jedem ihrer Elemente einen verschiedenen Ziffernkomplex von ζ zuordnet. Sie heisst insbesondere *zählbar*, wenn das Gesetz erlaubt, von jedem Ziffernkomplex von ζ zu entscheiden, entweder welchem Elemente der betreffenden Species es zugeordnet ist, oder dass es keinem Elemente der betreffenden Species zugeordnet ist. Eine Species s heisst *auszählbar*, wenn jedem Elemente α einer gewissen Teilspecies A_1 von A ein Element β von s zugeordnet ist in solcher Weise, dass die Species der β mit s halbidentisch ist. Ist überdies A_1 mit A identisch, so heisst s *durchzählbar*. Ist schliesslich auch die Species der β mit s identisch, so heisst s *aufzählbar*.

[[154]]

Um ein geometrisches Beispiel einer zählbaren Species zu geben, schicken wir folgende Definitionen voraus:

Wir wählen in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem, und zerlegen die Ebene in Quadrate $\varkappa_1$ mit der Seitenlänge 1, deren Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten besitzen. Jedes der Quadrate $\varkappa_1$ zerlegen wir in vier kongruente homothetische Teilquadrate $\varkappa_2$, und definieren, in dieser Weise fortfahrend, Quadrate $\varkappa_3$, $\varkappa_4$, usw. Unter einem Quadrat $\varkappa$ verstehen wir ein Quadrat $\varkappa_\nu$ mit willkürlichem ν. Unter einem *Bereich* verstehen wir eine solche Species der Kardinalzahl a von Quadraten $\varkappa$ (einschliesslich der Grenze), [[5]] dass sich zu jedem Quadrat $\varkappa'$ des Bereichs eine endliche Menge von ebenfalls zum Bereiche gehörigen Quadraten $\varkappa$ angeben lässt, welche $\varkappa'$ vollständig einschliessen. Lässt sich überdies von jedem Quadrate $\varkappa$ angeben, entweder dass es von einem bestimmten Anfangssegmente des Bereichs überdeckt wird, oder dass es von keinem Anfangssegmente des Bereichs überdeckt wird, so heisst der Bereich ein *Gebiet.* Lässt sich für zwei willkürliche Quadrate $\varkappa$ des Bereichs entscheiden, ob sie sich durch einen vom Bereiche überdeckten Streckenzug verbinden lassen, so heisst der Bereich *differenziert.* Lassen zwei willkürliche Quadrate $\varkappa$ des Bereichs sich durch einen vom Bereiche überdeckten Streckenzug verbinden, so heisst der Bereich *einfach.*

Wir denken uns nun einen differenzierten Bereich β, und lassen aus der entsprechenden Quadratspecies diejenigen Quadrate $\varkappa$ fort, welche sich mit einem vorangehenden (d.h. einem früheren Ziffernkomplex von ζ zugeordneten) Quadrate $\varkappa$ von β durch einen von β überdeckten Streckenzug verbinden lassen. Die übrigbleibenden Quadrate bilden eine zählbare Species $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$, ..., und jedes Quadrat $\varkappa^{(\nu)}$ bildet zusammen mit denjenigen Quadraten $\varkappa$ von β, welche sich durch einen von β überdeckten Streckenzug mit $\varkappa^{(\nu)}$ verbinden lassen, einen in β enthaltenen einfachen Bereich. Wir haben mithin den Satz, dass *jeder differenzierte Bereich in eine zählbare Species von einfachen Bereichen zerlegt ist.*

Die Species der Paare von Ziffernkomplexen von ζ ist eine abzählbar unendliche Menge; wir brauchen, um dies einzusehen, diese Paare nur nach der Summe der zugehörigen ganzen Zahlen zu ordnen. Hieraus folgt, dass eine Species welche in eine abzählbar unendliche (bzw. abzählbare, zählbare, auszählbare, durchzählbare, aufzählbare) Species von abzählbar unendlichen (bzw. abzählbaren, zählbaren, auszählbaren, durchzählbaren, aufzählbaren) Mengen zerlegt ist, ebenfalls eine abzählbar unendliche (bzw. abzählbare, zählbare, auszählbare, durchzählbare, aufzählbare) Menge ist.

[[155]]

Ein zweites Beispiel einer unendlichen Menge bildet die Menge C der unbeschränkt fortgesetzten Folgen von zu ζ gehörigen Ziffernkomplexen, deren Kardinalzahl wir mit c bezeichnen werden. Obgleich die Menge C nicht reduzierbar unendlich ist, so besitzt sie dennoch, wie sich leicht zeigen lässt, analog wie die reduzierbar unendlichen Mengen, mit C gleichmächtige echte Teilmengen. Lassen wir der Folge von positiven ganzen Zahlen $a_1\ a_2\ a_3 \ldots.$ die reelle Zahl

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}}+\ldots$$

entsprechen, so erscheint C als Erzeugungsmittel der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, inklusive 1, aber exklusive 0. Ordnen wir jeder Folge $a_1\ a_2\ a_3 \ldots.$ die reelle Zahl

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{a_1-1}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}}+\ldots$$

zu, so erscheint C als Erzeugungsmittel der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, exklusive 0 und 1. Hieraus folgt unmittelbar, dass C sich schliesslich auch als Erzeugungsmittel aller reellen (positiven und negativen) Zahlen, inklusive 0, deuten lässt. Lassen wir der Fundamentalreihe $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ die reelle Zahl

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}$$

entsprechen, so erseheint die Menge C als Erzeugungsmittel der Irrationalzahlen zwischen 0 und 1.

Die Species C_n der Gruppen von n unbeschränkt fortgesetzten Folgen von zu ζ gehörigen Ziffernkomplexen ist eine Menge derselben Kardinalzahl wie die Menge C. Um dies einzusehen, braucht man nur dem Elemente $a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots$ von C das Element

$$\begin{array}{llll} a_1 & a_{n+1} & a_{2n+1} & \ldots \\ a_2 & a_{n+2} & a_{2n+2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{2n} & a_{3n} & \ldots \end{array}$$

[[156]]

von C_n zuzuordnen. In dieser Weise bestimmt man gleichzeitig eine eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten eines n-dimensionalen Kubus und den Punkten eines geraden Liniensegmentes (aus welcher unmittelbar eine eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten des n-dimensionalen Cartesischen Raumes und den Punkten der geraden Linie folgt). Diese Beziehung ist aber *nicht stetig*: wenn man z. B. (bei konstanten $a_1, \ldots a_n, a_{n+3}, a_{n+4}, \ldots$) a_{n+2} abwechselnd gleich 1 und 2 wählt und a_{n+1} unbeschränkt wachsen lässt, so bekommt man auf dem Liniensegmente eine gegen einen einzigen Punkt konvergierende Folge von Punkten, im n-dimensionalen Kubus aber eine *nicht* gegen einen einzigen Punkt konvergierende Folge von Punkten.

Auch die Species C_ω der unbeschränkt fortgesetzten Folgen von unbeschränkt fortgesetzten Folgen von zu ζ gehörigen Ziffernkomplexen ist eine Menge der Kardinalzahl c, wie man sofort erkennt, wenn man dem Elemente $a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots$ von C das Element

$$\begin{array}{l} a_1\ a_2\ a_4\ a_7\ \ldots\ldots \\ a_3\ a_5\ a_8\ \ldots\ldots\ldots \\ a_6\ a_9\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{10}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

von C_ω entsprechen lässt.

Zwei Species M und N (und ebenso die betreffenden Kardinalzahlen m und n) heissen *äquivalent*, wenn einerseits jedem Element von M ein verschiedenes Element von N, andererseits jedem Element von N ein verschiedenes Element von M zugeordnet ist, eine Eigenschaft, welche wir auch durch die Formel $m = n$ ausdrücken. Wenn einerseits jedem Element von M ein verschiedenes Element von N zugeordnet ist, andererseits aber kein Gesetz existieren kann, das jedem Elemente von N ein verschiedenes Element von M zuordnet, so schreiben wir $m < n$ oder $n > m$, und sagen, dass N (resp. n) *grösser* ist als M (resp. m) und dass M (resp. m) *kleiner* ist als N (resp. n).

Wenn wir nur wissen, dass jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von N zugeordnet ist, so schreiben wir auch $m \leq n$, oder $n \geq m$, obgleich in diesem Falle nicht notwendig eine der Relationen $m < n$ und $m = n$ zu gelten braucht.

Folgende Eigenschaften sind evident:

1. *Die Relationen* $m = n$, $m > n$ *und* $m < n$ *schliessen einander aus.*

2. *Aus* $m = n$ *und* $n = p$ *folgt* $m = p$.

[157]

3. *Aus* $m > n$ *und* $n \geq p$ *folgt* $m > p$. Wenn man nämlich jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von P zuordnen könnte, so könnte man weiter auf Grund von $n \geq p$ auch jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von N zuordnen.

4. *Aus* $m \geq n$ *und* $n > p$ *folgt* $m > p$. Wenn man nämlich jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von P zuordnen könnte, so könnte man jedem Elemente von N ein verschiedenes Element von M, also auch ein verschiedenes Element von P zuordnen.

Eine Species M (bzw. ihre Kardinalzahl m) heisst einer Species N (bzw. ihrer Kardinalzahl n) *übergeordnet* und wir schreiben $m \dot{\geq} n$, wenn jedem Elemente α einer gewissen Teilspecies M_1 von M je ein Element β von N zugeordnet ist in solcher Weise dass die Species N' der β mit N halbidentisch ist. Ist überdies N' mit N identisch, so heisst die Species M (bzw. ihre Kardinalzahl m) der Species N (bzw. ihrer Kardinalzahl n) *superponiert*, und schreiben wir $m \ddot{\geq} n$. Ist schliesslich auch M_1 mit M identisch, so sagen wir dass N (bzw. n) von M (bzw. m) *überdeckt* ist, und schreiben $m \dddot{\geq} n$.

Wenn die Species M des Species N übergeordnet ist, die Species N aber unmöglich der Species M übergeordnet werden kann, so heisst M (bzw. m) *von grösserem Umfang* als N (bzw. n), und schreiben wir $m \dot{>} n$.

Wenn sowohl $m \dot{\geq} n$, wie $n \dot{\geq} m$, so heissen M und N (bzw. m und n) *von gleichem Umfang*, und schreiben wir $m \doteq n$.

Folgende Eigenschaften sind leicht zu beweisen:

1. *Die Relationen* $m \doteq n$, $m \dot{>} n$ *und* $n \dot{>} m$ *schliessen einander aus.*

2. *Aus* $m \dot{\geq} n$ *und* $n \dot{\geq} p$ *folgt* $m \dot{\geq} p$. Sei nämlich N' die Species der Elementen von M zugeordneten Elemente von N, und P' resp. P'' die Species der Elementen von N resp. N' zugeordneten Elemente von P. Wenn nun ein von jedem Elemente von P'' verschiedenes Element von P' existierte, so wäre es einem Elemente von N zugeordnet, das eine für die Elemente von N' unmögliche Eigenschaft besässe, was der Kongruenz von N und N' widerspricht. Es kann mithin kein von jedem Elemente von P'' verschiedenes Element von P' existieren, d.h. P'' und P' sind kongruent. Weil aber P und P' ebenfalls kongruent sind, so sind schliesslich auch P und P'' kongruent, also halbidentisch, w. z. b. w.

3. *Aus* $m \doteq n$ *und* $n \doteq p$ *folgt* $m \doteq p$.

4. *Aus* $m \dot{>} n$ *und* $n \dot{\geq} p$ *folgt* $m \dot{>} p$. Wenn nämlich $p \dot{\geq} m$ wäre, so wäre wegen $n \dot{\geq} p$ auch $n \dot{\geq} m$, was mit $m \dot{>} n$ unverträglich ist.

[158]

5. *Aus $m \dot{>} n$ und $n \dot{>} p$ folgt $m \dot{>} p$.* Wenn nämlich $p \dot{\geq} m$ wäre, so wäre wegen $m \dot{\geq} n$ auch $p \dot{>} n$, was mit $n \dot{>} p$ unverträglich ist.

Wenn die Species M der Species N superponiert ist, die Species N aber unmöglich der Species M superponiert werden kann, so heisst M (bzw. m) *von grösserer Ausdehnung* als N (bzw. n), und schreiben wir $m \ddot{>} n$. Wenn N von M überdeckt ist, M aber unmöglich von N überdeckt werden kann, so heisst M (bzw. m) *von grösserem Gewicht* als N (bzw. n) und schreiben wir $m \dddot{>} n$.

Wenn sowohl $m \ddot{\geq} n$, wie $n \ddot{\geq} m$, so heissen M und N *von gleicher Ausdehnung*, und schreiben wir $m \ddot{=} n$. Wenn sowohl $m \dddot{\geq} n$, wie $n \dddot{\geq} m$, so heissen M und N *von gleichem Gewicht*, und schreiben wir $m \dddot{=} n$.

Folgende Eigenschaften leuchten unmittelbar ein:

1. *Die Relationen $m \ddot{=} n$, $m \ddot{>} n$ und $n \ddot{>} m$ ebenso wie die Relationen $m \dddot{=} n$, $m \dddot{>} n$ und $n \dddot{>} m$ schliessen einander aus.*

2. *Aus $m \ddot{\geq} n$ und $n \ddot{\geq} p$ folgt $m \ddot{\geq} p$. Aus $m \dddot{\geq} n$ und $n \dddot{\geq} p$ folgt $m \dddot{\geq} p$.*

3. *Aus $m \ddot{=} n$ und $n \ddot{=} p$ folgt $m \ddot{=} p$. Aus $m \dddot{=} n$ und $n \dddot{=} p$ folgt $m \dddot{=} p$.*

4. *Aus $m \ddot{>} n$ und $n \ddot{\geq} p$ folgt $m \ddot{>} p$. Aus $m \dddot{>} n$ und $n \dddot{\geq} p$ folgt $m \dddot{>} p$.*

5. *Aus $m \ddot{\geq} n$ und $n \ddot{>} p$ folgt $m \ddot{>} p$. Aus $m \dddot{\geq} n$ und $n \dddot{>} p$ folgt $m \dddot{>} p$.*

Um ein Beispiel äquivalenter Species herzustellen, definieren wir auf der geraden Linie Intervalle $\varkappa$ in analoger Weise wie oben in der Ebene Quadrate $\varkappa$, verstehen unter einem Intervalle λ_ν die Vereinigung von zwei aneinander grenzenden Intervallen $\varkappa_{\nu+1}$, und unter einer *stetigen Funktion einer zwischen 0 und 1 schwankenden Veränderlichen* ein Gesetz, welches jedem zwischen 0 und 1 enthaltenen, mit $\varkappa_a$ zu bezeichnenden Intervalle $\varkappa$ ein mit λ_b zu bezeichnendes Intervall λ zuordnet in solcher Weise, dass aneinander grenzenden $\varkappa_a$ teilweise übereinander greifende λ_b und ineinander enthaltenen $\varkappa_a$ ebenfalls ineinander enthaltene λ_b entsprechen, und dass die Breite der λ_b mit der Breite der entsprechenden $\varkappa_a$ gleichmässig gegen Null konvergiert. Weil sowohl die $\varkappa_a$ wie die λ eine abzählbar unendliche Species bilden, so lässt sich jeder stetigen Funktion der genannten Art ein verschiedenes Element der Menge C zuordnen. Sei andererseits $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ ein Element d von

[[159]]

C, verstehen wir unter i_ν das zwischen $x_\nu = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_\nu}}$ und $x_\nu + \frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_\nu}}$ enthaltene Intervall, und ordnen wir für gegebenes ν allen Intervallen $(\varkappa_\nu)_a$ das Intervall i_ν als λ_b zu, so erreichen wir, dass jedem Elemente d von C eine verschiedene stetige Funktion der genannten Art entspricht, sodass *die Species S der stetigen Funktionen einer zwischen 0 und 1 schwankenden Veränderlichen der Menge C äquivalent ist.* Ausserdem sind die Species S und C, wie man leicht einsieht, von gleichem Umfang und von gleicher Ausdehnung.

Die Menge C ist grösser als die Menge A. Ein Gesetz, das jedem Elemente g von C ein Element h von A zuordnet, muss nämlich das Element h vollständig bestimmt haben nach dem Bekanntwerden eines gewissen Anfangssegmentes α der Folge von Ziffernkomplexen von g. Dann aber wird jedem Elemente von C, welches α als Anfangssegment besitzt, dasselbe Element h von A zugeordnet. Es ist mithin unmöglich, jedem Elemente von C ein verschiedenes Element von A zuzuordnen. Weil man andererseits in mannigfacher Weise jedem Elemente von A ein verschiedenes Element von C zuordnen kann, so ist hiermit der aufgestellte Satz bewiesen.

2. *Die Ordinalzahlen.*

Eine Species heisst *geordnet*, wenn zwischen je zwei als verschieden erkannten Elementen a und b der Species eine solche als *ordnende Relation* zu bezeichnende asymmetrische Relation im einen oder im anderen Sinne definiert ist, welche, wenn wir sie im einen Sinne durch „$a < b$" oder „*a vor b*" oder „*a links von b*" oder „$b > a$" oder „*b nach a*" oder „*b rechts von a*" und im anderen Sinne durch „$a > b$" oder „*a nach b*" oder „*a rechts von b*" oder „$b < a$" oder „*b vor a*" oder „*b links von a*" ausdrücken, die sogenannte *Ordnungseigenschaft* besitzt, welche aussagt, dass die Relationen $a < b$ und $b < c$ die Relation $a < c$ nach sich ziehen.

Wenn a, b und c Elemente der geordneten Species M sind, und *a vor b* und *b vor c* liegt, so sagt man auch, dass *b zwischen a und c* oder *zwischen c und a* liegt.

Die Species derjenigen Elemente der geordneten Menge M, welche zwischen a und b liegen bzw. als weder vor a noch nach b liegend erkannt sind ($a < b$), bildet das *offene* bzw. *geschlossene Intervall ab.* Die Elemente a und b heissen die *Endelemente* des (offenen oder geschlossenen) Intervalles ab.

[[160]]

Wenn zwischen zwei geordneten Species M und N eine solche eineindeutige Beziehung hergestellt werden kann, dass zwischen zwei einander zugeordneten Elementepaaren die ordnende Relation im selben Sinne gilt, so sagen wir, dass M und N dieselbe *Ordinalzahl* besitzen oder *ähnlich* sind.

Ein einfaches Beispiel einer geordneten Menge bildet die Menge A, wenn wir die ordnenden Relationen der natürlichen Rangordnung der Elemente in der Folge ζ entnehmen. Ihre Ordinalzahl wird mit ω bezeichnet. Kehren wir den Sinn aller ordnenden Relationen um, so entsteht eine neue geordnete Menge, deren Ordinalzahl mit $^*\omega$ bezeichnet wird.

Unter einer *Fundamentalreihe* werden wir eine geordnete Species der Ordinalzahl ω verstehen.

Jede geordnete endliche Menge E besitzt ein erstes Element, d.h. ein Element, welches *vor* jedem anderen Elemente liegt. Um dies zu beweisen, unterziehen wir E einer bestimmten Zählung, so dass wir in E ein bestimmtes Element 1, ein bestimmtes Element 2, usw. erhalten. Wenn nun das Element 1 nicht das erste Element der geordneten Menge E ist, so gibt es in der Folge ζ einen ersten solchen Ziffernkomplex a_2, dass das Element a_2 von E vor dem Elemente 1 von E liegt. Wenn auch das Element a_2 nicht das erste Element der geordneten Species E ist, so gibt es in der Folge ζ einen ersten solchen Ziffernkomplex a_3, dass das Element a_3 von E vor dem Elemente a_2 — und gleichzeitig vor allen Elementen 1, 2, 3, . . . $(a_3—1)$ — von E liegt. Indem wir in dieser Weise fortfahren, erreichen wir schliesslich einen solchen Ziffernkomplex a_h der Folge ζ, dass, wenn a in der Folge ζ weiter liegt als a_h, das Element a von E nach dem Elemente a_h von E liegt. Alsdann ist a notwendig das erste Element der geordneten Species E.

In analoger Weise zeigt man, dass *jede geordnete endliche Species ein letztes Element besitzt*, d.h. ein *nach* jedem anderen Elemente liegendes Element.

Je zwei geordnete endliche Species E_1 und E_2 derselben Kardinalzahl besitzen dieselbe Ordinalzahl. Wenn wir nämlich sowohl E_1 wie E_2 in solcher Weise zählen, dass dem ersten Elemente die Ziffer 1, dem ersten Elemente des Restes die Ziffer 2, usw. zugeordnet wird, so brechen beide Zählungen bei demselben Ziffernkomplex a von ζ ab. Die beiden Zählungen erzeugen mithin eine eineindeutige Beziehung zwischen E_1 und E_2, und diese Beziehung besitzt auch die für die Ähnlichkeit beider Species erforderte Eigenschaft.

Jeder endlichen Kardinalzahl (inklusive Null) entspricht somit nur eine einzige endliche Ordinalzahl, sodass wir die letztere mit demselben Ziffernkomplex wie die erstere bezeichnen können.

Dass diese Eigenschaft bei den unendlichen Kardinalzahlen fortfällt, sieht man sofort ein, wenn man z.B. die Menge der rationalen Zahlen einerseits als eine der Folge ζ ähnliche Menge, andererseits in der natürlichen Rangordnung dieser Zahlen betrachtet.

Seien M und N zwei elementefremde geordnete Species der Ordinalzahlen m und n. Setzen wir weiter fest, dass zwischen einem willkürlichen Elemente p von M und einem willkürlichen Elemente q von N die Relation „p *vor* q" bestehen soll, so geht dadurch $\mathfrak{S}$ (M, N) in eine mit $M + N$ zu bezeichnende geordnete Species über, welche die *Summe* von M und N genannt wird, während ihre Ordinalzahl die *Summe* von m und n heisst und mit $m + n$ bezeichnet wird. In analoger Weise definieren wir die Summe einer willkürlichen geordneten Species von Ordinalzahlen m mittels der Vereinigungsspecies entspechender elementefremder geordneter Species M. Man sieht unmittelbar ein, dass diese *„Addition von Ordinalzahlen" die assoziative Eigenschaft besitzt.* Die ordnenden Relationen der betreffenden Vereinigungsspecies werden nämlich durch Assoziation nicht beeinflusst. Dagegen *versagt für die Addition von Ordinalzahlen die kommutative Eigenschaft,* wie aus dem Beispiel $\omega + 1 \neq 1 + \omega$ hervorgeht.

Wir denken eine endliche Gruppe von elementefremden geordneten Species $M_1, M_2, .. M_h$ mit den Ordinalzahlen $m_1, m_2, .. m_h$ gegeben, bezeichnen ein willkürliches Element von M_ν mit p_ν, und betrachten die Species der Elementegruppen $(p_1, p_2, .. p_h)$. Diese Species ordnen wir, indem wir hinsichtlich der ordnenden Relation zwischen den Gruppen $(p'_1, p'_2, .. p'_h)$ und $(p''_1, p''_2, .. p''_h)$ folgende Festsetzungen treffen: wenn $p'_h \neq p''_h$, so ist sie dieselbe wie diejenige zwischen p'_h und p''_h; wenn $p'_h = p''_h, ... p'_{k+1} = p''_{k+1}$, aber $p'_k \neq p''_k$, so ist sie dieselbe wie diejenige zwischen p'_k und p''_k. Die in dieser Weise geordnete Species von Elementegruppen bzw. ihre Ordinalzahl heisst das *Produkt* von $M_1, ... M_h$ bzw. von $m_1, ... m_h$ und wird mit $M_1 . M_2 ... M_h$ bzw. $m_1 . m_2 ... m_h$ bezeichnet. Die *assoziative Eigenschaft dieser „Multiplikation von Ordinalzahlen"* ist evident, weil die ordnenden Relationen der betreffenden Species von Elementegruppen durch die Assoziation nicht beeinflusst werden, während das Beispiel $\omega . 3 \neq 3 . \omega$ zeigt, dass die kommutative Eigenschaft für die Multiplikation ebensowenig wie für die Addition besteht. Weiter sieht man unmittelbar ein, dass in einem Produkte von zwei Faktoren die *distributive Eigenschaft nach dem rechtsseitigen Faktor* gilt; für ein Produkt mehrerer Faktoren besteht die-

[[162]]

selbe Eigenschaft für den letzten Faktor, für die übrigen Faktoren dagegen nicht, wie das Beispiel $(\omega + 1)\, 3 = \omega.\, 3 + 1 \neq \omega.\, 3 + 3$ beweist.

Sei a eine endliche Zahl und m eine willkürliche Ordinalzahl, so wird das Produkt von a gleichen Faktoren m mit m^a bezeichnet, und die *a-te Potenz* von m genannt. Auf Grund der assoziativen Eigenschaft der Multiplikation gelten die Formeln $m^a.\, m^b = m^{a+b}$ und $(m^a)^b = m^{ab}$.

Wenn $a_1, a_2, \ldots$ die Elemente einer Fundamentalreihe $\mathfrak{f}$ sind, welche in solcher Weise als Teilspecies in einer geordneten Species M enthalten ist, dass $a_\nu < a_{\nu+1}$ für jedes ν, so heisst $\mathfrak{f}$ eine *steigende Fundamentalreihe* von M. Wenn dagegen $a_\nu > a_{\nu+1}$ für jedes ν, so heisst $\mathfrak{f}$ eine *fallende Fundamentalreihe* von M.

Zwei steigende Fundamentalreihen mit den Elementen $a_1, a_2, \ldots$ bzw. $b_1, b_2, \ldots$ von M heissen *zusammengehörig*, wenn zu jedem a_μ ein $b_\nu > a_\mu$ und zu jedem b_μ ein $a_\nu > b_\mu$ angegeben werden kann. In analoger Weise definiert man zusammengehörige fallende Fundamentalreihen.

Seien $a_1, a_2, \ldots$ die Elemente einer steigenden Fundamentalreihe $\mathfrak{f}$ von M, und a_ω ein solches Element von M, dass $a_\nu < a_\omega$ für jedes ν, während zu jedem $b < a_\omega$ ein $a_\nu > b$ angegeben werden kann, so heisst a_ω *Grenzelement* von $\mathfrak{f}$. In analoger Weise definiert man Grenzelemente fallender Fundamentalreihen von M. Grenzelemente steigender oder fallender Fundamentalreihen von M heissen auch *Hauptelemente* von M.

Die geordnete Species M heisst *überall dicht zwischen ihren Elementen a und b* ($a < b$), wenn zwischen zwei willkürlichen, als voneinander verschieden und weder vor a, noch nach b liegend erkannten Elementen p und q von M andere Elemente von M liegen.

Die geordnete Species M heisst *überall dicht im weiteren Sinne* oder kurz *überall dicht*, wenn zwischen zwei willkürlichen, voneinander verschiedenen Elementen p und q von M andere Elemente von M liegen, und *überall dicht im engeren Sinne*, wenn sich überdies ein Element von M angeben lässt und sowohl rechts wie links von einem willkürlichen Elemente von M andere Elemente von M liegen.

Die geordnete Species M heisst *nirgends dicht zwischen ihren Elementen a und b* ($a < b$), wen zwei willkürliche, als voneinander verschieden und weder vor a noch nach b liegend erkannte Elemente p und q von M ($p < q$) die Eigenschaft besitzen, dass es zwei als voneinander verschieden und weder vor p noch nach q liegend erkannte Elemente r und s von M gibt, welche ein *freies Intervall* bilden d.h. zwischen denen keine anderen Elemente von M liegen.

[[163]]

Die geordnete Species M heisst *nirgends dicht*, wenn zwei willkürliche voneinander verschiedene Elemente p und q von M $(p < q)$ die Eigenschaft besitzen, dass es zwei als voneinander verschieden und weder vor p noch nach q liegend erkannte Elemente r und s von M gibt, welche ein freies Intervall bilden.

Die geordnete Species M heisst *abgeschlossen*, wenn in ihr keine Fundamentalreihe von geschlossenen Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ existieren kann, von denen $i_{\nu+1}$ für jedes ν in i_ν enthalten ist, und welche kein gemeinschaftliches Element besitzen.

Die geordnete Species M heisst *in sich dicht*, wenn jedes ihrer Elemente sich als Hauptelement charakterisieren lässt.

Die geordnete Species M heisst *perfekt*, wenn sie sowohl in sich dicht wie abgeschlossen ist.

Ein Beispiel einer (im weiteren Sinne) *überall dichten, perfekten* Menge liefert die Menge C, geordnet auf Grund der natürlichen Rangordnung der von ihr erzeugten reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Seien nämlich $a_1 \ldots a_n\, b_1\, b_2 \ldots$ und $a_1 \ldots a_n\, c_1\, c_2 \ldots$ $(b_1 > c_1)$ zwei willkürliche Elemente von C, so liegt zwischen ihnen das Element $a_1 \ldots a_n\, c_1\, (c_2 + 1) \ldots$, sodass die Menge *überall dicht* ist. Versuchen wir weiter eine Fundamentalreihe von geschlossenen Intervallen i_1, $i_2, \ldots$ zu bestimmen, von denen $i_{\nu+1}$ für jedes ν in i_ν enthalten ist, und welche kein gemeinschaftliches Element besitzen. Seien $a_1 \ldots a_n\, b_{n+1} \ldots$ und $a_1 \ldots a_n\, c_{n+1} \ldots$ $(b_{n+1} > c_{n+1})$ die Endelemente von i_1, so besitzen die Endelemente eines willkürlichen i_ν dasselbe Anfangssegment $a_1 \ldots a_n$, während b_{n+1} für die weiteren i_ν nicht zunehmen und c_{n+1} für die weiteren i_ν nicht abnehmen kann. Solange nun b_{n+1} und c_{n+1} dieselben voneinander verschiedenen Werte behalten, gehört das Element $a_1 \ldots a_n (c_{n+1} + 1)\, 1\, 1\, 1 \ldots$ zum entsprechenden i_ν; damit man mithin sicher sei, dass dieses Element nicht zu allen i_ν gehört, muss sich ein gewisses i_ν angeben lassen, für welches entweder b_{n+1} abgenommen oder c_{n+1} zugenommen hat. Weil dieselbe Schlussfolgerung sich beliebig wiederholen lässt, muss sich ein weiteres i_ν angeben lassen, für welches $b_{n+1} = c_{n+1} = a_{n+1}$ geworden ist, dessen Endelemente also dieselben ersten $n + 1$ Ziffernkomplexe besitzen. Seien $a_1 \ldots a_{n+m}\, b_{n+m+1} \ldots$ und $a_1 \ldots a_{n+m}\, c_{n+m+1} \ldots$ $(b_{n+m+1} > c_{n+m+1})$ diese Endelemente, so können wir in derselben Weise, wie wir aus der Folge $a_1 \ldots a_n$ die Folge $a_1 \ldots a_{n+m}$ hergeleitet haben, aus $a_1 \ldots a_{n+m}$ zu einer weiteren Folge $a_1 \ldots a_{n+m+p}$ gelangen, und, in dieser Weise fortfahrend, eine unbegrenzt fortsetzbare Folge $a_1\, a_2 \ldots$ konstruieren. Das von dieser Folge dargestellte Element von C gehört nun aber zu *allen* i_ν, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind, und die betrachtete geordnete

Menge als *abgeschlossen* erkannt haben, Schliesslich ist das Element $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ Grenzelement der steigenden Fundamentalreihe $(a_1 + 1)\, 111 \ldots;\; a_1\, (a_2 + 1)\, 111 \ldots;\; a_1\, a_2\, (a_3 + 1)\, 111 \ldots;\; \ldots,$ womit die Menge sich auch als *in sich dicht* herausgestellt hat.

Ein Beispiel einer *nirgends dichten, perfekten* Menge wird gebildet von der Vereinigung der Menge C und der Menge E der endlichen Folgen von zu ζ gehörigen Ziffernkomplexen, wenn wir jedem Elemente $a_1 \ldots a_n$ von E die reelle Zahl

$$\frac{2}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2}} + \ldots + \frac{2}{3^{a_1+a_2+\ldots+a_n}}$$

und jedem Elemente $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ von C die reelle Zahl

$$\frac{2}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2+a_3}} + \ldots .$$

zuordnen, und sodann die Menge $\mathfrak{S}\,(C, E)$ ordnen auf Grund der natürlichen Rangordnung der entsprechenden reellen Zahlen. Zum geschlossenen Intervall mit den Endelementen $a_1 \ldots a_n\, b_{n+1} \ldots$ (bzw. $a_1 \ldots a_n$) und $a_1 \ldots a_n\, c_{n+1} \ldots$ $(b_{n+1} > c_{n+1})$ gehören nämlich die Elemente $a_1 \ldots a_n\, b_{n+1}\, 111 \ldots$ und $a_1 \ldots a_n\, (b_{n+1} - 1)$, zwischen denen keine weiteren Elemente liegen, sodass die Menge *nirgends dicht* ist. Versuchen wir weiter eine Fundamentalreihe von geschlossenen Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ zu bestimmen, von denen $i_{\nu+1}$ für jedes ν in i_ν enthalten ist, und welche kein gemeinschaftliches Element besitzen. Seien $a_1 \ldots a_n\, b_{n+1} \ldots$ (bzw. $a_1 \ldots a_n$) und $a_1 \ldots a_n\, c_{n+1} \ldots (b_{n+1} > c_{n+1})$ die Endelemente von i_1, so besitzen die Endelemente eines willkürlichen i_ν dasselbe Anfangssegment $a_1 \ldots a_n$, während b_{n+1} für die weiteren i_ν nicht zunehmen oder verschwinden (wohl entstehen) und c_{n+1} für die weiteren i_ν nicht abnehmen kann. Solange nun b_{n+1} nicht existiert, gehört das Element $a_1 \ldots a_n$ zum entsprechenden i_ν, und solange b_{n+1} und c_{n+1} dieselben voneinander verschiedenen Werte behalten, gehört das Element $a_1 \ldots a_n\, (c_{n+1} + 1)\, 111 \ldots$ zum entsprechenden i_ν; damit man mithin sicher sei, dass jedes dieser beiden Elemente nicht zu allen i_ν gehört, muss sich ein gewisses i_ν angeben lassen, für welches b_{n+1} existiert, während, falls noch immer $b_{n+1} \neq c_{n+1}$, entweder b_{n+1} abgenommen, oder c_{n+1} zugenommen hat. Weil dieselbe Schlussfolgerung sich beliebig wiederholen lässt, muss man ein weiteres i_ν angeben können, für welches $b_{n+1} = c_{n+1} = a_{n+1}$ geworden ist, dessen Endelemente also die Form $a_1 \ldots a_{n+m}\, b_{n+m+1} \ldots$ (bzw. $a_1 \ldots a_{n+m}$) und $a_1 \ldots a_{n+m}\, c_{n+m+1} \ldots$ besitzen. Indem wir mit diesem Intervall in derselben Weise verfahren wie mit i_1 und diesen Prozess unbeschränkt fortsetzen, erzeugen wir eine unbeschränkt fortsetzbare Folge $a_1\, a_2\, a_3 \ldots,$

[[165]]

welche aber ein zu *allen* i_ν gehöriges Element darstellen würde, womit wir wieder zu einem Widerspruch gelangt sind, und die betrachtete geordnete Menge als *abgeschlossen* erkannt haben. Schliesslich ist das Element $a_1\,a_2\,a_3\ldots$ Grenzelement der steigenden Fundamentalreihe a_1; $a_1\,a_2$; $a_1\,a_2\,a_3;\ldots$, und das Element $a_1\,a_2\ldots a_n$ Grenzelement der fallenden Fundamentalreihe $a_1\ldots a_n\,1$; $a_1\ldots a_n\,2$; $a_1\ldots\,a_n\,3;\ldots$, womit die Menge sich als *in sich dicht* herausgestellt hat.

Die Ordinalzahl der Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 (exklusive 0 und 1) in ihrer natürlichen Rangordnung wird mit η bezeichnet. Wir werden zeigen, dass *jede abzählbar unendliche, im engeren Sinne überall dichte geordnete Species die Ordinalzahl η besitzt.*

Sei M die gegebene geordnete Species, m_1, m_2, $m_3,\ldots$ ihre Elemente, R die auf Grund der natürlichen Rangordnung geordnete Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1, r_1, r_2, $r_3,\ldots$ ihre Elemente, wobei die Indizes auf Grund einer (z.B. nach S. 7 hergestellten) eineindeutigen Beziehung zwischen R und der Folge ζ bestimmt sind. Dem Elemente m_1 ordnen wir das Element r_1 zu; sodann dem Elemente r_2 dasjenige mit m'_2 zu bezeichnende Element m_ν mit möglichst kleinem Index ν, das zu m_1 dieselbe ordnende Relation besitzt, wie r_2 zu r_1; sodann dem Elemente m'_3 (welches mit m_3 oder mit m_2 identisch ist, je nachdem wir m_2 schon benutzt haben oder nicht) dasjenige mit r'_3 zu bezeichnende Element r_ν mit möglichst kleinem Index ν, das zu r_1 und r_2 dieselben ordnenden Relationen besitzt, wie m'_3 zu m_1 und m'_2; sodann dem Elemente r'_4 (d.h. dem noch nicht benutzten Elemente r_ν mit möglichst kleinem Index ν) dasjenige mit m'_4 zu bezeichnende Element m_ν mit möglichst kleinem Index ν, das zu m_1, m'_2 und m'_3 dieselben ordnenden Relationen besitzt, wie r'_4 zu r_1, r_2 und r'_3. Indem wir in dieser Weise fortfahren, bestimmen wir zwischen M und R eine solche eineindeutige Beziehung, welche die beiden Species als ähnlich erkennen lässt.

Eine geordnete Species heisst *differenziert geordnet*, wenn bezüglich zweier willkürlicher Elemente a und b entweder Sicherheit erlangt werden kann, dass zwischen ihnen kein weiteres Element liegt, oder ein zwischen a und b liegendes Element angegeben werden kann. Wir werden zeigen, das *jede abzählbar unendliche, differenziert geordnete Species M sich als abtrennbare Teilspecies einer geordneten Species der Ordinalzahl η auffassen lässt.*

Die obige Konstruktion einer eineindeutigen Beziehung zwischen M und R lässt sich nämlich auf diesen Fall erweitern, wenn wir nur jedesmal dass in M zu einem vorgegebenen Elemente r'_ν kein die erforderten ordnenden Relationen besitzendes Element m'_ν existiert, ein solches Element der Species M hinzufügen.

Die Menge T der endlichen Ternalbrüche zwischen 0 und 1 (exklusive 0 und 1) der Form

$$\frac{2}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2}} + \cdot \cdot + \frac{2}{3^{a_1+a_2+\cdot\cdot a_n}} \text{ oder } \frac{2}{3^{a_1}} + \cdot \cdot + \frac{2}{3^{a_1+\cdot\cdot a_{n-1}}} + \frac{1}{3^{a_1+\cdot\cdot a_n}}$$

in ihrer natürlichen Rangordnung besitzt, wie man unmittelbar einsieht, die Ordinalzahl $2.\ \eta$. Man hat nun den Satz: *jede abzählbar unendliche geordnete Species S, von der jedes Element a entweder rechtes Endelement eines freien Intervalls ist, während zu a spätere Elemente existieren und zwischen a und einem willkürlichen späteren Elemente andere Elemente liegen, oder linkes Endelement eines freien Intervalls ist, während zu a frühere Elemente existieren und zwischen a und einem willkürlichen früheren Elemente andere Elemente liegen, besitzt die Ordinalzahl $2.\ \eta$.*

Man kann nämlich nach der obigen Methode zwischen der Species der freien Intervalle von T und der Species der freien Intervalle von S eine eineindeutige Beziehung herstellen, welche die beiden Intervallspecies als ähnlich erkennen lässt.

Die Ordinalzahl der Menge C, geordnet auf Grund der natürlichen Rangordnung der entsprechenden reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (diese also inklusive 1 aber exklusive 0), wird mit ϑ_1 und die Ordinalzahl $1 + \vartheta_1$ mit ϑ bezeichnet. Es besteht der Satz: *jede geordnete Species P, welche eine solche abzählbar unendliche, im engeren Sinne überall dichte Teilspecies M enthält, dass zwischen je zwei Elementen von P Elemente von M liegen, dass die Species der vor einem willkürlichen Elemente p von P liegenden Elemente von M eine abtrennbare Teilspecies von M ist, welche entweder elementlos ist, oder wenigstens ein bestimmbares Element besitzt, und dass zu jeder der Ordnungseigenschaft genügenden Fundamentalreihe von Relationen „nach" oder „nicht nach" zu den Elementen von M ein diese Relationen erfüllendes Element von P konstruiert werden kann, besitzt die Ordinalzahl ϑ.*

Die Species M lässt sich nämlich nach dem obigen Verfahren auf die der natürlichen Rangordnung entsprechend geordnete Menge D der endlichen Dualbrüche zwischen 0 und 1 ähnlich abbilden. Wenn wir nun jedem Elemente γ der Menge $\mathfrak{S}\ (E, C)$, wo C in obiger Weise geordnet ist und E nur ein einziges, allen Elementen von C vorangehendes Element besitzt, dasjenige Element α von P zuordnen, welches zu den Elementen von M dieselben Relationen

[[167]]

„nach" oder „nicht nach" besitzt, wie γ zu den entsprechenden Elementen von D, so erzeugen wir eine eineindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{S}$ (E, C) und P, welche diese beiden Species als ähnlich darstellt.

Unter der Menge S werden wir verstehen die Menge der Ternalbrüche der Form

$$\frac{s_1}{3}+\frac{s_2}{3^2}+\frac{s_3}{3^3}+\cdots,$$

wo für jedes s_ν entweder die Ziffer 0 oder die Ziffer 2 gewählt werden darf, und die Ordinalzahl der auf Grund der natürlichen Rangordnung geordneten Menge S werden wir mit ζ bezeichnen. Es gilt der Satz: *jede nirgends dichte geordnete Species P, deren Species I der freien Intervalle abzählbar unendlich und im engeren Sinne überall dicht ist, während für ein willkürliches Element p von P und ein willkürliches Intervall i von I mit dem linken Endelement i_1 und dem rechten Endelement i_2 sich entscheiden lässt, entweder dass p vor i, d.h. nicht nach i_1, oder dass p nach i, d.h. nicht vor i_2 liegt, und zu jeder der Ordnungseigenschaft genügenden Fundamentalreihe von ordnenden Relationen zu den Intervallen von I ein diese Relationen erfüllendes Element von P konstruiert werden kann, besitzt die Ordinalzahl ζ.*

Die Species Q der Endelemente der freien Intervalle lässt sich nämlich auf die obige geordnete Menge T von endlichen Ternalbrüchen ähnlich abbilden. Wenn wir nun jedem Elemente γ von S dasjenige Element α von P zuordnen, welches zu den Intervallen von I dieselben ordnenden Relationen besitzt, wie γ zu den entsprechenden freien Intervallen von T, so erzeugen wir eine eineindeutige Beziehung zwischen S und P, welche diese beiden Species als ähnlich darstellt.

Als Beispiel einer Species P der letztgenannten Art können wir wählen die Menge $G_{n_1 n_2 n_3 \ldots}$ der Fundamentalreihen $z_1\, z_2\, z_3 \ldots$ von solchen positiven ganzen Zahlen, von denen die erste nicht grösser als n_1, die zweite nicht grösser als n_2, die dritte nicht grösser als n_3, usw. ist, wenn wir diese Fundamentalreihen auf Grund der natürlichen Rangordnung der entsprechenden reellen Zahlen

$$\frac{2(z_1-1)}{2n_1-1}+\frac{2(z_2-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)}+\frac{2(z_3-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)(2n_3-1)}+\cdots$$

ordnen. Alsdann entspricht jedes Paar von Endelementen eines Intervalles von I einem aus den Zahlen

[168]

$$\frac{2(z_1-1)}{2n_1-1}+\frac{2(z_2-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)}+\ldots+\frac{2z_\nu-1}{(2n_1-1)\ldots(2n_\nu-1)}$$

und

$$\frac{2(z_1-1)}{2n_1-1}+\frac{2(z_2-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)}+\ldots+\frac{2z_\nu}{(2n_1-1)\ldots(2n_\nu-1)}$$

gebildeten Zahlenpaar, wo z_1 nicht grösser als $n_1, \ldots, z_{\nu-1}$ nicht grösser als $n_{\nu-1}$, z_ν aber nicht grösser als $n_\nu-1$ ist. Aus der ähnlichen Beziehung zwischen dieser Menge P und der Menge S folgern wir beiläufig, dass die Mengen $G_{n_1 n_2 n_3 \ldots}$ und $G_{222\ldots}$ gleichmächtig sind.

3. *Die wohlgeordneten Ordinalzahlen.*

Die *wohlgeordneten Species* sind geordnete Species, welche auf Grund folgender Annahmen definiert sind:

1. Eine Species ohne Element oder mit einem einzigen Element ist eine wohlgeordnete Species, und wird insbesondere eine *Urspecies* genannt.

2. Aus bekannten wohlgeordneten Species werden weitere wohlgeordnete Species hergeleitet durch die beiden *erzeugenden Operationen,* welche in der Addition von zwei bzw. von einer Fundamentalreihe von bekannten wohlgeordneten Species bestehen. [1])

Jede wohlgeordnete Species, welche bei der Herstellung der wohlgeordneten Species F eine Rolle gespielt hat, heisst eine *konstruktive Unterspecies* von F. Diejenigen konstruktiven Unterspecies, welche bei der letzten erzeugenden Operation von F eine Rolle gespielt haben, heissen *konstruktive Unterspecies erster Ordnung* und werden durch einen Index ν voneinander unterschieden, also mit F_1 und F_2 bzw. mit F_1, F_2, $F_3, \ldots$ bezeichnet. Die konstruktiven Unterspecies erster Ordnung einer F_ν heissen *konstruktive Unterspecies zweiter Ordnung* von F, und werden mit $F_{\nu 1}$ und $F_{\nu 2}$ bzw.

---

[1]) Jede wohlgeordnete Species lässt sich ebenfalls mittels der beiden *erzeugenden Operationen zweiter Art* herstellen, welche zu einer bekannten wohlgeordneten Species ein einziges Element bzw. eine Fundamentalreihe von bekannten wohlgeordneten Species addieren. Wenn nämlich die Konstruktion sowohl von ξ_1 wie von ξ_2 sich auf die beiden erzeugenden Operationen zweiter Art zurückführen lässt, so lässt auch die Addition von ξ_2 zu ξ_1, d. h. die Konstruktion von $\xi_1+\xi_2$, sich auf die beiden erzeugenden Operationen zweiter Art zurückführen. Und wenn die Konstruktion jedes ξ_ν ($\nu=1,2,3,\ldots$) sich auf die beiden erzeugenden Operationen zweiter Art zurückführen lässt, so lässt auch die Addition von $\sum_{\nu=2}^{\infty}\xi_\nu$ zu ξ_1, d. h. die Konstruktion von $\sum_{\nu=1}^{\infty}\xi_\nu$, sich auf die beiden erzeugenden Operationen zweiter Art zurückführen.

mit $F_{\nu 1}$, $F_{\nu 2}$, $F_{\nu 3}, \ldots$ bezeichnet. Die konstruktiven Unterspecies erster Ordnung einer $F_{\nu_1 \ldots \nu_m}$ heissen *konstruktive Unterspecies* $(m+1)$*-ter Ordnung,* und werden mit $F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}$ und $F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}$ bzw. mit $F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}$, $F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}$, $F_{\nu_1 \ldots \nu_m 3}, \ldots$ bezeichnet. Jede bei der Herstellung von F benutzte Urspecies erscheint in dieser Weise als eine *konstruktive Unterspecies endlicher Ordnung* von F (obgleich es natürlich möglich ist, dass diese Ordnung für passend gewählte Urspecies von F unbeschränkt wächst). Um dies einzusehen, braucht man nur die *induktive Methode* anzuwenden, d.h. zu beachten, dass F mittels einer endlichen Zahl von erzeugenden Operationen konstruiert ist, und dass die fragliche Eigenschaft, wenn sie für ξ_1 und ξ_2 bewiesen ist, ebenfalls für $\xi_1 + \xi_2$ gilt, und wenn sie für jedes ξ_ν bewiesen ist, ebenfalls für $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu$ gilt.

1. Es sei

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2};$$

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} = \sum_{n=1}^{r_1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1};$$

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} = \sum_{n=1}^{r_2} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2};$$

alsdann ist

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{n=1}^{r_1-1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + (F^{(r_1)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + F'_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}) + \sum_{n=2}^{r_2} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r_1+r_2-1} F^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}.$$

2. Es sei

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2};$$

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} = \sum_{n=1}^{r} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1};$$

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2};$$

alsdann ist

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{n=1}^{r-1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + (F^{(r)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + F'_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}) + \sum_{n=2}^{\infty} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}.$$

[[170]]

3. Es sei

$$F_{\nu_1..\nu_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu_1..\nu_m\nu};$$

$$F_{\nu_1..\nu_m\nu} = \sum_{n=1}^{r_\nu} F^{(n)}_{\nu_1..\nu_m\nu} \; (\nu = 1, \ldots p);$$

alsdann ist

$$F_{\nu_1..\nu_m} = \sum_{n=1}^{r_1-1} F^{(n)}_{\nu_1..\nu_m1} + (F^{(r_1)}_{\nu_1..\nu_m1} + F'_{\nu_1..\nu_m2}) + \sum_{n=2}^{r_2-1} F^{(n)}_{\nu_1..\nu_m2} +$$

$$+ (F^{(r_2)}_{\nu_1..\nu_m2} + F'_{\nu_1..\nu_m3}) + \ldots + (F^{(r_{p-1})}_{\nu_1..\nu_m,\,p-1} +$$

$$+ F'_{\nu_1..\nu_mp}) + \sum_{n=2}^{r_p-1} F^{(n)}_{\nu_1..\nu_mp} + (F^{(r_p)}_{\nu_1....\nu_mp} + \sum_{\nu=p+1}^{\infty} F_{\nu_1....\nu_m\nu}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r_1+..+r_p-p+1} F^{(k)}_{\nu_1..\nu_m}.$$

4. Es sei

$$F_{\nu_1..\nu_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu_1..\nu_m\nu};$$

$$F_{\nu_1..\nu_m\nu} = \sum_{n=1}^{r_\nu} F^{(n)}_{\nu_1..\nu_m\nu};$$

alsdann ist

$$F_{\nu_1..\nu_m} = \sum_{n=1}^{r_1-1} F^{(n)}_{\nu_1..\nu_m1} + \sum_{h=2}^{\infty} [(F^{(r_{h-1})}_{\nu_1..\nu_m,\,h-1} + F'_{\nu_1..\nu_mh}) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{r_h-1} F^{(n)}_{\nu_1..\nu_mh}] = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}_{\nu_1..\nu_m}.$$

Um eine wohlgeordnete Species F als Summe von einer endlichen Zahl oder einer Fundamentalreihe von wohlgeordneten Species $F^{(n)}$, welche *keine* konstruktiven Unterspecies von F sind, darzustellen, ist der einzige Weg, dass man gewisse konstruktive Unterspecies σ beliebiger Ordnung von F in eine endliche oder abzählbar unendliche Summe von Teilspecies ${}_\sigma\tau_\nu$ zerlegt, deren jede entweder eine konstruktive Unterspecies erster Ordnung van σ ist, oder durch Assoziation von solchen entsteht; die erste konstruktive Unterspecies erster Ordnung von σ, welche zu ${}_\sigma\tau_{\nu+1}$ gehört, werde als ν^{te} *Schnittspecies* von σ bezeichnet; die auf Grund der Rangordnung in F geordnete Species von allen in F vorhandenen Schnittspecies muss entweder endlich gewählt sein, oder eine solche Fundamentalreihe bilden, dass vor einer willkürlichen konstruktiven Unterspecies von F nur eine bestimmte endliche Zahl von Schnittspecies liegt.

Alsdann kann man auf Grund der obigen Formeln 1—4 die Zerlegungen der σ auf diejenigen konstruktiven Unterspecies von F übertragen, welche die σ als Unterspecies enthalten, und in dieser Weise fortfahrend, schliesslich eine Zerlegung von F in eine Summe von $F^{(n)}$, welche *keine* konstruktiven Unterspecies von F sind, und *Unterspecies* von F genannt werden, erlangen. Indem wir denselben Prozess auf die $F^{(n)}$ anwenden und in dieser Weise beliebig fortfahren, gelangen wir zu mannigfachen auf Grund der beiden erzeugenden Operationen möglichen *neuen Erzeugungsarten* von F.

Wenn F, F' und F'' wohlgeordnete Species sind, und $F = F' + F''$, so heisst F' ein *Anfangssegment* oder ein *Abschnitt* von F, F'' ein *Endsegment* oder ein *Rest* von F. Wir schreiben auch: $F'' = F - F'$ und nennen F'' die *Differenz* von F und F'. Wenn F einen Abschnitt $i(F)$ mit einem einzigen Element besitzt, so heisst sie eine *kondensierte* wohlgeordnete Species, und $h(F) = F - i(F)$ wird der *Hauptrest* von F genannt. Ein Abschnitt von F, dem ein wenigstens ein Element besitzender Rest entspricht, heisst ein *echter Abschnitt* von F; der zugehörige Rest ein *echter Rest*.

Aus der Definition der wohlgeordneten Species folgt, dass *die Summe einer endlichen Zahl oder einer Fundamentalreihe von wohlgeordneten Ordinalzahlen wieder eine wohlgeordnete Ordinalzahl ist.* Weil, wie man leicht einsieht, das Produkt von zwei elementefremden wohlgeordneten Species F_1 und F_2 wieder eine wohlgeordnete Species $F_1 . F_2$ ist (aus F_2 wird nämlich eine mit $F_1 . F_2$ ähnliche Species erhalten, indem man die Elemente von F_2 durch mit F_1 ähnliche Species ersetzt, sodass mit der Erzeugung von F_2 eine Erzeugung von $F_1 . F_2$ parallel läuft), so haben wir weiter, dass *das Produkt einer endlichen Zahl von wohlgeordneten Ordinalzahlen* $\beta_1, \beta_2, .. \beta_n$ *wieder eine wohlgeordnete Ordinalzahl* $\beta_1 . \beta_2 ... \beta_n$ *ist.* Weil mit einer neuen Erzeugungsart eines willkürlichen β_ν eine neue Erzeugungsart von $\beta_1 . \beta_2 ... \beta_n$ parallel läuft, so liefern verschiedene Erzeugungsarten der β_ν gleiche Ordinalzahlen $\beta_1 . \beta_2 ... \beta_n$.

Sei α eine kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl, β eine willkürliche wohlgeordnete Ordinalzahl. Alsdann wird die *Potenz* α^β, in welcher α das *Argument*, β der *Exponent* heisst, auf Grund der folgenden Festsetzungen definiert:

[[172]]

$$\alpha^0 = 1; \qquad \alpha^1 = \alpha;$$

wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, so ist

$$\alpha^\beta = \alpha^{\beta_1}.\ \alpha^{\beta_2} = \alpha^{\beta_1} + \alpha^{\beta_1}.\ h(\alpha^{\beta_2});$$

wenn $\beta = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, so ist

$$\alpha^\beta = \alpha^{\beta_1} + \alpha^{\beta_1}.h(\alpha^{\beta_2}) + \alpha^{\beta_1+\beta_2}.h(\alpha^{\beta_3}) + \alpha^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}.h(\alpha^{\beta_4}) + \ldots$$

Aus diesen Festsetzungen folgt, dass α^β wiederum eine kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl ist.

Es sei

$$\beta_{\nu_1..\nu_m} = \beta_{\nu_1..\nu_m 1} + \beta_{\nu_1..\nu_m 2}$$

auf Grund der ersten erzeugenden Operation, und

$$\beta_{\nu_1..\nu_m 1} = \beta'_{\nu_1..\nu_m 1} + \beta''_{\nu_1..\nu_m 1},$$

und es sei die Formel

$$\alpha^{\beta_{\nu_1..\nu_m 1}} = \alpha^{\beta'_{\nu_1..\nu_m 1}}.\ \alpha^{\beta''_{\nu_1..\nu_m 1}}$$

bewiesen. Alsdann ist

$$\beta_{\nu_1..\nu_m} = \beta'_{\nu_1..\nu_m 1} + (\beta''_{\nu_1..\nu_m 1} + \beta_{\nu_1..\nu_m 2}) = \beta'_{\nu_1..\nu_m} + \beta''_{\nu_1..\nu_m},$$

und wir haben

$$\alpha^{\beta_{\nu_1..\nu_m}} = \alpha^{\beta_{\nu_1..\nu_m 1}}.\ \alpha^{\beta_{\nu_1..\nu_m 2}} = \alpha^{\beta'_{\nu_1..\nu_m 1}}.\ \alpha^{\beta''_{\nu_1..\nu_m 1}}.\ \alpha^{\beta_{\nu_1..\nu_m 2}} =$$
$$= \alpha^{\beta'_{\nu_1..\nu_m 1}}.\ (\alpha^{\beta''_{\nu_1..\nu_m 1}}.\ \alpha^{\beta_{\nu_1..\nu_m 2}}) = \alpha^{\beta'_{\nu_1...\nu_m}}.\ \alpha^{\beta''_{\nu_1...\nu_m}}.$$

Es sei

$$\beta_{\nu_1..\nu_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu_1..\nu_m \nu}$$

auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und

$$\beta_{\nu_1..\nu_m p} = \beta'_{\nu_1..\nu_m p} + \beta''_{\nu_1..\nu_m p},$$

und es sei die Formel

$$\alpha^{\beta_{\nu_1..\nu_m p}} = \alpha^{\beta'_{\nu_1..\nu_m p}}.\ \alpha^{\beta''_{\nu_1..\nu_m p}}$$

bewiesen. Alsdann ist

$$\beta_{\nu_1..\nu_m} = (\sum_{\nu=1}^{p-1} \beta_{\nu_1..\nu_m \nu} + \beta'_{\nu_1..\nu_m p}) + (\beta''_{\nu_1..\nu_m p} + \sum_{\nu=p+1}^{\infty} \beta_{\nu_1..\nu_m \nu}) =$$
$$= \beta'_{\nu_1..\nu_m} + \beta''_{\nu_1..\nu_m},$$

⟦173⟧

und wir haben

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m}} = \alpha^{\sum\limits_{\nu=1}^{p-1} \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu}} \,.\, \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m p}} \,.\, \alpha^{\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m p}} \,.\, \alpha^{\sum\limits_{\nu=p+1}^{\infty} \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu}} =$$

$$= \left(\alpha^{\sum\limits_{\nu=1}^{p-1} \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu}} \,.\, \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m p}}\right) \left(\alpha^{\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m p}} \,.\, \alpha^{\sum\limits_{\nu=p+1}^{\infty} \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu}}\right) =$$

$$= \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m}} \,.\, \alpha^{\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m}}.$$

Indem wir in dieser Weise hinreichend oft zu einer konstruktiven Unterzahl geringerer Ordnung von β übergehen, beweisen wir auf Grund des vorstehenden allgemein den Satz, dass *für* $\beta = \beta' + \beta''$, $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'} . \alpha^{\beta''}$, *auch wenn* β' *und* β'' *keine konstruktiven Unterzahlen von* β *sind.*

Es sei

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu}$$

auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu} = \sum_{n=1}^{r_\nu} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu};$$

mithin einerseits

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{r_\nu} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu} = \sum_{h=1}^{\infty} {}_1\beta^{(h)}_{\nu_1 \ldots \nu_m},$$

andererseits

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{n=1}^{r_1 - 1} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \sum_{s=2}^{\infty} \Big[\big(\beta^{(r_s - 1)}_{\nu_1 \ldots \nu_m,\, s-1} + \beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m s}\big) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{r_s - 1} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m s}\Big] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}.$$

Alsdann ist

$$\alpha^{\sum\limits_{h=1}^{\infty} {}_1\beta^{(h)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}}$$

auf Grund des eben bewiesenen Satzes gleich

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m}},$$

und auf Grund der Definition des Potenzbegriffes gleich

[[174]]

$$\alpha^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}}.$$

Mithin ist auch

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m}} = \alpha^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}} = \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m}} + \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m}} . h\,(\alpha^{\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m}}) +$$

$$+ \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m} + \beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m}} . h\,(\alpha^{\beta'''_{\nu_1 \ldots \nu_m}}) + \ldots .$$

Es sei

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}$$

auf Grund der ersten erzeugenden Operation, weiter

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} = \sum_{n=1}^{r} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}, \text{ und } \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2},$$

und es sei die Formel

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}} = \alpha^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}}$$

bewiesen. Alsdann ist

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{n=1}^{r-1} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + (\beta^{(r)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}) + \sum_{n=2}^{\infty} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m},$$

und wir haben

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m}} = \alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} . \alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}} = \alpha^{\sum\limits_{n=1}^{r} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} . \alpha^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}} =$$

$$= \alpha^{\sum\limits_{n=1}^{r} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}} =$$

(auf Grund der Definition des Potenzbegriffes)

$$= \alpha^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}}.$$

Indem wir nun anfangen mit der Herstellung der *letzten konstruktiven Unterzahl* höchster Ordnung von β mittels der zweiten erzeugenden Operation, und sodann mittels der ersten erzeugenden

Operation hinreichend oft zu einer letzten konstruktiven Unterzahl geringerer Ordnung von β heraufsteigen, beweisen wir auf Grund des vorstehenden allgemein den Satz, dass *für* $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}$, $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'} + \alpha^{\beta'}.\, h(\alpha^{\beta''}) + \alpha^{\beta'+\beta''}.\, h(\alpha^{\beta'''}) + \ldots$, *auch wenn die* $\beta^{(n)}$ *keine konstruktiven Unterzahlen von* β *sind.*

Aus den beiden zuletzt bewiesenen Sätzen folgt weiter, dass die Konstruktion von α^β *auf Grund von verschiedenen Erzeugungsarten von* β zu gleichen wohlgeordneten Ordinalzahlen führt. Weil verschiedene Erzeugungsarten der Faktoren eines Produktes gleiche Ordinalzahlen für das Produkt liefern, so führt auch die Konstruktion von α^β *auf Grund von verschiedenen Erzeugungsarten von* α zu gleichen wohlgeordneten Ordinalzahlen.

Mittels der induktiven Methode beweisen wir noch den Satz:

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}.$$

Es sei nämlich $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, und es seien die Formeln

$$(\alpha^\beta)^{\gamma_1} = \alpha^{\beta\gamma_1} \text{ und } (\alpha^\beta)^{\gamma_2} = \alpha^{\beta\gamma_2}$$

bewiesen. Alsdann ist

$$\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^{\beta\gamma_1+\beta\gamma_2} = \alpha^{\beta\gamma_1}.\, \alpha^{\beta\gamma_2} = (\alpha^\beta)^{\gamma_1}.\, (\alpha^\beta)^{\gamma_2} = (\alpha^\beta)^{\gamma_1+\gamma_2} = (\alpha^\beta)^\gamma.$$

Es sei weiter $\gamma = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und es seien die Formeln

$$(\alpha^\beta)^{\gamma_\nu} = \alpha^{\beta\gamma_\nu},$$

mithin auch die Formeln

$$(\alpha^\beta)^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu} = \alpha^{\beta \sum\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu}$$

bewiesen. Alsdann ist

$$\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta\gamma_\nu} = \alpha^{\beta\gamma_1} + \alpha^{\beta\gamma_1}.\, h(\alpha^{\beta\gamma_2}) + \alpha^{\beta\gamma_1+\beta\gamma_2}.\, h(\alpha^{\beta\gamma_3}) + \ldots =$$

$$= (\alpha^\beta)^{\gamma_1} + (\alpha^\beta)^{\gamma_1}.\, h[(\alpha^\beta)^{\gamma_2}] + (\alpha^\beta)^{\gamma_1+\gamma_2}.\, h[(\alpha^\beta)^{\gamma_3}] + \ldots =$$

$$= (\alpha^\beta)^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu} = (\alpha^\beta)^\gamma.$$

[[176]]

Mittels der induktiven Methode beweisen wir leicht folgende Sätze:

1. *Ein Gesetz, welches in einer wohlgeordneten Species F eine konstruktive Unterspecies F' bestimmt, und jeder schon bestimmten konstruktiven Unterspecies $F^{(\nu)}$ entweder die Hemmung des Prozesses, oder eine in F vor $F^{(\nu)}$ liegende konstruktive Unterspecies $F^{(\nu+1)}$ zuordnet, bestimmt sicher eine endliche Zahl n und eine zugehörige konstruktive Unterspecies $F^{(n)}$, welcher es die Hemmung des Prozesses zuordnet.* Insbesondere gilt diese Eigenschaft, wenn jedes $F^{(\nu)}$ ein *Element* von F ist, und hieraus folgern wir unmittelbar die Unmöglichkeit, jedem Elemente von F unter Erhaltung der ordnenden Relationen ein verschiedenes Element eines echten Abschnittes F_1 von F zuzuordnen.

2. *Jede wohlgeordnete Species ist zählbar.* Mithin ist die Species derjenigen Ziffernkomplexe, welche als Indizeskomplex eines als konstruktive Unterspecies aufgefassten Elementes auftreten, eine *Menge*, sodass *zu jeder wohlgeordneten Species eine zählbare geordnete Menge von endlichen Ziffernkomplexen gehört, welche die Eigenschaft besitzt, dass jedes Gesetz, welches in ihr einen Ziffernkomplex z' bestimmt, und jedem schon bestimmten Ziffernkomplex $z^{(\nu)}$ entweder die Hemmung des Prozesses, oder einen vor $z^{(\nu)}$ liegenden Ziffernkomplex $z^{(\nu+1)}$ zuordnet, sicher eine endliche Zahl n und einen zugehörigen Ziffernkomplex $z^{(n)}$, dem die Hemmung des Prozesses zugeordnet ist, bestimmt.*

Wenn die wohlgeordnete Species F' einem echten Abschnitt der wohlgeordneten Species F'' ähnlich ist, so schreiben wir $F' < F''$ oder $F'' > F'$, und sagen, dass F'' *grösser* ist als F', und dass F' *kleiner* ist als F''. Schreiben wir noch $F' = F''$, wenn F' und F'' ähnlich sind, und $F' \leq F''$ oder $F'' \geq F'$, wenn F' einem Abschnitte von F'' ähnlich ist, so gelangen wir, indem wir die Folgerung des obigen Satzes 1 berücksichtigen, sofort zu den folgenden Eigenschaften:

1. *Die Relationen $F' < F''$ und $F' \geq F''$ schliessen einander aus.*
2. *Aus $F' < F''$ und $F'' \leq F'''$ ebenso wie aus $F' \leq F''$ und $F'' < F'''$ folgt $F' < F'''$.*
3. *Aus $F' = F''$ und $F'' = F'''$ folgt $F' = F'''$.*
4. *Aus $F' \leq F''$ und $F'' \leq F'''$ folgt $F' \leq F'''$.*
5. *Die Relationen $F' \leq F''$ und $G' < G''$ schliessen zusammen die Relation $F' + G' \geq F'' + G''$ aus.*
6. *Die Relationen $F' \leq F''$ und $G' \leq G''$ schliessen zusammen die Relation $F' + G' > F'' + G''$ aus.*

Wenn jedem Elemente der wohlgeordneten Species F' ein verschiedenes Element eines echten Abschnittes der wohlgeordneten

Species F' unter Erhaltung der ordnenden Relationen zugeordnet ist, so schreiben wir $F' \dot{<} F''$ oder $F'' \dot{>} F'$, und sagen, dass F'' *unbestimmt grösser* ist als F' und dass F' *unbestimmt kleiner* ist als F''. Schreiben wir noch $F' \dot{<} F''$ oder $F'' \dot{\geq} F'$, wenn jedem Elemente von F' unter Erhaltung der ordnenden Relationen ein verschiedenes Element von F'' zugeordnet ist, so gelten folgende Eigenschaften:

1. *Die Relationen* $F' \dot{<} F''$ *und* $F' \geq F''$ *schliessen einander aus.*
2. *Aus* $F' \dot{<} F''$ *und* $F'' \dot{\leq} F'''$ *sowie aus* $F' \dot{<} F''$ *und* $F'' \dot{<} F'''$ *folgt* $F' \dot{<} F'''$.
3. *Aus* $F' \dot{<} F''$ *und* $F'' \dot{<} F'''$ *folgt* $F' \dot{\leq} F'''$.
4. *Aus* $F' \dot{<} F''$ *und* $G' \dot{<} G''$ *folgt* $F' + G' \dot{<} F'' + G''$.
5. *Aus* $F' \dot{<} F''$ *und* $G' \dot{\leq} G''$ *folgt* $F' + G' \dot{<} F'' + G''$.

Unter den *wohlgeordneten Ordinalzahlen des ersten Bereichs* verstehen wir die endlichen Ordinalzahlen, inklusive 0. Weil jeder Abschnitt einer endlichen Ordinalzahl wiederum eine endliche Ordinalzahl ist, so *ist der erste Bereich wohlgeordneter Ordinalzahlen ununterbrochen*, d.h. es kann keine wohlgeordnete Ordinalzahl existieren, welche nicht zum ersten Bereich gehört, und kleiner ist als eine gewisse wohlgeordnete Ordinalzahl des ersten Bereichs.

Eine wohlgeordnete Species α heisst *vollständig induziert in bezug auf den ersten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in der Form $a_\alpha + r_\alpha$ darstellen lässt, wo r_α eine Ordinalzahl des ersten Bereichs besitzt, während a_α entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente eine Ordinalzahl $\geq \omega$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation $F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierbar ist*, d.h. *erstens* entweder eine Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, für welche $a_{F_{\nu_1}}, a_{F_{\nu_2}}, \ldots$ *nicht* fortfallen, oder ein solches n_1 angegeben werden kann, dass a_{F_m} für $m > n_1$ fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle entweder eine Fundamentalreihe $m_1, m_2, \ldots$ $(m_\nu > n_1)$ existiert, für welche $r_{F_{m_1}}, r_{F_{m_2}}, \ldots$ *nicht* fortfallen, oder ein solches n_2 angegeben werden kann, dass r_{F_m} für $m > n_2$ fortfällt.

Eine wohlgeordnete Species α heisst *unbestimmt induziert in bezug auf den ersten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in der Form $u_\alpha + o_\alpha$ darstellen lässt, wo o_α eine Ordinalzahl des ersten Bereichs besitzt, während u_α entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente

[[178]]

eine Ordinalzahl $\geq \omega$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation $F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den ersten Bereich unbestimmt induzierbar ist*, d.h. *entweder* eine Fundamentalreihe $p_1, p_2, \ldots$ existiert, für welche $F_{p_1}, F_{p_2}, \ldots$ *nicht* fortfallen, *oder* ein solches n angegeben werden kann, dass F_m für $m > n$ fortfällt.

Bezeichnen wir diejenigen wohlgeordneten Species welche bei Zulassung als Urspecies nur von Species mit einem einzigen Element, nicht von Species ohne Element, erzeugt werden, als *vollständige* wohlgeordnete Species, und ihre Ordinalzahlen als *vollständige* wohlgeordnete Ordinalzahlen, so *sind alle vollständigen wohlgeordneten Species unbestimmt induziert in bezug auf den ersten Bereich.*

Die vollständigen wohlgeordneten Species $\varkappa$ sind offenbar entweder endlich oder abzählbar unendlich und besitzen folgende weitere Eigenschaften:

1. *Es existiert entweder ein letztes Element, oder eine solche steigende Fundamentalreihe von Elementen $e_1, e_2, \ldots$, dass zu jedem Elemente e von $\varkappa$ ein nach e liegendes Element e_ν bestimmt werden kann.*

2. *Jeder echte Rest von $\varkappa$ besitzt ein erstes Element.*

3. *Jedes Element e von $\varkappa$, mit Ausnahme des ersten, besitzt entweder ein unmittelbar vorhergehendes Element oder ist Grenzelement einer steigenden Fundamentalreihe von Elementen von $\varkappa$.* Schreiben wir nämlich $\varkappa = a_e + r_e$, wo r_e derjenige Rest von $\varkappa$ ist, welcher e als erstes Element besitzt, so ist Satz 3 eine unmittelbare Folge des auf a_e angewandten Satzes 1.

4. *Jedes Element von $\varkappa$, mit Ausnahme des letzten, falls ein solches existiert, besitzt ein nächstfolgendes Element,* wie am einfachsten mittels der induktiven Methode eingesehen wird.

5. *Die Species derjenigen wohlgeordneten Ordinalzahlen, welche kleiner sind als eine gegebene vollständige wohlgeordnete Ordinalzahl β, besitzt (wenn sie nach der Grösse ihrer Elemente geordnet und 0 mit hinzugerechnet wird) die Ordinalzahl β.* Zwischen den Elementen und den echten Abschnitten einer wohlgeordneten Species der Ordinalzahl β besteht nämlich eine solche eineindeutige Beziehung, dass, wenn das Element e_2 *nach* dem Elemente e_1 liegt, der Abschnitt a_{e_2} *grösser* als der Abschnitt a_{e_1} ist.

Die wohlgeordneten Ordinalzahlen des ersten Bereichs mit Ausnahme von 0 sind offenbar kondensiert und vollständig, und je zwei von ihnen sind *vergleichbar*, d.h. sie sind entweder einander gleich oder eine von ihnen ist grösser als die andere. Die Summe

[[179]]

oder das Produkt einer endlichen Zahl von Ordinalzahlen des ersten Bereichs ist wiederum eine Ordinalzahl des ersten Bereichs.

Die Summe einer Fundamentalreihe von Ordinalzahlen des ersten Bereichs ist, wenn sie in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierbar ist, entweder ω *oder wiederum eine Ordinalzahl des ersten Bereichs.*

Unter einer *wohlgeordneten Ordinalzahl des zweiten Bereichs vom Grade Null* verstehen wir eine wohlgeordnete Ordinalzahl des ersten Bereichs. Unter einer *wohlgeordneten Ordinalzahl des zweiten Bereichs vom Grade* p (p eine nicht verschwindende endliche Ordinalzahl) verstehen wir eine Zahl

$$\omega^{p_1}.\, a_1 + \omega^{p_2}.\, a_2 + \ldots + \omega^{p_n}.\, a_n,$$

wo jedes p_ν eine wohlgeordnete Ordinalzahl des ersten Bereichs, jedes a_ν eine nicht verschwindende endliche Ordinalzahl und p der Maximalwert der p_ν ist. Alsdann dürfen wir annehmen, dass jedes $p_{\nu+1} < p_\nu$ ist. Die wohlgeordneten Ordinalzahlen des zweiten Bereichs mit Ausnahme von 0 sind offenbar kondensiert und vollständig, und je zwei von ihnen sind vergleichbar. Die Summe und das Produkt einer endlichen Zahl von Ordinalzahlen des zweiten Bereichs sind wiederum Ordinalzahlen des zweiten Bereichs.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordinalzahlen des zweiten Bereichs heisst *vollständig induzierbar in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn eine solche steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, dass die Grade von $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ entweder beständig wachsen, oder einander gleich sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Grad von β_m kleiner ist als der Grad von $\beta_{\nu_{n+1}}$, und, falls die β_{ν_n} vom Grade 0 sind, die Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_1+1}, \beta_{\nu_1+2}, \ldots$ in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierbar ist.

Die Summe einer in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierbaren Fundamentalreihe von Ordinalzahlen des zweiten Bereichs ist entweder ω^ω *oder wiederum eine Ordinalzahl des zweiten Bereichs.*

Jeder Abschnitt einer Ordinalzahl des zweiten Bereichs ist wiederum eine Ordinalzahl des zweiten Bereichs. Man sieht dies am einfachsten ein, wenn man den Satz für die Ordinalzahlen $(n-1)$-ten Grades als bewiesen annimmt, und hieraus seine Gültigkeit für die Ordinalzahlen n-ten Grades folgert. *Mithin ist der zweite ebenso wie der erste Bereich wohlgeordneter Ordinalzahlen ununterbrochen.*

Eine wohlgeordnete Species α heisst *vollständig induziert in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in die Form $a_\alpha' + r_\alpha'$ bringen

[[180]]

lässt, wo r'_α eine Ordinalzahl des zweiten Bereichs besitzt, während a_α' entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente eine Ordinalzahl $\geq \omega^\omega$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation $F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierbar* ist, d.h. *erstens* entweder eine solche Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, dass $a_{F'_{\nu_1}}, a_{F'_{\nu_2}}, \ldots$ *nicht* fortfallen, oder ein solches n angegeben werden kann, dass $a_{F'_m}$ für $m > n$ fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe der Ordinalzahlen von $r_{F'_{n+1}}, r_{F'_{n+2}}, \ldots$ vollständig induzierbar in bezug auf den zweiten Bereich ist.

Unter einer *unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahl des zweiten Bereichs vom Grade Null* verstehen wir eine wohlgeordnete Ordinalzahl des ersten Bereichs. Unter einer *unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahl des zweiten Bereichs vom Grade p* (p eine nicht verschwindende endliche Ordinalzahl) verstehen wir eine wohlgeordnete Ordinalzahl $\gtrdot \omega^p$, aber $\lessdot \omega^{p+1}$. Die Summe von zwei unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahlen β_1 vom Grade p_1 und β_2 vom Grade p_2 ist offenbar eine unbestimmte wohlgeordnete Ordinalzahl, deren Grad gleich der grösseren der Zahlen p_1 und p_2 ist.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von unbestimmten Ordinalzahlen des zweiten Bereichs heisst *unbestimmt induzierbar in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn *entweder* jedes β_ν vom Grade 0, und die betreffende Fundamentalreihe in bezug auf den ersten Bereich unbestimmt induzierbar ist, *oder* ein solches n angegeben werden kann, dass für $m > n$ der Grad von β_m kleiner als der Grad von β_n ist, *oder aber* eine Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ mit nicht verschwindenden Graden existiert, für welche die Grade entweder unbeschränkt wachsen, oder einander gleich sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Grad von β_m kleiner ist als der Grad von $\beta_{\nu_{n+1}}$. *Die Summe einer in bezug auf den zweiten Bereich unbestimmt induzierbaren Fundamentalreihe von unbestimmten Ordinalzahlen des zweiten Bereichs ist entweder $\gtrdot \omega^\omega$ oder wiederum eine unbestimmte Ordinalzahl des zweiten Bereichs.* [[6]]

Eine wohlgeordnete Species α heisst *unbestimmt induziert in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in die Form $u_\alpha' + o_\alpha'$ bringen lässt, wo o_α' eine unbestimmte Ordinalzahl des zweiten Bereichs besitzt, während u_α' entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente eine Ordinalzahl $\gtrdot \omega^\omega$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation

$F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den zweiten Bereich unbestimmt induzierbar* ist, d.h. *entweder* eine Fundamentalreihe $o_{F'_{\nu_1}}, o_{F'_{\nu_2}}, \ldots$, deren Ordinalzahlen unbeschränkt wachsende Grade besitzen oder eine Fundamentalreihe $u_{F'_{\nu_1}}, u_{F'_{\nu_2}}, \ldots$, welche *nicht* fortfallen, existiert, *oder* ein solches n angegeben werden kann, dass $u_{F'_m}$ für $m > n$ fortfällt, während die Fundamentalreihe der Ordinalzahlen von $o_{F'_{n+1}}, o_{F'_{n+2}}, \ldots$ unbestimmt induzierbar in bezug auf den zweiten Bereich ist.

Unter den *wohlgeordneten Ordinalzahlen des dritten Bereichs vom Range Null* verstehen wir die wohlgeordneten Ordinalzahlen des zweiten Bereichs. Unter den *wohlgeordneten Ordinalzahlen des dritten Bereichs vom Range 1* verstehen wir die Zahlen

$$\omega^{p_1}.\ a_1 + \ldots + \omega^{p_n}.\ a_n,$$

wo n und die a_ν nicht verschwindende endliche Ordinalzahlen sind und die p_ν wohlgeordnete Ordinalzahlen des zweiten Bereichs, deren Maximalgrad nicht verschwindet. Unter den *wohlgeordneten Ordinalzahlen des dritten Bereichs vom Range $n+1$* verstehen wir die Zahlen

$$\omega^{p_1}.\ a_1 + \ldots + \omega^{p_n}.\ a_n,$$

wo n und die a_ν nicht verschwindende endliche Ordinalzahlen sind und die p_ν wohlgeordnete Ordinalzahlen des dritten Bereichs vom Maximalrange n. Die wohlgeordneten Ordinalzahlen des dritten Bereichs mit Ausnahme von 0 sind offenbar kondensiert und vollständig. Weiter gelten folgende Eigenschaften, von denen die zweite eine unmittelbare Folge der ersten ist:

1. *Je zwei Ordinalzahlen des dritten Bereichs sind vergleichbar.*
2. *Bei der Ordinalzahl* $\omega^{p_1}.\ a_1 + \ldots + \omega^{p_n}.\ a_n$ *darf man annehmen, dass jedes* $p_{\nu+1} < p_\nu$ *ist.*

Diese Sätze begründen wir, indem wir den ersten für Zahlen, deren Rang $< n$ ist, mithin den zweiten für Zahlen, deren Rang $\leq n$ ist, als bewiesen annehmen, und hieraus die Gültigkeit des ersten für Zahlen, deren Rang $< n$ ist, folgern.

Nennen wir nämlich den h-ten Exponent p_h das $(2h-1)$-te Bestimmungselement und den h-ten Koeffizient a_h das $2h$-te Bestimmungselement, so wird unter den angegebenen Voraussetzungen von zwei Zahlen, deren Rang $< n$ ist, diejenige als die grössere erkannt, von der das erste Bestimmungselement, das nicht für beide Zahlen gleich ist, das grössere ist.

Sei r_n eine Zahl n-ten Ranges. Es gibt eine solche Zahl $(n-1)$-ten

[[182]]

Ranges s_{n-1}, dass $\omega^{s_{n-1}} \leq r_n < \omega^{s_{n-1}+1}$; ebenso eine solche Zahl $(n-2)$-ten Ranges s_{n-2}, dass $\omega^{s_{n-2}} \leq s_{n-1}$ und $s_{n-1} + 1 < \omega^{s_{n-2}+1}$, mithin

$$\omega^{\omega^{s_{n-2}}} \leq r_n < \omega^{\omega^{s_{n-2}+1}}$$

Indem wir in dieser Weise fortfahren, gelangen wir schliesslich zur Formel

$$\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^m . a}}}}} \ (n+1 \text{ Buchstaben } \omega) \leq r_n < \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^m . (a+1)}}}}} \ (n+1 \text{ Buchstaben } \omega),$$

wo m und a gewisse nicht verschwindende endliche Ordinalzahlen, welche der *Grad* und der *Koeffizient* von r_n genannt werden, sind.

Die Summe einer endlichen Zahl von Ordinalzahlen des dritten Bereichs ist wiederum eine Ordinalzahl des dritten Bereichs.

Es seien $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} . a_\nu$ und ω^p, wo weder a_1 noch p verschwindet, zwei Zahlen des dritten Bereichs. Indem wir an der Hand der Konstruktion von p mittels der beiden erzeugenden Operationen die induktive Methode anwenden, zeigen wir, dass ω^p sich mittels der beiden erzeugenden Operationen aus *Urzahlen* ω herstellen lässt. An der Hand *dieser* Konstruktion von ω^p können wir nun die Formel

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} . a_\nu\right] . \omega^p = \omega^{p_1} . \omega^p$$

mittels der induktiven Methode beweisen, und zwar auf Grund der Tatsachen, dass

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} . a_\nu\right] . \omega = \omega^{p_1} . \omega;$$

dass für $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, aus

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} . a_\nu\right] . \beta_1 = \omega^{p_1} . \beta_1 \quad \text{und} \quad \left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} . a_\nu\right] . \beta_2 = \omega^{p_1} . \beta_2$$

folgt

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} . a_\nu\right] . \beta = \omega^{p_1} . \beta;$$

und dass für $\beta = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \beta_\mu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, aus

tion, aus [[183]]

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\Big].\ \beta_\mu = \omega^{p_1}.\ \beta_\mu \text{ für jedes } \mu$$

folgt

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a^\nu\Big].\ \beta = \omega^{p_1}.\ \beta.$$

Es seien $\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu$ und $\sum_{\mu=1}^{m} \omega^{q_\mu}.\ b_\mu + b_{m+1}$, wo a_1, b_{m+1} und die q_μ nicht verschwinden, zwei Zahlen des dritten Bereichs. Alsdann ist das Produkt

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\Big].\ \Big[\sum_{\mu=1}^{m} \omega^{q_\mu}.\ b_\mu + b_{m+1}\Big] = \sum_{\mu=1}^{m} \Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\Big].\ \omega^{q_\mu}.\ b_\mu +$$

$$+ \Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\Big].\ b_{m+1} = \sum_{\mu=1}^{m} \omega^{p_1+q_\mu}.\ b_\mu + \omega^{p_1}.\ (a_1\, b_{m+1}) + \sum_{\nu=2}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a^\nu.$$

Mithin ist das Produkt von zwei, also auch einer beliebigen endlichen Zahl von Ordinalzahlen des dritten Bereichs wiederum eine Ordinalzahl des dritten Bereichs.

Insbesondere ist, wenn p_1 nicht verschwindet, $\Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\Big]^2$ eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1 \cdot 2}.\ a_1$; $\Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\Big]^3$ eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1 \cdot 3}.\ a_1$; $\Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a^\nu\Big]^m$ (m eine beliebige nicht verschwindende endliche Ordinalzahl) eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1 \cdot m}.\ a_1$. Mithin ist $\Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\Big]^\omega = \sum_{\mu=1}^{\infty}\Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a^\nu\Big]^\mu = \sum_{\mu=1}^{\infty} \omega^{p_1 \cdot \mu}.\ a_1 = \omega^{p_1 \cdot \omega}.$

Auf Grund dieser Eigenschaft können wir, wenn ω^p, wo p nicht verschwindet, eine Zahl des dritten Bereichs ist, an der Hand einer Konstruktion von ω^p mittels der beiden erzeugenden Operationen aus *Urzahlen* ω, die Formel

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\Big]^{\omega^p} = \omega^{p_1 \cdot \omega^p}$$

mittels der induktiven Methode herleiten.

Sei nun $\sum_{\mu=1}^{m} \omega^{q_\mu}.\ b_\mu + b_{m+1}$, wo die q_μ und b_{m+1} nicht verschwinden, eine weitere Zahl des dritten Bereichs, so ist

[184]

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\, a_\nu\right]^{\sum\limits_{\mu=1}^{m} \omega^{q_\mu}.\, b_\mu + b_{m+1}} = \left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\, a_\nu\right]^{\sum\limits_{\mu=1}^{m} \omega^{q_\mu}.\, b_\mu} . \left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\, a_\nu\right]^{b_{m+1}} =$$

$$= \omega^{p_1 . \sum\limits_{\mu=1}^{m} \omega^{q_\mu}.\, b_\mu} . \left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\, a_\nu\right]^{b_{m+1}},$$

welcher Ausdruck als Produkt von zwei Zahlen des dritten Bereichs wiederum eine Zahl des dritten Bereichs ist.

Also gilt folgender Satz:

Eine Potenz, deren Argument und Exponent zum dritten Bereich gehören, ist ebenfalls eine Zahl des dritten Bereichs.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordinalzahlen des dritten Bereichs vom Range 0 heisst *vollständig induzierbar in bezug auf den 0-ten Rang,* wenn sie vollständig induzierbar in bezug auf den zweiten Bereich ist.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordinalzahlen des dritten Bereichs, deren Maximalrang p nicht übersteigt, heisst *vollständig induzierbar in bezug auf den p-ten Rang*, wenn *erstens* eine solche steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, dass die Exponenten $\beta'_{\nu_1}, \beta'_{\nu_2}, \ldots$ der Anfangsglieder von $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ entweder beständig wachsen, oder einander gleich sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} die Exponenten von β_m kleiner sind als $\beta'_{\nu_{n+1}}$, *zweitens* im ersteren Falle die Fundamentalreihe $\beta_1'', \beta_2'', \ldots$ (in der jedes $\beta_n'' = \beta'_{\nu_n} - \beta'_{\nu_{n-1}}$, während $\beta_1'' = \beta'_{\nu_1}$) vollständig induzierbar in bezug auf den (p—1)-ten Rang ist, *drittens,* falls alle β_{ν_n} zum ersten Bereich gehören, die Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_1+1}, \ldots$ vollständig induzierbar in bezug auf den ersten Bereich ist.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordinalzahlen des dritten Bereichs heisst *vollständig induzierbar in bezug auf den dritten Bereich,* wenn *erstens* eine solche steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, dass die Ränge von $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ entweder beständig wachsen oder alle gleich p sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Rang von β_m kleiner ist als der Rang von $\beta_{\nu_{n+1}}$, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ vollständig induzierbar in bezug auf den p-ten Rang ist.

Die Summe einer in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierbaren Fundamentalreihe von Ordinalzahlen des dritten Bereichs ist entweder $\varepsilon = \omega + \omega^\omega + \omega^{\omega^\omega} + \ldots$, oder wiederum eine Ordinalzahl des dritten Bereichs.

Jeder Abschnitt einer Ordinalzahl β des dritten Bereichs ist wiederum

[[185]]

eine Ordinalzahl des dritten Bereichs (Gilt nämlich innerhalb des dritten Bereichs der Satz für β_1 und β_2, so gilt er, falls $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, ebenfalls für β; und gilt der Satz für jedes β_ν, so gilt er, falls $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, ebenfalls für β). *Mithin ist der dritte ebenso wie der erste und zweite Bereich wohlgeordneter Ordinalzahlen ununterbrochen.*

Eine wohlgeordnete Species α heisst *vollständig induziert in bezug auf den dritten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in die Form $a_\alpha'' + r_\alpha''$ bringen lässt, wo r_α'' eine Ordinalzahl des dritten Bereichs besitzt, während a''_α entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente eine Ordinalzahl $\geq \varepsilon$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation $F = F_1 + F_2 + \dots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierbar* ist, d.h. *erstens* entweder eine solche Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \dots$ existiert, dass $a''_{F_{\nu_1}}, a''_{F_{\nu_2}}, \dots$ *nicht* fortfallen, oder ein solches n angegeben werden kann, dass a''_{F_m} für $m > n$ fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe der Ordinalzahlen von $r''_{F_{n+1}}, r''_{F_{n+2}}, \dots$ vollständig induzierbar in bezug auf den dritten Bereich ist.

Unter einer *unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahl des dritten Bereichs vom Range Null und vom Grade m* verstehen wir eine unbestimmte wohlgeordnete Ordinalzahl des zweiten Bereichs vom Grade m. Unter einer *unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahl des dritten Bereichs vom Range p und vom Grade m* (p und m nicht verschwindende endliche Ordinalzahlen) verstehen wir eine wohlgeordnete Ordinalzahl, welche gleichzeitig

$$\geq \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{m}}}}} \quad (p+1 \text{ Buchstaben } \omega) \text{ und } < \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{m+1}}}}} \quad (p+1 \text{ Buchstaben } \omega)$$

ist. Die Summe von zwei unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahlen β_1 (vom Range p_1 und vom Grade m_1) und β_2 (vom Range p_2 und vom Grade m_2) ist, wenn p_1 und p_2 nicht beide verschwinden, eine unbestimmte wohlgeordnete Ordinalzahl, deren Rang und Grad der grösseren der beiden Zahlen

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{m_1}}}}} \quad (p_1 + 1 \text{ Buchstaben } \omega) \text{ und } \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{m_2}}}}} \quad (p_2 + 1 \text{ Buchstaben } \omega)$$

zu entnehmen sind.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \dots$ von unbestimmten Ordinalzahlen des dritten Bereichs, welche alle den (nicht verschwindenden)

[[186]]

Rang p und den Grad m besitzen, heisst *unbestimmt induzierbar in bezug auf den dritten Bereich*, wenn *entweder* eine solche endliche Ordinalzahl h existiert, dass jedes β_ν

$$\dot{<} \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{m}\,.\,h}}}} \qquad (p+1 \text{ Buchstaben } \omega)$$

ist, *oder* eine solche Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ und eine solche Fundamentalreihe $h_1, h_2, \ldots$ von unbeschränkt wachsenden endlichen Ordinalzahlen definiert werden können, dass β_{ν_n} für jedes n

$$\dot{\geq} \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{m}\,.\,h_n}}}} \qquad (p+1 \text{ Buchstaben } \omega)$$

ist.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von unbestimmten Ordinalzahlen des dritten Bereichs (wo β_ν den Rang p_ν und den Grad m_ν besitzt) heisst *unbestimmt induzierbar in bezug auf den dritten Bereich*, wenn *entweder* jedes β_ν vom Range 0, und die betreffende Fundamentalreihe in bezug auf den zweiten Bereich unbestimmt induzierbar ist, *oder* ein solches n angegeben werden kann, dass für $m > n$ der Rang, oder bei gleichem Rang der Grad, von β_m kleiner als der Rang bzw. Grad von β_n ist, *oder aber* eine solche Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ mit nicht verschwindenden Rängen existiert, dass für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Rang oder bei gleichem Range der Grad von β_m kleiner ist als der Rang bzw. Grad von $\beta_{\nu_{n+1}}$, dass von den β_{ν_σ} entweder die Ränge unbeschränkt wachsen, oder die Ränge einander gleich sind und die Grade unbeschränkt wachsen, oder sowohl die Ränge wie die Grade einander gleich sind, und dass im letzten Falle die Fundamentalreihe der β_{ν_σ} unbestimmt induzierbar in bezug auf den dritten Bereich ist. *Die Summe einer in bezug auf den dritten Bereich unbestimmt induzierbaren Fundamentalreihe von unbestimmten Ordinalzahlen des dritten Bereichs ist entweder $\dot{\geq} \varepsilon$ oder wiederum eine unbestimmte Ordinalzahl des dritten* ⟦6⟧
Bereichs.

Eine wohlgeordnete Species α heisst *unbestimmt induziert in bezug auf den dritten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in die Form $u_\alpha'' + o_\alpha''$ bringen lässt, wo o_α'' eine unbestimmte Ordinalzahl des dritten Bereichs besitzt, während u_α'' entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente eine Ordinalzahl $\dot{\geq} \varepsilon$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation $F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den dritten Bereich unbestimmt induzierbar* ist, d.h. *entweder* eine Fundamentalreihe $o''_{F_{\nu_1}}, o''_{F_{\nu_2}}, \ldots$, deren Ordinalzahlen unbeschränkt

⟦187⟧

wachsende Ränge besitzen oder eine Fundamentalreihe $u''_{F_{\nu_1}}, u''_{F_{\nu_2}}, \ldots$, welche *nicht* fortfallen, existiert, *oder* ein solches n angegeben werden kann, dass u''_{F_m} für $m > n$ fortfällt, während die Fundamentalreihe der Ordinalzahlen von $o''_{F_{n+1}}, o''_{F_{n+2}}, \ldots$ unbestimmt induzierbar in bezug auf den dritten Bereich ist.

Im vorigen haben wir gesehen, wie zur endlichen Bezeichnung von wohlgeordneten Ordinalzahlen zweierlei Elementarsymbole benutzt werden, nämlich *Zahlsymbole*, welche je eine bestimmte wohlgeordnete Ordinalzahl repräsentieren, und *Verknüpfungssymbole*, welche je eine aus einer beliebig vorgegebenen endlichen Gruppe von wohlgeordneten Ordinalzahlen eine neue wohlgeordnete Ordinalzahl herleitende Methode repräsentieren. Zur Bezeichnung der Zahlen des ersten Bereichs genügten dabei das Zahlsymbol 1 und das Verknüpfungssymbol der Addition; zur Bezeichnung der Zahlen des zweiten Bereichs kamen das Zahlsymbol ω und das Verknüpfungssymbol der Multiplikation hinzu, während die weitere Hinzunahme des Verknüpfungssymbols der Potenzierung die Bezeichnung der Zahlen des dritten Bereichs erlaubte. Sodann eröffnete das Zahlsymbol ε die Möglichkeit der Bezeichnung auch über den dritten Bereich hinausgehender, jedoch unterhalb $\varepsilon_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\varepsilon}}}}$ (ν Buchstaben ε) liegender wohlgeordneter Ordinalzahlen. Indem wir auf den Aufbau systematischer Theorien von über den dritten Bereich hinausgehenden Zahlbereichen verzichten, beschränken wir uns nunmehr darauf, ein Beispiel eines Verknüpfungssymbols anzugeben, welches die Bezeichnung von Zahlen grösser als ε_1 erlaubt.

Wenn α eine kondensierte und β eine willkürliche wohlgeordnete Ordinalzahl ist, so definieren wir das Symbol $\{\alpha, \beta\}$ durch die folgenden Festsetzungen: $\{\alpha, 0\} = \alpha$; $\{\alpha, 1\} = \alpha^\alpha$; wenn $\{\alpha, \beta\}$ für jedes kondensierte α als kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl definiert ist, und überdies die Differenz $\{\alpha, \beta\} - \alpha$ existiert, so ist $\{\alpha, \beta + 1\} = \{\alpha, \beta\}^{\{\alpha, \beta\}} = \{\alpha, \beta\} + \{\alpha, \beta\}\, h\,[\{\alpha, \beta\}^{h\{\alpha, \beta\}}]$, sodass auch $\{\alpha, \beta + 1\}$ für jedes kondensierte α als kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl definiert ist, und überdies die Differenz $\{\alpha, \beta + 1\} - \alpha$ existiert; wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und sowohl $\{\alpha, \beta_1\}$ wie $\{\alpha, \beta_2\}$ für jedes kondensierte α als kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahlen definiert ist, und überdies die Differenzen $\{\alpha, \beta_1\} - \alpha$ und $\{\alpha, \beta_2\} - \alpha$ existieren, so ist $\{\alpha, \beta\} = \{\{\alpha, \beta_1\}, \beta_2\} = \{\alpha, \beta_1\} + [\{\{\alpha, \beta_1\}, \beta_2\} - - \{\alpha, \beta_1\}]$, sodass auch $\{\alpha, \beta\}$ für jedes kondensierte α als

[[188]]

kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl definiert ist, und überdies die Differenz $\{\alpha, \beta\} - \alpha$ existiert; wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und $\{\alpha, \beta_\nu\}$ für jedes ν und jedes kondensierte α als kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl definiert ist, und überdies die Differenz $\{\alpha, \beta_\nu\} - \alpha$ existiert, so ist $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta_1\} + [\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\} - \{\alpha, \beta_1\}] + [\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\} - \{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\}] + \ldots$, sodass auch $\{\alpha, \beta\}$ für jedes kondensierte α als kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl definiert ist, und überdies die Differenz $\{\alpha, \beta\} - \alpha$ existiert.

Auf Grund dieser Definition beweist man, in derselben Weise wie die analogen Eigenschaften der Potenz α^β, zunächst dass, für $\beta = \beta' + \beta''$, $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta'\} + [\{\{\alpha, \beta'\}, \beta''\} - \{\alpha, \beta'\}]$, auch wenn β' und β'' keine konstruktiven Unterzahlen von β sind, und sodann weiter dass, für $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}$, $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta'\} + [\{\alpha, (\beta' + \beta'')\} - \{\alpha, \beta'\}] + [\{\alpha, (\beta' + \beta'' + \beta''')\} - \{\alpha, (\beta' + \beta'')\}] + \ldots$, auch wenn die $\beta^{(n)}$ keine konstruktiven Unterzahlen von β sind, und hieraus folgert man wieder, dass die Konstruktion von $\{\alpha, \beta\}$ *auf Grund von verschiedenen Erzeugungsarten von* β zu gleichen wohlgeordneten Ordinalzahlen führt.

Auch zeigt man, mittels der induktiven Methode an der Hand der erzeugenden Operationen von β, leicht, dass für ein bestimmtes β und ein willkürliches kondensiertes α, die Konstruktion von $\{\alpha, \beta\}$ *auf Grund von verschiedenen Erzeugungsarten von* α zu gleichen wohlgeordneten Ordinalzahlen führt.

Wie weit man inzwischen die Einführung neuer Elementarsymbole zur Bezeichnung wohlgeordneter Ordinalzahlen auch fortsetzt, so lässt sich doch die Species der eingeführten Symbole in jedem Stadium als endlich betrachten, weil jede Definition einer Fundamentalreihe $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ von Symbolen auf die Definition eines *einzigen*, auf ein *beliebiges* Element von A, d.h. auf eine *beliebige endliche* Gruppe von Zahlen 1 bezogenen Symboles σ hinauskommt; diejenigen Zusammensetzungen der eingeführten Symbole, welche wohlgeordnete Ordinalzahlen darstellen, bilden mithin eine abzählbar unendliche Species, von der übrigens mehrere Elemente dieselbe Ordinalzahl repräsentieren können.

Hieraus folgern wir die Unmöglichkeit, ein System σ von Elementarsymbolen einzuführen, das die Darstellung *aller* wohlgeordneten Ordinalzahlen erlaubt. Sei nämlich β_ν die von der der endlichen Zahl ν entsprechenden Symbolzusammensetzung von σ dargestellte Ordi-

[189]

nalzahl. Weil die wohlgeordnete Ordinalzahl $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ für jedes ν unbestimmt grösser als β_ν ist, so kann sie mit keinem β_ν identisch sein, und deshalb nicht von einer Symbolzusammensetzung von σ dargestellt werden.

In genau derselben Weise zeigt man, dass die Species W der wohlgeordneten Ordinalzahlen ebenso wie die Species V der *vollständigen* wohlgeordneten Ordinalzahlen *nicht aufzählbar* ist. Weil wir andererseits jeder endlichen vollständigen wohlgeordneten Ordinalzahl den entsprechenden Ziffernkomplex der Folge ζ und jeder unendlichen vollständigen wohlgeordneten Ordinalzahl die Ziffer 1 zuordnen können, so besitzt die Kardinalzahl v von V die Eigenschaft, dass $v \overset{\cdots}{>} a$, aber a *nicht* $\overset{\cdots}{>} v$ ist. Mithin gilt die Formel $v \overset{\cdots}{>} a$, d.h. *V ist von grösserem Gewicht als A.*

Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Zweiter Teil:

THEORIE DER PUNKTMENGEN. 1919 A

[[1]]

1. *Die Grenzpunkte.*

§ 1 Für die folgenden Betrachtungen wird die Menge η_2 der Paare von (nicht notwendig verschiedenen) Elementen einer geordneten Menge der Ordinalzahl η als gegeben angenommen. Diese Menge η_2 werden wir des kürzeren Ausdrucks wegen durch die Menge derjenigen Punkte der Ebene, deren rechtwinklige Cartesische Koordinaten endliche Dualbrüche sind, repräsentieren. Dementsprechend wird unsere Terminologie öfters der Vorstellung der Ebene entnommen sein, obwohl sie sich begrifflich ausschliesslich auf die Menge η_2 bezieht. [[2]]

Unter einem *Quadrate* λ_ν verstehen wir das System der Eckpunkte eines die Vereinigung von vier (nach S. 8 des ersten Teiles definierten) Quadraten $\varkappa_{\nu+1}$ bildenden Quadrats. Die Species der Quadrate λ besitzt offenbar die Kardinalzahl a, und kann als eine Fundamentalreihe λ', λ'', λ''', ... geordnet werden. [[3]]

Unter einem *Punkte der Ebene* verstehen wir eine unbegrenzt fortgesetzte Folge von Quadraten λ, deren jedes im Innengebiete des nächstvorangehenden enhalten ist. [[4]]

Wenn zwei Punkte P_1 und P_2 die Eigenschaft besitzen, dass in jedem Quadrate von P_1 ein Quadrat von P_2 und in jedem Quadrate von P_2 ein Quadrat von P_1 enthalten ist, so sagen wir, dass P_1 und P_2 *zusammenfallen*. Eine Punktspecies, von der je zwei Punkte zusammenfallen, heisst eine *punktierte Species*.

Wenn das Quadrat q_1 des Punktes P_1 und das Quadrat q_2 des Punktes P_2 ausserhalb voneinander liegen, so heissen P_1 und P_2 *örtlich verschieden*. [[5]]

Eine Menge, von der jedes Element einen Punkt der Ebene darstellt, heisst eine *ebene Punktmenge*. Die Species der Punkte der Ebene ist offenbar eine ebene Punktmenge; ihre Kardinalzahl ist c. [[6]]

In derselben Weise, wie Punkte der Ebene und ebene Punkt-

G 1*

mengen, können *Punkte des n-dimensionalen Raumes* und *n-dimensionale Punktmengen* definiert werden.[1]) Weil dieselben aber im folgenden ausser Betracht bleiben, so werden wir einen Punkt der Ebene auch kurz als *Punkt* und eine ebene Punktmenge auch kurz als *Punktmenge* bezeichnen.

Wenn für jedes n nach jeder ungehemmten Folge von $n-1$ Wahlen die Species derjenigen Ziffernkomplexe, die, als n-ter Ziffernkomplex gewählt, *nicht* die Hemmung des Prozesses herbeiführen, entweder endlich oder abzählbar unendlich ist, so heisst die bezügliche Punktmenge *numeriert*.

Wenn für die Elemente der Species M die Eigenschaften α_1 und § 2
α_2 einander kontradiktorisch gegenüberstehen, d. h. wenn jede dieser
[[7]] beiden Eigenschaften mit der Ausschliessung a priori der anderen äquivalent ist, während die Species derjenigen Elemente von M, welche die Eigenschaft α_1 bzw. α_2 besitzen, mit M_1 bzw. M_2 bezeichnet wird, so sagen wir, dass *M sich kontradiktorisch spaltet in M_1 und M_2*, und nennen *M_1 und M_2 konjugierte Spaltungsspecies von M.*

Die Species M der unbegrenzten Wahlfolgen einer Menge spaltet sich kontradiktorisch in die Species M_1 derjenigen Wahlfolgen, bei denen von einer gewissen Wahl an jedesmal nur für einen einzigen Ziffernkomplex keine Hemmung des Prozesses stattfindet und die Species M_2 derjenigen Wahlfolgen, bei denen unendlich oft für wenigstens einen von dem gewählten verschiedenen Ziffernkomplex
[[8]] keine Hemmung des Prozesses stattfindet.

[[9]] Wenn die Species der ungehemmten endlichen Wahlfolgen von M in solcher Weise in die Species der M und M_1, nicht aber M_2, und die Species der M_2 angehörigen ungehemmten endlichen Wahlfolgen zerlegt ist, dass jede der Species M_1 und M_2 mit der Species der unbegrenzten Wahlfolgen einer Menge identisch ist, so sagen wir, dass M eine *innere Abbrechung erster Ordnung* zulässt und nennen M_1 die *innere Appendix* und M_2 die *innere Kohärenz* von M. In diesem Falle *setzt M sich auch aus M_1 und M_2 zusammen.*

[[10]] Sei M die Species der unbegrenzten Wahlfolgen einer Menge und β eine wohlgeordnete Ordinalzahl. Alsdann definieren wir die mit $M(\beta)$ zu bezeichnende *β-te innere Kohärenz*, die mit $(\beta)M$ zu bezeichnende *β-te innere Adhärenz* und die mit $[\beta]M$ zu bezeichnende

[1]) Die Bezeichnung „Punkt der geraden Linie", bzw. „Punkt des n dimensionalen Cartesischen Raumes" ist schon S. 10 des ersten Teiles einmal gebraucht worden, aber in einem von dem hier definierten verschiedenen Sinne.

β-te innere Appendix auf Grund der folgenden Festsetzungen: $M(0)$ ist identisch mit M; wenn $M(0)$ eine innere Abbrechung erster Ordnung zulässt, so ist $M(1)$ mit der innern Kohärenz von $M(0)$ identisch; wenn $M(\beta)$ eine innere Abbrechung erster Ordnung zulässt, so ist $(\beta)M$ mit der innern Appendix von $M(\beta)$ identisch; wenn eine willkürliche wohlgeordnete Ordinalzahl $< \beta$ mit $\bar{\beta}$ bezeichnet wird, so ist $[\beta]M$ mit der Vereinigung aller $(\bar{\beta})M$ identisch; wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, und M eine innere Abbrechung β_1-ter Ordnung und $M(\beta_1)$ eine innere Abbrechung β_2-ter Ordnung zulässt, so sagen wir, dass M eine innere Abbrechung β-ter Ordnung zulässt und bezeichnen $\{M(\beta_1)\}(\beta_2)$ mit $M(\beta)$; wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und $M(\beta_1 + \ldots + \beta_{\nu-1})$ für jedes ν eine innere Abbrechung β_ν-ter Ordnung zulässt in solcher Weise, dass die Species der ungehemmten endlichen Wahlfolgen von M in die Species der M und $[\beta_1]M$, nicht aber $M(\beta_1)$, die Species der $M(\beta_1)$ und $[\beta_2]\{M(\beta_1)\}$, nicht aber $M(\beta_1 + \beta_2)$, ... und die Species der $\mathfrak{D}\{M(\beta_1), M(\beta_1 + \beta_2), \ldots\}$ angehörigen ungehemmten endlichen Wahlfolgen zerlegt ist und $\mathfrak{D}\{M(\beta_1), M(\beta_1 + \beta_2), \ldots\}$ mit der Species der unbegrenzten Wahlfolgen einer Menge identisch ist, so sagen wir, dass M eine innere Abbrechung β-ter Ordnung zulässt und bezeichnen $\mathfrak{D}\{M(\beta_1), M(\beta_1 + \beta_2), \ldots\}$ mit $M(\beta)$. Diese Definitionen sind offenbar unabhängig von der Erzeugungsart von β. *Wenn M eine innere Abbrechung β-ter Ordnung zulässt, so setzt M sich aus $M(\beta)$ und $[\beta]M$ zusammen.*

§ 3 Wenn zwei Punktspecies Q und R die Eigenschaft besitzen, dass jeder Punkt von Q mit einem Punkte von R und jeder Punkt von R mit einem Punkte von Q zusammenfällt, so sagen wir, dass Q und R *zusammenfallen.*

Wenn wir eine Punktspecies, in welcher nur Quadrate, deren Seitenlänge unterhalb eines gewissen Maximums bleibt, auftreten, als *uniform* bezeichnen, so leuchtet sofort ein, dass *jede Punktspecies mit einer uniformen Punktspecies und jede Punktmenge mit einer uniformen Punktmenge zusammenfällt.* [[11]]

Wenn wir weiter eine Punktspecies, in welcher für jedes ν die ν-ten Quadrate von allen Punkten die gleiche Seitenlänge besitzen, als *gleichmässig* bezeichnen, so gilt der Satz, dass *jede uniforme Punktspecies mit einer gleichmässigen Punktspecies und jede uniforme Punktmenge mit einer gleichmässigen Punktmenge zusammenfällt.* Sei nämlich m_ν die maximale Seitenlänge der von den ν-ten Wahlen der [[12]]

uniformen Punktspecies Q erzeugten Quadrate und $\nu_1, \nu_2, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe, dass $m_{\nu_n} < \frac{1}{2^{3n}}$. Alsdann erhalten wir eine mit Q zusammenfallende gleichmässige Punktspecies R, indem wir zunächst in Q nur die ν_1-ten, ν_2-ten usw. Quadrate beibehalten, und sodann jedes ν_n-te Quadrat q von Q durch ein solches Quadrat λ_{3n-1} ersetzen, dessen Mittelpunkt zunächst dem Mittelpunkte von q möglichst nahe liegt, und im übrigen möglichst grosse Koordinaten
[[13]] besitzt.

Wenn je zwei verschiedene Wahlfolgen einer Punktmenge zu örtlich verschiedenen Punkten führen, so heisst die Punktmenge *örtlich individualisiert*.

Wir sagen, dass zwei Punktspecies Q und R *örtlich übereinstimmen*, wenn weder ein von jedem Punkte von R örtlich verschiedener Punkt von Q, noch ein von jedem Punkte von Q örtlich verschiedener Punkt von R existieren kann.

Zwei Punktspecies Q und R heissen *örtlich kongruent*, wenn weder ein Punkt von Q, dessen Zusammenfallung mit einem Punkte von R unmöglich wäre, noch ein Punkt von R, dessen Zusammenfallung mit einem Punkte von Q unmöglich wäre, existieren kann.

Wenn kein mit einem Punkte der Punktspecies S zusammenfallender Punkt der Punktspecies R existieren kann und $\mathfrak{S}(R, S)$ mit der Punktspecies Q örtlich kongruent ist, so sagen wir, dass Q sich aus R und S *örtlich zusammensetzt* und nennen R und S *örtliche Komplementärspecies* voneinander in Q.

Die Species der mit Punkten der Punktspecies Q zusammenfallenden Punkte heisst die *ergänzende Punktspecies* oder kurz die *Ergänzung* von Q. Eine mit ihrer Ergänzung identische Punktspecies heisst eine *ganze Punktspecies*.

Wenn ein Quadrat des Punktes P im Innengebiete des Quadrates § 4
q enthalten ist, so werden wir sagen, dass *P in q enthalten* ist.

Wenn alle Punkte der Punktspecies Q in einem bestimmten Quadrate q enthalten sind, so nennen wir Q eine *geschränkte* Punktspecies. Die im folgenden in Betracht kommenden Punktspecies und Punktmengen werden ohne ausdrückliche Erwähnung des Gegenteils als geschränkt vorausgesetzt werden.

Der Punkt P heisst ein *Limespunkt* der Punktspecies Q, wenn in jedem Quadrate von P ein Quadrat eines Punktes von Q enthalten ist.

Der Punkt P heisst ein *Grenzpunkt* der Punktspecies Q, wenn in jedem Quadrate von P zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate von Punkten von Q enthalten sind.

[[194]]

Ein Punkt von Q, der gleichzeitig Grenzpunkt von Q ist, heisst ein *Kondensationspunkt* von Q.

Wenn das Quadrat q des Punktes P kein Quadrat eines Punktes der Punktspecies Q in seinem Innern enthalten kann, so heisst P ein von Q *freier* Punkt.

Wenn das Quadrat q des Punktes P die Eigenschaft besitzt, dass je zwei in q enthaltene Quadrate von Punkten von Q *nicht* ausserhalb voneinander liegen, so heisst P ein von Q *unbegrenzter* Punkt.

Ein zu Q gehöriger, aber von Q unbegrenzter Punkt heisst ein *isolierter* Punkt von Q.

§ 5 *Wenn jeder Punkt der Ebene von der geschränkten Punktmenge π unbegrenzt ist, so fällt π mit einer solchen Punktmenge zusammen, zu deren Kardinalzahl h eine endliche Kardinalzahl $k > h$ gefunden werden kann.* Sei nämlich K das Quadrat, in dem die Punktmenge π, welche wir als gleichmässig voraussetzen dürfen, enthalten ist. Wir betrachten die Menge ρ derjenigen Punkte, deren erstes Quadrat q_1 ein willkürliches von K ganz oder teilweise überdecktes Quadrat λ_1, deren zweites Quadrat q_2 ein willkürliches im Innern von q_1 enthaltenes Quadrat λ_3, deren drittes Quadrat q_3 ein willkürliches in q_2 enthaltenes Quadrat λ_5 usw. ist. Wenn jeder Punkt von ρ von π nnbegrenzt ist, so muss man bei der Erzeugung der Punkte von ρ nach einer endlichen Wahlfolge M fester Kardinalzahl m die Sicherheit erlangt haben, dass nach einer weiteren endlichen Wahlfolge der von M abhängigen Kardinalzahl m_1 ein Quadrat q erzeugt wird, innerhalb dessen je zwei Qnadrate von Punkten von π *nicht* ausserhalb voneinander liegen. Mithin liegen, wenn wir das Maximum von m_1 mit m' und $m + m'$ mit m'' bezeichnen, je zwei im selben von K ganz oder teilweise überdeckten Quadrate $\lambda_{2m''-1}$ enthaltene Quadrate von Punkten von π *nicht* ausserhalb voneinander. Wir bestimmen nun eine solche Zahl ν, dass die Seitenlänge der von den ν-ten Wahlen von π erzeugten Quadrate $q'_\nu \leq \frac{1}{2^{2m''+1}}$ ist, lassen von den Quadraten q'_ν, (welche offenbar von einer zählbaren Wahlspecies erzeugt werden), diejenigen fort, welche nicht ausserhalb aller vorhergehenden liegen, und weisen jedem der mit q''_ν zu bezeichnenden übrigen zu: *erstens* ein solches Quadrat $\lambda_{2m''-1}$, dass zunächst die Mittelpunkte der beiden Quadrate einander möglichst nahe liegen, während im übrigen der Mittelpunkt des letzteren Quadrates möglichst grosse Koordinaten besitzt, so dass je zwei verschiedenen Quadraten q''_ν zwei verschiedene Quadrate $\lambda_{2m''-1}$ zngewiesen werden; *zweitens* denjenigen Punkt P'' von π, der erhalten wird, indem wir nach [[14]]

[[195]]

⟦15⟧ der q''_ν erzeugenden Wahl immer wieder den erstmöglichen Ziffernkomplex von ζ wählen. Die Kardinalzahl der Punkte P'' bezeichnen wir mit h, die endliche Kardinalzahl der von K ganz oder teilweise überdeckten Quadrate $\lambda_{2m''-1}$ mit k. Alsdann ist $h \leq k$ und jeder Punkt von π fällt mit einem Punkte P'' zusammen, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Dieselbe Schlussweise führt mit einer geringen Abänderung zu folgendem Resultat: *Wenn jeder Punkt der Ebene von der geschränkten Punktspecies Q unbegrenzt ist, so fällt Q mit einer solchen in eine Species der Kardinalzahl h von punktierten Species zerlegten Punktspecies zusammen, dass eine endliche Kardinalzahl $k \geq h$ gefunden werden kann.*

Es existiert kein Grund zu behaupten, dass diese Eigenschaft auch für andere geschränkte Punktmengen bzw. Punktspecies, für welche kein Grenzpunkt existieren kann, ihre Gültigkeit behalte. Ebenso wäre die Aussage, dass jede unendliche geschränkte Punktspecies notwendig einen Grenzpunkt besitzen müsse, vollständig unberechtigt.

Eine Punktspecies Q, von der jeder Punkt Kondensationspunkt § 6
ist, heisst *in sich dicht.*

Wenn jeder Limespunkt der Punktspecies Q mit einem Punkte
⟦15a⟧ von Q zusammenfällt, so heisst Q *abgeschlossen.* Der Durchschnitt einer Species von abgeschlossenen ganzen Species ist wiederum eine abgeschlossene ganze Species.

Eine Punktspecies, welche sowohl in sich dicht wie abgeschlossen ist, heisst *perfekt.*

Eine Punktspecies Q heisst im Bereiche β *überall dicht*, wenn in jedem von β vollständig überdeckten Quadrate λ ein Punkt von Q enthalten ist.

Eine Punktspecies Q heisst im Bereiche β *nirgends dicht*, wenn innerhalb jedes von β vollständig überdeckten Quadrates λ ein weiteres Quadrat λ liegt, in dem kein Punkt von Q enthalten sein kann.

Die (offenbar ganze) Species der Limespunkte der Punktspecies Q heisst die *Abschliessung* von Q. Jeder Limespunkt der Abschliessung von Q gehört zur Abschliessung von Q. Eine abgeschlossene Punktspecies lässt sich auch als eine Punktspecies, deren Abschliessung und Ergänzung identisch sind, definieren.

Die (offenbar ganze) Species der Grenzpunkte der Punktspecies Q heisst die *Ableitung* von Q. Jeder Grenzpunkt der Abschliessung von Q, sowie jeder Limespunkt der Ableitung von Q ist ein Punkt

⟦196⟧

der Ableitung von Q. Auf Grund der letzteren Eigenschaft ist die Ableitung einer Punktspecies eine abgeschlossene Punktspecies und lässt eine perfekte Punktspecies sich auch als eine Punktspecies, deren Ableitung und Ergänzung identisch sind, definieren.

Die Species der Kondensationspunkte der Punktspecies Q heisst die *Kohärenz* von Q. Eine in sich dichte Punktspecies lässt sich auch als eine mit ihrer Kohärenz identische Punktspecies definieren. Eine in sich dichte Punktspecies ist in ihrer Ableitung als Teilspecies enthalten, und diese Ableitung ist perfekt.

Die Species der isolierten Punkte der Punktspecies Q heisst die *Appendix* von Q. Die Punktspecies Q spaltet sich kontradiktorisch [[16]]
in ihre Appendix und ihre Kohärenz. Die Abschliessung der Punktspecies Q spaltet sich kontradiktorisch in die Ableitung von Q und die Ergänzung der Appendix von Q.

§ 7 Sei β eine wohlgeordnete Ordinalzahl. Wir definieren die mit [[17]]
$Q(\beta)$ zu bezeichnende *β-te Kohärenz* der Punktspecies Q auf Grund der folgenden Festsetzungen: $Q(0)$ ist identisch mit Q; $Q(1)$ ist identisch mit der Kohärenz von Q; wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, so ist $Q(\beta) = \{Q(\beta_1)\}(\beta_2)$; wenn $\beta = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, so ist $Q(\beta) = \mathfrak{D}\{Q(\beta_1), Q(\beta_1 + \beta_2), Q(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \dots\}$. Diese Definition ist offenbar unabhängig von der Erzeugungsart von β. Weiter verstehen wir unter der *β-ten Adhärenz* $(\beta)Q$ von Q die Appendix von $Q(\beta)$ und wenn eine willkürliche wohlgeordnete Ordinalzahl $< \beta$ mit $\bar{\beta}$ bezeichnet wird, so verstehen wir unter der *β-ten Appendix* $[\beta]Q$ von Q die Vereinigung aller $(\bar{\beta})Q$.

Mittels der induktiven Methode beweisen wir leicht die beiden folgenden Sätze:

Für jedes β spaltet Q sich kontradiktorisch in $Q(\beta)$ und $[\beta]Q$. Sei nämlich $\beta = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation; wir nehmen an, dass für jede Punktspecies Q und für jedes ν bewiesen ist, dass Q sich in $Q(\beta_\nu)$ und $[\beta_\nu]Q$, mithin auch in $\mathfrak{S}\{[\beta_1]Q, [\beta_2]\{Q(\beta_1)\}, \dots, [\beta_\nu]\{Q(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{\nu-1})\}\}$ und $Q(\beta_1 + \dots + \beta_\nu)$ kontradiktorisch spaltet; um sodann weiter einzusehen, dass Q sich ebenfalls in $Q(\beta)$ und $\mathfrak{S}\{[\beta_1]Q, [\beta_2]\{Q(\beta_1)\}, [\beta_3]\{Q(\beta_1 + \beta_2)\}, \dots\}$ kontradiktorisch spaltet, bemerken wir, dass zu jedem Punkte P von Q, für den die Zugehörigkeit zu $Q(\beta)$ a priori ausgeschlossen ist, ein solches ν angegeben werden kann, dass die Zugehörigkeit zu $Q(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu)$ ebenfalls für P a priori ausgeschlossen ist, so dass P notwendig zu einer der Punktspecies $[\beta_1]Q, [\beta_2]\{Q(\beta_1)\}, \ldots, [\beta_\nu]\{Q(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{\nu-1})\}$ gehören muss.

Für jedes β ist eine willkürliche in Q als Teilspecies enthaltene in sich dichte Punktspecies ebenfalls in $Q(\beta)$ als Teilspecies enthalten.

Wenn eine solche wohlgeordnete Ordinalzahl β'_Q bekannt ist, dass $Q(\beta'_Q)$ in sich dicht ist, so heisst $Q(\beta'_Q)$ die *finale Kohärenz* von Q.

Sei β eine wohlgeordnete Ordinalzahl. Wir definieren die mit $Q^{(\beta)}$ zu bezeichnende *β-te Ableitung* der Punktspecies Q auf Grund der folgenden Festsetzungen: $Q^{(0)}$ ist identisch mit der Abschliessung von Q; $Q^{(1)}$ ist identisch mit der Ableitung der Abschliessung von Q, d. h. mit der Ableitung von Q; wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, so ist $Q^{(\beta)} = \{Q^{(\beta_1)}\}^{(\beta_2)}$; wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, so ist $Q^{(\beta)} = \mathfrak{D}\{Q^{(\beta_1)}, Q^{(\beta_1+\beta_2)}, Q^{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}, \ldots\}$. Diese Definition ist offenbar unabhängig von der Erzeugungsart von β. Jedes $Q^{(\beta)}$ ist eine abgeschlossene ganze Punktspecies. Für jede kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl β ist $Q^{(\beta)}$ mit $Q^{(1)}(\beta-1)$ identisch.

Die induktive Methode liefert unmittelbar den Beweis der beiden folgenden Sätze:

Für jedes β ist $Q(\beta)$ als Teilspecies in $Q^{(\beta)}$ enthalten.

Für jedes β ist eine willkürliche in Q als Teilspecies enthaltene in sich dichte Punktspecies ebenfalls in $Q^{(\beta)}$ als Teilspecies enthalten.

Wenn eine solche wohlgeordnete Ordinalzahl β''_Q bekannt ist, dass $Q^{(\beta''_Q)}$ perfekt ist, so heisst $Q^{(\beta''_Q)}$ die *finale Ableitung* von Q.

Wenn eine Punktspecies sowohl eine finale Kohärenz, wie eine finale Ableitung besitzt, so ist erstere in letzterer als Teilspecies enthalten, wie unmittelbar daraus folgt, dass die finale Kohärenz in sich dicht ist.

Wir sagen, dass die Punktmenge π eine *Abbrechung erster Ordnung* zulässt, wenn die zu π gehörige Wahlmenge in solcher Weise § 8
in eine Menge von Punkten von $(0)\pi$, nicht aber Punkten von $\pi(1)$ angehörigen Wahlen, eine Menge von Punkten von $\pi(1)$ angehörigen Wahlen und eine *überflüssige* Wahlmenge ρ (dies soll besagen, dass jeder Punkt von π mit einem von nicht zu ρ gehörenden Wahlen erzeugten Punkte von π zusammenfällt, während jede auf eine Wahl von ρ folgende Wahl ebenfalls zu ρ gehört) zerlegt ist, dass $(0)\pi$ mit einer von der ersten Wahlmenge erzeugten Punktmenge $(0)\bar{\pi}$

[[198]]

oder $[1]\overline{\pi}$, und $\pi(1)$ mit einer von der zweiten Wahlmenge erzeugten Punktmenge $\overline{\pi}(1)$ zusammenfällt.

Wenn die Punktmenge π eine Abbrechung erster Ordnung zulässt, so setzt sie sich aus $(0)\overline{\pi}$ und $\overline{\pi}(1)$ örtlich zusammen. Wenn wir nämlich die von den *nicht* zu ρ gehörigen Wahlen von π erzeugte Punktmenge mit τ bezeichnen, so fällt jeder Punkt von π mit einem Punkte von τ zusammen und muss deshalb, wenn er mit keinem Punkte von $(0)\overline{\pi}$ zusammenfallen kann, mit einem Punkte von $\overline{\pi}(1)$ zusammenfallen. Mithin kann kein Punkt von π existieren, für den sowohl mit einem Punkte von $(0)\overline{\pi}$ wie mit einem Punkte von $\overline{\pi}(1)$ Zusammenfallung unmöglich wäre, d. h. für den Zusammenfallung mit einem Punkte von $\mathfrak{S}\{(0)\overline{\pi}, \overline{\pi}(1)\}$ unmöglich wäre.

Weiter sagen wir, dass *jede Punktmenge eine Abbrechung 0-ter Ordnung zulässt* und wenn β eine wohlgeordnete Ordinalzahl ist, so sagen wir, dass die Punktmenge π eine *Abbrechung β-ter Ordnung* zulässt: *erstens* wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und π eine Abbrechung β_1-ter Ordnung und $\overline{\pi}(\beta_1)$ eine Abbrechung β_2-ter Ordnung zulässt, in welchem Falle wir $\{\overline{\pi}(\beta_1)\}(\beta_2)$ mit $\overline{\pi}(\beta)$ und $\mathfrak{S}\{[\beta_1]\overline{\pi}, [\beta_2]\{\overline{\pi}(\beta_1)\}\}$ mit $[\beta]\overline{\pi}$ bezeichnen; *zweitens* wenn $\beta = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und $\overline{\pi}(\beta_1 + \ldots + \beta_{\nu-1})$ für jedes ν eine Abbrechung β_ν-ter Ordnung zulässt in solcher Weise dass die zu π gehörige Wahlmenge in eine Menge von Punkten von π und von $[\beta_1]\pi$, nicht aber Punkten von $\pi(\beta_1)$ angehörigen Wahlen, eine Menge von Punkten von $\pi(\beta_1)$ und von $[\beta_2]\{\pi(\beta_1)\}$, nicht aber Punkten von $\pi(\beta_1 + \beta_2)$ angehörigen Wahlen, ..., eine Menge von Punkten von $\pi(\beta)$ angehörigen Wahlen und eine überflüssige Wahlmenge zerlegt ist, während $[\beta_1]\pi$ mit einer von der ersten Wahlmenge erzeugten Punktmenge $[\beta_1]\overline{\pi}$, $[\beta_2]\{\pi(\beta_1)\}$ mit einer von der zweiten Wahlmenge erzeugten Punktmenge $[\beta_2]\{\overline{\pi(\beta_1)}\}, \ldots$, und $\pi(\beta)$ mit einer von der vorletzten Wahlmenge erzeugten Punktmenge $\overline{\pi}(\beta)$ zusammenfällt, in welchem Falle wir $\mathfrak{S}\{[\beta_1]\overline{\pi}, [\beta_1 + \beta_2]\overline{\pi}, \ldots\}$ mit $[\beta]\overline{\pi}$ bezeichnen.

Wenn die Punktmenge π eine Abbrechung β-ter Ordnung zulässt, so setzt sie sich aus $[\beta]\overline{\pi}$ und $\overline{\pi}(\beta)$ örtlich zusammen.

Wenn π eine Abbrechung β'_π-ter Ordnung zulässt und $\overline{\pi}(\beta'_\pi)$ in sich dicht ist, so sagen wir, dass π eine *vollständige Abbrechung* zulässt.

Wenn die Punktmenge π eine vollständige Abbrechung zulässt und die wohlgeordnete Ordinalzahl β kondensiert ist, so ist jeder Punkt von $(\beta)\pi$ Grenzpunkt von $(0)\pi$, wie in folgender Weise mittels der

[199]

induktiven Methode eingesehen wird: Jeder Punkt P von $(1)\pi$ ist Grenzpunkt von π, also von $\mathfrak{S}\{(0)\overline{\pi}, \overline{\pi}(1)\}$, besitzt aber ein Quadrat q, innerhalb dessen kein Paar ausserhalb voneinander liegender Quadrate von $\overline{\pi}(1)$ liegen kann, so dass innerhalb jedes innerhalb q liegenden Quadrates von P zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate von $(0)\overline{\pi}$ liegen und demzufolge P Grenzpunkt von $(0)\overline{\pi}$ ist. Es sei nun $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und es sei der fragliche Satz sowohl für β_1 und β_2 wie für jedes β_1 und jedes β_2 bewiesen. Alsdann ist jeder Punkt von $(\beta)\pi = (0)\{\pi(\beta)\} = (0)\{\{\pi(\beta_1)\}\beta_2\} = (\beta_2)\{\pi(\beta_1)\}$ Grenzpunkt von $(0)\{\pi(\beta_1)\} = (\beta_1)\pi$ und jeder Punkt von $(\beta_1)\pi$ Grenzpunkt von $(0)\pi$, mithin jeder Punkt von $(\beta)\pi$ Grenzpunkt der Ableitung von $(0)\pi$ und demzufolge Punkt der Ableitung von $(0)\pi$. Es sei weiter $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und es sei der fragliche Satz sowohl für jedes β_ν wie für jedes $\overline{\beta}_\nu$ bewiesen. Alsdann ist jeder Punkt P von $(\beta)\pi$ Grenzpunkt von π, also von $\mathfrak{S}\{[\beta]\pi, \overline{\pi}(\beta)\}$, besitzt aber ein Quadrat q, innerhalb dessen kein Paar ausserhalb voneinander liegende Quadrate von $\overline{\pi}(\beta)$ liegen kann, so dass innerhalb jedes innerhalb q liegenden Quadrates von P zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate von $[\beta]\overline{\pi}$, mithin zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate von Punkten der Ableitung von $(0)\pi$ liegen und demzufolge P Grenzpunkt von $(0)\pi$ ist.

Wenn die Punktmenge π eine Abbrechung erster Ordnung zulässt, so fällt $(0)\pi$ mit einer zählbaren, örtlich individualisierten Punktmenge zusammen. Sei nämlich ρ_1 die zählbare Menge der zu $(0)\overline{\pi}$, nicht aber zu $\overline{\pi}(1)$ gehörigen ungehemmten endlichen Wahlfolgen, π_1 die ebenfalls zählbare Teilmenge von $(0)\overline{\pi}$, welche entsteht, wenn jedes Element von ρ_1 derweise fortgesetzt wird, dass immer wieder der erstmögliche für $(0)\overline{\pi}$ zugelassene Ziffernkomplex von ζ gewählt wird. Alsdann fällt jeder Punkt von $(0)\pi$ mit einem Punkte von π_1 zusammen. Weiter besitzt ein willkürlicher Punkt P von π_1 ein Quadrat q, innerhalb dessen nicht zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate von π_1 liegen können, so dass ein willkürlicher Punkt P' von π_1, der auf Grund der Zählbarkeit von π_1 auf P folgt, ein solches Quadrat q' besitzt, dass P' mit P zusammenfällt oder von P örtlich verschieden ist, je nachdem q' innerhalb oder nicht innerhalb q liegt. Indem wir mithin die Punktmenge π_1 zunächst nach ihrer Zählbarkeit ordnen und sodann von ihr jeden mit einem vorangehenden zusammenfallenden Punkt fortlassen, erhalten wir eine örtlich individualisierte und noch immer zählbare Punktmenge π_2, mit der π_1 und demzufolge auch $(0)\pi$ zusammenfällt.

[[200]]

Wenn die Punktmenge π eine vollständige Abbrechung zulässt und sich in solcher Weise örtlich zusammensetzt aus einer in sich dichten Punktmenge ρ und einer von ρ freien und keine in sich dichte Teilmenge enthaltenden Punktmenge σ, dass die zu π gehörige Wahlmenge in eine Menge von zu σ, nicht aber zu ρ gehörigen Wahlen, eine Menge von zu ρ gehörigen Wahlen und eine überflüssige Wahlmenge zerlegt ist, so fallen einerseits ρ und $\pi(\beta'_\pi)$, andererseits σ und $[\beta'_\pi]\pi$ zusammen. Wenn wir nämlich die von den *nicht* überflüssigen Wahlen von π erzeugte Punktmenge mit τ bezeichnen, so fällt jeder Punkt von π mit einem Punkte von τ zusammen; wenn nun ein Punkt von $\pi(\beta'_\pi)$ mit einem von einer *nicht* Punkten von ρ angehörigen Wahl von τ erzeugten Punkte zusammenfiele, so würde ein solches Quadrat q von $\pi(\beta'_\pi)$ existieren, innerhalb dessen kein Quadrat von ρ läge, so dass die in sich dichte in q enthaltene Teilmenge von $\pi(\beta'_\pi)$ der Voraussetzung entgegen mit einer Teilmenge von σ zusammenfiele. Weiter ist jeder Punkt von $[\beta'_\pi]\pi$ frei von $\pi(\beta'_\pi)$, mithin von ρ, so dass für hinreichend grosses ν die ν-te Wahl des mit diesem Punkte zusammenfallenden Punktes von τ nicht zu ρ gehören kann und demzufolge zu σ gehören muss. Hieraus folgt, dass jeder Punkt von $[\beta'_\pi]\pi$ mit einem Punkte von σ zusammenfällt und in derselben Weise zeigen wir, dass jeder Punkt von σ mit einem Punkte von $[\beta'_\pi]\pi$ zusammenfällt.

Wenn die Punktmenge π eine vollständige Abbrechung zulässt und sich dadurch örtlich zusammensetzt aus einer in sich dichten und mit jeder sie als Teilmenge enthaltenden in sich dichten Teilmenge von π zusammenfallenden Punktmenge ρ und einer von ρ freien Punktmenge σ, dass die zu π gehörige Wahlmenge in eine Menge von zu σ, nicht aber zu ρ gehörigen Wahlen, eine Menge von zu ρ gehörigen Wahlen und eine überflüssige Wahlmenge zerlegt ist, so fallen einerseits ρ und $\pi(\beta'_\pi)$, andererseits σ und $[\beta'_\pi]\pi$ zusammen.

Eine Punktspecies heisst *limitierbar*, wenn eine mit ihrer Abschliessung zusammenfallende Punktmenge existiert.

Wir sagen, dass die limitierbare Punktspecies Q eine *Begrenzung β-ter Ordnung* zulässt, wenn eine mit $Q^{(0)}$ zusammenfallende, eine Abbrechung β-ter Ordnung zulassende Punktmenge existiert.

§ 9 Wir sagen, dass die gleichmässige Punktspecies Q, deren n-te Quadrate die Seitenlänge $2^{1-\mu_n}$ besitzen, *katalogisiert* ist oder eine *Katalogisierung 0-ter Ordnung* zulässt, wenn $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe von nicht abnehmenden endlichen Zahlen ist, dass σ_n für hinreichend grosses n jede Grenze übersteigt und für [[18]]

[[201]]

jedes n eine solche endliche Menge s_n von Quadraten $\lambda_{\mu n}$ angegeben werden kann, dass jedes nicht zu s_n gehörige Quadrat $\lambda_{\mu n}$ zu keinem Punkte von Q gehört und zu jedem Quadrate von s_n für jedes nicht negative m ein Quadrat $\lambda_{\mu_{n+m}}$ von Q existiert, von dem es eine Entfernung $< \frac{1}{2^{\sigma_n}}$ besitzt.

Jede katalogisierte Punktspecies ist limitierbar. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir die Menge der Quadrate von s_n ganz oder teilweise überdeckenden Quadrate $\lambda_{\mu n}$ mit t_n, bestimmen eine solche Fundamentalreihe n_1, $n_2, \ldots$, dass $\mu_{n_{\nu+1}} \geq \mu_{n_\nu} + 4$ und konstruieren zu einem willkürlichen Quadrate q_ν von t_{n_ν} zwei konzentrische Quadrate q'_ν und q''_ν, deren Seitenlänge $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{7}{8}$ der Seitenlänge von q_ν beträgt. Alsdann können wir nach einem durch die σ_{n_ν} und
⟦19⟧ die μ_{n_ν} bestimmten Verfahren mittels Betrachtung von s_{n_ρ}, wo ρ sich als eine Funktion $\Phi(\nu)$ von ν festlegen lässt, mit Sicherheit feststellen, *entweder* dass alle Punkte der Abschliessung R von Q ausserhalb q'_ν liegen, *oder* dass zu R in q''_ν enthaltene Punkte gehören. Indem wir diejenigen Quadrate q_ν, für welche der letztere Fall vorliegt, als Quadrate k_ν bezeichnen und der Reihe nach ein Quadrat k_1, ein Quadrat k_2 usw. in solcher Weise dass jedes von ihnen im Innern des vorangehenden liegt, übrigens aber willkürlich wählen, erzeugen wir eine mit R zusammenfallende Punktmenge S_Q.
⟦20⟧ Mit Rücksicht auf das weitere sorgen wir überdies dafür, dass $\mu_{n_{\nu+1}} \geq \mu_{n_\nu} + 5$, bestimmen $\rho = \Phi(\nu)$ durch die Forderungen $\mu_{n_\rho} \geq \mu_{n_\nu} + 7$ und $\sigma_{n_\rho} \geq \mu_{n_\nu} + 6$, konstruieren noch ein drittes mit q_ν konzentrisches Quadrat q'''_ν, dessen Seitenlänge $\frac{27}{32}$ der Seitenlänge von q_ν beträgt und rechnen q_ν dann und nur dann zu den k_ν, wenn s_{n_ρ} teilweise innerhalb q'''_ν liegt.

Dieselbe Schlussweise liefert den Beweis des folgenden Satzes:

Wenn für jedes n eine endliche Menge s_n von Quadraten λ_{μ_n} definiert ist in solcher Weise, dass jedes Quadrat von s_{n+1} im Innern eines Quadrates von s_n enthalten ist und σ_1, $\sigma_2, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe von nicht abnehmenden endlichen Zahlen darstellt, dass σ_n für hinreichend grosses n jede Grenze übersteigt, während zu jedem Quadrate von s_n für jedes positive m ein Quadrat von s_{n+m} existiert, von dem es eine Entfernung $< \frac{1}{2^{\sigma_n}}$ besitzt, so ist die Species R der in jedem s_n enthaltenen Punkte mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisch. [1])

[1]) Aus dem obigen Satze lässt sich, wenn wir einen Limespunkt von in der endlichen Quadratmenge k enthaltenen Punkten als *zu k gehörend* bezeichnen, weiter folgern:

⟦202⟧

§ 10 Wir sagen, dass die katalogisierte Punktspecies Q eine *Katalogisierung erster Ordnung* zulässt, wenn $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe von nicht abnehmenden endlichen Zahlen ist, dass σ'_n für hinreichend grosses n jede Grenze übersteigt und die Quadratmenge s_n für jedes n in zwei solche Quadratmengen s'_n und ${}_1s_n$ zerlegt ist, dass zu jedem Quadrate von s'_n ein einen Grenzpunkt von Q enthaltendes Quadrat von s_n existiert, von dem es eine Entfernung $< \frac{1}{2^{\sigma'_n}}$ besitzt, und in keinem Quadrate von ${}_1s_n$ ganz oder teilweise überdeckenden Quadrate λ_{μ_n} ein Grenzpunkt von Q enthalten sein kann. Wenn überdies für jedes n jeder in einem Quadrate von ${}_1s_n$ enthaltene Punkt von Q isoliert ist, so sagen wir, dass Q eine *isolierende Katalogisierung erster Ordnung* zulässt. [[21]]

Hierbei dürfen wir annehmen, zunächst dass $\sigma_n \leq \mu_n - 2$ für jedes n, und auf Grund davon weiter, dass $\sigma'_n = \sigma_n$ für jedes n ist. Um nämlich letzteres zu erreichen, brauchen wir für $\sigma'_n < \sigma_n$ und $\sigma'_{n+m} \geq \mu_n$ nur diejenigen Quadrate aus s'_n fortzulassen, welche, ebensowenig wie die angrenzenden oder von ihnen teilweise überdeckten Quadrate λ_{μ_n}, ein Quadrat von s'_{n+m} in ihrem Innern enthalten.

Wenn Q eine Katalogisierung erster Ordnung zulässt, so kann die Ableitung $Q^{(1)}$ als Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies dargestellt werden. Man findet nämlich eine entsprechende Quadratmenge $t_n^{(1)}$ in der Menge aller Quadrate von s'_n ganz oder teilweise überdeckenden Quadrate λ_{μ_n}.

Wenn Q eine isolierende Katalogisierung erster Ordnung zulässt, so lässt überdies die entsprechende Punktmenge S_Q eine Abbrechung erster Ordnung zu. Das Verfahren welches die $k_\nu^{(1)}$ unter den $q_\nu^{(1)}$ und die k_ν unter den q_ν auswählt, bestimmt nämlich die $k_\nu^{(1)}$ ausschliesslich unter den k_ν. Wenn wir weiter zu jedem q_ν noch ein viertes konzentrisches Quadrat q_ν'''' konstruieren, dessen Seitenlänge $\frac{2}{3}\frac{5}{2}$ der Seitenlänge von q_ν beträgt, und eine ein k_ν, nicht aber ein $k_\nu^{(1)}$

Wenn $\mu_1, \mu_2, \ldots$ und $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ solche Fundamentalreihen von nicht abnehmenden endlichen Zahlen sind, dass μ_n und σ_n für hinreichend grosses n jede Grenze übersteigen und für jedes n eine endliche Menge r_n von Quadraten λ_{μ_n} definiert ist in solcher Weise, dass jedes Quadrat von r_{n+1} entweder Teilquadrat eines Quadrates von r_n oder mit einem Quadrate von r_n identisch ist, während zu jedem Quadrate von r_n für jedes positive m ein Quadrat von r_{n+m} existiert, von dem es eine Entfernung $< \frac{1}{2^{\sigma_n}}$ besitzt, so ist die Species der zu jedem s_n gehörenden Punkte mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisch. Dies folgt unmittelbar aus dem obigen Satze, wenn wir jedes r_n durch die Menge der Quadrate von r_n ganz oder teilweise überdeckenden Quadrate λ_{μ_n} ersetzen.

erzeugende Wahl zur zweiten oder zur dritten Kategorie rechnen, je nachdem s_{n_ρ} teilweise innerhalb oder nicht teilweise innerhalb des bezüglichen q_ν'''' liegt, so brauchen wir nur einerseits die auf Wahlen zweiter Kategorie folgenden, $k_\nu^{(1)}$ erzeugenden Wahlen, andererseits die Wahlen dritter Kategorie als überflüssig zu betrachten.

Sei R', R'', ... eine solche mit F zu bezeichnende Fundamentalreihe von Abschliessungen von katalogisierten Punktspecies, dass jedes ihrer Elemente im vorangehenden als Teilspecies enthalten ist. Alsdann dürfen wir annehmen, *erstens* dass für jedes n die Zahlen μ_n und σ_n für alle $R^{(\nu)}$ gleich sind, *zweitens* dass die zu $R^{(\nu+1)}$ gehörige Quadratmenge $s_n^{(\nu+1)}$ für jedes n und jedes ν eine Teilmenge der zu $R^{(\nu)}$ gehörigen Quadratmenge $s_n^{(\nu)}$ ist.[1] Die Fundamentalreihe F wird *induzibel* genannt, wenn für jedes n ein solches ν_n angegeben werden kann, dass $s_n^{(\nu_n+\mu)}$ für jedes positive μ mit $s_n^{(\nu_n)}$ identisch ist. Alsdann ist jedes Quadrat van $s_{n+1}^{(\nu_n+1)}$ im Innengebiete eines Quadrates von $s_n^{(\nu_n)}$ enthalten und der *Durchschnitt der induziblen Fundamentalreihe F*, welche ja mit der Species der für jedes n und jedes ν in $s_n^{(\nu)}$ enthaltenen Punkte identisch ist, *ist auch ihrerseits mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies*, nämlich mit der Species $R^{(\omega)}$ der für jedes n in $s_n^{(\nu_n)}$ enthaltenen Punkte, *identisch.*

Wenn β eine wohlgeordnete Ordinalzahl ist, so sagen wir, dass die Punktspecies Q eine *Katalogisierung* bzw. *isolierende Katalogisierung β-ter Ordnung* zulässt: *erstens*, wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und Q eine Katalogisierung bzw. isolierende Katalogisierung β_1-ter Ordnung und $Q^{(\beta_1)}$ eine Katalogisierung bzw. isolierende Katalogisierung β_2-ter Ordnung zulässt; *zweitens*, wenn $\beta = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und $Q^{(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{\nu-1})}$ für jedes ν eine Katalogisierung bzw. isolierende Katalogisierung β_ν-ter Ordnung zulässt, während die Fundamentalreihe $Q^{(0)}$, $Q^{(\beta_1)}$, $Q^{(\beta_1+\beta_2)}$, ... induzibel ist.

Wenn Q eine Katalogisierung bzw. isolierende Katalogisierung β''_Q-ter Ordnung zulässt, und $Q^{(\beta''_Q)}$ perfekt ist, so sagen wir, dass Q eine *vollständige Katalogisierung* bzw. *vollständige isolierende Katalogisierung* zulässt.

---

[1] Weil nämlich $R^{(\nu+1)}$ einerseits mit der Species der für jedes n in $s_n^{(\nu+1)}$ enthaltenen Punkte identisch ist, andererseits in der mit der Species der für jedes n in $s_n^{(\nu)}$ enthaltenen Punkte identischen Species $R^{(\nu)}$ als Teilspecies enthalten ist, so ist $R^{(\nu+1)}$ auch mit der Species der für jedes n in $\mathfrak{D}(s_n^{(\nu)}, s_n^{(\nu+1)})$ enthaltenen Punkte identisch.

[[204]]

Wenn Q eine Katalogisierung β-ter Ordnung zulässt, so kann sowohl $Q^{(\beta)}$ wie jedes $Q^{(\overline{\beta})}$ als Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies dargestellt werden.

Wenn Q eine isolierende Katalogisierung β-ter Ordnung zulässt, so lässt überdies die entsprechende Punktmenge S_Q eine Abbrechung β-ter Ordnung zu. Wenn nämlich $\beta = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, während jedem n ein solches ϑ_n entspricht, dass $s_n^{(\beta_1 + \cdots + \beta_{\vartheta_n} + \mu)}$ für jedes positive μ mit $s_n^{(\beta_1 + \cdots + \beta_{\vartheta_n})}$ identisch ist und ψ_ν die grössere der beiden Zahlen ϑ_{n_ν} und $\vartheta_{n_{\phi(\nu)}}$ darstellt, so ist die Menge der Quadrate $k_\nu^{(\beta_1 + \cdots + \beta_{\psi_\nu} + \mu)}$ für jedes positive μ mit der Menge der Quadrate $k_\nu^{(\beta_1 + \cdots + \beta_{\psi_\nu})}$ identisch.

Es kann vorkommen, dass eine katalogisierte Punktmenge π eine vollständige Abbrechung zulässt, ohne dass für eine mit ihrer Abschliessung zusammenfallende Punktmenge dasselbe zutrifft. Sei z. B. σ eine solche auf einem Liniensegment l der X-Axe liegende, katalogisierte und abgeschlossene Punktmenge, dass keine vollständige Abbrechung einer mit σ zusammenfallenden Punktmenge existiert, und π die Menge der Mitten der oberen der X-Axe parallelen Seiten der Quadrate der zu σ gehörigen Quadratmengen s_n. Alsdann ist π katalogisiert und lässt eine vollständige Abbrechung zu; eine mit ihrer Abschliessung $\mathfrak{S}(\sigma, \pi)$ zusammenfallende Punktmenge lässt aber keine vollständige Abbrechung zu. Umgekehrt kann es vorkommen, dass die zu einer katalogisierten Punktmenge π gehörige Punktmenge S_π eine vollständige Abbrechung zulässt, ohne dass für eine mit π zusammenfallende Punktmenge dasselbe zutrifft. Sei z. B. σ eine solche auf einem Liniensegment l der X-Axe liegende Punktmenge, dass keine vollständige Abbrechung einer mit σ zusammenfallenden Punktmenge existiert, und ρ die Menge der Mitten der oberen der X-Axe parallelen Seiten derjenigen Quadrate λ, deren Mittelpunkt auf l liegt. Alsdann fällt $\mathfrak{S}(\sigma, \rho)$ mit einer solchen katalogisierten Punktmenge π zusammen, dass keine mit π zusammenfallende Punktmenge eine vollständige Abbrechung zulässt; die zugehörige Punktmenge S_π dagegen lässt eine vollständige Abbrechung zu.

§ 11 *Jede perfekte Punktspecies Q, welche wenigstens einen Punkt enthält, ist der Menge C* (vgl. S. 9 des ersten Teiles) *äquivalent*, und zwar (übrigens analog wie im Falle der S. 13 des ersten Teiles betrachteten Species S) auch dann, wenn wir für Punkte den Begriff „verschieden" im Sinne von „örtlich verschieden" auffassen. Erstens nämlich ist Q eine Teilspecies der die Kardinalzahl c besitzenden Menge der Punkte der Ebene. Zweitens enthält Q eine Teilspecies, welche mit einer mit der Menge $G_{222\ldots}$ (vgl. S. 22 des ersten Teiles) gleichmächtigen, örtlich individualisierten Punktmenge zusammenfällt, und die Menge $G_{222\ldots}$ ihrerseits eine mit C gleichmächtige Teilmenge, so dass auch jedem Element von C ein Punkt von Q in solcher Weise zugeordnet werden kann, dass zwei verschiedenen Elementen von C zwei örtlich verschiedene Punkte von Q entsprechen.

Dieselbe Eigenschaft gilt auch für jede Punktspecies, welche eine perfekte Punktspecies als Teilspecies enthält.

Seien Q' und Q'' zwei katalogisierte Punktspecies. Alsdann dürfen § 12
wir annehmen, dass für jedes n die Zahlen μ_n und σ_n für Q' und Q'' gleich sind. Wenn $\tau_1, \tau_2, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe von nicht abnehmenden endlichen Zahlen ist, dass τ_n für hinreichend grosses n jede Grenze übersteigt und die Quadratmenge $\mathfrak{D}(t'_n, t''_n)$[1] für jedes n in zwei solche Quadratmengen $t_n^{(3)}$ und $t_n^{(4)}$ zerlegt ist, dass zu jedem Quadrate von $t_n^{(3)}$ für jedes positive m ein Quadrat von $t_{n+m}^{(3)}$ existiert, von dem es eine Entfernung $< \frac{1}{2^{\tau_n}}$ besitzt und für geeignetes positives ν kein Quadrat von $t_n^{(4)}$ an ein Quadrat von $\mathfrak{D}(t'_{n+\nu}, t''_{n+\nu})$ grenzt oder von ihm teilweise überdeckt wird, so dürfen wir annehmen, dass jedes Quadrat von $t_{n+1}^{(3)}$ in einem Quadrate von $t_n^{(3)}$ enthalten ist und nennen Q' und Q'' *in bezug aufeinander katalogisiert.*

Von zwei in bezug aufeinander katalogisierten Punktspecies ist der Durchschnitt der Abschliessungen mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisch. Im Falle der obigen Punktspecies Q' und Q'' ist dieser Durchschnitt nämlich mit der Species der Punkte, welche für jedes n in $t_n^{(3)}$ enthalten sind, identisch.

Die Abschliessungen zweier in bezug aufeinander katalogisierter Punktspecies besitzen gemeinsame Punkte oder nicht, je nachdem die entsprechende Quadratmenge $t_1^{(3)}$ ein Element besitzt oder nicht.

Eine Punktspecies Q heisst *zusammenhängend,* wenn zu je zwei beliebig vorgegebenen Punkten P_1 und P_2 von Q für beliebiges n eine endliche Folge $P_1, P'_1, P'_2, \ldots P'_k, P_2$ von Punkten von Q bestimmt werden kann, von denen je zwei aufeinanderfolgende in einem gemeinsamen Quadrate λ_n enthalten sind.

---

[1]) Diese Quadratmenge braucht nicht jeden Punkt zu enthalten, der sowohl in t'_n wie in t''_n enthalten ist; sie enthält aber diejenigen Quadrate λ_{μ_n}, welche sowohl ein Quadrat von s'_n wie ein Quadrat von s''_n ganz oder teilweise überdecken. Jedes Quadrat von $\mathfrak{D}(t'_{n+1}, t''_{n+1})$ ist im Innern eines Quadrates von $\mathfrak{D}(t'_n, t''_n)$ enthalten.

[[206]]

Eine Species von Quadraten λ heisst *zusammenhängend*, wenn zu je zwei beliebig vorgegebenen Quadraten q_1 und q_2 der Species eine endliche Folge $q_1, q'_1, q'_2, \ldots q'_h, q_2$ von Quadraten der Species bestimmt werden kann, von denen je zwei aufeinanderfolgende einander teilweise überdecken.

Zu jedem grössten zusammenhängenden Bestandteile β der zu einer katalogisierten Punktspecies Q gehörigen Quadratmenge t_n lässt sich entweder ein solches m angeben, dass *kein* Quadrat von t_{n+m} in Innern eines Quadrates von t_n liegt, oder es lässt sich feststellen, dass für jedes positive m ein Quadrat von t_{n+m} im Innern eines Quadrates von t_n liegt. Im ersteren Falle nennen wir β einen *unwesentlichen*, im letzteren einen *wesentlichen* zusammenhängenden Bestandteil von t_n.

Der Zusammenhang einer katalogisierten Punktspecies Q ist der Eigenschaft äquivalent, dass für jedes n die entsprechende Quadratmenge t_n nicht zwei wesentliche zusammenhängende Bestandteile aufweist und hieraus folgt unmittelbar weiter, dass *der Zusammenhang einer katalogisierten Punktspecies der Eigenschaft äquivalent ist, dass ihre Abschliessung nicht in zwei je wenigstens einen Punkt enthaltende, in bezug aufeinander katalogisierte Abschliessungen von katalogisierten Punktspecies zerlegt werden oder sich aus solchen zusammensetzen kann.*

Der Durchschnitt $R^{(\omega)}$ einer induziblen Fundamentalreihe R', R'', . . . von zusammenhängenden Abschliessungen von katalogisierten Punktspecies ist ebenfalls zusammenhängend. Wenn nämlich irgend ein $t_n^{(\nu_n)}$ mehr als einen wesentlichen zusammenhängenden Bestandteil enthielte, so könnte $R^{(\nu_n)}$ nicht zusammenhängend sein. Weil mithin $t_n^{(\nu_n)}$ für jedes n nicht mehr als einen wesentlichen zusammenhängenden Bestandteil enthält, so ist die Species $R^{(\omega)}$ der für jedes n in $t_n^{(\nu_n)}$ enthaltenen Punkte zusammenhängend.

Eine Punktspecies Q heisst *zusammenhängend zwischen zwei ihrer Punkte P_1 und P_2*, wenn für beliebiges n eine endliche Folge P_1, $P'_1, P'_2, \ldots P'_k, P_2$ von Punkten von Q bestimmt werden kann, von denen je zwei aufeinanderfolgende in einem gemeinsamen Quadrate λ_n enthalten sind.

Eine Species von Quadraten λ heisst *zusammenhängend zwischen zwei in ihr enthaltenen Punkten P_1 und P_2*, wenn eine solche endliche Folge $q_1, q'_1, q'_2, \ldots q'_h, q_2$ von Quadraten der Species bestimmt werden kann, dass P_1 in q_1 und P_2 in q_2 enthalten ist, während je zwei aufeinanderfolgende Quadrate der Folge einander teilweise überdecken.

Der Zusammenhang zwischen P_1 und P_2 einer katalogisierten Punktspecies Q ist der Eigenschaft äquivalent, dass für jedes n die entsprechende Quadratmenge t_n einen zwischen P_1 und P_2 zusammenhängenden Bestandteil aufweist und hieraus folgt unmittelbar weiter, dass *der Zusammenhang zwischen P_1 und P_2 einer katalogisierten Punktspecies der Eigenschaft äquivalent ist, dass ihre Abschliessung nicht in zwei in bezug aufeinander katalogisierte Abschliessungen von katalogisierten Punktspecies, von denen die eine P_1 und die andere P_2 enthält, zerlegt werden oder sich aus solchen zusammensetzen kann.*

Der Durchschnitt $R^{(\omega)}$ einer induziblen Fundamentalreihe R', R'', . . . von zwischen P_1 and P_2 zusammenhängenden Abschliessungen von katalogisierten Punktspecies ist ebenfalls zusammenhängend zwischen P_1 und P_2. Wenn nämlich irgend ein $t_n^{(\nu_n)}$ keinen zwischen P_1 und P_2 zusammenhängenden Bestandteil enthielte, so könnte $R^{(\nu_n)}$ nicht zusammenhängend zwischen P_1 und P_2 sein. Weil mithin $t_n^{(\nu_n)}$ für jedes n einen zwischen P_1 und P_2 zusammenhängenden Bestandteil enthält, so ist die Species $R^{(\omega)}$ der für jedes n in $t_n^{(\nu_n)}$ enthaltenen Punkte zusammenhängend zwischen P_1 und P_2.

2. *Bereiche und innere Grenzspecies.*

[[22]] Den Quadraten eines nach S. 8 des ersten Teiles definierten Bereichs β fügen wir folgende Quadrate λ hinzu: § 13

1. Wenn zwei Quadrate $\varkappa'$ und $\varkappa''$ von β eine gemeinsame Seite s der Länge l besitzen, dasjenige Quadrat λ der Seitenlänge l, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte von s zusammenfällt.

2. Wenn eine Seite des Quadrates $\varkappa'$ von β eine Seite s der Länge l des Quadrates $\varkappa''$ von β als Teil enthält, dasjenige Quadrat λ der Seitenlänge l, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte von s zusammenfällt.

3. Wenn in einem Punkte P drei oder vier Quadrate $\varkappa$ von β zusammenstossen, dasjenige Quadrat λ, dessen Mittelpunkt in P liegt und dessen Seitenlänge der Seitenlänge des kleinsten der in P zusammenstossenden Quadrate gleich ist.

Die ursprünglichen Quadrate $\varkappa$ von β zusammen mit den obigen neu hinzugefügten Quadraten λ werden wir als die *Ziegelquadrate des Bereichs* β bezeichnen.

Die Species der je zu einer endlichen Menge von Quadraten von β gehörigen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Species

[[208]]

der je in einem Ziegelquadrate von β enthaltenen Punkte werden wir auch kurz als *den Bereich* β bezeichnen.

Jeder Bereich fällt mit einer numerierten Punktmenge zusammen. Um dies zu beweisen, zerlegen wir die Quadrate von β in solcher Weise in als *Quadrate zweiter Ordnung von* β zu bezeichnende, von keinem Ziegelquadrate von β zerlegte Quadrate $\varkappa$, dass die Seitenlängen der innerhalb eines willkürlichen Ziegelquadrates z von β liegenden Quadrate zweiter Ordnung von β höchstens $\frac{1}{8}$ des *Massstabes* von z, d. h. des Minimums der Seitenlängen von z und den z teilweise überdeckenden Ziegelquadraten betragen, im übrigen aber möglichst gross sind. Aus den Qnadraten zweiter Ordnung von β leiten wir die *Ziegelquadrate zweiter Ordnung von* β in derselben Weise her, wie wir aus den Quadraten von β die Ziegelquadrate von β hergeleitet haben. Sodann leiten wir der Reihe nach für jedes n aus den Quadraten und Ziegelquadraten n-ter Ordnung von β die *Quadrate und Ziegelquadrate* $(n+1)$*-ter Ordnung von* β in derselben Weise her, wie wir aus den Quadraten und Ziegelquadraten von β die Quadrate und Ziegelquadrate zweiter Ordnung von β hergeleitet haben. Indem wir der Reihe nach für jedes n ein Ziegelquadrat n-ter Ordnung von β in solcher Weise, dass jedes dieser Quadrate im Innern des vorangehenden liegt, übrigens aber willkürlich wählen, erzeugen wir eine numerierte Punktmenge π_β, welche mit β zusammenfällt. Sei nämlich die Quadratfolge $q_1, q_2, \ldots$ ein Punkt P von β. Wir bestimmen eine möglichst kleine derartige Zahl n_1, dass q_{n_1} im Innern eines Ziegelquadrates a_1 von β liegt und vom Rande von a_1 eine wenigstens $\frac{1}{8}$ des Massstabes von a_1 betragende Entfernung besitzt. Sodann bestimmen wir eine möglichst kleine derartige Zahl n_2, dass q_{n_2} im Innern eines Ziegelquadrates a_2 zweiter Ordnung von β liegt und vom Rande von a_2 eine wenigstens $\frac{1}{8}$ des Massstabes von a_2 betragende Entfernung besitzt. Indem wir in dieser Weise fortfahren und überdies der eindeutigen Bestimmtheit wegen für jedes ν die Koordinaten des Mittelpunktes von a_ν möglichst gross wählen, erzeugen wir eine Quadratfolge $a_1, a_2, \ldots$, welche einen mit P zusammenfallenden Punkt von π_β darstellt.

Sei E ein willkürliches Qnadrat $\varkappa_1$. Der Einfachheit halber wollen wir im weiteren je zwei Quadrate $\varkappa$ der gleichen Seitenlänge wie E, samt den zu ihnen gehörigen Punkten der Ebene, deren rechtwinklige Cartesische Koordinaten endliche Dualbrüche sind, ihrer Kongruenz entsprechend identifiziert denken, worin, weil die von uns betrachteten Punktspecies als geschränkt vorausgesetzt werden, keinerlei Beschränkung liegt.

Seien $\varkappa', \varkappa'', \varkappa''', \ldots$ die Quadrate des Bereichs β. Sei l_ν das

Minimum der Seitenlängen von $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... $\varkappa^{(\nu)}$ und M_ν die Menge derjenigen Teilquadrate von E der Seitenlänge l_ν, welche von keinem der Quadrate $\varkappa'$, $\varkappa''$, ... $\varkappa^{(\nu)}$ überdeckt werden. Die Species der für jedes ν zu M_ν gehörigen Punkte bildet eine abgeschlossene ganze Species $k = K(\beta)$, welche wir das *Komplement von* β nennen werden. Ebenso werden wir β als das *Komplement* $K(k)$ *von* k bezeichnen. Wenn wir die Species der Punkte der Ebene kurz als E
[[23]] bezeichnen, so *sind* β *und* k *Komplementärspecies voneinander in* E.

Wenn $K(\beta)$ mit einer katalogisierten Punktspecies zusammenfällt, so nennen wir β *komplementär katalogisiert*. Insbesondere ist also jedes Gebiet ein komplementär katalogisierter Bereich.

Die Vereinigung einer endlichen Menge sowie einer Fundamental- § 14
reihe von Bereichen ist wiederum ein Bereich.

Die endliche Bereichmenge B heisst *durchsichtig*, *erstens* wenn ein Quadrat $\varkappa$ angegeben werden kann, das von jedem Elemente von B überdeckt wird, *zweitens* wenn kein Quadrat $\varkappa$ existieren kann, das von jedem Elemente von B überdeckt wird.

Der Durchschnitt einer durchsichtigen endlichen Menge von Be-
[[24]] *reichen fällt entweder fort, oder ist wiederum ein Bereich.*

Unter einer *innern Grenzspecies* verstehen wir den Durchschnitt I einer Fundamentalreihe β_1, β_2, ... von Bereichen. Wenn I wenigstens einen Punkt enthält, so dürfen wir annehmen, dass jedes Quadrat von $\beta_{\nu+1}$ von β_ν überdeckt wird.

Jede mit einer katalogisierten Punktspecies zusammenfallende innere Grenzspecies fällt mit einer Punktmenge zusammen. Um dies zu beweisen, konstruieren wir in der oben angegebenen Weise die Ziegelquadrate von β_1 und zu einem willkürlichen Ziegelquadrate q_1 von β_1 zwei solche konzentrische Quadrate q'_1 und q''_1, dass die Entfernung des Randes von q'_1 bzw. q''_1 vom Rande von q_1, $\frac{1}{8}$ bzw. $\frac{1}{16}$ des Massstabes von q_1 beträgt. Alsdann können wir nach einem *bestimmten* Verfahren mit Sicherheit feststellen, *entweder* dass alle Punkte von I ausserhalb q'_1 liegen, *oder* dass zu I in q''_1 enthaltene Punkte gehören. Im ersteren Falle bezeichnen wir q_1 als *unwesentliches*, im letzteren Falle als *wesentliches Ziegelquadrat* von β_1. Sodann zerlegen wir die Quadrate von β_2 in solcher Weise in als *modifizierte Quadrate von* β_2 zu bezeichnende, von keinem Ziegelquadrate von β_1 zerlegte Quadrate $\varkappa$, dass die Seitenlängen der innerhalb eines willkürlichen Ziegelquadrates z_1 von β_1 liegenden modifizierten Quadrate von β_2 höchstens $\frac{1}{16}$ des Massstabes von z_1 betragen, im übrigen aber möglichst gross sind. Aus den modifizierten Quadraten von β_2 leiten wir in der oben angegebenen Weise

[[210]]

die *Ziegelquadrate von* β_2 her und definieren die *wesentlichen Ziegelquadrate von* β_2 in analoger Weise, wie für β_1. In dieser Weise fortfahrend, bestimmen wir der Reihe nach für jedes n zunächst die *modifizierten Quadrate* und sodann die *Ziegelquadrate* und *wesentlichen Ziegelquadrate von* β_n. Die Menge π_I derjenigen Punkte, welche erzeugt werden, indem der Reihe nach für jedes n ein solches wesentliches Ziegelquadrat von β_n gewählt wird, dass jedes dieser Quadrate im Innern des vorangehenden liegt, *fällt mit I zusammen.* Sei nämlich die Quadratfolge $q_1, q_2, \ldots$ ein Punkt P von I, so können wir eine möglichst kleine derartige Zahl n_1 bestimmen, dass q_{n_1} im Innern eines wesentlichen Ziegelquadrates a_1 von β_1 liegt und vom Rande von a_1 eine wenigstens $\frac{1}{16}$ des Massstabes von a_1 betragende Entfernung besitzt. Sodann können wir eine möglichst kleine derartige Zahl n_2 bestimmen, dass q_{n_2} im Innern eines wesentlichen Ziegelquadrates a_2 von β_2 liegt und vom Rande von a_2 eine wenigstens $\frac{1}{16}$ des Massstabes von a_2 betragende Entfernung besitzt. Indem wir in dieser Weise fortfahren und überdies der eindeutigen Bestimmtheit wegen für jedes ν die Koordinaten des Mittelpunktes von a_ν möglichst gross wählen, erzeugen wir eine Quadratfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche einen mit P zusammenfallenden Punkt von π_I darstellt.

Unter einer *äussern Grenzspecies* verstehen wir die Vereinigung A einer solchen Fundamentalreihe $k_1, k_2, \ldots$ von Komplementen von Bereichen $\beta_1, \beta_2, \ldots$, wo $k_\nu = \mathfrak{D}(M_{\nu 1}, M_{\nu 2}, \ldots)$ ist, dass jedes $M_{\nu+1,\mu}$ ein $M_{\nu\sigma}$ als Teil enthält. Wenn dabei jedes k_ν mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisch ist, so heisst A *konsoliert.* Gleichzeitig mit der äussern Grenzspecies A wird eine innere Grenzspecies $I = \mathfrak{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ definiert, welche wir das *Komplement* $K(A)$ *von* A nennen werden. Ebenso wird A als das *Komplement* $K(I)$ *von* I bezeichnet werden. [[26]]

Es existiert kein Grund zu behaupten, dass die Vereinigung einer endlichen Menge von inneren Grenzspecies wiederum eine innere Grenzspecies oder die Vereinigung einer endlichen Menge von äusseren Grenzspecies wiederum eine äussere Grenzspecies, nicht einmal sogar, dass die Vereinigung einer endlichen Menge von Bereichkomplementen wiederum ein Bereichkomplement sei. [[27]]

§ 15 Sei π eine vollständig abbrechbare Punktmenge. Wir dürfen annehmen, dass π uniform ist. Die Punktmenge $\overline{\pi}(\beta'_\pi)$ bezeichnen wir kurz mit π_1, die auf Grund von S. 12 Z. 19—17 v. u. mit $[\beta'_\pi]\overline{\pi}$ bzw. $[\beta'_\pi—\gamma]\{\overline{\pi}(\gamma)\}$ zusammenfallende zählbare, örtlich individualisierte Punktmenge mit π_2 bzw. ${}_\gamma\pi_2$. Zu jedem Punkte P eines $(\beta)\pi$ kann nach einem bestimmten Gesetze ein solches n_P, ein solches [[28]]

ν_p und ein solches μ_p gefunden werden, das jedes von einer ν_p-ten Wahl von $\bar{\pi}(\beta)$ erzeugte Quadrat entweder zu einem mit P zusammenfallenden Punkte gehört oder eine Entfernung $> 2^{-\mu_p}$ vom n_p-ten Quadrate von P besitzt. Die Species der je in einem n_p-ten bzw. (n_p+m)-ten Quadrate ${}_pq_1$ bzw. ${}_pq_{m+1}$ eines Punktes P von π_2 enthaltenen Punkte bildet einen Bereich β''_1 bzw. β''_{m+1}. Die Species der je in einem Quadrate ${}_pq_{m+1}$ eines Punktes P von ${}_\gamma\pi_2$ enthaltenen Punkte bildet einen Bereich ${}_\gamma\beta''_{m+1}$. Die Species der je in einem n-ten Quadrate eines Punktes von π_1 enthaltenen Punkte bildet einen Bereich β'_n. Den Bereich $\mathfrak{S}(\beta'_n, \beta''_n)$ bzw. $\mathfrak{S}(\beta'_n, {}_\gamma\beta''_n)$ bezeichnen wir mit β'''_n bzw. ${}_\gamma\beta'''_n$, die inneren Grenzspecies $\mathfrak{D}(\beta'_1, \beta'_2, \ldots)$, $\mathfrak{D}(\beta''_1, \beta''_2, \ldots)$, $\mathfrak{D}(\beta'''_1, \beta'''_2, \ldots)$, $\mathfrak{D}({}_\gamma\beta''_1, {}_\gamma\beta''_2, \ldots)$ und $\mathfrak{D}({}_\gamma\beta'''_1, {}_\gamma\beta'''_2, \ldots)$ der Reihe nach mit I', I'', I''', I''_γ und I'''_γ. Sei P ein Punkt von I''', dessen Zusammenfallung mit einem Punkte von $[\beta'_\pi]\pi$ unmöglich ist. Wenn P im Quadrate ${}_Kq_m$ eines Punktes K von $(0)\bar{\pi}$ enthalten wäre, so könnte P für hinreichend grosses n nicht in β'_n und nur dann in ${}_Hq_n$ enthalten sein, wenn H mit K zusammenfiele. Dann aber müsste auch P mit K zusammenfallen, was der Voraussetzung widerspricht, so dass P in keinem Quadrate ${}_Kq_m$ eines Punktes K von $(0)\bar{\pi}$ enthalten sein kann. Weil mithin P für jedes n in ${}_1\beta'''_n$ enthalten ist, so ist P ein Punkt von I'''_1. Und analog lässt sich unter Heranziehung der induktiven Methode beweisen, dass P ein Punkt von $I'''_{\beta'_\pi}$, d. h. von I' ist.

Wenn wir nun den Durchschnitt von I''' und der Abschliessung von $\pi(\beta'_\pi)$ mit R, $\mathfrak{S}\{R, [\beta'_\pi]\pi\}$ mit S und $\mathfrak{S}(R, \pi)$ mit T bezeichnen, so kann kein Punkt von I''' existieren, dessen Zusammenfallung mit einem Punkte von S unmöglich wäre. Mithin kann erst recht kein Punkt von I''' existieren, dessen Zusammenfallung mit einem Punkte von T unmöglich wäre, so dass *I''' und T örtlich kongruent sind.* Weil andererseits I''' eine mit π örtlich kongruente Punktmenge, nämlich $\mathfrak{S}(\pi_1, \pi_2)$ als Teilspecies enthält, so können wir folgenden Satz formulieren:

Zu jeder vollständig abbrechbaren Punktmenge π existiert eine innere Grenzspecies, welche mit der Vereinigung von π und einer Teilspecies der Abschliessung der finalen Kohärenz von π örtlich kongruent ist und eine mit π örtlich kongruente Punktmenge als Teilspecies enthält.

Und im besonderen:

Zu jeder vollständig abbrechbaren Punktmenge π, deren finale Kohärenz fortfällt, existiert eine mit π örtlich kongruente innere Grenzspecies.

Sei $I = \mathfrak{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ eine wenigstens einen Punkt enthaltende

[[212]]

in sich dichte innere Grenzspecies. Sei q ein Quadrat eines Punktes P von I. Alsdann ist innerhalb q ein in β_1 enthaltenes Quadrat z von P bestimmt, innerhalb z zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate q_0 und q_1 von Punkten P_0 und P_1 von I, innerhalb jedes q_ν $(\nu = 0, 1)$ ein in β_2 enthaltenes Quadrat z_ν von P_ν, innerhalb jedes z_ν zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate $q_{\nu 0}$ und $q_{\nu 1}$ von Punkten $P_{\nu 0}$ und $P_{\nu 1}$ von I, innerhalb jedes $q_{\nu\mu}$ $(\nu, \mu = 0, 1)$ ein in β_3 enthaltenes Quadrat $z_{\nu\mu}$ von $P_{\nu\mu}$, usw. Die Menge der Quadrate $z_{\nu_1 \ldots \nu_\alpha}$ (α eine willkürliche ganze positive Zahl, jedes $\nu_\sigma = 0$ oder 1) bestimmt eine mit der Menge $G_{222\ldots}$ gleichmächtige, örtlich individualisierte Teilspecies von I. Hieraus folgern wir in genau derselben Weise wie S. 18 für die perfekten Punktspecies, dass *jede wenigstens einen Punkt enthaltende in sich dichte innere Grenzspecies der Menge C äquivalent ist.*

Dieselbe Eigenschaft gilt auch für jede Punktspecies, welche eine wenigstens einen Punkt enthaltende in sich dichte innere Grenzspecies oder eine mit einer solchen zusammenfallende Punktspecies als Teilspecies enthält.

Eine vollständig abbrechbare, mit einer innern Grenzspecies I zusammenfallende Punktmenge i fällt entweder mit einer zählbaren Punktmenge zusammen oder ist der Menge C äquivalent. Zunächst dürfen wir nämlich annehmen, dass i uniform ist. Sei weiter, im Falle dass $\bar{i}(\beta'_i)$ wenigstens einen Punkt enthält, I als der Durchschnitt der Bereiche $\beta_1, \beta_2, \ldots$ definiert und β'_n für jedes n der von der Species der je in einem n-ten Quadrate eines Punktes von $\bar{i}(\beta'_i)$ enthaltenen Punkte gebildete Bereich. Alsdann bildet für jedes n der Durchschnitt von β_n und β'_n einen Bereich β°_n und $\mathfrak{D}(\beta^\circ_1, \beta^\circ_2, \ldots)$ eine in I als Teilspecies enthaltene innere Grenzspecies I°, welche ihrerseits wieder eine leicht definierbare, mit der Menge $G_{222\ldots}$ gleichmächtige, örtlich individualisierte Punktspecies als Teilspecies enthält.

Sei R die Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies, s_n für jedes n eine solche Menge von Quadraten λ_{μ_n}, dass jedes Quadrat von s_{n+1} im Innern eines Quadrates von s_n enthalten und die Species der in jedem s_n enthaltenen Punkte mit R identisch ist, π eine zählbare Punktmenge und π_n die Menge der auf Grund der Zählbarkeit von π den Ziffernkomplexen $1, 2, \ldots n$ von ζ zugeordneten Punkte von π. Die Species der von jedem Punkte von π_n örtlich verschiedenen, in s_n enthaltenen Punkte bildet einen Bereich β_n und der Durchschnitt $\mathfrak{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ *eine innere Grenzspecies I, welche mit der Species der von jedem Punkte von π örtlich verschiedenen Punkte von R identisch ist.*

[213]

Von diesem Satze gilt einerseits folgende Spezialisierung:

Wenn die Abschliessung R einer katalogisierten Punktspecies in solcher Weise mit der Vereinigung zweier zählbarer Punktmengen π' und π'' zusammenfällt, dass jeder Punkt von π' von jedem Punkte von π'' örtlich verschieden ist, so fallen π' und π'' je mit einer innern Grenzspecies zusammen.

Andererseits lässt derselbe Satz sich auf Grund der Eigenschaft, dass der Durchschnitt zweier innerer Grenzspecies wiederum eine innere Grenzspecies ist, wie folgt verallgemeinern:

Die Species derjenigen Punkte einer innern Grenzspecies I, welche von jedem Punkte einer konsolidierten äussern Grenzspecies A örtlich verschieden sind, ist mit einer innern Grenzspecies I' identisch.

3. *Der Inhalt der Punktspecies.*

Sei, für jedes ganze positive ν, $i_\nu = \frac{a_\nu}{2^\nu}$ bestimmt, wo a_ν eine ganze § 16
positive Zahl ist. Wir sagen, dass die mit i zu bezeichnende Fundamentalreihe $i_1, i_2, \ldots$ eine *limitierte Folge* bildet, wenn jedem ganzen positiven μ ein solches ν zugeordnet ist, dass $[i_{\nu+\lambda} - i_\nu] < \frac{1}{2^\mu}$ für jedes nicht negative λ. Die Begriffe „*gleich*", „*grösser*" und „*kleiner*" in bezug auf limitierte Folgen, sowie der Begriff „*limitierte Folge von limitierten Folgen*", sind ohne weiteres klar.

Wenn der Inhalt der ersten ν Quadrate eines Bereichs β mit i_ν bezeichnet wird und $i_1, i_2, \ldots$ eine limitierte Folge i bilden, so heisst β *messbar* und i der *Inhalt* von β.

Sei, für jedes ganze positive ν, M_ν eine endliche Menge von Quadraten $\varkappa$. Die Species der zur endlichen Quadratmenge M_ν gehörigen Punkte werden wir kurz als *die endliche Quadratmenge* M_ν bezeichnen. Wenn dann jedes $M_{\nu+1}$ zu M_ν gehört und die Inhalte i_ν der M_ν eine limitierte Folge i bilden, so heisst das Bereichkomplement $k = \mathfrak{D}(M_1, M_2, \ldots)$ *messbar* und i der *Inhalt*
[[29]] von k.

Zu jedem messbaren Bereichkomplemente k vom positiven Inhalte i und jeder ganzen positiven Zahl ρ existiert eine in k als Teilspecies enthaltene messbare Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies, deren Inhalt grösser als $i - \frac{1}{2^\rho}$ ist. Wenn wir nämlich $\frac{1}{2^{4\nu+\rho}}$ mit ε_ν bezeichnen, so enthält die Fundamentalreihe $M_1, M_2, \ldots$

eine solche Teilfundamentalreihe M_{τ_1}, $M_{\tau_2}, \ldots$ $(\tau_{\nu+1} > \tau_\nu)$, dass $[i_{\tau_{\nu+\lambda}} - i_{\tau_\nu}] < \varepsilon_\nu$ für jedes positive λ. Wenn wir M_{τ_ν} kurz mit L_ν bezeichnen und von jedem L_ν die Durchschnitte mit denjenigen Innengebieten von Quadraten $\varkappa_2$, deren Durchschnitte mit L_1 einen Inhalt $< 2\varepsilon_1$ besitzen, fortlassen, so bleibt ein Rest ${}_1L_\nu$ übrig. Wenn wir von jedem ${}_1L_\nu$ die Durchschnitte mit denjenigen Innengebieten von Quadraten $\varkappa_3$, deren Durchschnitte mit ${}_1L_2$ einen Inhalt $< 2\varepsilon_2$ besitzen, fortlassen, so bleibt ein Rest ${}_2L_\nu$ übrig. Wenn wir von jedem ${}_2L_\nu$ die Durchschnitte mit denjenigen Innengebieten von Quadraten $\varkappa_4$, deren Durchschnitte mit ${}_2L_3$ einen Inhalt $< 2\varepsilon_3$ besitzen, fortlassen, so bleibt ein Rest ${}_3L_\nu$ übrig. In dieser Weise fahren wir fort. Alsdann ist die Species der für jedes ν zu ${}_\nu L_\nu$ gehörigen Punkte ein mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisches, messbares Bereichkomplement k_1, dessen Inhalt in der Tat grösser als $i - \frac{1}{2^\rho}$ ist. [[30]]

Weil für $i > \frac{1}{2^\rho}$ leicht eine in k_1 als Teilspecies enthaltene, wenigstens einen Punkt enthaltende perfekte Punktspecies angegeben werden kann, so gilt weiter, dass *jedes messbare Bereichkomplement positiven Inhaltes eine wenigstens einen Punkt enthaltende perfekte Teilspecies enthält.* [[31]]

Seien $k' = \mathfrak{D}(M'_1, M'_2, \ldots)$ und $k'' = \mathfrak{D}(M''_1, M''_2, \ldots)$, wo jedes $M'_{\nu+1}$ zu M'_ν und jedes $M''_{\nu+1}$ zu M''_ν gehört, zwei Bereichkomplemente Wir bezeichnen $\mathfrak{S}(M'_\nu, M''_\nu)$ mit M'''_ν und das Bereichkomplement $k''' = \mathfrak{D}(M'''_1, M'''_2, \ldots)$ als das *vereinigende Bereichkomplement* von k' und k''. Wenn k' und k'' beide messbar sind, so ist, wie sofort ersichtlich, auch k''' messbar. Unter dieser Annahme wählen wir für ρ eine willkürliche positive ganze Zahl und für ν_1 eine solche positive ganze Zahl, dass $[i'_{\nu_1+\lambda} - i'_{\nu_1}] < \frac{1}{2^{\rho+2}}$ und $[i''_{\nu_1+\lambda} - i''_{\nu_1}] < \frac{1}{2^{\rho+2}}$ für jedes positive λ. Sei R eine solche zu M''_{ν_1} gehörige und M'_{ν_1} nicht berührende endliche Quadratmenge, dass die Differenz der Inhalte von M'''_{ν_1} und $\mathfrak{S}(M'_{\nu_1}, R)$ weniger als $\frac{1}{2^{\rho+1}}$ beträgt. Wenn wir $\mathfrak{D}(M''_\nu, R)$ mit N''_ν, $\mathfrak{S}(M'_\nu, N''_\nu)$ mit N_ν und $\mathfrak{D}(N_1, N_2, \ldots)$ mit h bezeichnen, so ist h ein sowohl in k''' wie in der Vereinigung von k' und k'' als Teilspecies enthaltenes Bereichkomplement, dessen Inhalt grösser als $i''' - \frac{1}{2^\rho}$ ist. Weil dieselbe Beweisführung [[32]]

sich auf eine beliebige endliche Zahl von messbaren Bereichkomplementen erweitern lässt, so sind wir zu folgendem Satz gelangt:

Die Vereinigung einer endlichen Zahl von messbaren Bereichkomplementen $k', k'', \ldots k^{(m)}$ enthält als Teilspecies ein messbares Bereichkomplement, dessen Inhalt dem Inhalte des vereinigenden Bereichkomplementes von $k', k'', \ldots k^{(m)}$ beliebig nahe kommt.

Wenn für eine äussere Grenzspecies $A = \mathfrak{S}(k_1, k_2, \ldots)$ jedes k_ν § 17
messbar ist und die Inhalte i_ν der k_ν eine limitierte Folge i bilden, so heisst A *messbar* und i der *Inhalt* von A.

Sei $k^{(\nu)} = \mathfrak{D}(M_1^{(\nu)}, M_2^{(\nu)}, \ldots)$ ein für jedes ν bestimmtes messbares Bereichkomplement. Wir nehmen an, dass $M_{m+1}^{(\nu)}$ für jedes m und jedes ν zu $M_m^{(\nu)}$ gehört und dürfen weiter annehmen, dass $[i_{m+\lambda}^{(\nu)} - i_m^{(\nu)}] < \frac{1}{2^m}$ für jedes m, jedes $\nu \leq m$ und jedes positive λ. Wir bezeichnen das vereinigende Bereichkomplement $\mathfrak{D}(L_1^{(\nu)}, L_2^{(\nu)}, \ldots)$ von k', $k'', \ldots k^{(\nu)}$ mit $h^{(\nu)}$ und nehmen an, dass die Inhalte $I_1, I_2, \ldots$ von h', $h'', \ldots$ eine limitierte Folge bilden. Weiter verstehen wir unter $N_m^{(\nu)}$ eine nach irgend einem Gesetz für jedes m und jedes ν bestimmte endliche Quadratmenge, welche zu $M_m^{(\nu)}$ gehört und $L_m^{(\nu-1)}$ nicht berührt, während die Differenz der Inhalte von $L_m^{(\nu)}$ und $\mathfrak{S}(L_m^{(\nu-1)}, N_m^{(\nu)})$ weniger als $\frac{1}{2^m}$ beträgt und der Durchschnitt von $N_m^{(\nu)}$ und $M_{m+1}^{(\nu)}$ für jedes m und jedes ν zu $N_{m+1}^{(\nu)}$ gehört. Wenn wir den Durchschnitt von $N_m^{(\nu)}$ und $k^{(\nu)}$ mit $p_m^{(\nu)}$ und die Vereinigung von $p'_m, p''_m, \ldots p_m^{(m)}$ mit $g^{(m)}$ bezeichnen, so sind $A_1 = \mathfrak{S}(h', h'', \ldots)$ und $A_2 = \mathfrak{S}(g', g'', \ldots)$ *zwei inhaltsgleiche äussere Grenzspecies*, von denen die erstere, welche die *vereinigende äussere Grenzspecies* der Fundamentalreihe $k', k'', \ldots$ genannt wird, die Vereinigung von $k', k'', \ldots$ als Teilspecies enthält und die letztere in der Vereinigung
[[33]] von $k', k'', \ldots$ als Teilspecies enthalten ist. D. h. wir haben bewiesen:

Die Vereinigung einer Fundamentalreihe F von messbaren Bereichkomplementen, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Inhalte der vereinigenden Bereichkomplemente ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge bilden, enthält eine mit der vereinigenden äussern Grenzspecies von F inhaltsgleiche äussere Grenzspecies.

Eine Fundamentalreihe F von äusseren Grenzspecies bestimmt eine Doppelfolge von Bereichkomplementen. Wenn wir diese Doppelfolge als eine einfache Fundamentalreihe lesen, so ist einerseits die Definition der *vereinigenden äussern Grenzspecies* von F ohne weiteres klar, andererseits lässt der vorstehende Satz sich unmittelbar wie folgt erweitern:

Die Vereinigung einer Fundamentalreihe F von messbaren äusseren Grenzspecies, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Inhalte der vereinigenden äusseren Grenzspecies ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge bilden, enthält eine mit der vereinigenden äussern Grenzspecies von F inhaltsgleiche äussere Grenzspecies. ⟦34⟧

Sei $A = \mathfrak{S}(k', k'', \ldots)$, wo $k^{(\nu)} = \mathfrak{D}(M_1^{(\nu)}, M_2^{(\nu)}, \ldots)$ eine messbare äussere Grenzspecies. Wir dürfen annehmen, dass $M_m^{(\nu)}$ für jedes m und jedes ν zu $M_m^{(\nu+1)}$ gehört. Sei $i^{(\nu)}$ der Inhalt von $k^{(\nu)}$ und i der Inhalt von A. Zu jedem $k^{(\nu)}$ lässt sich dem obigen gemäss ein in $k^{(\nu)}$ als Teilspecies enthaltenes, mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisches messbares Bereichkomplement $h^{(\nu)} = \mathfrak{D}(L_1^{(\nu)}, L_2^{(\nu)}, \ldots)$ bestimmen, dessen Inhalt mehr als $i^{(\nu)} - \frac{1}{2^\nu}$ beträgt, wobei wir leicht dafür sorgen können, dass $L_m^{(\nu)}$ für jedes m und jedes ν zu $L_m^{(\nu+1)}$ gehört, so dass die Vereinigung von $h', h'', \ldots$ eine mit A inhaltsgleiche äussere Grenzspecies darstellt. Mithin gilt der Satz: ⟦35⟧

Jede messbare äussere Grenzspecies enthält als inhaltsgleiche Teilspecies eine konsolidierte, also mit einer Punktmenge zusammenfallende äussere Grenzspecies. ⟦36⟧

§ 18 Eine Punktspecies Q heisst *messbar*, wenn für jedes ganze positive ν ein solches m_ν, zwei solche endliche Mengen a'_ν und a''_ν von zur reduzierten Ebene E gehörigen Quadraten $\varkappa_{m_\nu}$ und ein solcher messbarer Bereich β_ν bestimmt sind, dass ein willkürlicher Punkt des Durchschnittes d'_ν bzw. d''_ν von a'_ν bzw. a''_ν mit dem Komplemente k_ν von β_ν zu Q gehört bzw. unmöglich zu Q gehören kann, während der Inhalt i_ν von β_ν kleiner als $\frac{1}{2^\nu}$ und die Summe der Inhalte i'_ν und i''_ν von a'_ν und a''_ν grösser als $1 - \frac{1}{2^\nu}$ ist.

Der Durchschnitt $d_{\mu\nu}$ von d'_μ und d''_ν ist ein messbares Bereichkomplement, der keinen Punkt, also erst recht keine messbare Abschliessung positiven Inhaltes einer katalogisierten Punktspecies enthalten kann, besitzt mithin für jedes μ und jedes ν den Inhalt Null. Hieraus folgern wir zunächst, dass der Durchschnitt $a_{\mu\nu}$ von a'_μ und a''_ν für jedes μ und jedes ν einen Inhalt $< \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{2^\nu}$ besitzt und sodann *erstens*, dass die mit i zu bezeichnende Folge $i'_1, i'_2, \ldots$ und die Folge $i''_1, i''_2, \ldots$ limitiert sind und eine Summe gleich 1 besitzen, *zweitens*, dass bei der vorstehenden Definition angenommen werden darf, dass a'_ν und a''_ν kein gemeinsames Quadrat $\varkappa_{m_\nu}$ enthalten und zusammen das Quadrat E vollständig überdecken, *drittens*, dass, wenn Q in mehr als einer Weise der Messbarkeitsdefinition genügt, die entsprechenden limitierten Folgen i gleich sind. Wir bezeichnen diese limitierten Folgen als den *Inhalt* von Q.

Offenbar werden von dieser allgemeinen Inhaltsdefinition besondere Fälle geliefert durch die vorausgeschikten Definitionen des Inhaltes von messbaren Bereichen, Bereichkomplementen und äus-
[[37]] seren Grenzspecies.

Wenn wir die Species derjenigen Punkte, welche unmöglich zu Q gehören können, mit $C(Q)$ bezeichnen, so *zieht die Messbarkeit von Q die Messbarkeit von C(Q) nach sich.* Für die umgekehrte Aussage liegen keine zureichenden Gründe vor.

Zu jeder messbaren Punktspecies Q vom Inhalte i existieren zwei § 19
derartige messbare konsolidierte äussere Grenzspecies A'_Q und A''_Q der Inhalte i und 1—i, dass ein willkürlicher Punkt von A'_Q zu Q gehört und ein willkürlicher Punkt von A''_Q unmöglich zu Q gehören kann.

[[38]] Zum Beweise dieses Satzes bezeichnen wir $\mathfrak{S}(\beta_\nu, \beta_{\nu+1}, \ldots)$ mit β°_ν, das Komplement von β°_ν mit k°_ν, $\mathfrak{D}(a'_\nu, k^\circ_\nu)$ mit e_ν, $\mathfrak{D}(a'_\nu, a'_{\nu+1}, \ldots)$ mit f_ν, $\mathfrak{D}(e_\nu, f_\nu)$ mit b_ν. Alsdann ist β°_ν ein messbarer Bereich, dessen Inhalt i°_ν kleiner als $\frac{1}{2^{\nu-1}}$ ist. Weiter ist der Durchschnitt von k°_ν mit einem willkürlichen Quadrate $\varkappa$, das von a'_ν überdeckt wird, aber für irgend ein positives λ von $\mathfrak{D}(a'_\nu, a'_{\nu+1}, \ldots a'_{\nu+\lambda})$ weder ganz noch teilweise überdeckt wird, ein messbares Bereichkomplement, das keinen Punkt enthalten kann, mithin den Inhalt Null besitzt. Hieraus folgt, dass nicht nur e_ν, sondern auch b_ν ein messbares Bereichkomplement ist, während e_ν und b_ν gleiche Inhalte besitzen, so dass der Inhalt von b_ν grösser als $i'_\nu - \frac{1}{2^{\nu-1}}$ ist. Die äussere Grenzspecies $\mathfrak{S}(b_1, b_2, \ldots)$ ist somit messbar, besitzt den Inhalt i und enthält eine messbare konsolidierte äussere Grenzspecies A'_Q vom Inhalt i als Teilspecies. Genau analog wird A''_Q bestimmt.

Punktspecies der geforderten Art können auch wie folgt hergestellt werden: Der Durchschnitt eines willkürlichen Quadrates $\varkappa$, das von a'_ν weder ganz noch teilweise überdeckt wird aber für irgend ein positives λ von $a'_{\nu+\lambda}$ überdeckt wird, mit dem Komplement von $\mathfrak{S}(\beta_\nu, \beta_{\nu+\lambda})$ ist ein messbares Bereichkomplement, das keinen Punkt enthalten kann, mithin den Inhalt Null besitzt, so

[[218]]

dass die Differenz der Inhalte von a'_ν und $\mathfrak{S}(a'_\nu, a'_{\nu+1})$ kleiner als $\frac{1}{2^{\nu-1}}$ und die Differenz der Inhalte von d'_ν und dem vereinigenden Bereichkomplemente von d'_ν und $d'_{\nu+1}$ kleiner als $\frac{1}{2^{\nu-2}}$ ist. Weil mithin die Inhalte der vereinigenden Bereichkomplemente der Anfangssegmente der Fundamentalreihe von messbaren Bereichkomplementen $d'_1, d'_2, \ldots$ eine limitierte Folge bilden, so kann eine in $\mathfrak{S}(d'_1, d'_2, \ldots)$ enthaltene, mit der vereinigenden äussern Grenzspecies von $d'_1, d'_2, \ldots$ inhaltsgleiche, messbare konsolidierte äussere Grenzspecies A'_Q bestimmt werden. Der Inhalt $°i'$ von A'_Q kann nicht $< i$ sein. In analoger Weise konstruieren wir eine in $\mathfrak{S}(d''_1, d''_2, \ldots)$ enthaltene, mit der vereinigenden äussern Grenzspecies von $d''_1, d''_2, \ldots$ inhaltsgleiche, messbare konsolidierte äussere Grenzspecies A''_Q, deren Inhalt $°i''$ nicht $< 1-i$ sein kann. Wenn nun $°i' + °i'' > 1$ wäre, so würde ein messbares Bereichkomplement positiven Inhaltes existieren, das sowohl zu A'_Q wie zu A''_Q gehörte, von dem mithin ein willkürlicher Punkt einerseits zu Q gehörte, andererseits unmöglich zu Q gehören könnte. Aus diesem Widerspruche folgt also, dass $°i' = i$ und $°i'' = 1-i$ ist.

Umgekehrt folgt aus der Definition der Messbarkeit in ihrer ursprünglichen Form unmittelbar: *Wenn zu einer Punktspecies Q zwei derartige messbare äussere Grenzspecies A'_Q und A''_Q der Inhalte i und $1-i$ existieren, dass ein willkürlicher Punkt von A'_Q zu Q gehört und ein willkürlicher Punkt von A''_Q unmöglich zu Q gehören kann, so ist Q messbar und besitzt den Inhalt i.* [[39]]

[[40]]

§ 20 Seien ${}_1Q$ und ${}_2Q$ zwei messbare Punktspecies. Sei ${}_3a''_\nu$ der Durchschnitt von ${}_1a''_\nu$ und ${}_2a''_\nu$, b'_ν eine solche zu ${}_2a'_\nu$ gehörige und ${}_1a'_\nu$ nicht berührende endliche Quadratmenge, dass die Differenz der Inhalte von $\mathfrak{S}({}_1a'_\nu, {}_2a'_\nu)$ und ${}_3a'_\nu = \mathfrak{S}({}_1a'_\nu, b'_\nu)$ weniger als $\frac{1}{2^\nu}$ beträgt, ${}_3\beta_\nu$ die Vereinigung von ${}_1\beta_\nu$ und ${}_2\beta_\nu$, ${}_3k_\nu$ das Komplement von ${}_3\beta_\nu$. Alsdann ist der Inhalt ${}_3i_\nu$ von ${}_3\beta_\nu$ kleiner als $\frac{1}{2^{\nu-1}}$ und die Summe der Inhalte ${}_3i'_\nu$ und ${}_3i''_\nu$ von ${}_3a'_\nu$ und ${}_3a''_\nu$ grösser als $1 - \frac{1}{2^\nu}$, während ein willkürlicher Punkt des Durchschnittes ${}_3d'_\nu$ bzw. ${}_3d''_\nu$ von ${}_3a'_\nu$ bzw. ${}_3a''_\nu$ mit ${}_3k_\nu$ zu $\mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q)$ gehört bzw. unmöglich zu $\mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q)$ gehören kann. Hieraus folgt auf Grund der Messbarkeitsdefinition in ihrer ursprünglichen Form, dass auch $\mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q)$ messbar ist. Mithin gilt der Satz:

[[219]]

Die Vereinigung einer endlichen Zahl von messbaren Punktspecies ist wiederum eine messbare Punktspecies.

In analoger Weise wird bewiesen:

Der Durchschnitt einer endlichen Zahl von messbaren Punktspecies ist wiederum eine messbare Punktspecies.

Im Falle der Vereinigung zweier elementefremder messbarer Punktspecies ${}_1Q$ und ${}_2Q$ kann der Inhalt des Durchschnittes von ${}_1a'_\nu$ und ${}_2a'_\nu$ nicht grösser als $\frac{1}{2^{\nu-1}}$, mithin ${}_3i'_\nu$ nicht kleiner als ${}_1i'_\nu + {}_2i'_\nu - \frac{1}{2^{\nu-2}}$ sein. Weil somit ${}_3i'_1, {}_3i'_2, \ldots$ und ${}_1i'_1 + {}_2i'_1, {}_1i'_2 + {}_2i'_2, \ldots$ gleiche limitierte Folgen sind, so besteht der Satz:

Der Inhalt der Vereinigung einer endlichen Zahl von elementefremden messbaren Punktspecies $Q', Q'', \ldots Q^{(n)}$ ist gleich der Summe der Inhalte von $Q', Q'', \ldots Q^{(n)}$.

Im Falle des Durchschnittes von ${}_1Q$ und ${}_2Q = C(T)$, wo T eine messbare Teilspecies von ${}_1Q$ ist, können wir dafür sorgen, dass jeder Punkt von ${}_2d''_\nu$ zu T gehört. Als dannkann der Inhalt des nicht von ${}_1a'_\nu$ überdeckten Teiles von ${}_2a''_\nu$ nicht grösser als $\frac{1}{2^{\nu-1}}$, mithin ${}_3i'_\nu$ nicht grösser als ${}_1i'_\nu - {}_2i''_\nu + \frac{1}{2^{\nu-1}}$ und nicht kleiner als ${}_1i'_\nu - {}_2i''_\nu$ sein. Hieraus folgt, dass ${}_3i'_1, {}_3i'_2, \ldots$ und ${}_1i'_1 - {}_2i''_1, {}_1i'_2 - {}_2i''_2, \ldots$ gleiche limitierte Folgen sind. Wenn wir mithin die Species derjenigen Punkte von ${}_1Q$, welche unmöglich zu T gehören können, als die *Differenz* von ${}_1Q$ und T bezeichnen, so besteht die Eigenschaft:

Wenn die messbare Punktspecies Q'' eine Teilspecies der messbaren Punktspecies Q' ist, so ist auch die Differenz von Q' und Q'' messbar und ihr Inhalt gleich der Differenz der Inhalte von Q' und Q''.

Sei ${}_1Q, {}_2Q, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe von messbaren Punkt- § 21
species, dass die Inhalte ${}^1i, {}^2i, {}^3i, \ldots$ von ${}^1Q = {}_1Q$, ${}^2Q = \mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q)$, ${}^3Q = \mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q, {}_3Q), \ldots$ eine limitierte Folge i bilden. Wir bezeichnen $\mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q, \ldots)$ mit ${}^\omega Q$, die Vereinigung derjenigen ${}_\nu a'_n$, für welche $\nu = 1, 2, \ldots m$ und $n = p + \nu, p + \nu + 1, \ldots p + \nu + m - 1$, mit ${}^{mp}a'$, den Durchschnitt derjenigen ${}_\nu a''_n$, für welche $\nu = 1, 2, \ldots m$ und $n = p + \nu, p + \nu + 1, \ldots p + \nu + m - 1$, mit ${}^{mp}a''$, das vereinigende Bereichkomplement derjenigen ${}_\nu d'_n$, für welche $\nu = 1, 2, \ldots m$ und $n = p + \nu, \ldots p + \nu + m - 1$, mit ${}^{mp}d'$. Wenn ${}^m i > i - \frac{1}{2^{\mu+1}}$ und $p + m \geq \mu + 2$, so ist der Inhalt des vereinigenden Bereichkomplementes von ${}_1d'_{p+m}, {}_2d'_{p+m+1}, \ldots {}_md'_{p+2m-1}$, also erst recht der

[[220]]

Inhalt ${}^{m_p}i'$ von ${}^{m_p}d'$ grösser als $i - \frac{1}{2^\mu}$. Andererseits würde für ${}^{m_p}i' > i$ in ${}^mQ$ ein messbares Bereichkomplement mit einem Inhalt grösser als i enthalten sein, was unmöglich ist. Mithin bilden für jedes p die Inhalte ${}^{1p}i'$, ${}^{2p}i'$,... eine limitierte Folge, welche gleich i ist.

Hieraus folgt, dass für jedes p auch die Inhalte von ${}^{1p}a'$, ${}^{2p}a'$,..., sowie die Inhalte von ${}^{1p}a''$, ${}^{2p}a''$,... limitierte Folgen bilden, so dass zu jedem p ein solches m_p und ein solcher messbarer Bereich ${}^p\beta''$ mit einem Inhalt kleiner als $\frac{1}{2^p}$ bestimmt werden kann, dass jeder Punkt des Durchschnittes von ${}^{m_p p}a''$ mit dem Komplement ${}^pk''$ von ${}^p\beta''$ zu $\underset{\nu\geq 1, n\geq p+\nu}{\mathfrak{D}} {}_\nu a_n''$ gehört. Wenn wir weiter $\underset{\nu\geq 1, n\geq p+\nu}{\mathfrak{S}} {}_\nu\beta_n$ mit ${}^p\beta'$ und $\mathfrak{S}({}^p\beta', {}^p\beta'')$ mit ${}^p\beta$ bezeichnen, so ist der Inhalt von ${}^p\beta'$ kleiner als $\frac{1}{2^{p-1}}$, der Inhalt von ${}^p\beta$ also kleiner als $\frac{1}{2^{p-2}}$.

Weiter kann zu jedem p eine solche zu ${}^{m_p p}a'$ gehörige endliche Quadratmenge ${}^{m_p p}a'_0$ bestimmt werden, dass die Differenz der Inhalte von ${}^{m_p p}a'$ und ${}^{m_p p}a'_0$ weniger als $\frac{1}{2^{p-2}}$ beträgt und ein willkürlicher Punkt des Durchschnittes von ${}^{m_p p}a'_0$ mit dem Komplement ${}^pk'$ von ${}^p\beta'$ zu ${}^{m_p}Q$ gehört.

Nunmehr sind für ${}^\omega Q$ alle Messbarkeitsbedingungen erfüllt, denn für jedes $p - 2$ sind ein solches ${}^{m_p p}a_0'$, ein solches ${}^{m_p p}a''$ und ein solches ${}^p\beta$ bestimmt, dass ein willkürlicher Punkt des Durchschnittes von ${}^{m_p p}a_0'$ bzw. ${}^{m_p p}a''$ mit dem Komplemente ${}^pk$ von ${}^p\beta$ zu ${}^\omega Q$ gehört bzw. unmöglich zu ${}^\omega Q$ gehören kann, während der Inhalt von ${}^p\beta$ kleiner als $\frac{1}{2^{p-2}}$ und die Summe der Inhalte von ${}^{m_p p}a_0'$ und ${}^{m_p p}a''$ grösser als $1 - \frac{1}{2^{p-2}}$ ist. Wir sind also zu folgendem Resultat gelangt:

Wenn F eine solche Fundamentalreihe von messbaren Punktspecies ist, dass die Inhalte der Vereinigungen ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge i bilden, so ist auch die Vereinigung von F messbar und ihr Inhalt gleich i. [[41]]

In analoger Weise wird bewiesen:

Wenn F eine solche Fundamentalreihe von messbaren Punktspecies ist, dass die Inhalte der Durchschnitte ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge i bilden, so ist auch der Durchschnitt von F messbar und sein Inhalt gleich i. [[42]]

1919 C

SIGNIFISCHE SPRACHFORSCHUNG

(Uebersetzung)

⟦1⟧ 1. Die Gründer des Institutes sind sich der folgenden Tatsache bewusst: die Akademie, welche sie mit dem in den Satzungen umschriebenen Ziel stiften wollen, muss volle Freiheit behalten betreffs der Weise, wie sie diesem Ziele nachstreben soll. Denn nur dann wird es den zu ernennenden Mitgliedern der Akademie möglich sein, ihre volle Energie der gemeinschaftlichen Arbeit zu widmen, während jeder Versuch, diese Arbeit schon von vornherein in bestimmte Bahnen zu lenken, nur hemmend wirken kann. Andererseits aber halten die Gründer der Akademie sich für völlig berechtigt und sogar für verpflichtet, die Vorstellung, die sie sich auf Grund wechselseitigen Gedankenaustausches von der Ausarbeitung des in den Satzungen zum Ausdruck gebrachten Grundgedankens gebildet haben, öffentlich auseinanderzusetzen. Ohne eine derartige Vorarbeit könnte betreffs der in kurzen Formeln nur sehr unvollständig ausdrückbaren Absicht der Begründer (die ja beschlossen haben, keinen von ihnen zum Mitglied der Akademie zu ernennen) sehr leicht ein Missverständnis entstehen und durch ein solches Missverständnis könnte der Erfolg der gemeinsamen Arbeit der Mitglieder der künftigen Akademie in Gefahr gebracht werden. Die nachfolgende Darlegung ist eine kurze Zusammenfassung von dem, was die Gründer diesbezüglich besprochen haben.

2. Im allgemeinen sind die Gründer der Meinung, dass die im Manifest angegebene Aufgabe der Akademie eine teilweise *individuelle* und teilweise *gemeinschaftliche* Arbeit verlangen wird, nämlich

1o. die Veröffentlichung von Abhandlungen der Mitglieder unter ihrer eigenen Verantwortung.

2o. das Feststellen von Grundwörtern für die Sprache der Rechts- und Interessenbeziehungen innerhalb der Gesellschaft und die Ausgabe von (vielsprachigen) Wörterbüchern dieser Sprache, wobei alle Wörter mittelst der Grundwörter zu definieren wären. Die Gründer der Akademie stellen sich vor, dass diese Aufgabe unter ihre Mitglieder oder dazu ernannte Subkommissionen verteilt werden wird, wonach die eingelaufenen Berichte durch die Akademie untersucht und die

⟦222⟧

Resultate verändert oder unverändert unter Verantwortung der ganzen Akademie festgestellt werden. Um dieser Verantwortlichheit die nötige Kraft zu geben, wird es ihrer Ansicht nach notwendig sein, jede Ueberstimmung einer Minorität durch eine Majorität von vornherein auszuschliessen.

Betreffs Zweck und Einrichtung des Wörterbuches wurde folgendes erwogen:

3. Ausgehend von dem gegenwärtig wohl Gemeingut gewordenen Grundgedanken, dass die Sprache niemals im Stande ist, irgend einen Teil der Wirklichkeit adäquat abzubilden oder wiederzugeben, sondern die sogenannte Bedeutung der Wörter ausschliesslich durch die Wirkung, die der Sprechende davon erwartet oder der Hörende davon erfährt, bestimmt ist – von diesem Grundgedanken ausgehend, muss dennoch zugegeben werden, dass die zum Wesen der Sprache gehörende Veränderlichkeit und Relativität der Bedeutungen sich in sehr verschiedenem Mass und unter sehr verschiedenen Formen äussern kann. Im allgemeinen kann man sagen, dass in demselben Masse, als die Bedürfnisse der Menschen differenziertere Handlungen nötig machten, auch die Sprache differenzierter und dementsprechend stabilisierter werden musste. Die grössere Stabilität wurde gefördert äusserlich durch Schrift und Druck, innerlich durch das, was man die Organisation der Sprache nennen könnte, d. h. durch möglichst vollkommene Bestimmung der Beziehungen der Bedeutung jedes einzelnen Wortes zu den Bedeutungen anderer Wörter. Am deutlichsten zeigt sich dies in den eigentlichen Definitionen, wie sie in ihrer strengsten Form in der Mathematik und in der Rechtswissenschaft angetroffen werden, ohne indes in irgend einem Wissenschaftszweige ganz zu fehlen; zu den Organisationserscheinungen gehören aber auch alle syntaktische Wortverbindungen, wie sie durch Gewohnheit und Sprachgebrauch von dem einen auf den anderen überliefert werden, ohne vorher durch Obrigkeits- oder Wissenschaftsautorität ausdrücklich festgestellt zu sein. Diese syntaktischen Wortverbindungen spielen schon in den ersten Sprachformen des Kindes eine grosse Rolle. Sie verursachen, dass in dieser vom sprachphilosophischen Standpunkt so besonders interessanten Kindersprache reine „Grundwörter", d. h. Wörter, deren Kenntnis dem Kinde nicht durch Vermittlung anderer Wörter, sondern ausschliesslich durch Anweisung und Nachahmung beigebracht worden sind,

nur in geringer Anzahl vorkommen. Sehr bald üben die von den Erwachsenen gebrauchten Wortverbindungen (kausale, gegensätzliche, zeitliche, usw.) auf das Sprachbild des Kindes einen grossen Einfluss aus und mit diesem Einfluss nimmt die Stabilität seines kleinen Wortschatzes schnell zu, bis sich nach wenigen Jahren eine Umgangsprache von scheinbar so fester Form entwickelt hat, dass die von uns vorhin als „Veränderlichkeit und Relativität der Bedeutungen" beschriebene Erscheinung später durch Selbstbesinnung und Sprachbeobachtung gewissermassen aufs neue entdeckt werden muss. Auch in der Sprachgeschichte (Phylo- und Ontogenese laufen ja auch auf linguistischem Gebiet mehr oder weniger parallel) ist eine fortdauernde, wenn auch nicht stets regelmässige Zunahme der Wortstabilität zu bemerken in der Entwicklung von den dichterischen Sprachen der grauen Vorzeit zu der mehr festliegenden Ausdrucksweise der späteren Griechen und Römer, den künstlichen Wortgeweben der mittelalterlichen Philosophen und endlich den festgefügten Sprachsystemen der neuern Natur- und Rechtswissenschaft. Obwohl es der Natur der Sache nach unmöglich ist, hier einen endgültigen Massstab anzulegen, dürfte eine Einteilung folgender Art vorläufig brauchbar sein:

a. Grundsprache, in der die syntaktischen Beziehungen wenig oder keinen Einfluss ansüben und jedes Wort (oder jede Wortgruppe) direkt zur Anschauung spricht (erste Kindersprache, Sprache bei heftiger oder tiefer Gemütsbewegung, hypothetische Ursprache);

b. Stimmungssprache, in der syntaktische Beziehungen, besonders gegensätzliche, deutlich wahrnehmbar sind, ohne aber dauerhaft festgelegt zu sein. Die Wörter (Wortgruppen) wirken sowohl direkt wie mittels der Erinnerung an (ausgesprochene oder nicht ausgesprochene) andere Wörter auf das Gemüt des Zuhörers. Zu dieser Sprachstufe gehört die in der Subjekt-Prädikatform konstruierte Sprache der modernen westlichen Gesellschaft nur insofern sie sich auf die Formulierung persönlicher Erfahrungen und Stimmungen beschränkt (Volkssprache, Dichtersprache, orientalische Sprachen mit Bilderschrift, Sprache der nicht-pasigraphischen, nicht-angewandten Mathematik);

c. Verkehrssprache, in der die syntaktischen Beziehungen die Hauptsache geworden sind, so dass die Wörter fast niemals eine selbständige Wirkung beabsichtigen und jede Abweichung von den traditionellen gegensätzlichen Gruppierungen (wie weissschwarz, gut-schlecht, Freiheit-Zwang, ja-nein) als unangenehm und störend empfunden wird (Handels- und Verkehrssprache, westeuropäische Schriftsprachen);

d. Wissenschaftliche Sprache, in der die syntaktischen Beziehungen wenigstens zum grossen Teil auf ausdrücklicher Uebereinkunft oder Vorschrift beruhen: die Sprache der Gesetze und Verordnungen, der finanziellen Beziehungen, der Technik und der Wissenschaft im engern Sinn;

e. Symbolsprache, von der diejenigen logischen Systeme umfasst werden, welche *ausschliesslich* beruhen auf von vornherein festgestellten Substitutionsformeln (Axiomen, Postulaten, „proposizioni primitivi") betreffs der benutzten Symbole (mögen diese Substitutionsformeln in Form von Wörtern gegeben sein oder auch nicht). Hierzu gehören also die mathematische Logik und derjenige Teil der (nicht angewandten) Mathematik, der in pasigraphische Form gebracht worden ist oder gebracht werden kann. Von „Bedeutung" im oben umschriebenen Sinn ist auf dieser Sprachstufe wenig Rede mehr, da im allgemeinen nur erst durch Einfügung der symbolischen Sprachbilder in die wissenschaftliche oder in die Verkehrssprache eine Wirkung auf die Zuhörer beabsichtigt wird.

4. Wenn die Akademie diese (oder eine analoge) Spracheinteilung akzeptiert, so wird es natürlicherweise wünschenswert sein, dass sie derselben bei der lexikologischen Arbeit Rechnung trägt, und das Wörterbuch aus einer entsprechenden Zahl von Unterabteilungen bestehen lässt, so zwar dass das Lexikon jeder Sprachstufe die Wörter der vorhergehenden Sprachstufen, aber keine anderen als bekannt voraussetzt, abgesehen vom freien Gebrauch der gegebenen Sprache im erläuternden und umschreibenden Text. Selbstverständlich braucht dabei die Ausarbeitung des Wörterbuchs einer höhern Sprachstufe nicht auf die Vollendung derjenigen der vorhergehenden Sprachstufen zu warten; es werden im Gegenteil die Bedürfnisse der höheren Sprachstufen für die Wahl der beim Studium der niedrigeren Stufen in den Vordergrund zu rückenden Wörter massgebend sein. Indessen würde nach dem Urteil der Gründer die Ausführung dieses Programms sich als unmöglich erweisen, wenn man sich bei jeder Sprachstufe auf die heute schon bestehenden Wörter zu beschränken hätte. Dies ist schon deshalb ausgeschlossen, weil die vorhin skizzierten „Sprachen" nicht ganz für sich und systematisch benützt werden, sondern

der sprechende und denkende Mensch immer wieder von der einen in die andere Sprachform übergeht und denselben Laut oder dasselbe Zeichen das eine Mal im engern, auf traditionelle Regeln bezogenen Sinn, das andre Mal zum emotionellen, auf die augenblicklichen Umstände gerichteten Ausspruch gebraucht. Um mithin eine (ihrer Natur nach einigermassen künstliche) Spaltung, wie oben angedeutet, durchzuführen, wird es nötig sein, jede Sprachstufe durch passende neu einzuführende und zu umschreibende (oder zu definierende) Wörter oder Symbole zu ergänzen, welche von irreführenden traditionellen syntaktischen Beziehungen nicht beeinflusst werden können. In diesem Sinne stellen sich die Gründer vor, dass die (signifische) Bearbeitung der Sprache in ihren verschiedenen Gliederungen aus einem *beschreibenden* und einem *synthetischen* Teil zu bestehen haben wird.

5. Hinsichtlich des ferneren Ziels, dem nach der Meinung der Gründer durch stetige Arbeit in der angegebenen Richtung nachgestrebt werden könnte, muss beachtet werden, dass nicht das Propagieren bestimmter Denkformen oder Denkbilder beabsichtigt wird. Solche sind ja nichts anderes als gemeinschaftliche Willensäusserungen gewisser Menschengruppen, wurzelnd in ihren gesellschaftlichen und geistigen Bedürfnissen und orientiert nach ihrem gesellschaftlichen und geistigen Können. Als Verbindungsglied zwischen diesen Bedürfnissen und diesem Können ist aber die Sprache von heute vollkommen ungenügend, sowohl wegen zu häufiger Unbestimmtheit und Doppelsinnigkeit in der Bezeichnung von bestimmten Realitäten, wie auch wegen einer unphilosophischen Apodiktizität und Starrheit, wo es sich um die Wiedergabe von psychischen Erscheinungen handelt. Um diese Mängel, wenn auch nicht zu beseitigen, so doch zu vermindern, ist vor allem eine Reinigung der unter *c.* genannten „Verkehrssprache" erforderlich, welche indes nicht möglich ist ohne ein vorangegangenes gründliches Studium der Beziehung dieser Sprachstufe zu den beiden vorangehenden und den beiden folgenden, ein Studium, das von den blosszulegenden Lücken auch anzugeben haben wird, wie sie ausgefüllt werden können. Eine allererste Aufgabe der Akademie wird also diese sein, dass sie unter ihrer eigenen Verantwortung ein ganz neues Sprachbild skizziert, wenn auch unter Benutzung derjenigen Züge der bestehenden Sprachen, welche rein gefühlte Realitäten und unumwundene Absichten ausdrücken. Wenn diese neue Sprache ihrem Zwecke ent-

sprechen soll, so wird sie nicht ein weiteres Zwangmittel für das Fühlen und Wollen der Menschen darstellen, sondern im Gegenteil die Erwägung der divergentesten Auffassungen erlauben müssen. Denn in der Tat: keine vollständige und kräftige Formulierung einer bestimmten Vorliebe ist möglich, die nicht zugleich dem Gedankengang derjenigen, die sie nicht teilen, volle Gerechtigkeit widerfahren lässt.

Obwohl also die Mitarbeiter an diesem Werke sich stets vor der Einseitigkeit werden hüten müssen, die so leicht aus ihrer persönlichen Vorliebe und Auffassung entspringen kann, so wird doch schon ihre Arbeit an sich zweifellos eine grosse soziale Bedeutung besitzen. Denn auch schon ehe noch ein einigermassen abgerundetes Arbeitsresultat erhalten sein wird, werden ernste Denker dreierlei Vorteil davon haben können: erstens dadurch, dass die Relativität des Wortwertes stark hervortreten und sich klar herausstellen wird, dass beim Uebergang von jeder Sprachstufe zur folgenden der Gewinn an Sicherheit und Allgemeinverständlichkeit mit einem Verlust an Reichtum und Tiefe zusammengeht, zweitens dadurch dass auch diejenigen menschlichen Bedürfnisse, deren wörtlicher Ausdruck bisher ausserhalb der Wirkungssphäre der traditionellen syntaktischen Beziehungen geblieben ist, besser zur Geltung gekommen sein werden, und schliesslich weil die Unterscheidung zwischen dem emotionellen und dem indikativen Werte der Wörter an sich schon ein mächtiges Hilfsmittel ist zur Entwirrung der beinahe auf jedem Gebiet menschlicher Geistesarbeit herrschenden Missverständnisse.

Eine notwendige Vorbedingung dazu muss allerdings erfüllt sein: dass die neue Sprache eine lebendige sei. Jedes erhaltene Resultat muss als provisorisch angesehen werden und vom Anfang an muss zu fortwährender Revision, wenigstens der emotionellen Wortwerte, die Bereitschaft da sein.

6. Schliesslich legen die Gründer Wert darauf, ausdrücklich zu erklären, dass sie sich beim Entwerfen des im obigen Arbeitsplan entwickelten Schemas klar dessen bewusst sind, keine Spracheinteilung oder Sprachanalyse gegeben zu haben, die vollkommen konsequent durchzuführen und bis ins Detail unangreifbar wäre. Im Gegenteil: von einer durch die Wirklichkeit festgelegten Anzahl von Sprachstufen kann ebensowenig die Rede sein wie von einer bestimmten Anzahl historischer Epochen oder von einer bestimmten Anzahl menschlicher

Charaktertypen. Die hier gegebene Einteilung will denn auch nichts anderes sein als ein Versuch, allgemeinen Anschauungen betreffs Sprachorganisation und Sprachentwicklung eine konkrete Form zu geben, die für weitere Untersuchungen und Betrachtungen von einigem Nutzen sein könnte. Diese Betrachtungen werden naturgemäss noch vielerlei im Obigen unberührt gebliebene Gesichtspunkte umfassen und sich u.a. besonders auf die dem sukzessiven Auftreten der obigen „Sprachstufen" zu Grunde liegende psychische und soziale Kausalität richten müssen. Warum und wodurch kam die Menschheit zu dem Bedürfnis nach einer immer weitergehenden Differenzierung, Kanonisierung und Stabilisierung der Sprache? Die anscheinend auf der Hand liegende Antwort: um immer *bessere* Mittel zu gegenseitigem Verständnis zu erhalten – diese Antwort kann sicher nicht akzeptiert werden von dem, der einmal erkannt hat, dass bei den gewöhnlich als „höher" angesehenen Sprachstufen gerade im selben Masse, als sie reicher werden an Hilfsmitteln zum Vermeiden von Missverständnissen und dementsprechend zur Wiedergabe von komplizierten Argumentationen, die emotionelle Kraft und somit die psychische Tragweite sich vermindert. Und das ist kein Wunder: die intellektuell höheren, aber geistig niedrigeren Sprachstufen von Verkehr, Wissenschaft und Mathematik beruhen auf immer umfangreicheren und zwingenderen Voraussetzungen betreffs der Grundwörter, welche an „Lebenselemente" gebundene und demzufolge der weiteren Analyse entzogene Begriffe ausdrücken. Ein Gesetzbuch kann allerlei Vorschriften betreffs Beweisführung enthalten, aber es ist ohnmächtig, vom Ursprung und vom Mass der menschlichen Sicherheit direkt Rechenschaft zu geben: die Kraft einer Ueberzeugung kann nur in Stimmungssprache zum Ausdruck gebracht werden. Oder um unserem eigenen Gegenstand ein Beispiel zu entnehmen: Wortverbindung, Wortgeschichte und Wortfunktion können auf wissenschaftliche, zum Teil sogar auf pasigraphische Weise behandelt werden, der Schrei eines Sterbenden aber kann nur durch direktes Mitgefühl verstanden werden. Von „höher" und „niedriger" im absoluten Sinn wird also auf dem Gebiete der Sprache ebensowenig die Rede sein können, wie auf irgend einem anderen Gebiete. Wohl aber kann gesagt werden, dass die menschliche Gesellschaft in jedem Stadium ihrer Entwicklung diejenigen Sprachformen schafft und zur Vollendung bringt, welche ihren Bedürfnissen an gegenseitigem Verständnis entsprechen, und dass im heutigen Stadium ein derartiges Bedürfnis nach Sprachmitteln deutlich wahrnehmbar ist, das nicht durch einen weiter durchgeführten Spaltungsprozess befriedigt werden kann, vielmehr eine Erforschung der Beziehungen der verschiedenen Sprachformen sowohl untereinander wie mit den übrigen menschlichen Lebenserscheinungen, eine *philosophische* Sprachforschung also, mehr und mehr nötig macht.

VOM UNTERSCHIED DER SPRACHSTUFEN IN BEZUG AUF DIE SOZIALE VERSTÄNDIGUNG

(Uebersetzung)

Die *Grundsprache* braucht keinerlei dynamisches Willensverhältnis zu anderen Individuen vorauszusetzen, und tut sie es doch, so kann das Verhältnis sowohl ein feindschaftliches wie ein freundschaftliches sein.

In der *Stimmungssprache* dagegen wird das gegenseitige Lebensrecht von Sprecher und Hörer anerkannt, wenn auch nicht näher geregelt, wird demzufolge Einsamkeit verworfen und Feindschaft in Formen gebracht.

In der *Verkehrssprache* wird ein ziemlich jede fundamentale Streitsucht ausschliessendes Einverständnis bei Sprecher und Hörer und eine starke Einschränkung der Möglichkeit des Missverstehens dadurch erreicht, dass zur gegenseitigen Verständigung nur diejenigen Lebenselemente zugelassen werden, welche in allgemein anerkannten menschlichen Bedürfnissen peripherischer Art zum Ausdruck kommen.

In der *wissenschaftlichen* Sprache ist diese Selektion der Lebenselemente soweit gegangen, dass nur noch solche zugelassen werden, welche der Voraussetzung einer (allen Individuen gemeinschaftlichen) objektiven Anschauungswelt inhärieren.

Während in der *Symbolsprache* nur noch von Lebenselementen, welche durch die Voraussetzung (allen Individuen gemeinschaftlicher) intellektueller Kategorieen umschlossen werden, die Rede ist, wodurch eine fast vollkommene Ausschliessung des Missverstehens erreicht wird.

gegenseitigem Verständnis entsprechen, und dass im heutigen Stadium ein derartiges Bedürfnis nach Sprachmitteln deutlich wahrnehmbar ist, das nicht durch einen weiter durchgeführten Spaltungsprozess befriedigt werden kann, vielmehr eine Erforschung der Beziehungen der verschiedenen Sprachformen sowohl untereinander wie mit den übrigen menschlichen Lebenserscheinungen, eine *philosophische* Sprachforschung also, mehr und mehr nötig macht.

VOM UNTERSCHIED DER SPRACHSTUFEN IN BEZUG AUF DIE SOZIALE VERSTÄNDIGUNG

(Uebersetzung)

Die *Grundsprache* braucht keinerlei dynamisches Willensverhältnis zu anderen Individuen vorauszusetzen, und tut sie es doch, so kann das Verhältnis sowohl ein feindschaftliches wie ein freundschaftliches sein.

In der *Stimmungssprache* dagegen wird das gegenseitige Lebensrecht von Sprecher und Hörer anerkannt, wenn auch nicht näher geregelt, wird demzufolge Einsamkeit verworfen und Feindschaft in Formen gebracht.

In der *Verkehrssprache* wird ein ziemlich jede fundamentale Streitsucht ausschliessendes Einverständnis bei Sprecher und Hörer und eine starke Einschränkung der Möglichkeit des Missverstehens dadurch erreicht, dass zur gegenseitigen Verständigung nur diejenigen Lebenselemente zugelassen werden, welche in allgemein anerkannten menschlichen Bedürfnissen peripherischer Art zum Ausdruck kommen.

In der *wissenschaftlichen* Sprache ist diese Selektion der Lebenselemente soweit gegangen, dass nur noch solche zugelassen werden, welche der Voraussetzung einer (allen Individuen gemeinschaftlichen) objektiven Anschauungswelt inhärieren.

Während in der *Symbolsprache* nur noch von Lebenselementen, welche durch die Voraussetzung (allen Individuen gemeinschaftlicher) intellektueller Kategorieen umschlossen werden, die Rede ist, wodurch eine fast vollkommene Ausschliessung des Missverstehens erreicht wird.

1919 D

Mathematics. — *"Intuitionistische Mengenlehre"* [1]). By Prof. L. E. J. Brouwer.

(Communicated at the meeting of December 18, 1920.)

Im folgenden gebe ich eine referierende Einleitung zu den beiden Teilen der Abhandlung: *„Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten"*, welche ich im November 1917 bzw. Oktober 1918 der Akademie vorgelegt
⟦1⟧ habe.

Seit 1907 habe ich in mehreren Schriften [2]) die beiden folgenden Thesen verteidigt:

I. dass das *Komprehensionsaxiom,* auf Grund dessen alle Dinge, welche eine bestimmte Eigenschaft besitzen, zu einer Menge vereinigt werden (auch in der ihm später von Zermelo gegebenen beschränkteren Form [3])) zur Begründung der Mengenlehre unzulässig bzw. unbrauchbar sei und nur in einer *konstruktiven* Mengendefinition eine zuverlässige Basis der Mathematik gefunden werden könne;

II. dass das von Hilbert 1900 formulierte *Axiom von der Lösbarkeit jedes Problems* [4]) mit dem *logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten* äquivalent sei, mithin, weil für das genannte Axiom kein

---

[1]) Unter demselben Titel ist ein im wesentlichen gleichlautender Aufsatz im Bd. 28 (1920) des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erschienen.

[2]) Vgl. *„Over de grondslagen der wiskunde"*, Inauguraldissertation Amsterdam 1907, besonders auch die beigefügten Thesen; *„De onbetrouwbaarheid der logische principes"*, Tijdschrift voor wijsbegeerte 2 (1908), abgedruckt in *„Wiskunde, waarheid, werkelijkheid"*, Groningen 1919; *„Over de grondslagen der wiskunde"*, N. Archief v. Wisk. (2) 8 (1908); Besprechung von Mannoury, *„Methodologisches und Philosophisches zur Elementarmathematik"*, N. Archief v. Wisk. (2) 9 (1910); *„Intuitionisme en formalisme"*, Antrittsrede Amsterdam 1912, abgedruckt in *„Wiskunde, waarheid, werkelijkheid"*, obengenannt; *„Intuitionism and formalism"*, Amer. Bull. 20 (1913); Besprechung von Schoenflies-Hahn, *„Die Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen"*, Jahresber. d. D. M.-V. 23 (1914); *„Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde"*, Versl. Kon.
⟦2⟧ Akad. v. Wetensch. Amsterdam 25 (1917), abgedruckt in N. Archief v. Wisk. (2) 12 (1918).

[3]) Vgl. Math. Ann. 65, S. 263.

[4]) Vgl. z. B. Archiv d. Math. u. Phys. (3) 1, S. 52. Nach der hier geäusserten Ansicht Hilberts entspricht das Axiom einer von jedem Mathematiker geteilten Ueberzeugung. In seinem neulich in Math. Ann. 78 abgedruckten Vortrag *„Axio-*
⟦3⟧ *matisches Denken"* stellt er jedoch auf S. 412 die Frage nach der Lösbarkeit

zureichender Grund vorliege und die Logik auf der Mathematik beruhe und nicht umgekehrt, der logische Satz vom ausgeschlossenen Dritten ein *unerlaubtes* mathematisches Beweismittel sei, dem kein andrer als ein scholastischer und heuristischer Wert zugesprochen werden könne, so dass Theoreme, bei deren Beweis seine Anwendung nicht umgangen werden kann, jeden mathematischen Inhalt entbehren.

Von der in diesen beiden Thesen kondensierten *intuitionistischen* Auffassung der Mathematik habe ich übrigens in den in Anm. [3]) zitierten Schriften bloss fragmentarische Konsequenzen gezogen, habe auch in meinen gleichzeitigen philosophiefreien mathematischen Arbeiten regelmässig die alten Methoden gebraucht, wobei ich allerdings bestrebt war, nur solche Resultate herzuleiten, von denen ich hoffen konnte, dass sie nach Ausführung eines systematischen Aufbaues der intuitionistischen Mengenlehre, im neuen Lehrgebäude, eventuell in modifizierter Form, einen Platz finden und einen Wert behaupten würden.

Mit einem solchen systematischen Aufbau der intuitionistischen Mengenlehre habe ich erst in der eingangs erwähnten Abhandlung einen Anfang gemacht. Hier möchte ich kurz hinweisen auf einige der am tiefsten einschneidenden, nicht nur formalen, sondern auch inhaltlichen Aenderungen, welche die klassische Mengenlehre dabei erfahren hat.

Die zugrunde gelegte Mengendefinition ist folgende:

Eine Menge ist ein Gesetz, auf Grund dessen, wenn immer wieder ein willkürlicher Ziffernkomplex der Folge 1, 2, 3, 4, 5, ... *gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder ein bestimmtes Zeichen oder nichts erzeugt oder aber die Hemmung des Prozesses und die definitive Vernichtung seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes* $n > 1$ *nach jeder ungehemmten Folge von* $n-1$ *Wahlen wenigstens ein Ziffernkomplex angegeben werden kann, der, wenn er als n-ter Ziffernkomplex*

eines jeden mathematischen Problems als ein noch zu lösendes Problem. Seine an diese Problemstellung anschliessenden Bemerkungen über die Endlichkeit des vollen algebraischen Invariantensystems wären in meiner Terminologie so zu formulieren, dass aus der Unmöglichkeit der Unendlichkeit einer Menge keineswegs ihre Endlichkeit folgt.

Meiner Ueberzeugung nach sind das Lösbarkeitsaxiom und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beide *falsch* und ist der Glaube an diese Dogmen historisch dadurch verursacht worden, dass man zunächst aus der Mathematik der Teilmengen einer bestimmten endlichen Menge die klassische Logik abstrahiert, sodann dieser Logik eine von der Mathematik unabhängige Existenz a priori zugeschrieben und sie schliesslich auf Grund dieser vermeintlichen Apriorität unberechtigterweise auf die Mathematik der unendlichen Mengen angewandt hat. [[4]]

gewählt wird, nicht die Hemmung des Prozesses herbeiführt. Jede in dieser Weise von einer in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Wahlfolge erzeugte Zeichenfolge (welche also im allgemeinen einen wesentlich unfertigen Charakter besitzt) heisst ein Element der Menge. Die gemeinsame Entstehungsart der Elemente der Menge M wird ebenfalls kurz als die Menge M bezeichnet.

Auf diesen Mengenbegriff wird sodann die Definition des Begriffes der *mathematischen Spezies,* der den Mengenbegriff als Sonderfall enthält, gegründet.

In der Theorie der *Kardinalzahlen,* welche nunmehr zunächst behandelt wird, tritt vor allem die *Zerlegung des Gleichmächtigkeitsbegriffes* in den Vordergrund. Zwei für die klassische Mengenlehre gleichmächtige Mengen oder Spezies können für die intuitionistische Mengenlehre *gleichmächtig, halbgleichmächtig, äquivalent, von gleichem Umfang, von gleicher Ausdehnung* oder *von gleichem Gewicht* sein[5]). Im Anschluss daran gibt es unter den für die klassische Theorie abzählbaren Mengen oder Spezies für die intuitionistische Mengenlehre *abzählbar unendliche, abzählbare, zählbare, auszählbare, durchzählbare* und *aufzählbare* Mengen bzw. Spezies. Die klassischen Kardinalzahlen a und c bleiben bestehen, dagegen wird das in der klassischen Theorie durch die Menge aller Funktionen einer Variablen gelieferte Beispiel einer Kardinalzahl $> c$ hinfällig.

In der Theorie der *geordneten Mengen* wird für den geordneten Charakter einer Spezies die Existenz der ordnenden Relation nur für je zwei *als verschieden erkannte* Elemente gefordert. Weiter gestaltet sich u.a. die Charakterisierung der Ordinalzahlen ϑ und ζ viel verwickelter, als in der klassischen Theorie; erstere erhält folgende Form:

⟦5⟧ ***Jede geordnete Spezies P, welche eine solche abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dichte Teilspezies M enthält, dass zwischen je zwei Elementen[6]) von P Elemente von M liegen, dass die Spezies der vor einem willkürlichen Elemente p von P liegenden Elemente von M eine abtrennbare Teilspezies von M ist, von der entweder kein Element existieren oder wenigstens ein Element bestimmt werden kann, und dass zu jeder der Ordnungseigenschaft entsprechenden Fundamentalreihe von Relationen „nach" oder „nicht nach" zu den Elementen***

5) Erst diese Begriffszerlegung hat mir ermöglicht, den Mächtigkeitscharakter, den ich in früheren Schriften nur für gewisse spezielle Mengen zulassen konnte, auf alle Spezies auszudehnen und in dieser Weise gewissermassen die Existenzberechtigung der komprehensiven Auffassung der Spezies wiederherzustellen.

6) d. h. zwischen je zwei als verschieden erkannten Elementen.

⟦232⟧

von M[7]) *ein diese Relationen erfüllendes Element von P bestimmt werden kann, besitzt die Ordinalzahl ϑ.*

In der Theorie der *wohlgeordneten Mengen* müssen allererst die beiden Haupteigenschaften, dass je zwei wohlgeordnete Mengen vergleichbar sind, und dass jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ein erstes Element besitzt, welche die wichtigsten Beweismittel der klassischen Theorie bilden, preisgegeben werden; demzufolge hat die hier aufzubauende neue konstruktive Theorie mit ihrer Vorgängerin fast gar keine Aehnlichkeit mehr, weder äusserlich noch innerlich. An die Stelle der letzteren Haupteigenschaft bringt sie folgendes Theorem:

Ein Gesetz, welches in einer wohlgeordneten Spezies ein Element bestimmt und jedem schon bestimmten Elemente entweder die Hemmung des Prozesses oder ein ihm vorangehendes Element zuordnet, bestimmt sicher ein Element, dem es die Hemmung des Prozesses zuordnet.

Der Theorie der *ebenen Punktmengen* wird die Menge Q derjenigen Quadrate zugrunde gelegt, von denen ein Eckpunt in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Koordinaten $a \cdot 2^{-n}$ und $b \cdot 2^{-n}$ und die (den Achsen parallelen) Seiten die Länge 2^{-n} oder 2^{1-n} besitzen. Sodann wird unter einem *Punkte der Ebene* eine unbegrenzt fortgesetzte Folge von Quadraten von Q, deren jedes im Innengebiete des nächstvorangehenden enthalten ist, verstanden.

Auf dieser Grundlage kommen aus der klassischen Theorie der Punktmengen zahlreiche Theoreme in Fortfall.

Vom CANTORschen Haupttheorem bleibt z.B. nur folgende *negative* Teilaussage in Kraft:

Es kann keine abgeschlossene geordnete Punktmenge existieren, deren Mächtigkeit grösser als die abzählbar unendliche ist und von der jeder Punkt einerseits einen nächstfolgenden Punkt aufweist, andrerseits von abzählbarer Ordnung ist bzw. von der Spezies der auf ihn folgenden Punkte einen endlichen Abstand besitzt. [[6]]

Auch diese Teilaussage muss indes nach einer von der üblichen, auf dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten beruhenden, völlig verschiedenen Methode bewiesen werden, z.B. so:

Eine Punktmenge π, deren Mächtigkeit grösser als die abzählbar unendliche ist, lässt sich nur so ordnen, dass endliche Mengen $i_1, i_2, \ldots$ von endlichen Wahlfolgen, welche nicht Abschnitte voneinander sind, der Reihe nach geordnet werden, und zwar in solcher

[7]) d. h. zu jeder der Ordnungseigenschaft entsprechenden unbegrenzten Folge von Relationen „nach" oder „nicht nach" zu den einer Abzählung durch eine Fundamentalreihe unterzogenen Elementen von M.

Weise, dass man für jedes k sicher ist, dass $\mathfrak{S}\ (i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots)$ von jedem Reste jeder unbegrenzt fortgesetzten Wahlfolge einen Abschnitt enthält. Indem wir nun in $\mathfrak{S}\ (i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots)$ nur diejenigen Wahlfolgen behalten, welche keine vorangehende Wahlfolge als Abschnitt enhalten, bestimmen wir eine zählbare Menge von Wahlfolgen j_k. Alsdann können wir an der Hand der fortschreitenden Konstruktion der j_ν bei der Herstellung eines willkürlichen j_ν für jede dazu gehörige Wahlfolge nur für höchstens einen einzigen als Fortsetzung davon erzeugten Punkt (nämlich für denjenigen, der bestimmt wird, indem für $\mu > \nu$ in jedem folgenden j_μ immer wieder die am höchsten geordnete Fortsetzung der schon vorhandenen Wahlfolge zu wählen ist) sicherstellen, dass er in der resultierenden Ordnung von π einen nächstfolgenden Punkt aufweist. Die Kardinalzahl der Spezies der Punkte, für welche diese Sicherkeit zu erlangen ist, kann mithin unmöglich grösser als die abzählbar unendliche sein [8]).

An die Stelle der *positiven* Aussage des CANTORschen Haupttheorems tritt in der intuitionistischen Mengenlehre eine ausführliche *Charakterisierung* derjenigen Punktmengen und Punktspezies, welche die betreffende Eigenschaft besitzen [9]).

---

[8]) Dieser Beweis findet sich schon in den beiden letzten der in Anm. [2]) zitierten Schriften; die daselbst gebrauchte Terminologie stimmt aber noch nicht mit der in meiner Abhandlung eingeführten überein, während in meiner Besprechung des
[[7]] SCHOENFLIESschen Buches die betreffende Stelle überdies einige Schreibfehler enthält (S. *81* ist Z. 3 u. 19 statt „Teilmenge zweiter Art", „nicht-abzählbare Teilmenge zweiter Art", Z. 10 statt „von Gebieten $e_1, e_2, \ldots$," „von einander enthaltenden Gebieten $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \ldots$." und Z. 11 statt „zu $i_1, i_2, \ldots$.", „zu $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots$" zu lesen).

[9]) In meinen in Anm.[2]) zitierten Schriften (die letzte ausgenommen), in denen die Konsequenzen des Intuitionismus sich noch weniger deutlich für mich abgezeichnet hatten, haften der konstruktiven Mengendefinition noch zwei unnötige beschränkende Voraussetzungen an; in meiner jetzigen Terminologie sind nämlich die daselbst betrachteten Punktmengen erstens örtlich individualisiert, und lassen zweitens eine vollständige innere Abbrechung zu. Die Folge davon ist, dass z. B. in meiner Besprechung des SCHOENFLIESschen Buches das Haupttheorem statt als falsch, als selbstverständlich angeführt wird, und dass die daselbst gemachte Unterscheidung zwischen wohlkonstruierten Punktmengen und Punktmengen im allgemeinen (die gleichzeitig gemachte Zusammensetzung der wohlkonstruierten Punktmengen aus solchen erster und solchen zweiter Art, von denen die ersteren einen besonderen Fall der letzteren darstellen, soll als unwesentlich zurückgenommen werden) sich erst nach Fortschaffung der genannten beschränkenden Voraussetzungen mit der jetzigen Unterscheidung zwischen Punktmengen und Punktspezies im wesentlichen deckt

Zum a. a. O. gegebenen Beispiel einer nicht-wohlkonstruierten Punktmenge ist zu bemerken, dass die daselbst zugrunde gelegte Funktion $f\ (x)$ nicht das volle Kontinuum zum Existenzbereich hat (vgl. meine gleichzeitig vorzulegende Mitteilung
[[8]] über die Dezimalbruchentwickelung der reellen Zahlen), dass Z. 12 statt „rational",

Die *inneren Grenzmengen* der klassischen Theorie, d. h. die Durchschnitte von Fundamentalreihen von Bereichen, werden in der intuitionistischen Mengenlehre, weil sie nicht notwendig Mengencharakter besitzen, als *innere Grenzspezies* eingeführt. Dabei bleibt das Theorem der klassischen Mengenlehre, dass der Durchschnitt zweier innerer Grenzspezies wiederum eine innere Grenzspezies ist, bestehen; der analoge Satz für die Vereinigung fällt aber fort, und von der Haupteigenschaft der inneren Grenzmengen der klassischen Theorie, dass zu einer willkürlichen Punktmenge Q eine innere Grenzspezies existiert, welche ausser Q ausschliesslich Grenzpunkte der finalen Kohärenz von Q enthält, bleibt nur der folgende Bestandteil erhalten:

Zu jeder vollständig abbrechbaren Punktmenge π existiert eine innere Grenzspezies, welche mit der Vereinigung von π und einer Teilspezies der Abschliessung der finalen Kohärenz von π örtlich kongruent ist und eine mit π örtlich kongruente Punktmenge als Teilspezies enthält.

Die klassische Definition der *Messbarkeit* erleidet in der intuitionistischen Mengenlehre nur eine geringe Aenderung; die Sicherkeit der Messbarkeit verschwindet aber sowohl für die Bereiche wie für die abgeschlossenen Punktspezies und inneren Grenzspezies, und die Haupteigenschaft des klassischen Messbarkeitsbegriffes, dass die Vereinigung einer abzählbaren Menge messbarer Mengen ohne gemeinsame Punkte messbar und ihr Mass gleich der Summe der Masse ihrer Komponenten ist, wird in der intuitionistischen Mengenlehre folgendermassen formuliert:

Wenn F eine solche Fundamentalreihe von messbaren Punktspezies ist, dass die Inhalte der Vereinigungen ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge i bilden, so ist auch die Vereinigung von F messbar und ihr Inhalt gleich i.

Selbstverständlich erleidet der Begriff des *Punktes der Ebene* eine beträchtliche Verengerung, wenn in der betreffenden Definition statt "unbegrenzt fortgesetzte Folge", "Fundamentalreihe" gelesen wird. Bemerkenswert ist aber, dass das lineare Analogon dieses *engern* Punktbegriffes seinerseits noch erheblich mehr umfasst, als der klassische lineare Punktbegriff, der auf dem *Schnitte* beruht, wie in meiner gleichzeitig vorzulegenden Mitteilung über die Dezimalbruchentwickelung der reellen Zahlen näher erörtert wird. [[8]]

„durch einen endlichen Dualbruch darstellbar" zu lesen ist, und dass man in der Spezies der endlich definierbaren Punkte der Ebene ein viel einfacheres Beispiel einer nicht-wohlkonstruierten Punktmenge besitzt.

Mathematics. — *"Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwickelung?"* [1]) By Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of December 18, 1920).

§ 1.

Existenzbereich der unendlichen Dezimalbruchentwickelung auf dem Kontinuum.

Verstehen wir in der Menge der endlichen Dualbrüche ≥ 0 und ≤ 1 unter einem Intervalle λ_ν ein zwei Dualbrüche $\frac{a}{2^\nu}$ und $\frac{a+2}{2^\nu}$ als Endelemente besitzendes geschlossenes Intervall, unter einem *Punkte des Kontinuums* eine in unbegrenzter Fortsetzung begriffene Folge von Intervallen λ, deren jedes im Innern des nächstvorangehenden enthalten ist [2]), unter x einen variablen Punkt des Kontinuums, unter $F_n(x)$ einen n-stelligen Dezimalbruch mit der Eigenschaft, dass jeder links von ihm liegende Punkt des Kontinuums links von einem Intervalle von x liegt, während $F_n(x)+10^{-n}$ rechts von einem Intervalle von x liegt, unter $F(x)$ die eindeutige unendliche Dezimalbruchentwickelung von x, so besitzt $F_n(x)$ die (übrigens
[[2]] allen unstetigen Funktionen gemeinsame) Eigenschaft, dass ihr Existenzbereich G_n *nicht* mit dem Kontinuum zusammenfallen [3]) kann. Der Existenzbereich $G = \mathfrak{D}(G_1, G_2, \ldots)$ von $F(x)$ kann also erst recht nicht mit dem Kontinuum zusammenfallen, obgleich er sich (ebenso wie der Existenzbereich der regelmässigen Kettenbruchentwickelung von x) dem Kontinuum so eng anschmiegt, dass er mit

---

[1]) Ueber den Inhalt dieser Abhandlung wurde am 22. September 1920 auf der Naturforscherversammlung in Bad Nauheim ein referierender Vortrag gehalten.

[2]) Vgl. meine in Bd. XII der Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Eerste Sectie) erschienene Abhandlung: *„Begründung*
[[1]] *der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten"*, 2. Teil, S. 3, 4. Wie daselbst S. 4 Fussnote [1]) hervorgehoben und durch die vorliegende Arbeit klar ins Licht gestellt wird, sind die beiden S. 9 des 1. Teiles benutzten Begriffe der „reellen Zahl" bedeutend enger als der hier definierte Begriff des Punktes des Kontinuums. In einem ganz andern, aus dem Zusammenhang ersichtlichen Sinne wird der Ausdruck „reelle Zahl" der Expressivität wegen in der Ueberschrift und im Schlussparagraphen der vorliegenden Arbeit gebraucht.

[3]) a. a. O., 2. Teil, S. 5.

demselben einerseits örtlich übereinstimmt [1]), andrerseits inhaltsgleich [2]) ist [3]).

Die Definition des Punktes des Kontinuums erleidet indessen eine erhebliche Einschränkung, wenn wir in derselben statt „in unbegrenzter Fortsetzung begriffene Folge", „Fundamentalreihe" [4]) lesen. ⟦5⟧ Zweck der folgenden Paragraphen ist, klarzustellen, inwiefern für diese *Punkte des Kontinuums im engern Sinne,* die unendliche Dezimalbruchentwickelung existiert.

§ 2.

Die Ergänzungselemente der abzählbar unendlichen, überall dicht geordneten Mengen.

Es sei eine abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dicht geordnete [5]) Menge H gegeben. Es seien $g_1, g_2, g_3, \ldots.$ die nach irgend einem, H als abzählbar unendliche Menge charakterisierenden, Abzählungsgesetze γ numerierten Elemente von H und es sei $\mathfrak{S}(g_1, g_2, \ldots. g_\nu) = s_\nu$ gesetzt. Unter einem i_ν bzw. j_ν verstehen wir ein (eventuell aus einem einzigen Elemente bestehendes) geschlossenes Intervall [6]) von H, deren Endelemente zu s_ν gehören, deren Inneres aber höchstens ein bzw. kein einziges Element von s_ν enthält.

Unter einem *Ausfüllungselemente* r von H verstehen wir *erstens* ⟦7⟧ eine jedenfalls ein Element besitzende Spezies von in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Folgen $f_\alpha, f_{\alpha+1}, f_{\alpha+2}, \ldots.$ (α eine für r bestimmte positive ganze Zahl), wo jedes f_ν ein i_ν und jedes $f_{\alpha+\nu+1}$ in $f_{\alpha+\nu}$ enthalten ist, während f_ν für jedes ν zu einer für r bestimmten Spezies S_ν gehört, von der je zwei Elemente ein Element von s_ν gemeinsam haben; *zweitens* eine jedenfalls ein Element besitzende Spezies von in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Folgen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ von je ein bestimmbares Element besitzenden abtrennbaren Teil-

[1]) a. a. O., 2. Teil, S. 6. ⟦3⟧

[2]) a. a. O., 2. Teil, S. 29, 30.

[3]) Natürlich kann auch der Existenzbereich einer mittels einer Funktion der unendlichen Dezimalbruchentwickelung von x erklärten Funktion von x nicht über G hinausgehen. Z. B. hat die im Jahresber. d. D. M.-V. 23, S. 80 von mir ⟦4⟧ definierte Funktion $f(x)$ genau G zum Existenzbereich. Während aber die Funktion $F(x)$ des Textes in der auf dem Kontinuum überall dichten Punktmenge G *gleichmässig stetig* ist und sich *auf Grund dieser Eigenschaft* zu einer *auf dem vollen Kontinuum existierenden* Funktion $\varphi(x) = x$ erweitern lässt, ist für $f(x)$ jede Erweiterung auf das volle Kontinuum ausgeschlossen.

[4]) Vgl. *„Begründung der Mengenlehre usw."*, 1. Teil, S. 14.

[5]) a. a. O., 1. Teil, S. 16. ⟦6⟧

[6]) a. a. O., 1. Teil, S. 13.

mengen [1]) von H, wenn in jeder Folge jedes $\zeta_{\nu+1}$ in ζ_ν enthalten ist und eine Fundamentalreihe $n_1, n_2, n_3, \ldots$ $(n_{\nu+1} \geq n_\nu)$ von ganzen positiven Zahlen und ein Ausfüllungselement erster Art r_0 von H bestimmt sind mit der Eigenschaft, dass zu jedem Elemente $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ von r ein Element $r_\alpha, r_{\alpha+1}, r_{\alpha+2}, \ldots$ von r_0 existiert, so dass ζ_{n_ν} zu $r_{\alpha+\nu}$ gehört.

Unter einem *Ergänzungselemente nullter Ordnung* oder kurz einem *Ergänzungselemente* r von H verstehen wir *erstens* eine Fundamentalreihe $r_\alpha, r_{\alpha+1}, r_{\alpha+2}, \ldots$ (α eine für r bestimmte positive ganze Zahl), wo jedes r_ν ein i_ν und jedes $r_{\alpha+\nu+1}$ in $r_{\alpha+\nu}$ enthalten ist; *zweitens* eine jedenfalls ein Element besitzende Spezies von in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Folgen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ von je ein bestimmbares Element besitzenden abtrennbaren Teilmengen von H, wenn in jeder Folge jedes $\zeta_{\nu+1}$ in ζ_ν enthalten ist und eine Fundamentalreihe $n_1, n_2, n_3, \ldots$ $(n_{\nu+1} \geq n_\nu)$ von ganzen positiven Zahlen und ein Ergänzungselement erster Art $r_\alpha, r_{\alpha+1}, r_{\alpha+2}, \ldots$ von H bestimmt sind, so dass jedes ζ_{n_ν} von r zu $r_{\alpha+\nu}$ gehört. [2])

Wenn ${}_1r$ und ${}_2r$ Ausfüllungselemente von H sind und jedes ${}_1r_\mu$ mit jedem ${}_2r_\nu$ ein gemeinsames Element besitzt, so sagen wir, dass ${}_1r$ und ${}_2r$ *in H zusammenfallen*. Ein mit einem Ergänzungselemente von H in H zusammenfallendes Ausfüllungselement von H *wird gleichfalls als Ergänzungselement von H bezeichnet.*

Wenn das Element g von H zu jedem r_ν des Ausfüllungselementes r von H gehört, so sagen wir, dass r und g *in H zusammenfallen.*

Wenn ${}_1r$ und ${}_2r$ Ausfüllungselemente von H sind und man ein ${}_1r_\mu$ und ein ${}_2r_\nu$ ohne gemeinsame Elemente angeben kann, so sagen wir, dass ${}_1r$ und ${}_2r$ *in H örtlich verschieden sind.*

Wenn man ein r_ν des Ausfüllungselementes r von H angeben kann, zu dem das Element g von H nicht gehört, so sagen wir, dass r und g *in H örtlich verschieden sind.*

Das Ergänzungselement bzw. Ausfüllungselement r von H heisst ein *Ergänzungselement erster Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von
[[8]] H entweder die Relation $g \geq r$ (d. h. jedes rechts von g gelegene Element von H liegt rechts von einem bestimmbaren r_ν von r), oder die Relation $g \leq r$ (d. h. jedes links von g gelegene Element von H liegt links von einem bestimmbaren r_ν von r) hergeleitet werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r mit einem Ergänzungselemente r' von H, von dem jedes r'_ν ein j_ν ist, zusammenfällt.

[1]) a. a. O., 1. Teil, S. 4.

[2]) Ob der Begriff des Ausfüllungselementes sich auf den des Ergänzungselementes zurückführen lässt, bleibe hier dahingestellt.

[[238]]

Die Ergänzungselemente erster Ordnung von H *entsprechen den Dedekindschen Schnitten* von H.

Das Ergänzungselement erster Ordnung r von H heisst ein *Ergänzungselement zweiter Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H die Relation $g \leq r$ entweder hergeleitet, oder ad absurdum geführt werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r' sich so wählen lässt, dass kein μ mit der Eigenschaft, dass die rechten Endelemente von r'_ν und r'_μ für jedes $\nu > \mu$ identisch sind, existieren kann.

Das Ergänzungselement zweiter Ordnung r von H heisst ein *Ergänzungselement dritter Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H entweder die Relation $g > r$ (d. h. man kann ein links von g gelegenes r_ν von r bestimmen), oder die Relation $g \leq r$ hergeleitet werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r' sich so wählen lässt, dass zu jedem r'_μ ein solches r'_ν bestimmt werden kann, dessen rechtes Endelement links vom rechten Endelemente von r'_μ gelegen ist.

Ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H heisst ein *Ergänzungselement vierter Ordnung* von H, wenn für jedes Element g von H entweder die Relation $g > r$, oder die Relation $g = r$ (d. h. g und r fallen in H zusammen), oder schliesslich $g < r$ (d. h. man kann ein rechts von g gelegenes r_ν von r bestimmen) hergeleitet werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn r' sich so wählen lässt, dass zu jedem r'_μ ein solches $\nu > \mu$ bestimmt werden kann, dass die beiden Endelemente von r'_ν von den beiden Endelementen von r'_μ verschieden sind.

Die vorstehenden Definitionen der Ausfüllungselemente sowie der Ergänzungselemente nullter, erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung von H sind für gegebene ordnende Relationen in H offenbar unabhängig vom Abzählungsgesetze γ.

Sei M eine endliche Menge oder eine Fundamentalreihe von Ergänzungselementen vierter Ordnung von H_ν, deren je zwei in H_ν örtlich verschieden sind und deren jedes von jedem Elemente von H_ν in H_ν örtlich verschieden ist. Die Vereinigung von M und H_ν bildet eine abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dicht geordnete Menge $H_{\nu+1}$. Jedes Ergänzungselement von H_ν ist gleichzeitig Ergänzungselement von $H_{\nu+1}$ und jedes Ergänzungselement h-ter Ordnung von $H_{\nu+1}$ fällt in $H_{\nu+1}$ zusammen mit einem Ergänzungselemente h-ter Ordnung von H_ν.

Die vorstehende Beziehung besteht sowohl zwischen der geordneten Menge der endlichen Dualbrüche H_0 und der geordneten Menge der endlichen Dezimalbrüche H_1, wie zwischen H_1 und der geordneten Menge der rationalen Zahlen H_2.

§ 3.

Ergänzungselemente, Dezimalbruchentwickelungen und Kettenbruchentwickelungen.

Ein Ergänzungselement erster Ordnung von H lässt in H die *Ortsbestimmung erster Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der endlichen Dezimalbrüche gelesen wird, als die *mehrdeutige unendliche Dezimalbruchentwickelung* herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung erster Ordnung zulässt, ein Ergänzungselement erster Ordnung von H.

Die Ortsbestimmung erster Ordnung in H kann für in H zusammenfallende Ergänzungselemente von H verschieden ausfallen.

Ein Ergänzungselement zweiter Ordnung von H lässt in H die *Ortsbestimmung zweiter Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der endlichen Dezimalbrüche gelesen wird, als die *eindeutige unendliche Dezimalbruchentwickelung* (für welche die Existenz einer letzten von 9 verschiedenen Ziffer ausgeschlossen ist) herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung zweiter Ordnung zulässt, ein Ergänzungselement zweiter Ordnung von H.

Zwei Ergänzungselemente von H, für welche die Ortsbestimmung zweiter Ordnung in H verschieden ausfällt, können in H nicht zusammenfallen.

Ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H lässt in H die *Ortsbestimmung dritter Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der rationalen Zahlen gelesen wird, als die *unendliche reduziert-regelmässige Kettenbruchentwickelung* herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung dritter Ordnung zulässt, ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H.

Zwei Ergänzungselemente von H, für welche die Ortsbestimmung
⟦9⟧ dritter Ordnung in H verschieden ausfällt, sind in H örtlich verschieden.

Ein Ergänzungselement vierter Ordnung von H lässt in H die *Ortsbestimmung vierter Ordnung* zu, welche sich, wenn H als die Menge der rationalen Zahlen gelesen wird, als die *eindeutige regelmässige Kettenbruchentwickelung* (welche eventuell endlich ausfallen kann) herausstellt. Umgekehrt ist jedes Ausfüllungselement von H, das in H die Ortsbestimmung vierter Ordnung zulässt, ein Ergänzungselement vierter Ordnung von H.

Zwei Ergänzungselemente von H, für welche die Ortsbestimmung vierter Ordnung in H verschieden ausfällt, sind in H örtlich verschieden.

§ 4.
Existenz der Dezimalbruchentwickelung reeller algebraischer Zahlen.

Seien r_1 und r_2 beliebige reelle algebraische Zahlen, d. h. je einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten genügende Ausfüllungselemente der von den rationalen Zahlen gebildeten geordneten Menge H_2. Alsdann kann man eine algebraische Gleichung $F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots . + a_{n-1}x + a_n = 0$ mit ganzen rationalen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante D bestimmen, der sowohl r_1 wie r_2 genügt. Seien $w_1, w_2, \ldots . w_n$ die (mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit approximierbaren) Wurzeln von $F(x) = 0$, so können w_r und w_s für $r \neq s$ nicht in H_2 zusammenfallen. Sei ϱ eine rationale Zahl, welche die Moduln aller Wurzeln von $F(x) = 0$ übersteigt, und $b = 2\varrho$, so ist

$$| w_r \quad w_s | < b \qquad (r \neq s).$$

Weil aber

$$\prod_{\mu \neq \nu} (w_\mu - w_\nu)^2 = \frac{D}{a_0^{2n-2}},$$

so ist andrerseits

$$| w_r - w_s |^2 > \frac{D}{a_0^{2n-2}\, b^{n^2-n-2}},$$

so dass wir mittels hinreichend genauer Approximierung von r_1 und r_2 entweder Sicherheit erlangen, dass r_1 und r_2 mit derselben Wurzel w_α zusammenfallen, oder ein r_1 und r_2 trennendes rationales Intervall bestimmen können. Indem wir dieses Resultat zunächst spezialisieren für den Fall, dass r_2 eine rationale Zahl ist, ersehen wir mühelos, dass r_1 in H_2 entweder mit einem Elemente von H_2 zusammenfällt oder von jedem Elemente von H_2 örtlich verschieden ist, so dass r_1 *sich als Ergänzungselement vierter Ordnung von* H_2 erweist, mithin *sowohl in einen eindeutigen unendlichen Dezimalbruch, wie in einen eindeutigen regelmässigen Kettenbruch entwickelt werden kann.*

Setzen wir nun weiter voraus, dass weder r_1 noch r_2 mit einem Elemente von H_2 zusammenfällt, so *fallen sie entweder in* H_2 *zusammen, oder sind in* H_2 *örtlich verschieden.*

Hieraus folgern wir, dass die Spezies der reellen algebraischen Zahlen eine abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dicht geordnete Menge H_3 bildet, welche zu H_2 die am Schluss von § 2 erklärte Beziehung eines $H_{\nu+1}$ zu einem entsprechenden H_ν besitzt.

§ 5.

Existenz der Dezimalbruchentwickelung von π.

Seien a und b ganze positive Zahlen und $a < b$. Wir verstehen unter K_0 den unbedingt konvergenten [1]) unendlichen Kettenbruch

$$\left[\frac{a}{b}, -\frac{a^2}{(2\nu+1)\,b}\right]_1^\infty$$

und unter K_m den unbedingt konvergenten unendlichen Kettenbruch

$$\left[\frac{a^2}{(2m+1)\,b}, -\frac{a^2}{(2\nu+1)\,b}\right]_{m+1}^\infty.$$

Alsdann gelten die Beziehungen

$$tg\,\frac{a}{b} = K_0 = \frac{a}{b - K_1}$$

$$K_m = \frac{a^2}{(2m+1)\,b - K_{m+1}} \qquad (m \geq 1)$$

Seien $x_0, x_1, x_2, \ldots$ reelle Variablen, welche durch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{a}{b - x_1} \\ x_m &= \frac{a^2}{(2m+1)\,b - x_{m+1}} \qquad (m \geq 1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\dagger)$$

verbunden sind, und x'_a eine rationale Zahl zwischen 0 und 1, also $< \frac{1}{2}b$. Mittels ($\dagger$) leiten wir aus x'_a weitere rationale Zahlen $x'_{a-1}, x'_{a-2}, \ldots. x'_1, x'_0$ und $x'_{a+1}, x'_{a+2}, \ldots.$ her. Von diesen fallen $x'_{a-1}, x'_{a-2}, \ldots. x'_1, x'_0$ alle positiv aus, während $x'_{a-1}, x'_{a-2}, \ldots x'_1$ alle $< \frac{1}{2}b$ und $x'_0 < \frac{2a}{b}$ wird. Weiter kann man ein kleinstes $r > a$ bestimmen mit der Eigenschaft, dass $x_r' \leq 0$ oder ≥ 1 wird [2]).

Sei α eine (für das weitere hinreichend klein gewählte) positive rationale Zahl und η_a ein solches geschlossenes rationales Wertintervall von x_a, dass sowohl η_a, wie die auf Grund von ($\dagger$) entsprechenden Wertintervalle $\eta_{a+1}, \eta_{a+2}, \ldots \eta_r$ von $x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots x_r$ rechts vom Werte 0 und links vom Werte 1 liegen, während, wenn wir noch die auf Grund von ($\dagger$) entsprechenden Wertintervalle von $x_{a-1}, x_{a-2}, \ldots. x_0$ mit $\eta_{a-1}, \eta_{a-2}, \ldots \eta_0$ bezeichnen, jedes K_ν für $0 \leq \nu \leq r$ in η_ν enthalten ist und eine Entfernung $> 2\alpha$ von den Endwerten von η_ν besitzt. Alsdann können wir eine solche ganze nichtnegative Zahl $s \leq r$ bestimmen, dass $x'_0, x'_1, \ldots x'_{s-1}$ der Reihe nach in $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{s-1}$ enthalten sind, während x'_s eine Entfernung $> \alpha$ von K_s besitzt.

[1]) Vgl. PRINGSHEIM, Münchener Berichte 28 (1898), S. 299 fgg.

[2]) a. a. O., S. 318.

Sei β' eine solche positive rationale Zahl, dass für jedes zu η_s gehörige x_s die Ungleichung

$$\frac{dx_0}{dx_s} > \beta'$$

gilt, so besitzt x'_s eine Entfernung $> \alpha\beta'$ von K_0.

Sei x_0'' eine solche rationale Zahl, dass die auf Grund von (†) entsprechende Zahl $x_a'' \leq 0$ oder ≥ 1 ausfällt. Alsdann können wir eine solche ganze nichtnegative Zahl $t \leq a$ bestimmen, dass $x''_0, \ldots x''_{t-1}$ der Reihe nach in $\eta_0, \ldots \eta_{t-1}$ enthalten sind, während x_t'' eine Entfernung $> \alpha$ von K_t besitzt.

Sei β'' eine solche positive rationale Zahl, dass für jedes zu η_0 gehörige x_t die Ungleichung

$$\frac{dx_0}{dx_t} > \beta''$$

gilt, so besitzt x'' eine Entfernung $> \alpha\beta''$ von K_0.

Zu einer beliebigen positiven rationalen Zahl $i_1 < 1$ und einer beliebigen positiven rationalen Zahl i kann man mithin eine solche positive rationale Zahl $i_2 < 1$ bestimmen, dass

$$| i - tg\, i_1 | > i_2.$$

Insbesondere kann man zu einer beliebigen positiven rationalen Zahl $i_1 < 1$ eine solche positive rationale Zahl $i_2 < 1$ bestimmen, dass

$$| 1 - tg\, i_1 | > i_2,$$

mithin auch (weil im zwischen den Werten 0 und 2 enthaltenen Wertegebiet von y die Ungleichung

$$\frac{d\, arctg\, y}{dy} \geq \frac{1}{5}$$

besteht)

$$\left| \frac{\pi}{4} - i_1 \right| > \frac{i_2}{5},$$

so dass *die Zahl π sich als Ergänzungselement vierter Ordnung von H_2 erweist*[1]), *mithin sich sowohl in einen eindeutigen unendlichen Dezimalbruch wie in einen eindeutigen regelmässigen Kettenbruch entwickeln lässt.*

Die Entwickelungen dieses und des vorangehenden Paragraphen bieten Beispiele der Charakterisierung von Ergänzungselementen bzw. Ausfüllungselementen r von H als Ergänzungselemente vierter

[1]) Die gleiche Eigenschaft der Zahl e ist eine unmittelbare Folge der regelmässigen Kettenbruchentwickelung

$$\frac{e-1}{2} = \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2+4\nu}\right]_1^\infty.$$

Ordnung von H mittels *positiver Rationalitätsbeweise in* H (die ein Element von H bestimmen, mit dem r zusammenfällt) oder *positiver Irrationalitätsbeweise in* H (die r als von jedem Elemente von H örtlich verschieden erkennen lassen). Hierzu ist zu bemerken, dass sich aus einem *negativen Rationalitäts- bzw. Irrationalitätsbeweise in* H (der die Annahme, dass r von jedem Elemente von H örtlich verschieden wäre bzw. mit einem Elemente von H zusammenfiele, ad absurdum führt) nicht einmal folgern lässt, dass r Ergänzungselement erster Ordnung von H ist. Eben deshalb haben wir in diesem § den LAMBERTschen negativen Irrationalitätsbeweis von π einer passenden Umarbeitung unterzogen und in die obige positive Form gebracht. Die weiteren klassischen Beweise desselben Satzes lassen sich übrigens in analoger Weise ergänzen.

§ 6.

Reelle Zahlen, welche keine Dezimalbruchentwickelung besitzen.

Sei c_n die n-te Ziffer der unendlichen Dezimalbruchentwickelung von π. Wir werden sagen, dass n sich im *ersten Falle* befindet, wenn $c_n, c_{n+1}, \ldots . c_{n+4}$ alle gleich sind, im *zweiten Falle*, wenn $c_n, c_{n+1}, \ldots . c_{n+9}$ alle verschieden sind, und im *dritten Falle*, wenn weder der erste, noch der zweite Fall vorliegt.

Wir definieren ein Ergänzungselement r der geordneten Menge der endlichen Dezimalbrüche H_1 mittels der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, 10^{-n-1},$$

wo $a_n = 0$, wenn n sich im ersten Falle befindet, $a_n = 10$, wenn n sich im zweiten Falle befindet, sonst $a_n = 9$.

Dieses Ergänzungselement würde erst dann ein Ergänzungselement erster Ordnung von H_1 darstellen, m. a. W. eine unendliche Dezimalbruchentwickelung zulassen, wenn man eine Methode besässe, für jedes beliebige im dritten Falle befindliche n, *entweder* die Existenz eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ mit der Eigenschaft, dass jede zwischen n und m liegende ganze Zahl sich im dritten Falle befände, ad absurdum zu führen, *oder* die Existenz eines im ersten Falle befindlichen $m > n$ mit der Eigenschaft, dass jede zwischen n und m liegende ganze Zahl sich im dritten Falle befände, ad absurdum zu führen.

Wir definieren weiter ein Ergänzungselement erster Ordnung r von H_1 mittels der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, 10^{-n-1},$$

[[244]]

wo jedes a_n entweder gleich 0 oder gleich 9 ist, während $a_1 = 9$ und a_{n+1} dann und nur dann von a_n verschieden ist, wenn n sich im zweiten Falle befindet.

Dieses Ergänzungselement erster Ordnung würde erst dann ein Ergänzungselement zweiter Ordnung von H_1 darstellen, m. a. W. die im § 3 definierte eindeutige unendliche Dezimalbruchentwickelung zulassen, wenn man eine Methode besässe, für jedes ganze positive n mit der Eigenschaft, dass entweder keine oder eine gerade Anzahl von ganzen positiven Zahlen $\leq n$ sich im zweiten Falle befindet, *entweder* die Existenz *oder* die Abwesenheit eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ ad absurdum zu führen.

Ein Ergänzungselement dritter Ordnung von H_1 würde dasselbe Ergänzungselement erst dann darstellen, wenn man eine Methode besässe, für jedes ganze positive n mit der Eigenschaft, dass entweder keine oder eine gerade Anzahl von ganzen positiven Zahlen $\leq n$ sich im zweiten Falle befindet, *entweder* die Existenz eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ ad absurdum zu führen, *oder* ein im zweiten Falle befindliches $m > n$ anzugeben.

Wir definieren schliesslich ein Ergänzungselement dritter Ordnung r von H_1 mittels der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, 10^{-n-1},$$

wo $a_n = 9$, wenn n sich im zweiten Falle befindet, sonst $a_n = 0$.

Dieses Ergänzungselement dritter Ordnung würde erst dann ein Ergänzungselement vierter Ordnung von H_1 darstellen, wenn man eine Methode besässe, für jedes ganze positive n, *entweder* die Existenz eines im zweiten Falle befindlichen $m > n$ ad absurdum zu führen, *oder* ein im zweiten Falle befindliches $m > n$ anzugeben.

Sämtliche Beispiele dieses § fallen übrigens in H_1 zusammen mit Ergänzungselementen vierter Ordnung der geordneten Menge der endlichen Dualbrüche H_0.

Für Beispiele reeller Zahlen ohne Dezimalbruchentwickelung besteht bei der Weiterentwickelung der Mathematik stets die Möglichkeit, dass sie einmal hinfällig werden; dann aber können sie immer durch solche, welche ihre Gültigkeit behalten haben, ersetzt werden.

1923 A

BEGRÜNDUNG DER FUNKTIONENLEHRE UNABHÄNGIG VOM LOGISCHEN SATZ VOM AUSGESCHLOSSENEN DRITTEN.

[[1]] ERSTER TEIL.

§ 1.

STETIGKEIT, MAXIMA.

Unter einem *Punktkerne* verstehen wir eine einen Punkt enthal-
[[2]] tende ganze punktierte Species. Wir bezeichnen im Folgenden in der Cartesischen Ebene die Punktkerne der X-Achse mit x, diejenigen der Y-Achse mit y.

Unter einer *reellen Funktion* oder kurz unter einer *Funktion* ver-
[[3]] stehen wir ein Gesetz, das gewissen mit ξ zu bezeichnenden, den
[[4]] „Definitionsbereich" der Funktion bildenden x je ein mit $\eta = f(\xi)$ zu bezeichnendes y zuordnet, und so in üblicher Weise eine ebene Punktspecies erzeugt. Wir beschränken uns im Folgenden auf solche reelle Funktionen $f(x)$, deren ξ zum geschlossenen Einheitsintervall $(0,1)$ gehören.

Eine Funktion $f(x)$, deren η zum geschlossenen Intervall $(-1,+1)$ bzw. zum geschlossenen Intervall $(0,1)$ bzw. zum geschlossenen Intervall $(-1,0)$ gehören, soll als *unitär beschränkt* bzw. als *positiv unitär beschränkt* bzw. als *negativ unitär beschränkt* bezeichnet werden.

Eine Funktion $f(x)$ heisst *stetig für den Wert* ξ_0 oder *stetig im Punkte* (ξ_0, η_0), wenn zu jedem ε ein solches positives a_ε (mithin auch ein solches positives rationales a_ε) bestimmt werden kann, dass für $|\xi-\xi_0| < a_\varepsilon$ die Ungleichung $|f(\xi)-f(\xi_0)| < \varepsilon$ besteht.

Eine für jedes ξ stetige Funktion wird kurz als eine *stetige Funktion* bezeichnet werden.

Eine Funktion $f(x)$ heisst *gleichmässig stetig*, wenn zu jedem ε ein solches positives a_ε (mithin auch ein solches positives rationales

[[246]]

a_ε) bestimmt werden kann, dass für $|\xi_2 - \xi_1| < a_\varepsilon$ immer die Ungleichung $|f(\xi_2) - f(\xi_1)| < \varepsilon$ besteht [1]).

Nehmen wir an, dass der Definitionsbereich der stetigen Funktion $f(x)$ mit einer Punktmenge S zusammenfällt. Für beliebig vorgegebenes ε wird dann bei der fortschreitenden Wahl eines Elementes s von S die entsprechende Zahl $a_\varepsilon(s)$ mittels einer endlichen Anzahl k von Operatoren $\psi_{1\varepsilon}, \psi_{2\varepsilon}, \ldots \psi_{k\varepsilon}$, die je eine positive ganze bzw. rationale Zahl als Funktion einer variablen endlichen Menge von (das Element s durch ihre Wahl mitbestimmenden) positiven ganzen Zahlen berechnen, festgelegt. Setzen wir beispielsweise $k = 5$, und bezeichnen wir mit $n_1, n_2, n_3, \ldots.$ die der Reihe nach gewählten ganzen positiven Zahlen, durch welche s als Mengenelement bestimmt ist, so haben wir:

$$a_\varepsilon(s) = \psi_{1\varepsilon}\left[n_1 \ldots n_{\psi_{2\varepsilon}\left\{n_1 \ldots n_{\psi_{3\varepsilon}\left[n_1 \ldots n_{\psi_{4\varepsilon}\left\{n_1 \ldots n_{\psi_{5\varepsilon}(n_1 \ldots n_{\psi_\varepsilon})}\right\}}\right]}\right\}}\right] \qquad (1)$$

Ist insbesondere S eine *finite* Menge (d. h. besteht eine solche Fundamentalreihe von ganzen positiven Zahlen $m_1, m_2, \ldots$, dass für iedes $n_\alpha > m_\alpha$ der Erzeugungsprozess der Elemente von S gehemmt wird), so lässt die Gleichung (I) sich in die Form

$$a_\varepsilon(s) = \varphi_\varepsilon(n_1 \ldots n_{\chi_\varepsilon}). \qquad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

bringen, so dass $a_\varepsilon(s)$ für vorgegebenes ε ein positives Minimum besitzt und $f(x)$ sich als *gleichmässig stetig* erweist.

Mithin ist bewiesen:

Satz 1. *Eine stetige Funktion, deren Definitionsbereich mit einer finiten Punktmenge zusammenfällt, ist gleichmässig stetig.* ⟦5⟧

1) Die Stetigkeitsdefinitionen sind nur der Einfachheit halber in die obige metrische Form gebracht, von der sie ihrem Inhalte nach unabhängig sind. Um dies einzusehen, greifen wir auf die den Punkten des Einheitsintervalls der X-Achse bzw. den Punkten der Y-Achse als Ausfüllungselementen zugrunde liegenden abzählbar unendlichen, überall dichten geordneten Mengen μ' und μ'' der Ordinalzahlen $1 + \eta + 1$ bzw. η zurück, zählen μ' und μ'' durch Fundamentalreihen $g_1', g_2', g_3', \ldots$ bzw. $g_1'', g_2'', g_3'', \ldots$ ab, bezeichnen $\mathfrak{S}(g_1', g_2', \ldots g_\nu')$ bzw. $\mathfrak{S}(g_1'', g_2'', \ldots g_\nu'')$ mit s_ν' bzw. s_ν'' und verstehen unter einem i_ν' bzw. einem i_ν'' ein geschlossenes Intervall von μ' bzw. μ'', dessen Endelemente zu s_ν' bzw. s_ν'' gehören, dessen Inneres aber höchstens ein Element von s_ν' bzw. s_ν'' enthält. Auf dieser Grundlage ist dann z. B. eine ***gleichmässig stetige Funktion*** eine solche beschränkte Funktion, dass für eine beliebige Abzählung von μ' und eine beliebige Abzählung von μ'' zu jedem m ein solches n bestimmt werden kann, dass, wenn ξ_1 und ξ_2 zusammen zu einem i_n' gehören, $f(\xi_1)$ und $f(\xi_2)$ zusammen zu einem i_m'' gehören. ⟦6⟧

Wenn der Definitionsbereich der Funktion $f(x)$ mit einer Punktmenge S zusammenfällt, so ist $f(s)$ für jedes Element s von S durch eine unbegrenzte Folge von Intervallen $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots.$, deren jedes im Innengebiete des nächstvorangehenden enthalten ist, bestimmt, und zwar ist $\lambda^{(\nu)}(s)$ für jedes ν durch einen Ausdruck von der Form des rechten Gliedes von (I) bzw. (II), wo nur überall der Index ε durch ν zu ersetzen ist, darstellbar.

Ist also insbesondere S eine *finite* Menge, so gehört zu jedem ν ein solches m_ν, dass $\lambda^{(\nu)}(s)$ nur von den ersten m_ν das Element s erzeugenden Wahlen abhängt.

Weil nun die Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies mit einer finiten Punktmenge zusammenfällt, welche die Eigenschaft besitzt, dass zu jedem n ein solches ε bestimmt werden kann, dass zu je zwei in einer Entfernung $< \varepsilon$ voneinander gelegenen Punkten eine Anfangsfolge von n Wahlen besteht, aus der beide Punkte hervorgehen [1]), so folgt weiter:

Satz 2. *Jede Funktion, deren Definitionsbereich mit einer abgeschlossenen, katalogisierten Punktspecies zusammenfällt, ist gleichmässig stetig.*

Wenn wir also eine Funktion, die das ganze geschlossene Einheitsintervall als Definitionsbereich besitzt, als *voll* bezeichnen, so gilt insbesondere:

Satz 3. *Jede volle Funktion ist gleichmässig stetig.*

Zu einer vollen Funktion $f(x)$ existiert [1]) eine Fundamentalreihe $n_1, n_2, \ldots (n_{\nu+1} \geq n_\nu + 4)$ mit der Eigenschaft, dass jedem ganz oder teilweise im Einheitsintervall enthaltenen λ_{n_ν}-Intervalle $\lambda^{(\tau)}$ ein λ-Intervall $\pi^{(\tau)}$ in solcher Weise zugeordnet ist, dass (im engern Sinne)
[[7]] ineinander enthaltenen $\lambda^{(\tau)}$ (im engern Sinne) ineinander enthaltene $\pi^{(\tau)}$ und übereinander greifenden $\lambda^{(\tau)}$ übereinander greifende $\pi^{(\tau)}$ entsprechen, während die Breite von $\pi^{(\tau)}$ für unbeschränkt wachsendes τ gegen 0 konvergiert und die Funktion $f(x)$ durch die in dieser Weise denjenigen Folgen von $\lambda^{(\tau)}$, welche Punkte darstellen, zugeordneten, gleichfalls Punkte darstellenden Folgen von $\pi^{(\tau)}$ bestimmt ist. Ordnen wir nun einem beliebigen zum Einheitsintervalle gehörigen $\varkappa$-Intervalle $\varkappa^{(\sigma)}$ dasjenige möglichst kleine $\lambda^{(m_\sigma)}$ zu, in dem es (im engern Sinne) möglichst wenig excentrisch enthalten ist und das im Falle der Zweideutigkeit dieser Bestimmung möglichst rechtsliegend gewählt werden soll, so ist dadurch jedem $\varkappa^{(\sigma)}$ gleichzeitig

---

[1]) Vgl. meine im XII. Band (1918, 1919) dieser Verhandelingen erschienene
[[8]] *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, 2. Teil, S. 14.

ein $\pi^{(m_\sigma)}$ zugeordnet, und zwar in solcher Weise, dass ineinander enthaltenen $\varkappa^{(\sigma)}$ ineinander enthaltene $\pi^{(m_\sigma)}$ und aneinder grenzenden $\varkappa^{(\sigma)}$ übereinander greifende $\pi^{(m_\sigma)}$ entsprechen, während die Breite von $\pi^{(m_\sigma)}$ für unbeschränkt wachsendes σ gegen Null konvergiert. Umgekehrt liefert jede Zuordnung der letzteren Art eine volle Funktion, womit wir zu einer neuen Definition der vollen Funktion [1]) gelangt sind. Bei dieser Definition bringt es, wie man leicht einsieht, keinerlei Einschränkung mit sich, wenn wir weiter fordern, dass die Breite von $\pi^{(m_\sigma)}$ ausschliesslich von der Breite von $\varkappa^{(\sigma)}$ abhängt und dass ineinander enthaltenen $\varkappa^{(\sigma)}$ im engern Sinne ineinander enthaltene $\pi^{(m_\sigma)}$ entsprechen. ⟦10⟧

Denken wir die volle Funktion $f(x)$ in letzterer Weise definiert, und nehmen wir an, dass $r = f(0) > s = f(1)$. Unter einem *Fallintervall* i_ν der X-Achse verstehen wir ein solches von aneinander grenzenden $\varkappa_\nu$-Intervallen gebildetes Intervall, dass das dem ersten dieser $\varkappa_\nu$-Intervalle $\varkappa'$ zugeordnete λ-Intervall λ' und das dem letzten dieser $\varkappa_\nu$-Intervalle $\varkappa''$ zugeordnete λ-Intervall λ'' übereinander greifen, während λ'' tiefer liegt als λ' und jedem rechts von $\varkappa'$ bzw. $\varkappa''$ gelegenen $\varkappa_\nu$-Intervall ein tiefer als λ' bzw. λ'' gelegenes λ-Intervall zugeordnet ist. Sei nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine gegen 0 konvergierende Folge von positiven rationalen Zahlen, so kann man der Reihe nach ein $i_{\nu_1} < \varepsilon_1$, ein zu i_{ν_1} gehöriges $i_{\nu_2} < \varepsilon_2$, dessen λ'_2 im engern Sinne in λ'_1 enthalten ist, ein zu i_{ν_2} gehöriges $i_{\nu_3} < \varepsilon_3$, dessen λ'_3 im engern Sinne in λ'_2 enthalten ist, usw. bestimmen. Alsdann konvergiert die Folge $i_{\nu_1}, i_{\nu_2}, \ldots$ gegen einen Abszissenwert x_0 mit der Eigenschaft, dass $f(x_0) > f(x)$ für $x_0 < x$. Offenbar kann man diese Konstruktion, wenn i ein beliebiges zwischen r und s gelegenes Intervall ist, so einrichten, dass $f(x_0)$ in i enthalten ist. Somit ist bewiesen:

Satz 4. *Eine volle Funktion, deren Endwert s kleiner ist als der Anfangswert r, besitzt unendlich viele vorwärts gerichtete Maxima (und ebenso unendlich viele rückwärts gerichtete Minima), deren Ordinaten im Wertebereich der Funktion überall dicht liegen.*

---

§ 2.

MESSBARE FUNKTIONEN.

Die positiv unitär beschränkte Funktion f soll *messbar* heissen, wenn für jedes ganze nichtnegative ν im Einheitsintervall der X-

[1]) Sie stimmt überein mit der in *Begründung usw.*, 1. Teil, S. 12 gegebenen Definition einer „stetigen Funktion einer zwischen 0 und 1 schwankenden Veränderlichen". ⟦9⟧

Achse eine solche endliche Anzahl von sich nicht überdeckenden und zusammen das Einheitsintervall ausfüllenden endlichen Mengen $a'_\nu, a''_\nu, \dots a^{(m_\nu)}_\nu$ von $\varkappa$-Intervallen, ein solcher messbarer linearer Bereich β_ν mit einem Inhalte $< \frac{1}{2^\nu}$, und $m_\nu - 1$ solche endliche Dualbrüche $b''_\nu, b'''_\nu, \dots b^{(m_\nu)}_\nu$ bestimmt werden können, dass die Funktion f für $\mu \geq 2$ für ein beliebiges x des Durchschnittes $d^{(\mu)}_\nu$ von $a^{(\mu)}_\nu$ mit dem Komplemente k_ν von β_ν existiert und einen zwischen $b^{(\mu)}_\nu$ und $b^{(\mu)}_\nu + \frac{1}{2^\nu}$ gelegenen Wert besitzt, und für ein beliebiges x des Durchschnittes d'_ν von a'_ν mit k_ν, *falls sie existiert*, $< \frac{1}{2^\nu}$ ist.

Die positiv unitär beschränkte Funktion f soll *summierbar* heissen, wenn ihre *Integralspecies* S, d. h. die von den Punkten (ξ, y) des geschlossenen Einheitsquadrates $(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1)$, für welche $y < f(\xi)$, gebildete ebene Punktspecies messbar [1]) ist.

Satz 1. *Jede positiv unitär beschränkte summierbare Funktion ist messbar.*

Beweis. Sei ν eine beliebige ganze nichtnegative Zahl und $\varepsilon = 2^{-\nu-2}$. Alsdann bestehen auf Grund der Definition der Summierbarkeit für die summierbare Funktion $f(x)$ zwei solche sich nicht überdeckende und zusammen das Einheitsquadrat ausfüllende endliche Mengen c'_ν und c''_ν von $\varkappa$-Quadraten und ein solcher messbarer ebener Bereich γ_ν mit einem Inhalte $< \varepsilon^2$, dass für einen beliebigen Punkt (x, y) des Durchschnittes η'_ν von c'_ν mit dem Komplemente h_ν von γ^ν die Funktion $f(x)$ existiert und $> y$ ist, und für einen beliebigen Punkt (x, y) des Durchschnittes η''_ν von c''_ν mit h_ν die Funktion $f(x)$, falls sie existiert, $\leq y$ ist.

Sei $\gamma^{(o)}_\nu = 0$, $\gamma^{(m)}_\nu$ für $m \geq 1$ ein solches Anfangssegment von γ_ν, dass $I\,(\gamma^{(m)}_\nu)$ [2]) $\geq \frac{2^{2m}-1}{2^{2m}} I\,(\gamma_\nu)$, und $\vartheta^{(m)}_\nu$ die Quadratmenge, durch Hinzufügung von welcher $\gamma^{(m-1)}_\nu$ in $\gamma^{(m)}_\nu$ übergeht, so dass $I\,(\vartheta^{(m)}_\nu) < \frac{1}{2^{2(m-1)}} \varepsilon^2$. Sei $\zeta^{(m)}_\nu$ die Species derjenigen x, auf deren Ordinate

[1]) Zur Einführung des Messbarkeitsbegriffs für Punktspecies des nicht in eine „reduzierte Ebene" (vgl. *Begründung usw.*, 2. Teil, S. 21) umgewandelten
[[11]] geschlossenen Einheitsquadrats sind in der in *Begründung usw.*, 1. Teil, S. 8 gegebenen Bereichsdefinition die daselbst Z. 13 befindlichen Worte „welche $\varkappa'$ vollständig einschliessen" zu ersetzen durch „welche zusammen mit dem Rande des Einheitsquadrats $\varkappa'$ vollständig einschliessen".

[2]) d. h. der Inhalt von $\gamma^{(m)}_\nu$.

$\vartheta_\nu^{(m)}$ einen linearen Inhalt $\geq \frac{1}{2^m}\varepsilon$ überdeckt, so ist $i\ (\zeta_\nu^{(m)})$, d. h. der lineare Inhalt von $\zeta_\nu^{(m)}$, $< \frac{1}{2^{m-2}}\varepsilon$, so dass man auf der X Achse einen messbaren linearen Bereich η_ν mit einem Inhalte $< 4\varepsilon = 2^{-\nu}$ bestimmen kann, auf dessen Komplement g_ν die Funktion $f(x)$ für jedes x, in dessen beliebiger Umgebung es Ordinaten gibt, von denen [[12]]
c'_ν einen linearen Inhalt $\varrho \geq \varepsilon$ und c''_ν einen linearen Inhalt $1-\varrho$ überdeckt, existiert und $> \varrho - \varepsilon$ und $< \varrho + \varepsilon$ ist, und für jedes x, in dessen beliebiger Umgebung es Ordinaten gibt, von denen c'_ν einen linearen Inhalt $\sigma \leq \varepsilon$ und c''_ν einen linearen Inhalt $1-\sigma$ überdeckt, falls sie existiert, $< 2\varepsilon$ ist.

Bestimmen wir mithin, im Einheitsintervall der x, $p = \frac{1}{2\varepsilon} = 2^{\nu+1}$ sich nicht überdeckende und zusammen das Einheitsintervall ausfüllende endliche Mengen $a'_\nu, a''_\nu, \ldots a_\nu^{(p)}$ von $\varkappa$-Intervallen, so dass in der Ordinate eines beliebigen innern Punktes von $a_\nu^{(\mu)}$, von c'_ν ein linearer Inhalt $\leq 2\,\mu\varepsilon$ und $\geq 2\,(\mu-1)\,\varepsilon$ überdeckt wird, so existiert die Funktion $f(x)$ für $\mu \geq 2$ in jedem Punkte des Durchschnittes von $a_\nu^{(\mu)}$ und g_ν und besitzt daselbst einen zwischen $b_\nu^{(\mu)} = (2\,\mu-3)\,\varepsilon$ und $(2\,\mu + 1)\,\varepsilon = b_\nu^{(\mu)} + \frac{1}{2^\nu}$ gelegenen Wert, während in einem beliebigen Punkte des Durchschnittes von a'_ν und g_ν, die Funktion $f(x)$, falls sie existiert, $< 4\,\varepsilon = \frac{1}{2^\nu}$ ist, so dass $f(x)$ sich in der That als messbar erweist.

Satz 2. *Jede positiv unitär beschränkte messbare Funktion ist summierbar.*

Beweis. Auf Grund der Messbarkeitsdefinition betrachten wir im geschlossenen Einheitsquadrat für die messbare Funktion $f(x)$ die Vereinigung T der Punkte mit einer zu β_ν gehörigen Abszisse, der Punkte, deren Abszisse zu a'_ν gehört und deren Ordinate $< \frac{1}{2^\nu}$ ist, und der Punkte, die für irgend ein $\mu \geq 2$ eine zu $a_\nu^{(\mu)}$ gehörige Abszisse und eine zwischen $b_\nu^{(\mu)}$ und $b_\nu^{(\mu)} + \frac{1}{2^\nu}$ liegende Ordinate besitzen, und bestimmen einen T enthaltenden ebenen messbaren Bereich γ mit einem Inhalte $< \frac{1}{2^{\nu-1}}$. Bezeichnen wir dann weiter mit c' die Menge von $\varkappa$-Quadraten, welche von denjenigen Punkten, die für irgend ein $\mu \geq 2$ eine zu $a_\nu^{(\mu)}$ gehörige Abszisse und eine Ordinate $\leq b_\nu^{(\mu)}$ besitzen, ausgefüllt wird und mit c'' die im Einheitsquadrat zu c' komplementäre Menge von $\varkappa$-Quadraten, so ist ein beliebiger Punkt des Durchschnittes von c' und dem Komplemente h von γ ein Punkt (ξ, y) mit $y < f(\xi)$, während ein beliebiger Punkt des Durchschnittes von c'' und h unmöglich einen Punkt (ξ, y) mit $y < f(\xi)$ darstellen kann, womit $f(x)$ sich als summierbar erwiesen hat.

Die positiv unitär beschränkte Funktion f soll *approximierbar* heissen, wenn sich für jedes ganze nichtnegative ν im Einheitsintervall der X-Achse eine solche endliche Anzahl von messbaren äusseren Grenzspecies $A'_\nu, A''_\nu, \ldots A_\nu^{(g_\nu)}$ ohne gemeinsame Punkte, deren Inhalte die Summe 1 haben, und $g_\nu - 1$ solche endliche Dualbrüche $f''_\nu, f'''_\nu, \ldots f_\nu^{(g_\nu)}$ bestimmen lassen, dass die Funktion f für $\mu \geq 2$ für ein beliebiges x von $A_\nu^{(\mu)}$ existiert und einen zwischen $f_\nu^{(\mu)}$ und $f_\nu^{(\mu)} + \frac{1}{2^\nu}$ gelegenen Wert besitzt, und für ein beliebiges x von A'_ν, falls sie existiert, $< \frac{1}{2^\nu}$ ist.

Satz 3. *Jede positiv unitär beschränkte messbare Funktion ist approximierbar.*

Beweis. Auf Grund der Messbarkeitsdefinition existieren für jedes ganze nichtnegative ν im Einheitsintervall der X-Achse $m_\nu = 2^{\nu+1} - 1$ sich nicht überdeckende und zusammen das Einheitsintervall ausfüllende endliche Mengen $a'_\nu, a''_\nu, \ldots a_\nu^{(m_\nu)}$ von $\varkappa$-Intervallen und ein solcher messbarer linearer Bereich β_ν mit einem Inhalte $< \frac{1}{2^\nu}$, dass die Funktion f für $\mu = 1$ bzw. für $1 < \mu < m_\nu$ bzw. für $\mu = m_\nu$ für ein beliebiges x des Durchschnittes $d_\nu^{(\mu)}$ von $a_\nu^{(\mu)}$ mit dem Komplemente k_ν von β_ν, falls sie existiert, $< \frac{1}{2^\nu}$ ist, bzw. existiert und einen Wert $> \frac{\mu - 1}{2^{\nu+1}}$ aber $< \frac{\mu + 1}{2^{\nu+1}}$ besitzt, bzw. existiert und einen Wert $> \frac{2^\nu - 1}{2^\nu}$ aber ≤ 1 besitzt. Wir betrachten nun die Fundamentalreihe F der messbaren Bereichkomplemente $d'_\nu, \ldots . d_\nu^{(m_\nu)}$, $d'_{\nu+1}, \ldots d_{\nu+1}^{(m_\nu+1)}, d'_{\nu+2}, \ldots d_{\nu+2}^{(m_\nu+2)}, \ldots$ und zerlegen dieselbe in m_ν Teilfundamentalreihen $F', F'', \ldots F^{(m_\nu)}$, von denen jedes $F^{(\mu)}$ mit $d_\nu^{(\mu)}$ anfängt und des weiteren nur solche $d_\tau^{(\sigma)}$ enthält, dass das Intervall

[[252]]

$\left(\frac{\sigma-1}{2^{\tau+1}}, \frac{\sigma+1}{2^{\tau+1}}\right)$ im Intervall $\left(\frac{\mu-1}{2^{\nu+1}}, \frac{\mu+1}{2^{\nu+1}}\right)$ enthalten ist. Weil die Inhalte der vereinigenden Bereichkomplemente der Anfangssegmente von F eine limitierte Folge bilden (welche $=1$ ist), so existiert nach *Begründung usw.*, 2. Teil, S. 28 eine in der Vereinigung von F enthaltene messbare (und den Inhalt 1 besitzende) äussere Grenzspecies $\mathfrak{S}\,(e'_\nu, \ldots e_\nu^{(\mu_\nu)}, e'_{\nu+1}, \ldots e_{\nu+1}^{(m_\nu+1)}, e'_{\nu+2}, \ldots e_{\nu+2}^{(m_\nu+2)}, \ldots)$, wo jedes $e_\tau^{(\sigma)}$ eine in $d_\tau^{(\sigma)}$ enthaltene messbare äussere Grenzspecies darstellt. Zerlegen wir nun die Fundamentalreihe F_0 der messbaren äusseren Grenzspecies $e'_\nu, \ldots e_\nu^{(m_\nu)}, e'_{\nu+1}, \ldots e_{\nu+1}^{(m_\nu+1)}, e'_{\nu+2}, \ldots e_{\nu+2}^{(m_\nu+2)}$ in m_ν solche Teilfundamentalreihen $F_0', \ldots F_0^{(m_\nu)}$, dass $e_\tau^{(\sigma)}$ dann und nur dann zu $F_0^{(\mu)}$ gehört, wenn $d_\tau^{(\sigma)}$ zu $F^{(\mu)}$ gehört, und bezeichnen wir die Vereinigung der Fundamentalreihe $F_0^{(\mu)}$ mit $A_\nu^{(\mu)}$, so stellen $A'_\nu, A''_\nu, \ldots A_\nu^{(m_\nu)}$ messbare äussere Grenzspecies ohne gemeinsame Punkte dar, deren Inhalte die Summe 1 haben, während die Funktion f für $\mu=1$ bzw. für $1<\mu<m_\nu$ bzw. für $\mu=m_\nu$ für ein beliebiges x von $A_\nu^{(\mu)}$, falls sie existiert, $<\frac{1}{2^\nu}$ ist, bzw. existiert und einen Wert $>\frac{\mu-1}{2^{\nu+1}}$ aber $<\frac{\mu+1}{2^{\nu+1}}$ besitzt, bzw. existiert und einen Wert $>1-\frac{1}{2^\nu}$ aber ≤ 1 besitzt.

Satz 4. *Jede positiv unitär beschränkte approximierbare Funktion ist messbar.*

Beweis. Auf Grund der Approximierbarkeitsdefinition existieren für jedes ganze nichtnegative ν im Einheitsintervall der X-Achse $g_\nu = 2^{\nu+1}-1$ messbare äussere Grenzspecies $A'_\nu, A''_\nu, \ldots A_\nu^{(g_\nu)}$ ohne gemeinsame Punkte, deren Inhalte die Summe 1 haben, so dass die Funktion f für $\mu=1$ bzw. für $1<\mu<g_\nu$ bzw. für $\mu=g_\nu$ für ein beliebiges x von $A_\nu^{(\mu)}$, falls sie existiert, $<\frac{1}{2^\nu}$ ist, bzw. existiert und einen Wert $>\frac{\mu-1}{2^{\nu+1}}$ und $<\frac{\mu+1}{2^{\nu+1}}$ besitzt, bzw. existiert und einen Wert $>\frac{2^\nu-1}{2^\nu}$ und ≤ 1 besitzt. Sei $k_\nu^{(\mu)}$ für jedes μ ein solches in $A_\nu^{(\mu)}$ enthaltenes messbares Bereichkomplement, dass $i(k_\nu^{(\mu)}) > i(A_\nu^{(\mu)}) - \frac{1}{3g_\nu}\cdot\frac{1}{2^\nu}$. Es lässt sich betrachten als Durchschnitt einer einen Inhalt $< i(k_\nu^{(\mu)}) + \frac{1}{3g_\nu}\cdot\frac{1}{2^\nu}$ besitzenden endlichen Menge von x-Intervallen $t_\nu^{(\mu)}$

mit dem Komplemente eines einen Inhalt $<\frac{1}{3g_\nu}\cdot\frac{1}{2^\nu}$ besitzenden messbaren Bereichs $\gamma_\nu^{(\mu)}$. Die Species derjenigen Punkte des Einheitsintervalls, die für mehr als ein einziges μ zu $t_\nu^{(\mu)}$ gehören, bildet eine Menge von $\varkappa$-Intervallen u_ν mit einem Inhalte $<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^\nu}$. Durch Tilgung von u_ν geht aus jedem $t_\nu^{(\mu)}$ eine Menge von $\varkappa$-Intervallen $s_\nu^{(\mu)}$ hervor. Diese $s_\nu^{(\mu)}$ greifen nicht übereinander und der Inhalt der im Einheitsintervall zu $\mathfrak{S}(s'_\nu, s''_\nu, \ldots s_\nu^{(g_\nu)})$ komplementären Menge von $\varkappa$-Intervallen w_ν besitzt einen Inhalt $<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^\nu}$, so dass wir einen w_ν enthaltenden messbaren Bereich γ_ν mit einem Inhalte $<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^\nu}$ bestimmen können. Setzen wir nun $\mathfrak{S}(s'_\nu, w_\nu) = a'_\nu$; $s''_\nu = a''_\nu$; $\ldots s_\nu^{(g_\nu)} = a_\nu^{(g_\nu)}$; $\mathfrak{S}(\gamma_\nu, \gamma'_\nu, \gamma''_\nu, \ldots \gamma_\nu^{(g_\nu)}) = \beta_\nu$, so ist β_ν ein messbarer Bereich mit einem Inhalte $<\frac{1}{2^\nu}$, während für $\mu = 1$ bzw. für $1 < \mu < g_\nu$ bzw. für $\mu = g_\nu$ für ein beliebiges x des Durchschnittes von $a_\nu^{(\mu)}$ mit dem Komplemente von β_ν (weil dieses x zu $k_\nu^{(\mu)}$, also zu $A_\nu^{(\mu)}$ gehört) die Funktion f, falls sie existiert, $<\frac{1}{2^\nu}$ ist, bzw. existiert und einen Wert $>\frac{\mu-1}{2^{\nu+1}}$ und $<\frac{\mu+1}{2^{\nu+1}}$ besitzt, bzw. existiert und einen Wert $>\frac{2^\nu-1}{2^\nu}$ und ≤ 1 besitzt, womit $f(x)$ sich als messbar erwiesen hat.

Approximierung einer positiv unitär beschränkten approximierbaren Funktion. Zu jedem der im obigen Beweise benutzten $A_\nu^{(\mu)}$ gehört ein (für $\mu = 1$ links geschlossenes, fur $\mu = g_\nu$ rechts geschlossenes, fürs Uebrige offenes) λ-Intervall $\lambda(A_\nu^{(\mu)})$, in welchem $f(x)$ für dieses $A_\nu^{(\mu)}$ enthalten ist bzw. falls sie existiert, enthalten ist. Jedes $\lambda(A_\nu^{(\mu)})$ hat mit höchstens fünf unter den $\lambda(A_{\nu+1}^{(\mu)})$ gemeinsame Punkte. Die höchstens fünf Durchschnitte des entsprechenden $A_\nu^{(\mu)}$ mit den entsprechenden $A_{\nu+1}^{(\mu)}$ stellen in $A_\nu^{(\mu)}$ enthaltene messbare äussere Grenzspecies ohne gemeinsame Punkte dar, deren Inhaltssumme gleich $i(A_\nu^{(\mu)})$ ist, und aus denen sich drei in $A_\nu^{(\mu)}$ enthaltene messbare äussere Grenzspecies ohne gemeinsame Punkte $A_\nu^{(\mu 1)}$, $A_\nu^{(\mu 2)}$, $A_\nu^{(\mu 3)}$ herstellen lassen, deren Inhaltssumme gleich $i(A_\nu^{(\mu)})$ ist, und für welche $f(x)$ der Reihe nach im linken, im mittleren und im rechten ganz in

[[254]]

$A_\nu^{(\mu)}$ liegenden $\lambda_{\nu+2}$-Intervall enthalten ist, bzw., falls sie existiert, enthalten ist.

In dieser Weise definieren wir der Reihe nach eine Fundamentalreihe von messbaren äusseren Grenzspecies $A_1^{(e_m)}$, wo m eine beliebige ganze positive Zahl und e_m eine Reihe von m Ziffern 1, 2 oder 3 bedeutet. Hierbei sind stets $A_1^{(e_m 1)}$, $A_1^{(e_m 2)}$ und $A_1^{(e_m 3)}$ elementefremd, sind in $A_1^{(e_m)}$ enthalten und besitzen eine Inhaltssumme gleich $i(A_1^{(e_m)})$. Zu jedem $A_1^{(e_m)}$ gehört ein im Einheitsintervall enthaltenes λ-Intervall $\lambda^{(e_m)} = \lambda(A_1^{(e_m)})$, das links bzw. rechts geschlossen, wenn sein linker bzw. rechter Endpunkt mit dem linken bzw. rechten Endpunkte des Einheitsintervalls zusammenfällt, fürs Uebrige offen ist, und zwar stellen $\lambda^{(e_m 1)}$, $\lambda^{(e_m 2)}$, $\lambda^{(e_m 3)}$ bzw. $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ der Reihe nach das linke, mittlere und rechte ganz in $\lambda^{(e_m)}$ liegende λ_{m+2}-Intervall bzw. ganz im Einheitsintervall liegende λ_2-Intervall dar. Falls e_m wenigstens eine von 1 verschiedene Ziffer enthält, existiert $f(x)$ für jedes x von $A_1^{(e_m)}$ und besitzt einen zu $\lambda^{(e_m)}$ gehörigen Wert, während, wenn e_m sich ausschliesslich aus Ziffern 1 zusammensetzt, $f(x)$ für jedes x von $A_1^{(e_m)}$, falls sie existiert, einen zu $\lambda^{(e_m)}$ gehörigen Wert besitzt. Die zu einem bestimmten m gehörigen $A_1^{(e_m)}$ besitzen die Inhaltssumme 1. Bei unbeschränkter Fortsetzung einer Ziffernreihe e_m braucht der Inhalt von $A_1^{(e_m)}$ keineswegs gegen 0 zu konvergieren.

Die unitär beschränkte Funktion f soll *messbar* heissen, wenn für jedes ganze nichtnegative ν im Einheitsintervall der X-Achse $l_\nu = 2^{\nu+2} - 1$ sich nicht überdeckende und zusammen das Einheitsintervall ausfüllende endliche Mengen a_ν', a_ν'', $\dots a_\nu^{(l_\nu)}$ von $\varkappa$-Intervallen und ein solcher messbarer linearer Bereich β_ν mit einem Inhalte $< \frac{1}{2^\nu}$ bestimmt werden können, dass die Funktion f für $\mu = 1$ bzw. für $\mu = l_\nu$ bzw. für $1 < \mu < 2^{\nu+1}$ oder $2^{\nu+1} < \mu < l_\nu$ bzw. für $\mu = 2^{\nu+1}$ für ein beliebiges x des Durchschnittes $d_\nu^{(\mu)}$ von $a_\nu^{(\mu)}$ mit dem Komplemente k_ν von β_ν existiert und einen Wert $> \frac{2^\nu - 1}{2^\nu}$ aber ≤ 1 besitzt, bzw. existiert und einen Wert ≥ -1 aber $< \frac{-2^\nu + 1}{2^\nu}$ besitzt, bzw. existiert und einen Wert $> \frac{2^{\nu+1} - \mu - 1}{2^{\nu+1}}$ aber

$<\frac{2^{\nu+1}-\mu+1}{2^{\nu+1}}$ besitzt, bzw. falls sie existiert, einen zwischen $-\frac{1}{2^{\nu+1}}$ und $\frac{1}{2^{\nu+1}}$ gelegenen Wert besitzt.

Die unitär beschränkte Funktion f soll *summierbar* heissen, wenn ihre *Integralspecies* S, d. h. die von den Punkten (ξ, y) des geschlossenen Einheitsdoppelquadrates $(0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1)$, für welche $f^2(\xi) > y^2$ und $y f(\xi) \geq 0$, gebildete ebene Punktspecies messbar ist. Hierzu ist notwendig und hinreichend, dass sowohl die Species $S+$ der Punkte (ξ, y), für welche $f(\xi) \geq 0$ und $0 \leq y < f(\xi)$, wie die Species $S-$ der Punkte (ξ, y), für welche $f(\xi) \leq 0$ und $0 \geq y > f(\xi)$, messbar ist. Unter dem *Integral* der unitär beschränkten summierbaren Funktion f verstehen wir die Differenz der Inhalte von $S+$ und $S-$.

Satz 5. *Jede unitär beschränkte summierbare Funktion ist messbar.*

Erster Beweis. Sei ν eine beliebige ganze nichtnegative Zahl und $\varepsilon = 2^{-\nu-2}$. Alsdann bestehen auf Grund der Definition der Summierbarkeit für die summierbare Funktion $f(x)$ zwei solche sich nicht überdeckende und zusammen das Einheitsdoppelquadrat ausfüllende endliche Mengen c'_ν und c''_ν von $\varkappa$-Quadraten und ein solcher messbarer ebener Bereich γ_ν mit einem Inhalte $<\varepsilon^2$, dass für einen beliebigen Punkt (x, y) des Durchschnittes η'_ν von c'_ν mit dem Komplemente h_ν von γ_ν die Funktion $f(x)$ existiert und $f^2(x) > y^2$ und $y f(x) \geq 0$, und für einen beliebigen Punkt (x, y) des Durchschnittes η''_ν von c''_ν mit h_ν, falls $f(x)$ existiert und $y f(x) \geq 0$, notwendig $f^2(x) \leq y^2$ sein muss.

Definieren wir $\vartheta^{(m)}_\nu$ und $\zeta^{(m)}_\nu$ wie im Beweise von Satz 1, so ist wieder $i(\zeta^{(m)}_\nu) < \frac{1}{2^{m-2}}\varepsilon$, so dass man auf der X-Achse einen messbaren linearen Bereich η_ν mit einem Inhalte $< 4\varepsilon = 2^{-\nu}$ bestimmen kann, auf dessen Komplement g_ν die Funktion $f(x)$ für jedes x, in dessen beliebiger Umgebung es Ordinaten gibt, von denen c'_ν oberhalb bzw. unterhalb der X-Achse einen linearen Inhalt $\varrho \geq \varepsilon$ und c''_ν oberhalb bzw. unterhalb der X-Achse einen linearen Inhalt $1-\varrho$ überdeckt, existiert und einen zwischen $\varrho-\varepsilon$ und $\varrho+\varepsilon$ bzw. zwischen $-\varrho-\varepsilon$ und $-\varrho+\varepsilon$ gelegenen Wert besitzt und für jedes x, in dessen beliebiger Umgebung es Ordinaten gibt, von denen c'_ν oberhalb der X-Achse einen linearen Inhalt $\sigma_1 \leq \varepsilon$ und unterhalb der X-Achse einen linearen Inhalt $\sigma_2 \leq \varepsilon$ und c''_ν oberhalb der X-Achse einen linearen Inhalt $1-\sigma_1$ und unterhalb der X-Achse einen linearen Inhalt

$1-\sigma$, überdeckt, falls sie existiert, einen zwischen -2ε und 2ε gelegenen Wert besitzt.

Bestimmen wir mithin, im Einheitsintervall der x, $p=\frac{1}{\varepsilon}-1=2^{\nu+2}-1$ sich nicht überdeckende und zusammen das Einheitsintervall ausfüllende endliche Mengen $a_\nu', a_\nu'', \ldots a_\nu^{(p)}$ von $\varkappa$-Intervallen, so dass für $\mu=1$ bzw. für $\mu=p$ bzw. für $1<\mu<2^{\nu+1}$ bzw. für $2^{\nu+1}<\mu<p$ bzw. für $\mu=2^{\nu+1}$ in der Ordinate eines beliebigen innern Punktes von $a_\nu^{(\mu)}$ von c_ν' oberhalb der X-Achse ein linearer Inhalt $\geq 1-3\varepsilon$ bzw. unterhalb der X-Achse ein linearer Inhalt $\geq 1-3\varepsilon$ bzw. oberhalb der X-Achse ein linearer Inhalt $\geq 1-(2\mu+1)\varepsilon$ und $\leq 1-(2\mu-1)\varepsilon$ bzw. unterhalb der X-Achse ein linearer Inhalt $\geq(2\mu-1)\varepsilon-1$ und $\leq(2\mu+1)\varepsilon-1$ bzw. sowohl oberhalb wie unterhalb der X-Achse ein linearer Inhalt $\leq\varepsilon$ überdeckt wird, so existiert die Funktion $f(x)$ für $\mu \gtrless 2^{\nu+1}$ in jedem Punkte des Durchschnittes von $a_\nu^{(\mu)}$ und g_ν und besitzt daselbst für $\mu=1$ bzw. für $\mu=p$ bzw. für $1<\mu<2^{\nu+1}$ oder $2^{\nu+1}<\mu<p$ einen Wert $>1-4\varepsilon$ aber ≤ 1, bzw. ≥ -1 aber $<-1+4\varepsilon$, bzw. $>1-2(\mu+1)\varepsilon$ aber $<1-2(\mu-1)\varepsilon$, während für $\mu=2^{\nu+1}$ in einem beliebigen Punkte des Durchschnittes von $a_\nu^{(\mu)}$ und $g^{(\nu)}$, die Funktion $f(x)$, falls sie existiert, einen zwischen -2ε und 2ε gelegenen Wert besitzt, womit für die Funktion $f(x)$ die Messbarkeitsbedingungen erfüllt sind.

Zweiter Beweis. Unter der *oberen* bzw. *unteren Nebenfunktion* $f_{on}(x)$ bzw. $f_{un}(x)$ einer Funktion $f(x)$ wollen wir die Funktion verstehen, die ausschlieslich für diejenigen x existiert und $=f(x)$ ist, für welche $f(x)$ einen Wert ≥ 0 bzw. einen Wert ≤ 0 besitzt. Alsdann ist $S(f_{on}(x))=S^+(f(x))$ und $S(f_{un}(x))=S^-(f(x))$, so dass die Summierbarkeit von $f(x)$ die Summierbarkeit der positiv unitär beschränkten Funktion $f_{on}(x)$ sowie der negativ unitär beschränkten Funktion $f_{un}(x)$ nach sich zieht. Nach Satz 1 sind also die zur summierbaren Funktion $f(x)$ gehörigen Funktionen $f_{on}(x)$ und $f_{un}(x)$ messbar.

Auf Grund der Messbarkeit von $f_{on}(x)$ können wir für jedes ganze nichtnegative ν im Einheitsintervall der X-Achse $q=2^{\nu+1}$ sich nicht überdeckende und zusammen das Einheitsintervall ausfüllende endliche Mengen $u_\nu', u_\nu'', \ldots u_\nu^{(q)}$ von $\varkappa$-Intervallen und einen solchen messbaren linearen Bereich γ_ν mit einem Inhalte $<\frac{1}{2^{\nu+1}}$ bestimmen, dass die Funktion $f_{on}(x)$ für $\sigma=1$ bzw. für $1<\sigma<q$ bzw. für $\sigma=q$ für ein beliebiges x des Durchschnittes von $u_\nu^{(\sigma)}$ mit dem

Komplemente von γ_ν existiert und einen Wert $> \frac{2^\nu-1}{2^\nu}$ aber ≤ 1 besitzt, bzw. existiert und zwischen $\frac{2^{\nu+1}-\mu-1}{2^{\nu+1}}$ und $\frac{2^{\nu+1}-\mu+1}{2^{\nu+1}}$ liegt, bzw. falls sie existiert, $< \frac{1}{2^{\nu+1}}$ ist.

Ebenso können wir auf Grund der Messbarkeit von $f_{un}(x)$ im Einheitsintervall der X-Achse q sich nicht überdeckende und zusammen das Einheitsintervall ausfüllende endliche Mengen $v_\nu^{(q)}, v_\nu^{(q+1)}, \ldots v_\nu^{(2q-1)}$ von $\varkappa$-Intervallen und einen solchen messbaren linearen Bereich η_ν mit einem Inhalte $< \frac{1}{2^{\nu+1}}$ bestimmen, dass die Funktion $f_{un}(x)$ für $\sigma = 2q-1$ bzw. für $q < \sigma < 2q-1$ bzw. für $\sigma = q$ für ein beliebiges x des Durchschnittes von $v_\nu^{(\sigma)}$ mit dem Komplemente von η_ν existiert und einen Wert ≥ -1 aber $< \frac{-2^\nu+1}{2^\nu}$ besitzt, bzw. existiert und zwischen $\frac{2^{\nu+1}-\mu-1}{2^{\nu+1}}$ und $\frac{2^{\nu+1}-\mu+1}{2^{\nu+1}}$ liegt, bzw. falls sie existiert, $> -\frac{1}{2^{\nu+1}}$ ist.

Setzen wir nun $\mathfrak{S}(\gamma_\nu, \eta_\nu) = \beta_\nu$, $u_\nu^{(\sigma)} = a_\nu^{(\sigma)}$ für $1 \leq \sigma \leq q-1$ und $\mathfrak{D}(v_\nu^{(\sigma)}, u_\nu^{(q)}) = a_\nu^{(\sigma)}$ für $q \leq \sigma \leq 2q-1$, so ist β_ν ein messbarer linearer Bereich mit einem Inhalte $< \frac{1}{2^\nu}$, während die Funktion $f(x)$ für $\mu = 1$ bzw. für $\mu = 2q-1$ bzw. für $1 < \mu < q$ oder $q < \mu < 2q-1$ bzw. für $\mu = q$ für ein beliebiges x des Durchschnittes von $a_\nu^{(\mu)}$ mit dem Komplemente von β_ν existiert und einen Wert $> \frac{2^\nu-1}{2^\nu}$ aber ≤ 1 besitzt, bzw. existiert und einen Wert ≥ -1 aber $< \frac{-2^\nu+1}{2^\nu}$ besitzt, bzw. existiert und zwischen $\frac{2^{\nu+1}-\mu-1}{2^{\nu+1}}$ und $\frac{2^{\nu+1}-\mu+1}{2^{\nu+1}}$ liegt, bzw. falls sie existiert, zwischen $-\frac{1}{2^{\nu+1}}$ und $\frac{1}{2^{\nu+1}}$ liegt. Die Funktion $f(x)$ genügt somit der Messbarkeitsdefinition.

Satz 6. *Jede unitär beschränkte messbare Funktion ist summierbar.*

Beweis. Analog wie für Satz 2.

Die unitär beschränkte Funktion f soll *approximierbar* heissen, wenn für jedes ganze nichtnegative ν im Einheitsintervall der X-

[[258]]

Achse $l_\nu = 2^{\nu+2}-1$ messbare äussere Grenzspecies $A'_\nu, A''_\nu, \ldots A^{(l_\nu)}_\nu$ ohne gemeinsame Punkte mit der Inhaltssumme 1 bestimmt werden können, dass die Funktion f für $\mu = 1$ bzw. für $\mu = l_\nu$ bzw. für $1 < \mu < 2^{\nu+1}$ oder $2^{\nu+1} < \mu < l_\nu$ bzw. für $\mu = 2^{\nu+1}$ für ein beliebiges x von $A^{(\mu)}_\nu$ existiert und einen Wert $> \frac{2^\nu - 1}{2^\nu}$ aber ≤ 1 besitzt, bzw. existiert und einen Wert ≥ -1 aber $< \frac{-2^\nu + 1}{2^\nu}$ besitzt, bzw. existiert und zwischen $\frac{2^{\nu+1}-\mu-1}{2^{\nu+1}}$ und $\frac{2^{\nu+1}-\mu+1}{2^{\nu+1}}$ liegt, bzw. falls sie existiert, zwischen $-\frac{1}{2^{\nu+1}}$ und $\frac{1}{2^{\nu+1}}$ liegt.

Satz 7. *Jede unitär beschränkte messbare Funktion ist approximierbar.*

Beweis. Analog wie für Satz 3.

Satz 8. *Jede unitär beschränkte approximierbare Funktion ist messbar.*

Beweis. Analog wie für Satz 4.

Approximierung einer unitär beschränkten approximierbaren Funktion. Analog wie oben für eine positiv unitär beschränkte approximierbare Funktion können wir jetzt für eine unitär beschränkte approximierbare Funktion $f(x)$ der Reihe nach eine Fundamentalreihe von messbaren äusseren Grenzspecies $A^{(e_m)}_0$ definieren, wo m eine beliebige ganze positive Zahl und e_m eine Reihe von m Ziffern 1, 2 oder 3 bedeutet. Hierbei sind stets $A^{(e_m 1)}_0$, $A^{(e_m 2)}_0$ und $A^{(e_m 3)}_0$ elementefremd, sind in $A^{(e_m)}_0$ enthalten und besitzen eine Inhaltssumme gleich $i(A^{(e_m)}_0)$. Zu jedem $A^{(e_m)}_0$ gehört ein im Einheitsdoppelintervall enthaltenes λ-Intervall $\lambda^{(e_m)} = \lambda(A^{(e_m)}_0)$, das links bzw. rechts geschlossen, wenn sein linker bzw. rechter Endpunkt mit dem linken bzw. rechten Endpunkte des Einheitsdoppelintervalls zusammenfällt, fürs Uebrige offen ist, und zwar stellen $\lambda^{(e_m 1)}$, $\lambda^{(e_m 2)}$, $\lambda^{(e_m 3)}$ bzw. $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ der Reihe nach das rechte, mittlere und linke ganz in $\lambda^{(e_m)}$ liegende λ_{m+1}-Intervall bzw. ganz im Einheitsdoppelintervall liegende λ_1-Intervall dar. Falls e_m wenigstens eine von 2 verschiedene Ziffer enthält, existiert $f(x)$ für jedes x von $A^{(e_m)}_0$ und besitzt einen zu $\lambda^{(e_m)}$ gehörigen Wert, während, wenn e_m sich ausschliesslich aus Ziffern 2 zusammensetzt, $f(x)$ für jedes x von $A^{(e_m)}_0$, falls sie existiert, einen zu $\lambda^{(e_m)}$ gehörigen Wert besitzt. Die zu einem bestimmten m gehörigen $A_0^{(e_m)}$ haben die Inhaltssumme 1. Bei unbeschränkter Fortsetzung einer Ziffernreihe e_m braucht der Inhalt von $A_0^{(e_m)}$ keineswegs gegen Null zu konvergieren.

Satz 9. *Wenn für eine unitär beschränkte approximierbare Funktion f die in der Approximierbarkeitsdefinition auftretende äussere Grenzspecies A'_n für irgend ein n einen Inhalt $d > 0$ besitzt, wenn aber für $\mu > 1$ und $\nu > r$ der Inhalt von $A_\nu^{(\mu)}$ jedesmal dann verschwindet, wenn die nach der Approximierbarkeitsdefinition zu A'_n und $A_\nu^{(\mu)}$ gehörigen Wertintervalle von f übereinander greifen, dann ist die Species derjenigen x, für die $f(x) = 1$, messbar und besitzt den Inhalt d.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus der obigen Approximierungskonstruktion.

Im allgemeinen braucht für eine unitär beschränkte approximierbare Funktion f die Species derjenigen x, für die $f(x)$ einen bestimmten Wert c besitzt, keineswegs messbar zu sein.

Satz 10. *Zu jeder unitär beschränkten approximierbaren Funktion f existiert eine unitär beschränkte approximierbare Funktion φ mit derselben Integralspecies und demselben Integral, welche auf einer messbaren Punktspecies des Inhaltes 1 definiert ist und überall existiert, wo f existiert.*

Beweis. Bezeichnen wir die Vereinigung der bei der obigen Approximierungskonstruktion von f zu einem bestimmten m gehörigen $A_0^{(e_m)}$ mit B_m, so ist $B = \mathfrak{D}(B_1, B_2, \ldots)$ eine messbare Punktspecies des Inhaltes 1, jedem Punkte x von welcher eine unbegrenzt fortgesetzte, gegen einen Punkt $\psi(x)$ des Einheitsdoppelintervalles konvergierende Schachtelung von λ-Intervallen zugeordnet ist. Ordnen wir mithin einem beliebigen x nicht nur jedes λ-Intervall zu, das ein als existierend bekanntes $f(x)$ enthält (durch welche Zuordnung f bestimmt ist), sondern auch jedes den Nullpunkt enthaltende Intervall, in dem $f(x)$, falls sie existiert, enthalten ist, so ist die in dieser Weise definierte Funktion $\varphi(x)$ (die offenbar dieselbe Integralspecies und dasselbe Integral wie $f(x)$ besitzt), weil sie für jedes x, wo $\psi(x)$ existiert, ebenfalls existiert, auf einer messbaren Punktspecies des Inhaltes 1 definiert, und genügt mithin den vorgeschriebenen Bedingungen.

Für eine reelle Funktion haben wir im obigen nur endliche reelle Werte zugelassen. Lassen wir überdies die Werte $+\infty$ und $-\infty$ als Funktionswerte zu, so werden wir von einer *infinitären Funktion*
[[13]] oder kurz von einer *I-Funktion* sprechen.

[[260]]

Eine beliebige Funktion oder I-Funktion soll *messbar* bzw. *approximierbar* heissen, wenn sie durch die *„unitär beschränkende Transformation"* ($x' = x$; $|y'| = 1 - e^{-|y|}$; $yy' \geq 0$) in eine messbare bzw. approximierbare unitär beschränkte Funktion übergeht.

Satz 11. *Jede messbare Funktion oder I-Funktion ist approximierbar.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 7.

Satz 12. *Jede approximierbare Funktion oder I-Funktion ist messbar.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 8.

Wir werden sagen, dass die Fundamentalreihe F von Funktionen oder I-Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ *lückenlos konvergiert* gegen die (als *Grenzfunktion* von F zu bezeichnende) Funktion oder I-Funktion f, wenn nach Ausführung der unitär beschränkenden Transformation für einen beliebigen Punktkern x einer gewissen messbaren Punktspecies Q des Inhaltes 1 und für beliebig vorgegebenes positives ε eine solche positive ganze Zahl $m(\varepsilon, x)$ bestimmt werden kann, dass $f_n(x) - f(x)$ für $n \geq m(\varepsilon, x)$ existiert und dem absoluten Werte nach $< \varepsilon$ ist.

Satz 13. *Jede Grenzfunktion f einer Fundamentalreihe F von messbaren I-Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ ist messbar.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass Q eine konsolidierte messbare äussere Grenzspecies $\mathfrak{S}(k', k'', \ldots)$ ist, wo jedes $k^{(\nu)}$ eine messbare Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies darstellt, also mit einer finiten Punktmenge zusammenfällt. Auch dürfen wir annehmen, dass $i(k^{(\nu)}) > 1 - 2^{-\nu-1}$. Für ein beliebiges ν können wir nun ein solches n_ν bestimmen, dass nach Ausführung der unitär beschränkenden Transformation $f_n(x) - f(x)$ für $n \geq n_\nu$ für jedes x von $k^{(\nu)}$ existiert und dem absoluten Werte nach $< 2^{-\nu-2}$ ist. Bestimmen wir nun weiter eine solche endliche Anzahl von in endlicher Entfernung voneinander liegenden messbaren Bereichkomplementen $d'_\nu, d''_\nu, \ldots d^{(m_\nu)}_\nu$ mit einer Inhaltssumme $> 1 - 2^{-\nu-1}$ und m_ν solche endliche Dualbrüche $b'_\nu, b''_\nu, \ldots b^{(m_\nu)}_\nu$, dass $f_{n_\nu}(x)$ für jedes x von $d^{(\mu)}_\nu$, wo es existiert, zwischen $b^{(\mu)}_\nu - 2^{-\nu-2}$ und $b^{(\mu)}_\nu + 2^{-\nu-2}$ liegt, und setzen wir $\mathfrak{D}(k_\nu, d^{(\mu)}_\nu) = a^{(\mu)}_\nu$, so bilden die $a^{(\mu)}_\nu$ in endlicher Entfernung voneinander liegende messbare Bereichkomplemente mit einer Inhaltssumme $> 1 - 2^{-\nu}$, und mit der Eigenschaft, dass für ein beliebiges x eines $a^{(\mu)}_\nu$ sowohl $f_{n_\nu}(x)$ wie $f(x)$ existiert und $f_{n_\nu}(x)$ einen zwischen $b^{(\mu)}_\nu - 2^{-\nu-2}$ und $b^{(\mu)}_\nu + 2^{-\nu-2}$ gelegenen, mithin $f(x)$ einen zwischen $b^{(\mu)}_\nu - 2^{-\nu-1}$ und $b^{(\mu)}_\nu + 2^{-\nu-1}$ gelegenen Wert besitzt, womit die Messbarkeit von f bewiesen ist.

Wir werden sagen, dass die Fundamentalreihe F von I-Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ *lückenlos nach oben konvergiert* gegen die (als *obere Grenzfunktion* von F zu bezeichnende) I-Funktion f, wenn nach Ausführung der unitär beschränkenden Transformation für einen beliebigen Punktkern x einer gewissen messbaren Punktspecies Q des Inhaltes 1 und für beliebig vorgegebenes positives ε eine solche positive ganze Zahl $m(\varepsilon, x)$, dass $f_n(x) - f(x)$ für ein beliebiges $n \geq m(\varepsilon, x)$ existiert und $< \varepsilon$ ist, und für jedes n ein solches $p > n$, dass $f_p(x) > f(x) - \varepsilon$, bestimmt werden können.

Satz 14. *Jede obere Grenzfunktion f einer Fundamentalreihe F von messbaren I-Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ ist messbar.*

Beweis. Wenn wir $k^{(\nu)}$ und n_ν analog wie im Beweise von Satz 13 definieren und für $s \geq n_\nu$ unter ${}_{n_\nu}f_s(x)$ eine I-Funktion verstehen, die für ein beliebiges x von $k^{(\nu)}$ den Maximalwert von $f_{n_\nu}(x)$, $f_{n_\nu+1}(x), \ldots f_s(x)$ und für ein beliebiges x von $C(k^{(\nu)})$ den Wert 0 besitzt, so ist auch jedes ${}_{n_\nu}f_s(x)$ eine messbare I-Funktion, und die Fundamentalreihe ${}_{n_\nu}f_{n_\nu+1}(x), {}_{n_\nu}f_{n_\nu+2}(x), \ldots$ konvergiert lückenlos gegen eine Grenzfunktion $\varphi_\nu(x)$, die nach Satz 13 gleichfalls messbar ist. Die Fundamentalreihe $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ konvergiert aber ihrerseits lückenlos gegen $f(x)$, womit wiederum nach Satz 13 auch von $f(x)$
[[14]] die Messbarkeit erwiesen ist.

---

§ 3.

VOLLSTÄNDIG DERIVIERBARE FUNKTIONEN.

Eine volle Funktion f heisst *rechts oben derivierbar*, wenn der rechte Inkrementquotient $D(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $(h > 0)$ für gegen 0 konvergierendes h eine (als *obere rechte Derivierte* von f zu bezeichnende) obere Grenzfunktion $D^+(x)$ besitzt, d. h. wenn, nachdem man sowohl die $D(x, h)$ wie $D^+(x)$ der unitär beschränkenden Transformation unterzogen hat, für einen beliebigen Punktkern x einer gewissen messbaren Punktspecies Q des Inhaltes 1 und für beliebig vorgegebenes positives ε ein solches positives $\eta(\varepsilon, x)$, dass $D(x, h) - D^+(x)$ für ein beliebiges $h \leq \eta(\varepsilon, x)$ existiert und $< \varepsilon$ ist, und für jedes h ein solches $t < h$, dass $D(x, t) - D^+(x)$ existiert und $> -\varepsilon$ ist, bestimmt werden können.

Satz 1. *Die obere rechte Derivierte einer rechts oben derivierbaren vollen Funktion f ist messbar.*

[[262]]

Beweis. Weil für $0 \leq x \leq 1$ und $0 < a < h < b < 1$ der rechte Inkrementquotient $D(x, h)$ eine *gleichmässig* stetige Funktion von x und h darstellt, so lässt sich zu einer beliebig vorgegebenen gegen 0 konvergierenden Fundamentalreihe von positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine solche gegen 0 konvergierende abnehmende Fundamentalreihe von positiven Zahlen $h_1, h_2, \ldots$ bestimmen, dass $|D(x, h) - D(x, h_n)| < \varepsilon_n$ für $0 \leq x \leq 1$ und $h_n \geq h \geq h_{n+1}$, so dass $D^+(x)$ sich als obere Grenzfunktion der Fundamentalreihe $D(x, h_1)$, $D(x, h_2), \ldots$ herausstellt und somit nach § 2, Satz 14 messbar ist.

In analoger Weise definieren wir die *untere rechte* bzw. *obere linke* bzw. *untere linke Derivierte* D_+ bzw. D^- bzw. D_- einer *rechts unten* bzw. *links oben* bzw. *links unten derivierbaren* vollen Funktion. Alle diese Derivierten sind messbare Funktionen. Volle Funktionen, die gleichzeitig rechts oben, rechts unten, links oben und links unten derivierbar sind, heissen *vollständig derivierbar*.

Approximierung der Derivierten einer vollständig derivierbaren Funktion. Mittels des schon im § 2 bei der Approximierung unitär beschränkter approximierbarer Funktionen angewandten Verfahrens lassen sich für eine vollständig derivierbare Funktion der Reihe nach (als τ-Species zu bezeichnende) lineare messbare äussere Grenzspecies ${}^{(e_{m_3})}_{(e_{m_4})}A^{(e_{m_1})}_{(e_{m_2})}$ bestimmen, wo die m_α beliebige ganze positive Zahlen und e_{m_α} eine Reihe von m_α Ziffern 1, 2 oder 3 bedeutet. Bezeichnen wir hierbei mit ${}_\alpha\tau_1$, ${}_\alpha\tau_2$, ${}_\alpha\tau_3$ die Species, die aus der Species τ erhalten werden, indem wir das m_α von τ der Reihe nach durch $m_\alpha 1$, $m_\alpha 2$, $m_\alpha 3$ ersetzen, so sind stets ${}_\alpha\tau_1$, ${}_\alpha\tau_2$ und ${}_\alpha\tau_3$ elementefremd, sind in τ enthalten und haben eine Inhaltssumme gleich $i(\tau)$. Zu jedem τ gehören vier im Einheitsdoppelintervall enthaltene λ-Intervalle $\lambda^{(e_{m_1})}$, $\lambda^{(e_{m_2})}$, $\lambda^{(e_{m_3})}$ und $\lambda^{(e_{m_4})}$, die links bzw. rechts geschlossen, wenn ihr linker bzw. rechter Endpunkt mit dem linken bzw. rechten Endpunkt des Einheitsdoppelintervalls zusammenfällt, fürs Uebrige offen sind, und zwar stellen $\lambda^{(e_{m_\alpha}1)}$, $\lambda^{(e_{m_\alpha}2)}$, $\lambda^{(e_{m_\alpha}3)}$ bzw. $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ der Reihe nach das rechte, mittlere und linke ganz in $\lambda^{(e_{m_\alpha})}$ liegende $\lambda_{m_\alpha+1}$-Intervall bzw. ganz im Einheitsdoppelintervall liegende λ_1-Intervall dar. Für jedes x von τ existieren $D^+(x)$, $D_+(x)$, $D^-(x)$ und $D_-(x)$ und besitzen nach Ausführung der unitär beschränkenden Transformation der Reihe nach einen zu $\lambda^{(e_{m_1})}$, einen zu $\lambda^{(e_{m_2})}$, einen zu $\lambda^{(e_{m_3})}$ und einen zu $\lambda^{(e_{m_4})}$ gehörigen Wert. Sind m_1, m_2, m_3 und m_4 vorgegeben, so besitzen die verschiedenen zu diesen vier Zahlen gehörigen τ die Inhaltssumme 1. Wenn wir die Vereinigung derjenigen τ, für die $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = n$, mit χ_n bezeichnen, so ist auch

[[263]]

$\chi = \mathfrak{D}(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots)$ eine messbare Punktspecies des Inhaltes 1.

Satz 2. *Eine auf der X-Achse liegende messbare konsolidierte äussere Grenzspecies F, für welche von der vollständig derivierbaren Funktion f, D^+ im beschränkten Intervall α, D_- im beschränkten Intervall β enthalten ist, besitzt den Inhalt 0, wenn das geschlossene Intervall α in seinem ganzen rechts vom geschlossenen Intervall β gelegen ist.*

Beweis. Sei h der linke, s der rechte Endpunkt von α, r der linke, k der rechte Endpunkt von β, sei b eine solche positive Grösse, dass $(1-2\varepsilon)\,k + 2\varepsilon s < (1-2\varepsilon)\,h + 2\varepsilon r$ für $\varepsilon < b$, und nehmen wir einen Augenblick an, dass der Inhalt von F positiv sei. Dann können wir in F eine solche nirgends dichte messbare Abschliessung ζ einer katalogisierten Punktspecies bestimmen, dass, wenn wir den Abstand zwischen dem linken Endpunkte A und dem rechten Endpunkte B von ζ mit a bezeichnen, $i(\zeta) = a\,(1-c)$, wo $c < b$, und dass in einem beliebigen Punkte von ζ der rechte bzw. der linke Inkrementquotient von f für Inkremente, welche dem absoluten Werte nach $\leq ac$ sind, einen nicht rechts von α bzw. einen nicht links von β gelegenen Wert besitzt. Seien C und D zwei solche zwischen A und B gelegene Punkte, dass die Abstände CB und AD gleich ac sind, und sei η eine solche positive Grösse $< ac$, dass in einem beliebigen Punkte von ζ sowohl ein zwischen η und ac liegendes rechtes Inkrement, das für f ein in α enthaltenes Inkrementverhältnis liefert, wie ein dem absoluten Werte nach zwischen η und ac liegendes linkes Inkrement, das für f ein in β enthaltenes Inkrementverhältnis liefert, bestimmt werden können.

Wir bestimmen nun auf der X-Achse eine von links nach rechts laufende Punktreihe $A_1, A_2, \ldots A_m$ in folgender Weise: A_1 wird in A gewählt; A_2 in endlicher Entfernung von ζ so dass der Abstand $A_1 A_2$ zwischen η und ac liegt und der zu $A_1 A_2$ gehörige rechte Inkrementquotient von f in α enthalten ist; A_3 im ersten rechts von A_2 gelegenen Punkt von ζ; A_4 in endlicher Entfernung von ζ so dass der Abstand $A_3 A_4$ zwischen η und ac liegt und der zu $A_3 A_4$ gehörige rechte Inkrementquotient von f in α enthalten ist; usw. In dieser Weise fortfahrend, gelangen wir zu einem zwischen C und B liegenden Punkt A_{m-1}, worauf A_m in B gewählt wird. Mittels der zu den verschiedenen $A_\nu A_{\nu+1}$ gehörigen Inkrementquotienten finden wir für das zu $A_1 A_m$, d.h. zu AB gehörige Inkrementverhältnis einen Wert $> \dfrac{a\,(1-2c)\,h + 2acr}{a} =$
$= (1-2c)\,h + 2cr.$

Sodann bestimmen wir auf der X-Achse eine von rechts nach

[[264]]

links laufende Punktreihe $B_1, B_2, \ldots B_p$ in folgender Weise: wir wählen B_1 in B; B_2 in endlicher Entfernung von ζ so dass der Abstand $B_1 B_2$ zwischen η und ac liegt und das zu $B_1 B_2$ gehörige linke Inkrementverhältnis von f in β enthalten ist; B_3 im ersten links van B_2 gelegenen Punkt von ζ; B_4 in endlicher Entfernung von ζ so dass der Abstand $B_3 B_4$ zwischen η und ac liegt und das zu $B_3 B_4$ gehörige linke Inkrementverhältnis von f in β enthalten ist; usw. In dieser Weise fortfahrend, gelangen wir zu einem zwischen D und A liegenden Punkt B_{p-1}, worauf B_p in A gewählt wird. Mittels der zu den verschiedenen $B_\nu B_{\nu+1}$ gehörigen Inkrementquotienten finden wir jetzt für das zu $B_1 B_p$, d. h. zu BA gehörige Inkrementverhältnis einen Wert $< \frac{a(1-2c)k + 2\,ac\,s}{a} =$ $= (1-2c)k + 2c\,s$, was dem Resultate des vorigen Absatzes widerspricht. Unsere Annahme bezüglich F hat sich mithin als unstatthaft erwiesen, und der Inhalt von F muss notwendig $= 0$ sein.

Satz 3. *Eine auf der X-Achse liegende messbare konsolidierte äussere Grenzspecies F, für welche von der vollständig derivierbaren Funktion f, $D^+ = +\infty$ und D_- im beschränkten Intervall β enthalten ist, besitzt den Inhalt* 0.

Beweis. Sei r der linke Endpunkt von β, und nehmen wir einen Augenblick an, dass der Inhalt von F positiv sei. Dann können wir in F eine solche nirgends dichte messbare Abschliessung ζ einer katalogisierten Punktspecies bestimmen, dass, wenn wir den Abstand zwischen dem linken Endpunkte A und dem rechten Endpunkte B von ζ mit a bezeichnen, $i(\zeta) = a(1-c)$, wo $c < \frac{1}{2}$, und dass in einem beliebigen Punkte von ζ der linke Inkrementquotient von f für Inkremente, welche dem absoluten Werte nach $\leq ac$ sind, einen nicht links von β gelegenen Wert besitzt. Sei q der Inkrementquotient von f über AB und t eine solche Grösse $> r$, dass $(1-2c)\,t + 2cr > q$. Sei C ein solcher zwischen A und B gelegener Punkt, dass der Abstand CB gleich ac ist, und sei η eine solche positive Grösse $< ac$, dass in einem beliebigen Punkte von ζ ein zwischen η und ac liegendes rechtes Inkrement, das für f ein Inkrementverhältnis $> t$ liefert, bestimmt werden kann.

Wir bestimmen nun auf der **X**-Achse eine von links nach rechts laufende Punktreihe $A_1, A_2, \ldots A_m$ in folgender Weise: A_1 wird in A gewählt; A_2 in endlicher Entfernung von ζ so dass der Abstand $A_1 A_2$ zwischen η und ac liegt und der zu $A_1 A_2$ gehörige rechte Inkrementquotient von f grösser als t ist; A_3 im ersten rechts von

[[265]]

A_3 gelegenen Punkte von ζ; A_4 in endlicher Entfernung von ζ so dass der Abstand $A_3 A_4$ zwischen η und ac liegt und der zu $A_3 A_4$ gehörige rechte Inkrementquotient von f grösser als t ist; usw. In dieser Weise fortfahrend, gelangen wir zu einem zwischen C und B liegenden Punkt A_{m-1}, worauf A_m in B gewählt wird. Alsdann finden wir mittels der zu den verschiedenen $A_\nu A_{\nu+1}$ gehörigen Inkrementquotienten für das zu $A_1 A_m$, d. h. zu AB gehörige Inkrementverhältnis einen Wert $> \frac{a(1-2c)t + 2ac\,r}{a} = (1-2c)t + 2c\,r$, was der obigen Formel $(1-2c)t + 2c\,r > q$ widerspricht. Unsere Annahme bezüglich ε hat sich mithin als unstatthaft erwiesen, und der Inhalt von ε muss notwendig $= 0$ sein.

Satz 4. *Eine auf der X-Achse liegende messbare konsolidierte äussere Grenzspecies ε, für welche von der vollständig derivierbaren Funktion f, D^+ grösser ist als $\log 4$ und D_- im beschränkten Intervall β enthalten ist, besitzt den Inhalt 0, wenn $\log 4$ rechts vom geschlossenen Intervall β gelegen ist.*

Beweis. Sei $\psi(x)$ die messbare Funktion, die nur für ε existiert und daselbst gleich $D^+ f$ ist und φ die mittels der unitär beschränkenden Transformation aus ψ hervorgehende messbare Funktion. Alsdann existiert φ nur für ε und hat daselbst einen Wert $> \frac{3}{4}$. Nehmen wir einen Augenblick an, dass ε einen Inhalt $d > 0$ habe, so hat auch die (nach der Approximierbarkeitsdefinition für unitär beschränkte Funktionen) zu φ gehörige äussere Grenzspecies A'_1 den Inhalt $d > 0$. Wenn nun $A^{(\mu)}_\nu$ eine andere (nach der Approximierbarkeitsdefinition für unitär beschränkte Funktionen) zu φ gehörige äussere Grenzspecies darstellt, deren Wertintervall das Wertintervall von A'_1 teilweise überdeckt, so können wir r so bestimmen, dass der Inhalt eines $A^{(\mu)}_\nu$ der genannten Art für $\mu > 1$ und $\nu > r$ auf Grund von Satz 2 verschwinden muss. Hieraus folgern wir auf Grund von § 2, Satz 9 die Existenz einer messbaren Teilspecies π von ε mit dem Inhalte d, für welche gleichzeitig $D_- f$ in β liegt und $\varphi = 1$, also $D^+ = +\infty$ ist, was dem Satz 3 widerspricht. Unsere Annahme bezüglich ε hat sich mithin als unstatthaft erwiesen, und der Inhalt von ε muss notwendig gleich 0 sein.

Satz 5. *Eine auf der X-Achse liegende messbare konsolidierte äussere Grenzspecies ε, für welche von der vollständig derivierbaren Funktion f, D^+ grösser ist als die reelle Zahl $\varkappa$ und D_- im beschränkten Intervall β enthalten ist, besitzt den Inhalt 0, wenn $\varkappa$ rechts vom geschlossenen Intervall β gelegen ist.*

[[266]]

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Anwendung von Satz 4 auf die Funktion $f(x) + (log\, 4 - \varkappa)\, x$.

Satz 6. *Eine auf der X-Achse liegende messbare konsolidierte äussere Grenzspecies* φ, *für welche von der vollständig derivierbaren Funktion* f, $D^+ = +\infty$ *und* D_- *grösser als die reelle Zahl* $\varkappa$ *ist, besitzt den Inhalt* 0.

Beweis. Analog wie für Satz 3.

Satz 7. *Eine auf der X-Achse liegende messbare konsolidierte äussere Grenzspecies* φ, *für welche von der vollständig derivierbaren Funktion* f, $D^+ < s$ *und* $D_- > r$ *ist, besitzt für* $s < r$ *den Inhalt* 0.

Beweis. Nehmen wir einen Augenblick an, dass der Inhalt von φ positiv sei. Dann können wir in φ eine solche messbare Abschliessung ζ einer katalogisierten Punktspecies bestimmen, dass, wenn wir den Abstand zwischen dem linken Endpunkte A und dem rechten Endpunkte B von ζ mit a bezeichnen, $i(\zeta) = a(1-c)$, wo $c < 1$, und dass in einem beliebigen Punkte von ζ der rechte bzw. der linke Inkrementquotient von f für Inkremente, welche dem absoluten Werte nach $\leq ac$ sind, einen Wert $\leq s$ bzw. $\geq r$ besitzt. Hieraus folgt für das totale Inkrement von f über AB einerseits ein Wert $\leq s$, andererseits ein Wert $\geq r$, so dass unsere Annahme bezüglich φ sich als unstatthaft erweist, und der Inhalt von φ notwendig $= 0$ sein muss.

Satz 8. *Zu jeder vollständig derivierbaren Funktion* f *existiert im geschlossenen Einheitsintervall der X-Achse eine messbare äussere Grenzspecies des Inhaltes* 1, *in jedem Punkte von der die vier Derivierten von* f *existieren und* e r s t e n s *entweder der Gleichung* $D^+ = D_-$ *oder den Gleichungen* $D^+ = +\infty$ *und* $D_- = -\infty$, z w e i t e n s *entweder der Gleichung* $D_+ = D^-$ *oder den Gleichungen* $D_+ = -\infty$ *und* $D^- = +\infty$ *genügen.*

Beweis. Aus den Sätzen 2, 5 und 7 folgt nämlich, dass die S. 20 mittels der *Approximierung der Derivierten* erzeugte Punktspecies χ die aufgestellten Eigenschaften besitzt.

Satz 9. *Zu jeder vollständig derivierbaren monotonen Funktion* f *existiert im geschlossenen Einheitsintervall der X-Achse eine messbare äussere Grenzspecies des Inhaltes* 1, *in jedem Punkte von der die vier derivierten von* f *existieren und alle gleich sind, d.h.* f *einen gewöhnlichen Differentialquotienten besitzt.*

Beweis. Folgt unmittelbar mittels Spezialisierung von Satz 8.

1923 B Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie [1]).

⟦1⟧ Von *L. E. J. Brouwer* in Amsterdam.

---

§ 1.

Innerhalb eines bestimmten endlichen „Hauptsystems“ können Eigenschaften von Systemen, d. h. Abbildbarkeiten von Systemen auf andere Systeme mit vor-
⟦2⟧ geschriebenen Elementkorrespondenzen, immer *geprüft* (d. h. entweder bewiesen oder ad absurdum geführt) werden; die durch die betreffende Eigenschaft angewiesene Abbildung besitzt nämlich auf jeden Fall nur eine endliche Anzahl von Ausführungsmöglichkeiten, von denen jede für sich unternommen und entweder bis zur Beendigung oder bis zur Hemmung fortgesetzt werden kann. (Hierbei liefert das Prinzip der mathematischen Induktion oft das Mittel, derartige Prüfungen ohne individuelle Betrachtung jedes an der Abbildung beteiligten Elementes bzw. jeder für die Abbildung bestehenden Ausführungsmöglichkeit durchzuführen; demzufolge kann die Prüfung auch für Systeme mit sehr großer Elementenzahl mitunter verhältnismäßig schnell verlaufen.)

Auf Grund der obigen Prüfbarkeit gilt für innerhalb eines bestimmten endlichen Hauptsystems konzipierte Eigenschaften der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, d. h. das Prinzip, daß jede Eigenschaft für jedes System entweder richtig oder unmöglich ist, und insbesondere der *Satz von der Reziprozität der Komplementärspezies*, d. h. das Prinzip, daß für jedes System aus der Unmöglichkeit der Unmöglichkeit einer Eigenschaft die Richtigkeit dieser Eigenschaft folgt.

Wenn z. B. die Vereinigung $\mathfrak{S}(p, q)$ zweier mathematischer Spezies p und q wenigstens 11 Elemente enthält, so folgt hieraus auf Grund des (in diesem Falle als „Disjunktionsprinzip“ auftretenden) Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, daß entweder p oder q wenigstens 6 Elemente enthält.

Ebenso: Wenn man in der elementaren Arithmetik bewiesen hat, daß, wenn keine der ganzen positiven Zahlen $a_1, a_2, \dots a_n$ durch die Primzahl c teilbar ist,

---

[1]) Vortrag, in ungefähr gleichlautender Form in niederländischer Sprache auf der flämischen Naturforscherversammlung vom August 1923 und in deutscher Sprache auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung vom September 1923 gehalten. Für den niederländischen Text vgl. Wis- en Natuurkundig Tijdschrift, Bd. II, S. 1—7.

auch das Produkt $a_1a_2a_3 \ldots a_n$ nicht durch c teilbar ist, so folgt hieraus auf Grund des Satzes von der Reziprozität der Komplementärspezies: Wenn das Produkt $a_1a_2a_3 \ldots a_n$ durch die Primzahl c teilbar ist, so ist wenigstens einer von den Faktoren des Produktes durch c teilbar.

Für innerhalb eines bestimmten endlichen Hauptsystems mit Hilfe des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten hergeleitete Eigenschaften besteht stets Sicherheit, daß man bei Verfügung über einen hinreichenden Zeitraum zu ihrer empirischen Bestätigung gelangen kann.

Nun haben wir die Naturerscheinung, daß zahlreiche Objekte und Mechanismen der Anschauungswelt in bezug auf ausgedehnte Komplexe von Tatsachen und Ereignissen beherrscht werden können, indem man sie als (*eventuell teilweise unbekannte*) endliche diskrete, für bestimmte bekannte Teile an bestimmte Gesetze zeitlicher Verkettung gebundene Systeme betrachtet. Mithin sind auf diese Objekte und Mechanismen in bezug auf die betreffenden Komplexe von Tatsachen und Ereignissen die Gesetze der theoretischen Logik, einschließlich des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, anwendbar, obwohl eine vollständige empirische Bestätigung der gezogenen Schlüsse hier meistens a priori materiell ausgeschlossen ist und bei (juristischen und anderen) zeitlichen Rückschlüssen nicht einmal von einer partiellen Bestätigung die Rede sein kann. Sowohl dieser unvollständigen Verifizierbarkeit der nichtsdestoweniger als unumstößlich richtig betrachteten Schlüsse wie der partiellen Unbekanntheit der repräsentierenden endlichen Systeme und dem Umstande, daß die theoretische Logik häufiger und von mehreren auf diese materiellen, als auf mathematische Objekte angewandt wurde, ist es wahrscheinlich zuzuschreiben, daß man den Gesetzen der theoretischen Logik, einschließlich des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, einen aprioristischen Charakter zugesprochen und die in der Projektion eines endlichen diskreten Systems auf die betreffenden Objekte gelegenen Bedingungen ihrer Anwendbarkeit aus den Augen verloren hat, so daß man sogar dazu kommen konnte, für die völlig primäre und autonome Denkhandlung, welche die Mathematik der endlichen Systeme darstellt, eine tiefere Rechtfertigung in den logischen Gesetzen zu suchen. Dementsprechend führte bei der logischen Behandlung der Anschauungswelt das Auftreten eines Widerspruchs nie zum Zweifel an der Unerschütterlichkeit der logischen Gesetze, sondern nur zur Modifizierung und Ergänzung der auf die Anschauungswelt projizierten mathematischen Fragmente.

Die Konsequenz des den Gesetzen der theoretischen Logik zugeschriebenen aprioristischen Charakters brachte mit sich, daß man bis vor kurzem diese Gesetze, einschließlich des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, auch in der Mathematik der unendlichen Systeme rückhaltlos angewandt hat und sich dabei nicht von der Erwägung hat stören lassen, daß die auf diesem Wege erhaltenen Resultate im allgemeinen weder praktisch noch theoretisch einer empirischen Bestätigung zugänglich sind. Auf dieser Grundlage sind, insbesondere im letzten halben Jahrhundert, ausgedehnte unrichtige Theorien aufgebaut worden. Die Widersprüche, auf die man dabei wiederholt gestoßen ist, haben die *formalistische Kritik* ins Leben gerufen, eine Kritik, welche in ihrem Wesen darauf hinauskommt, daß die *die mathematische Denkhandlung begleitende Sprache* einer mathematischen Betrachtung unterzogen wird. Einer solchen Betrachtung bieten sich die Gesetze der theoretischen Logik als auf Grundformeln oder Axiome wirkende Operatoren dar, und man stellt sich als Ziel, diese Axiome so umzugestalten, daß die sprachliche Wirkung der genannten Operatoren (die selber ungeändert beibehalten werden) nicht mehr durch die Erscheinung der Sprachfigur des Widerspruchs gestört werden kann. An der Erreichung dieses Ziels braucht keineswegs verzweifelt zu werden [1]), aber damit wird kein mathematischer Wert gewonnen sein: eine durch keinen widerlegenden Widerspruch zu hemmende unrichtige Theorie ist darum nicht weniger unrichtig, so wie eine durch kein reprimierendes Gericht zu hemmende verbrecherische Politik darum nicht weniger verbrecherisch ist.

§ 2.

Von fundamentaler Bedeutung für diese unrichtige „logische“, d. h. den Satz vom ausgeschlossenen Dritten benutzende Unendlichkeitsmathematik, insbesondere für die (hauptsächlich aus der Pariser Schule hervorgegangene) *Theorie der reellen Funktionen* sind die beiden folgenden aus dem Satze vom ausgeschlossenen Dritten folgenden Grundeigenschaften gewesen:

1. *die Punkte des Kontinuums bilden eine geordnete Punktspezies* [2]).
2. *jede mathematische Spezies ist entweder endlich oder unendlich* [3]).

Daß die erste Grundeigenschaft unrichtig ist, zeigt folgendes Beispiel: Sei d_ν die ν-te Ziffer hinter dem Komma der Dezimalbruchentwickelung von π und $m = k_n$, wenn es sich in der fortschreitenden Dezimalbruchentwickelung von π bei d_m zum n-ten Male ereignet, daß der Teil $d_m\, d_{m+1} \ldots d_{m+9}$ dieser Dezimalbruchentwickelung eine Sequenz 0123456789 bildet. Sei weiter $c_\nu = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k_1}$, wenn $\nu \geq k_1$, sonst $c_\nu = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}$, dann definiert die unendliche Reihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ eine reelle Zahl r, für welche weder $r = 0$, noch $r > 0$, noch $r < 0$ gilt [4]).

---

[1]) Unberechtigte Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten auf Eigenschaften wohlkonstruierter mathematischer Systeme kann nämlich nie zu einem Widerspruch führen. Vgl. *L. E. J.*
[[3]] *Brouwer*, *„De onbetrouwbaarheid der logische principes“* (Tijdschrift voor wijsbegeerte, 2. Jahrgang, 1908), auch aufgenommen in „Wiskunde, waarheid, werkelijkheid“ (Groningen, Noordhoff, 1919).

[2]) Wenn nämlich einerseits $a < b$ entweder gilt oder unmöglich ist, andererseits $a > b$ entweder gilt oder unmöglich ist, so gilt entweder $a < b$ oder $a > b$ oder $a = b$.

[3]) Nach dem Satze vom ausgeschlossenen Dritten ist nämlich eine Spezies s entweder endlich, oder sie kann unmöglich endlich sein. Im letzteren Falle besitzt s ein Element e_1: denn sonst würde auf Grund des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten s unmöglich ein Element besitzen können, würde mithin endlich sein, was ausgeschlossen ist; weiter besitzt s ein von e_1 verschiedenes Element e_2: denn sonst würde s unmöglich ein von e_1 verschiedenes Element besitzen können, würde mithin endlich sein, was ausgeschlossen ist; in dieser Weise fortfahrend, zeigen wir, daß s eine Fundamentalreihe von verschiedenen Elementen $e_1, e_2, \ldots$ besitzt.

[4]) Selbstverständlich kann man r auch definieren mittels einer beliebigen anderen Eigenschaft x, von der für jede bestimmte ganze positive Zahl entweder die Existenz oder die Unmöglichkeit hergeleitet werden kann, während man aber weder eine ganze positive Zahl, die x besitzt, bestimmen noch die Unmöglichkeit von x für alle ganzen positiven Zahlen beweisen kann.

[[270]]

Mit der ersten Grundeigenschaft kommt gleichzeitig die Brauchbarkeit des Integralbegriffes der Pariser Schule, des sogenannten L-Integralbegriffes, in Fortfall, weil dieser Integralbegriff an den Begriff der „meßbaren Funktion" gebunden ist, und nach dem obigen nicht einmal eine konstante Funktion den Bedingungen der „Meßbarkeit" genügt. Denn für die Funktion $f(x) = r$, wo r die oben definierte reelle Zahl vorstellt, bilden die x-Werte, für welche $f(x) > 0$, keine meßbare Punktspezies [1]).

Daß die zweite Grundeigenschaft unrichtig ist, ersieht man aus dem von der Spezies der oben definierten ganzen positiven Zahlen k_n gelieferten Beispiel.

Mit der zweiten Grundeigenschaft kommt gleichzeitig das „erweiterte Disjunktionsprinzip" in Fortfall, nach welchem, wenn in der Vereinigung $\mathfrak{S}(p, q)$ zweier mathematischer Spezies p und q eine Fundamentalreihe von Elementen enthalten ist, entweder p oder q eine Fundamentalreihe von Elementen enthält, und mit dem erweiterten Disjunktionsprinzip der auf demselben beruhende *Bolzano-Weierstraß*sche Satz, nach welchem jede beschränkte unendliche Punktspezies einen Grenzpunkt besitzt.

Weniger prinzipiell und einfach als die genannten Grundeigenschaften, jedoch ebenso unentbehrlich wie diese für den Aufbau der „logischen" Funktionentheorie, sind die beiden folgenden Theoreme:

1. *Jede in einem geschlossenen Intervall i überall bestimmte stetige Funktion $f(x)$ besitzt ein Maximum, d. h. einen solchen Abszissenwert x_1 mit einer solchen Umgebung α, daß $f(x_1) \geq f(x)$ für jedes zum Durchschnitte von α und i gehörige x.*

Die Unrichtigkeit dieses Satzes geht aus dem folgenden Beispiel hervor: Zählen wir die zwischen 0 und 1 gelegenen irreduziblen Dualbrüche (ausschließlich 0 und 1) in üblicher Weise, d. h. so, daß jeder größere Nenner dem kleineren Nenner folgt, und daß die Brüche von gleichem Nenner nach der Größe des Zählers geordnet sind, durch eine Fundamentalreihe $\delta_1, \delta_2, \ldots$ ab, geben wir k_1 dieselbe Bedeutung wie oben, verstehen wir unter $f_n(x)$ die Funktion, welche für $x = \delta_n$ den Wert 2^{-n} besitzt, für $x = 0$ sowie für $x = 1$ verschwindet, während sie sowohl zwischen $x = 0$ und $x = \delta_n$ wie zwischen $x = \delta_n$ und $x = 1$ linear verläuft, und setzen wir $g_n(x) = f_n(x)$ für $n = k_1$, sonst $g_n(x) = 0$, so besitzt die im geschlossenen Einheitsintervall überall bestimmte stetige Funktion $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ kein Maximum.

2. (*Heine-Borel*scher Überdeckungssatz.) *Ist jedem Punktkerne der von den Punkten und Grenzpunkten einer beschränkten ganzen Punktspezies B gebildeten Punktspezies A eine Umgebung zugeordnet, so kann man die ganze Punktspezies A mit einer endlichen Anzahl dieser Umgebungen überdecken.* [4]

Die Unrichtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus dem folgenden Beispiel: Wenn für B die oben definierte Zahlenreihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ gewählt wird, während der Zahl c_ν für $\nu \geq k_1$ das Intervall $(c_\nu - 2^{-k_1-2},\ c_\nu + 2^{-k_1-2})$, sonst das Intervall $(c_\nu - 2^{-\nu-2}, c_\nu + 2^{-\nu-2})$, und einem eventuellen Grenzpunkte e

[1]) Dagegen findet der R-Integralbegriff, d. h. der *Riemann*sche Integralbegriff, ohne weiteres auf $f(x)$ Anwendung.

der Reihe das Intervall $(e - \frac{1}{2}, e + \frac{1}{2})$ zugeordnet ist, so kann A nicht durch eine endliche Anzahl von diesen Umgebungen überdeckt werden[1]).

Wo von der logischen Funktionentheorie nach dem obigen die Grundlagen unhaltbar sind, braucht man sich nicht zu wundern, daß ein großer Teil ihrer Resultate im Lichte einer genaueren Kritik hinfällig wird. Als Beispiel werden wir eines der bekanntesten klassischen Theoreme auf diesem Gebiete, nämlich den Satz, daß eine monotone, überall bestimmte stetige Funktion „fast überall" differenzierbar ist, widerlegen, indem wir eine im geschlossenen Einheitsintervall überall bestimmte monotone stetige, nirgends differenzierbare Funktion konstruieren.

Es sei $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Unter der *zum Intervall* (x_1, x_2) *gehörigen Elementarfunktion* werden wir die im geschlossenen Einheitsintervall überall bestimmte stetige Funktion verstehen, welche für $x_1 \leq x \leq x_2$ gleich

$$\frac{x_2 - x_1}{2\pi} \sin 2\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

und sowohl für $0 \leq x \leq x_1$ wie für $x_2 \leq x \leq 1$ gleich 0 ist, unter $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ die in üblicher Weise abgezählten, zum geschlossenen Einheitsintervall gehörigen Intervalle $\left(\frac{a}{2^n}, \frac{a+2}{2^n}\right)$, wo a und n ganze positive Zahlen bedeuten, und unter $f_n(x)$ die zu $\lambda^{(n)}$ gehörige Elementarfunktion. Weiter geben wir k_1 die oben definierte Bedeutung, setzen $g_1(x) = x$ und (für $n \geq 2$) $g_n(x) = f_n(x)$ für $n = k_1$, sonst $g_n(x) = 0$. Alsdann ist die Funktion $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ eine im geschlossenen Einheits-
[[5]] intervall überall bestimmte monotone stetige, nirgends differenzierbare Funktion.

§ 3.

Als Beispiel zur Erläuterung, daß auch ältere, fester konsolidierte Theorien auf dem Gebiete der Unendlichkeitsmathematik durch die Verwerfung des Satzes
[[6]] vom ausgeschlossenen Dritten und demzufolge des *Bolzano-Weierstraß*schen Satzes beeinflußt werden, wenn auch in viel geringerem Maße als die Theorie der reellen Funktionen, wählen wir den Begriff der Konvergenz unendlicher Reihen.

Nennen wir eine unendliche Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ mit reellen Gliedern, für welche die Summe der ersten n Glieder mit s_n bezeichnet wird, *non-oszillierend*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des gleichzeitigen Bestehens feststeht von einer unendlichen Reihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ und einer unendlichen Reihe positiver ganzer Zahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots$, so daß

$$|s_{n_\nu + m_\nu} - s_{n_\nu}| > \varepsilon \text{ für jedes } \nu,$$

so ist eine solche non-oszillierende Reihe nach der klassischen Theorie auf Grund des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten:

---

[1]) Auch für abgeschlossene beschränkte ganze Punktspezies A trifft der Satz nicht zu. Gegenbeispiel: Man wähle für A eine solche Spezies von Abszissen $(-2)^{-\nu}$, daß eine Abszisse $(-2)^{-\nu}$ dann und nur dann zu A gehört, wenn eine der obigen Charakterisierung genügende natürliche Zahl k_1 bekannt und ν eine natürliche Zahl $\leq k_1$ ist. Sodann ordne man jeder eventuell zu A gehörigen Abszisse dasselbe Intervall zu, wie oben im Text.

1. *negativ-konvergent*, d. h. es existiert eine reelle Zahl s mit der Eigenschaft, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des Bestehens feststeht von einer unendlichen Reihe unbeschränkt wachsender positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$, so daß

$$|s - s_{n_\nu}| > \varepsilon \text{ für jedes } \nu;$$

2. *beschränkt*, d. h. es existieren zwei solche reelle Zahlen g_1 und g_2, daß

$$g_1 < s_n < g_2 \text{ für jedes } n;$$

3. *positiv-konvergent*, d. h. es existiert eine reelle Zahl s mit der Eigenschaft, daß für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche ganze positive Zahl n_ε besteht, daß

$$|s - s_n| < \varepsilon \text{ für jedes } n > n_\varepsilon.$$

Betrachten wir nun aber die folgenden fünf non-oszillierenden Reihen (wobei k_1 wieder die oben definierte Bedeutung besitzt):

a) $u_n = \frac{1}{2^n}$ für jedes n,

b) $u_n = 2 + \frac{1}{2^n}$ für $n = k_1$; $u_n = -2 + \frac{1}{2^n}$ für $n = k_1 + 1$; sonst $u_n = \frac{1}{2^n}$,

c) $u_n = n + \frac{1}{2^n}$ für $n = k_1$; $u_n = -n + \frac{1}{2^n}$ für $n = k_1 + 1$; sonst $u_n = \frac{1}{2^n}$,

d) $u_n = 1$ für $n = k_1$; sonst $u_n = \frac{1}{2^n}$,

e) $u_n = n$ für $n = k_1$; sonst $u_n = \frac{1}{2^n}$,

dann stellt sich die Reihe a) als positiv-konvergent, mithin auch negativ-konvergent und beschränkt heraus; die Reihe b) als negativ-konvergent und beschränkt, aber nicht positiv-konvergent; die Reihe c) als negativ-konvergent, aber nicht beschränkt, mithin auch nicht positiv-konvergent; die Reihe d) als beschränkt, aber nicht negativ-konvergent, mithin auch nicht positiv-konvergent; die Reihe e) endlich als weder beschränkt, noch negativ-konvergent, noch positiv-konvergent.

Zur Erläuterung der Konsequenzen der obigen Unterscheidung wollen wir das *Kummer*sche Konvergenzkriterium betrachten, das wie folgt lautet: „Wenn $B_1, B_2, \ldots$ positive Zahlen sind, und wenn für die unendliche Reihe mit positiven Gliedern $r = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$

$$\lim \left\{ B_n \frac{u_n}{u_n + 1} - B_{n+1} \right\} > 0$$

ist, dann ist r positiv-konvergent".

Der Beweis dieses Konvergenzkriteriums wird gewöhnlich wie folgt geführt: Man wählt auf Grund des Vorausgesetzten M und k so, daß für $n \geq M$

$$B_n \frac{u_n}{u_n + 1} - B_{n+1} > k,$$

$$B_n u_n - B_{n+1} u_{n+1} > k u_{n+1},$$

$$B_n u_n - B_{n+p} u_{n+p} > k(u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}),$$

$$u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} < \frac{B_n u_n}{k},$$

woraus für die Reihe $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots (n \geq M)$, mithin auch für die Reihe $r = u_1 + u_2 + \cdots$ die *Beschränktheit* folgt. Auf Grund dieser Beschränktheit wird dann die Reihe r nicht nur non-oszillierend, was für eine Reihe mit positiven Gliedern erlaubt ist, sondern auch positiv-konvergent erklärt.

Der letztere Schluß beruht aber auf dem *Bolzano-Weierstraß*schen Satz und muß zusammen mit diesem verworfen werden.

Einen ganz anderen, lehrreicheren Beweis bringt *Pringsheim* in seinen *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre* I, 2, S. 378. Nachdem dort sowohl für den Fall der positiven Konvergenz wie für den Fall der positiven Divergenz von $b = \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \cdots$ die positive Konvergenz von r bewiesen worden ist, wird angenommen, daß die Reihe b entweder positiv-konvergent oder positiv-divergent sein muß, und aus diesem Grunde das allgemeine Kriterium bewiesen erklärt.

Die genannte Annahme ist aber unzulässig; denn auch ihr liegt der *Bolzano-Weierstraß*sche Satz zu Grunde.

Bemerkenswert ist nun, daß *Kummer* selbst sein Kriterium nur mit der Nebenbedingung $\lim B_n u_n = 0$ ausgesprochen hat [1]), und daß unter dieser Nebenbedingung, wie aus dem obigen Beweise unmittelbar hervorgeht, die positive Konvergenz der Reihe r durch das Kriterium auch tatsächlich gesichert ist.

Daß nicht nur die Herleitungen des keiner Nebenbedingung unterliegenden *Kummer*schen Konvergenzkriteriums unzulänglich sind [2]), sondern auch das Kriterium selbst unrichtig ist, zeigt die obige weder positiv-konvergente noch negativ-konvergente Reihe d). Bestimmen wir nämlich zu dieser Reihe die sukzessiven B_n aus den Relationen:

$$B_1 = 4, \qquad B_n \frac{u_n}{u_n + 1} - B_{n+1} = 1 \text{ für jedes } n,$$

so fallen alle B_n positiv aus, so daß hier das erweiterte Konvergenzkriterium erfüllt ist, ohne daß positive Konvergenz besteht. Die nach *Kummer* im Anschluß an *Dini* stattgefundene *Fortlassung der Kummerschen Nebenbedingung* hat somit die Tragweite des betreffenden Konvergenzkriteriums erheblich beeinträchtigt.

[[7]] 1) Vgl. dieses Journal 13 (1835), S. 171.

2) Die Unzulänglichkeit dieser Herleitungen, im Gegensatz zur Korrektheit des ursprünglich von *Kummer* selbst für das engere Kriterium geführten Beweises, wurde mir als Beispiel der Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für die Theorie der unendlichen Reihen von
[[8]] meinem Schüler Herrn *M. J. Belinfante* angegeben.

Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe.[1]

1923 C

Von L. E. J. BROUWER in Amsterdam.

Wir behandeln im folgenden einige Konsequenzen der intuitionistischen These, die aussagt, daß die unbeschränkte Gültigkeit des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten nur für solche Teile der Mathematik besteht, die sich innerhalb eines bestimmten endlichen mathematischen Systems abspielen, mithin auch nur für solche Teile der Naturwissenschaften, auf die sich ein bestimmtes endliches mathematisches System projizieren läßt.[2])

1) Der Inhalt dieses Aufsatzes wurde in der Sitzung der Amsterdamer Akademie der Wiss. am 24. November 1923 vorgetragen.

2) Der Glauben an die unbeschränkte Anwendbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beim Studium der Naturgesetze impliziert mithin den Glau-

17*

Wir erläutern zunächst die Ungültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Unendlichkeitsmathematik an einem Beispiel: Nennen wir eine reelle Zahl g *rational*, wenn zwei solche ganze Zahlen p und q bestimmt werden können, daß $g = \frac{p}{q}$, und *irrational*, wenn die Annahme der Rationalität von g ad absurdum geführt werden kann, so müßte nach dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten jede reelle Zahl entweder rational oder irrational sein.

Definieren wir nun aber eine reelle Zahl r in folgender Weise: Sei d_ν die ν-te Ziffer hinter dem Komma der unendlichen Dezimalbruchentwickelung von π und $m = k_n$, wenn es sich in der fortschreitenden Dezimalbruchentwickelung von π bei d_m zum n-ten Male ereignet, daß der Teil $d_m d_{m+1} \dots d_{m+9}$ dieser Dezimalbruchentwickelung eine Sequenz 0123456789 bildet. Sei weiter $c_\nu = (-\frac{1}{2})^{k_1}$, wenn $\nu \geqq k_1$, sonst $c_\nu = (-\frac{1}{2})^\nu$, und wählen wir für r die Limeszahl der unendlichen Reihe $c_1, c_2, c_3, \cdots$

[[1]] Diese Zahl r ist weder rational, noch irrational.[3])

§ 1. Richtigkeitsprädikate.

Das eben konstruierte Beispiel zeigt gleichzeitig die Ungültigkeit des *Prinzips der Reziprozität der Komplementärspezies*, d. h. desjenigen Korollars des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, welches für ein beliebiges mathematisches System aus der Absurdität der Absurdität einer Eigenschaft (also insbesondere aus der Möglichkeit, die Eigenschaft aus ihrer Absurdität herzuleiten) die Richtigkeit dieser Eigenschaft folgert.[4]) Denn die Zahl r ist nicht rational, trotzdem ihre Irrationalität absurd ist.[5])

---

ben an die Endlichkeit und an den atomistischen Bau der Welt. Dies heißt aber nicht, daß für den Physiker, der den letzteren Glauben besitzt, die intuitionistische Kritik bedeutungslos wäre, denn die Rechenmethoden, deren er sich bedient, beruhen auch beim Studium einer als endlich und atomistisch gedachten Natur auf Kontinuitätsmathematik, mithin auf Unendlichkeitsmathematik.

3) Nennen wir eine reelle Zahl g *mit* 0 *vergleichbar*, wenn entweder $g > 0$ oder $g \leqq 0$ gilt, und *mit* 0 *unvergleichbar*, wenn die Annahme, daß g mit 0 vergleichbar wäre, ad absurdum geführt werden kann, so ist die Zahl r weder mit 0 vergleichbar, noch mit 0 unvergleichbar.

4) (Zusatz bei der Korrektur.) Andererseits würde auch der Satz vom ausgeschlossenen Dritten aus dem Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies folgen. Um dies einzusehen, genügt es, auf eine beliebige Eigenschaft eines beliebigen mathematischen Systems zunächst meinen Satz von der Absurdität der Absurdität des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten (Tijdschr. v. Wijsbeg. 2

[[2]] (1908); vgl. auch Journ. f. Math. **154** (1924), S. 3) und sodann das Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies anzuwenden. Diese Bemerkung rührt von Herrn P. Bernays her.

5) Auch ist sie nicht mit 0 vergleichbar, trotzdem ihre Unvergleichbarkeit mit 0 absurd ist.

Das Postulat der *Alternative von Absurdität oder Absurdität der Absurdität* einer beliebigen Eigenschaft für ein beliebiges mathematisches System sagt mithin weniger aus als der Satz vom ausgeschlossenen Dritten; indes wird auch das erstere Postulat vom Intuitionisten nicht anerkannt. So läßt sich von der Existenzeigenschaft der oben eingeführten positiven ganzen Zahl k_1 weder die Absurdität noch die Absurdität der Absurdität behaupten.

Eine Sequenz von n Absurditätsprädikaten: „Absurdität der Absurdität der ... Absurdität" kann nach der klassischen Auffassung, indem man auf Grund des Prinzips der Reziprozität der Komplementärspezies hinreichend oft zwei aufeinanderfolgende Prädikate der Sequenz streicht, entweder auf Absurdität, oder auf Richtigkeit zurückgeführt werden. Man könnte nun einen Augenblick meinen, daß dieser Streichungsprozeß für die intuitionistische Auffassung völlig ausgeschlossen wäre, und daß demzufolge verschiedenzahlige Sequenzen von Absurditätsprädikaten für diese Auffassung immer ungleichwertig sein müßten. Dies ist jedoch nicht der Fall: im Gegenteil ist der bezügliche Streichungsprozeß auch vom intuitionistiscben Standpunkte zulässig *unter der Bedingung, daß das letzte Absurditätsprädikat der Sequenz davon ausgeschlossen bleibe.* Es gilt nämlich das

Theorem. *Absurdität der Absurdität der Absurdität ist äquivalent mit Absurdität.*

Beweis. **a)** Wenn die Eigenschaft y aus der Eigenschaft x folgt, so folgt aus der Absurdität von y die Absurdität von x. Mithin muß, weil aus Richtigkeit Absurdität der Absurdität folgt, *aus Absurdität der Absurdität der Absurdität, Absurdität folgen.*

b) Weil aus der Richtigkeit einer beliebigen Eigenschaft die Absurdität der Absurdität dieser Eigenschaft folgt, so muß insbesondere aus Richtigkeit der Absurdität, d. h. *aus Absurdität, Absurdität der Absurdität der Absurdität folgen.*

Auf Grund des hiermit bewiesenen Theorems ist in der intuitionistischen Mathematik *eine endliche, nicht verschwindende Sequenz von Absurditätsprädikaten entweder mit Absurdität der Absurdität oder mit Absurdität äquivalent.*

§ 2. Ebene Verschmelzungsbeziehungen von zwei Punkten.[6])

Als Grundbeziehungen bieten sich hier dar das *Zusammenfallen* und die *Entfernung.*

Zwei Punkte P_1 und P_2 *fallen zusammen,* wenn in jedem Quadrate

6) Für die Definition eines Punktes der Ebene vgl. Verhandelingen der Amsterdamer Akademie, 1. Sektion, XII, 7, S. 3, wo auch zusammenfallende und örtlich verschiedene Punkte definiert werden. [[3]]

von P_1 ein Quadrat von P_2 und in jedem Quadrate von P_2 ein Quadrat von P_1 enthalten ist.[6])

Zwei Punkte P_1 und P_2 liegen *voneinander entfernt* (oder sind *örtlich verschieden*), wenn ein Quadrat von P_1 und ein Quadrat von P_2 angegeben werden können, die außerhalb voneinander liegen.[6])

Lassen wir auf die Zusammenfallbeziehung die Prädikate der Absurdität und der Absurdität der Absurdität wirken, so entsteht nur im ersten Falle eine neue Beziehung, welche wir die *Abweichungsbeziehung* nennen; im zweiten Falle finden wir die Zusammenfallbeziehung zurück.

Lassen wir auf die Entfernungsbeziehung die Prädikate der Absurdität und der Absurdität der Absurdität wirken, so finden wir im ersten Falle die Zusammenfallbeziehung, im zweiten Falle die Abweichungsbeziehung zurück.

Nach Einführung der Zeichen $a \leftarrow\rightarrow b$ (d. h. a und b widersprechen sich gegenseitig) und $a \longrightarrow b$ (d. h. b folgt aus a) (für welche die Eigenschaften bestehen, daß aus $a \longrightarrow b$ und $b \leftarrow\rightarrow c$ folgt $a \leftarrow\rightarrow c$ und aus $a \longrightarrow b$ und $b \longrightarrow c$ folgt $a \longrightarrow c$) kann der logische Zusammenhang zwischen den hier gewonnenen drei ebenen Verschmelzungsbeziehungen von zwei Punkten wie folgt ausgedrückt werden:

$$\textit{Zusammenfallung} \longleftarrow\!\!\longrightarrow \textit{Abweichung} \longleftarrow \textit{Entfernung}$$

§ 3. Ebene Einhüllungsbeziehungen von einem Punkte und einer Punktspezies.

Als Grundbeziehungen bieten sich hier dar die *Einhüllung* und die *Entfernung*.[7])

Ein Punkt P wird von einer Punktspezies Q *eingehüllt*, wenn er mit einem Punkte von Q zusammenfällt.

Ein Punkt P liegt von einer Punktspezies Q *entfernt*, wenn er von jedem Punkte von Q entfernt liegt.

Lassen wir auf die Einhüllungsbeziehung die Prädikate der Absurdität und der Absurdität der Absurdität wirken, so kommen zwei neue Beziehungen, die wir der Reihe nach die *Abweichungsbeziehung* und die *Anschlußbeziehung* nennen wollen.

Lassen wir auf die Entfernungsbeziehung die Prädikate der Absurdität und der Absurdität der Absurdität wirken, so kommen zwei neue Beziehungen, die wir der Reihe nach die *Anlehnungsbeziehung* und die *Abtrennungsbeziehung* nennen wollen.

7) Die *Abweichungsbeziehung*, welche dann besteht, wenn P von jedem Punkte von Q abweicht, kommt als Grundbeziehung deshalb nicht in Betracht, weil sie mit der Absurdität der Einhüllungsbeziehung äquivalent ist.

[[278]]

Der logische Zusammenhang zwischen den in dieser Weise gewonnenen sechs Einhüllungsbeziehungen von einem Punkte und einer Punktspezies kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$
\begin{tikzcd}
\textit{Einhüllung} \arrow[r] & \textit{Anschließung} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr] & \textit{Abweichung} \\
\textit{Entfernung} \arrow[r] & \textit{Abtrennung} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ur, dashed] & \textit{Anlehnung}
\end{tikzcd}
$$

Dem obigen gemäß kann eine reelle Zahl in drei Weisen „rational" sein, je nachdem sie von der Menge der rationalen Zahlen eingehüllt wird oder an dieselbe anschließt oder sich daran anlehnt[8]); und in drei Weisen „irrational", je nachdem sie von der Menge der rationalen Zahlen entfernt oder abgetrennt liegt oder von derselben abweicht.

§ 4. Ebene Verschmelzungsbeziehungen von zwei Punktspezies.

Als Grundbeziehungen bieten sich hier dar das *Zusammenfallen*, die *Abweichung* und die *Entfernung*.

Zwei Punktspezies Q und R *fallen zusammen*, wenn jeder Punkt von Q mit einem Punkte von R und jeder Punkt von R mit einem Punkte von Q zusammenfällt.

Zwei Punktspezies Q und R *weichen voneinander ab*, wenn eine von ihnen einen Punkt enthält, der von der anderen abweicht.

Zwei Punktspezies Q und R liegen *voneinander entfernt*, wenn eine von ihnen einen Punkt enthält, der von der anderen entfernt liegt.

Lassen wir auf die Zusammenfallbeziehung die Prädikate der Absurdität und der Absurdität der Absurdität wirken, so kommen zwei neue Beziehungen, die wir der Reihe nach die *Loswindungsbeziehung* und die *Verflechtungsbeziehung* nennen wollen.

Lassen wir auf die Abweichungsbeziehung die Prädikate der Absurdität und der Absurdität der Absurdität wirken, so kommen zwei neue Beziehungen, die wir der Reihe nach die (örtliche) *Kongruenzbeziehung*[9]) und die *Loslösungsbeziehung* nennen wollen.

8) Insbesondere schließt die oben definierte reelle Zahl r an die Menge der rationalen Zahlen an, ohne von derselben eingehüllt zu werden.

9) Vgl. a. a. O. S. 6. Sei A die Menge der rationalen Zahlen; B die Menge ⟦3⟧
der reellen Zahlen $r + s$, wo r dieselbe Bedeutung wie oben hat und s eine variabele rationale Zahl vorstellt; C die Spezies der reellen Zahlen; D die Spezies der negativ-irrationalen (d. h. von A abweichenden) Zahlen; E die Spezies der positiv-irrationalen (d. h. von A entfernt liegenden) Zahlen; F die Vereinigung

Lassen wir auf die Entfernungsbeziehung die Prädikate der Absurdität und der Absurdität der Absurdität wirken, so kommen zwei neue Beziehungen, die wir der Reihe nach die (örtliche) *Übereinstimmungsbeziehung*[9]) und die *Absonderungsbeziehung*[10]) nennen wollen.

Der logische Zusammenhang zwischen den in dieser Weise gewonnenen neun ebenen Verschmelzungsbeziehungen von zwei Punktspezies kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{tikzcd}
\textit{Entfernung} \arrow[r] \arrow[d] & \textit{Absonderung} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \textit{Übereinstimmung} \\
\textit{Abweichung} \arrow[r] & \textit{Loslösung} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr] & \textit{Kongruenz} \arrow[u] \\
\textit{Zusammenfallung} \arrow[r] & \textit{Verflechtung} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ur] & \textit{Loswindung}
\end{tikzcd}$$

von A und D; G die Vereinigung von A und E. Alsdann sind A und B verflochten, ohne zusammenzufallen; C und F sind kongruent, aber auch voneinander losgewunden, mithin nicht verflochten; C und G stimmen überein, ohne kongruent
[4] zu sein.

10) Sei U die Menge der ganzen positiven Zahlen; V die Menge der Zahlen $t_1, t_2, t_3, \ldots$, wo $t_\nu = (n - k_1 + 1)\,2$ für $n \geq k_1$, sonst $t_\nu = 2n - 1$. Alsdann besteht zwischen U und V die Absonderungsbeziehung, aber nicht die Abweichungsbeziehung.

(Eingegangen am 6. 2. 24.)

Mathematics. — *„Ueber die Zulassung unendlicher Werte für den Funktionsbegriff.”* By Prof. L. E. J. Brouwer. 1924 A

(Communicated at the meeting of January 26, 1924).

Unter einer *endlichen Funktion* versteht man ein Gesetz, das jeder reellen Zahl x *einer gewissen Spezies* eine reelle Zahl $y = f(x)$ zuordnet; unter einer *unitär beschränkten Funktion* eine endliche Funktion, für welche $-1 \leq y \leq 1$ ist; unter einer *reduziert unitären Funktion* ein Gesetz, das jeder reellen Zahl x einer gewissen Spezies einen Punkt $y = f(x)$ des Zirkularkontinuums zuordnet, das aus dem Kontinuum der reellen Zahlen y mittels Identifizierung von y und $y+1$ hervorgeht; unter einer *vollen Funktion* eine Funktion, bei welcher die Zuordnung für jede *beliebige* reelle Zahl x stattfindet. [[1]]

Um nun auch elementaren Relationen wie $y = \frac{1}{x}$ den Charakter einer vollen Funktion erteilen zu können, wird man zu den Begriffen der *infinitären Funktion* und der *reduziert infinitären Funktion* geführt, bei denen für $f(x)$ auch unendliche Werte zugelassen sind.

Diese Begriffe können aber nicht einfach definiert werden als Gesetze, die jeder reellen Zahl x einer gewissen Spezies ein $y = f(x)$ zuordnen, das im ersteren Falle entweder den Wert $+\infty$, oder den Wert $-\infty$, oder eine reelle Zahl, im letzteren Falle entweder den Wert ∞, oder eine reelle Zahl darstellt. So nämlich würde die Relation $y = \frac{1}{x}$ noch immer keine volle (reduziert infinitäre) Funktion liefern, weil sie der reellen Zahl r (vgl. Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik 154, S. 3) weder den Wert ∞, noch eine reelle Zahl zuordnet. [[2]]

Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, muss man seine Zuflucht nehmen zu einer Definition folgender Art (die auch in Bd. XIII N°. 2 der Verhandelingen dieser Akademie, Eerste Sectie, im letzten Absatz von S. 17 zu lesen ist): [[3]]

Unter einer *infinitären* bzw. *reduziert infinitären Funktion* wird das Resultat verstanden, das herauskommt, wenn eine unitär beschränkte bzw. reduziert unitäre Funktion der „infinitär ausdehnenden Transformation”

$$x' = x; \quad |y'| = -\log\{1 - |y|\}; \quad yy' \geq 0$$

unterzogen wird.

1924 B **Mathematics.** — "*Perfect sets of points with positively-irrational distances*". By Prof. L. E. J. BROUWER.

[1] (Communicated at the meeting of February 23, 1924).

The following construction of a set of points of the kind mentioned in the title is perhaps somewhat simpler than that which was developed by Prof. WOLFF in these Proceedings Vol. XXVII, p. 95—96.

In the closed unity interval we determine a fundamental series of sets of points $s_1, s_2, s_3, \ldots$, in which each s_ν consists of 2^ν closed intervals having distances greater than zero from each other, whilst within each interval of $s_{\nu-1}$ two intervals of s_ν are situated, and the distance of two positively-different points of s_ν differs positively from each fractional number $\frac{a}{n}$ $(n \leq \nu)$. The greatest common divisor $\mathfrak{D}(s_1, s_2, \ldots)$ forms a perfect set of points two arbitrary positively-different points of which possess a positively-irrational distance.

In the above fundamental series the possibility of determining s_ν when disposing of $s_{\nu-1}$ follows from the property that in the closed unity interval for each positive integer ν and for each positive ε a finite set of closed intervals can be defined approaching each point of the closed unity interval at a distance $< \varepsilon$, and two arbitrary positively-different points of which have a distance positively differing from each fractional number $\frac{a}{\nu}$.

This definition can be given as follows: Let m be a positive integer such that the greatest common divisor of m and ν be unity, whilst $\frac{1}{m} \leq \varepsilon$, then the distance of two arbitrary points of the finite set of points π_m consisting of the points $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots \frac{m-1}{m}$, differs at least an amount of $\frac{1}{m\nu}$ from each non-vanishing fractional number $\frac{a}{\nu}$. So, if on each point of π_m as centre we lay a closed interval of length $\frac{1}{2m\nu}$, a finite set of closed intervals arises approaching each point of the closed unity interval at a distance $< \varepsilon$, whilst two arbitrary positively-different points of it have a distance differing at least an amount of $\frac{1}{2m\nu}$ from each non-vanishing fractional number $\frac{a}{\nu}$.

Mathematics. — "*Intuitionistischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra*". By Prof. L. E. J. BROUWER and B. DE LOOR. 1924 C

(Communicated at the meeting of February 23, 1924). [[1]]

Sei $\psi(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$ eine algebraische Gleichung mit rationalkomplexen Koeffizienten. Hiermit meinen wir, dass jedes $a_\nu = b_\nu + ic_\nu$ ist, wo b_ν und c_ν reelle rationale Zahlen vorstellen. Diese Gleichung lässt sich derweise in eine endliche Anzahl von algebraischen Gleichungen zerlegen, dass jede dieser Faktorgleichungen ebenfalls rationalkomplexe Koeffizienten besitzt, während überdies ihr linkes Glied und dessen Derivierte relativ prim sind. Sei $\varphi(x) \equiv x^p + e_1 x^{p-1} + \ldots . e_p = 0$ eine dieser Faktorgleichungen. Alsdann können zwei solche ganze rationale Funktionen $h(x)$ und $g(x)$ mit rationalkomplexen Koeffizienten bestimmt werden, dass $h(x)\varphi(x) + g(x)\varphi'(x) \equiv 1$ ist, so dass man zwei solche positive Grössen a und b angeben kann, dass $|\varphi'(x)| > b$ gilt für $|\varphi(x)| < a$. Wir stellen uns zum Ziel, von $\varphi(x) = 0$ eine Wurzel zu bestimmen und werden dabei voraussetzen, dass $|\varphi(0)| > 0$ ist (worin keine Beschränkung gelegen ist).

Sei $|\varphi| - |\varphi - x^p| > k > 0$ für $|x| \geq r$ und $|\varphi'| < q$ für $|x| \leq r$. Sei ε eine beliebige positive Grösse. Im Innengebiete des in der x-Ebene mit dem Radius r um den Nullpunkt geschlagenen Kreises $C(r)$ bestimmen wir eine solche endliche Anzahl von Punkten $P_1, P_2, \ldots P_m$, dass jeder beliebige innerhalb oder auf $C(r)$ gelegene Punkt einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{q}$ von der Menge der P_ν besitzt. Alsdann besitzt in der φ-Ebene jeder Bildpunkt eines innerhalb oder auf $C(r)$ gelegenen Punktes der x-Ebene einen Abstand $< \varepsilon$ von der Menge der Bildpunkte Q_ν der P_ν. Nehmen wir einen Augenblick an, dass diese Bildpunkte Q_ν alle einen Modulus $> \varepsilon$ besässen. Dann könnte eine solche positive Grösse η bestimmt werden, dass von allen in der x-Ebene mit Radien $\varrho \leq r$ um den Nullpunkt geschlagenen Kreisen $C(\varrho)$ die Bilder in der φ-Ebene in einer Entfernung $\geq \eta$ vom Nullpunkte blieben. Dies aber ist ungereimt, denn das Bild von $C(\varrho)$ umkreist bei einem vollen Umlaufe den Nullpunkt der φ-Ebene p-mal für $\varrho = r$ und 0-mal, wenn ϱ hinreichend klein gewählt wird. Mithin kann in der φ-Ebene ein Punkt Q_s, dessen Modulus $\leq \varepsilon$ ist, angegeben werden. Sei $x = x_1$ im entsprechenden Punkte P_s der x-Ebene.

Wir setzen nun voraus, dass die im vorigen Absatze auftretende positive Grösse ε dergestalt gewählt ist, dass erstens ε sowohl $< k$ wie $< a$ ist, und zweitens innerhalb eines um einen innerhalb oder auf $C(r)$ gelegenen Punkt, wo $|\varphi'| > b$ ist, mit dem Radius $\frac{\varepsilon}{b}$ geschlagenen Kreises die Ungleichung

$$\frac{|\varphi_2 - \varphi_1 - (x_2 - x_1)\varphi'_1|}{|(x_2 - x_1)\varphi'_1|} < \frac{1}{4}$$

in Kraft ist. Setzen wir unter dieser Voraussetzung $x_2 = x_1 - \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)}$, $x_3 = x_2 - \frac{\varphi(x_2)}{\varphi'(x_2)}$, usw., so wird der Reihe nach $|\varphi(x_2)| < \frac{1}{4}\varepsilon$, $|\varphi(x_3)| < \frac{1}{16}\varepsilon$, usw., während die unendliche Reihe $x_1, x_2, x_3, \ldots.$ gegen einen bestimmbaren einzigen Grenzwert x' konvergiert. Dann aber gilt notwendig $\varphi(x') = 0$, und wir haben $\varphi(x) \equiv (x - x')\chi(x)$, wo $\chi(x) \equiv x^{p-1} + h_1 x^{p-2} + \ldots\ldots h_{p-1}$.

Für die Gleichung $\chi(x) = 0$ (die im allgemeinen nicht mehr rationalkomplexe Koeffizienten besitzt) können wir zwei solche positive Grössen c und $\alpha < \frac{1}{2}b$ bestimmen, dass aus $|\chi| < \alpha$ folgt $|\varphi| < a$ und $|x - x'| < c$. Dann aber folgt wegen $\varphi' \equiv (x - x')\chi' + \chi$ aus $|\chi| < \alpha$ weiter $|(x - x')\chi'| > \frac{1}{2}b$, mithin, wenn wir $\frac{b}{2c} = \beta$ setzen, $|\chi'| > \beta$. Weil mithin α und β für χ dieselbe Rolle spielen, wie a und b für φ, so können wir in derselben Weise, wie wir für $\varphi = 0$ eine Wurzel x' bestimmt haben, für $\chi = 0$ eine Wurzel x'' berechnen. Indem wir in dieser Weise fortfahren, zerlegen wir zunächst $\varphi(x)$ in p Faktoren und sodann $\psi(x)$ in n Faktoren der Form $x - x^{(\nu)}$.

[[2]] Sei nun $\psi_\nu(x) \equiv x^n + a_{\nu 1}x^{n-1} + \ldots. a_{\nu n}$ für jedes ganze positive ν, während alle $a_{\nu r}$ rationalkomplexe Zahlen sind und die unendliche Funktionenfolge $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots.$ gegen eine einzige ganze rationale Funktion $f(x) \equiv x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots. b_n$ konvergiert. Wir werden zeigen, dass auch von der Gleichung $f(x) = 0$ eine Wurzel ermittelt werden kann, womit der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen sein wird.

Wenn wir die Wurzeln von $\psi_\nu(x) = 0$ mit $x'_\nu, \ldots x^{(n)}_\nu$ bezeichnen,

[[284]]

dann können wir für ein beliebiges positives ε_m ein solches ν_m bestimmen, dass für ein beliebiges $x_{\nu_m}^{(\rho)}$ und für eine beliebige natürliche Zahl λ die Ungleichung

$$\left|\psi_{\nu_m+\lambda}(x_{\nu_m}^{(\rho)})\right| < \varepsilon_m^n$$

gilt, so dass für eine irgendwie ausgewählte Wurzel $x_{\nu_m}^0$ von $\psi_{\nu_m}(x)=0$ und für eine beliebige natürliche Zahl λ das Produkt

$$|x'_{\nu_m+\lambda} - x^0_{\nu_m}| \ldots |x^{(n)}_{\nu_m+\lambda} - x^0_{\nu_m}|$$

$< \varepsilon_m^n$ und somit wenigstens einer seiner Faktoren $< \varepsilon_m$ ist.

Es konvergiere $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ gegen ε. Wir bestimmen in der im vorigen Absatz angegebenen Weise zu jedem ε_m ein passendes ν_m, wobei wir dafür sorgen, dass stets $\nu_{m+1} > \nu_m$ ist. Im Anschluss daran wählen wir für $x^0_{\nu_1}$ eine beliebige Wurzel von $\psi_{\nu_1}(x) = 0$ und sodann nach dem vorigen Absatz für $x^0_{\nu_{m+1}}$ jedesmal eine derartige Wurzel von $\psi_{\nu_{m+1}}(x) = 0$, dass $|x^0_{\nu_{m+1}} - x^0_{\nu_m}| < \varepsilon_m$ ist. Alsdann konvergiert die unendliche Folge $x^0_{\nu_1}, x^0_{\nu_2}, \ldots$ gegen einen einzigen Limeswert x^0_ω und dieser Limeswert ist eine Wurzel von $f(x) = 0$.

1924 D **Mathematics.** — "*Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist*". By Prof. L. E. J. Brouwer.

(Communicated at the meeting of March 29, 1924).

§ 1.

[[1]] Sei M eine beliebige Menge, μ die ihr zu Grunde liegende zählbare (übrigens auch abzählbar unendliche) Menge der endlichen (gehemmten und ungehemmten) Wahlfolgen $F_{sn_1 \ldots n_\nu}$, wo s und die n_ν natürliche Zahlen vorstellen, und sei jedem Elemente von M eine natürliche Zahl β zugeordnet. Alsdann ist in μ eine solche abtrennbare zählbare Teilmenge μ_1 von ungehemmten endlichen Wahlfolgen ausgezeichnet, dass einem beliebigen Elemente von μ_1 für alle aus ihm hervorgehenden Elemente von M eine natürliche Zahl β zugeordnet ist, während weiter eine Beweisführung h vorliegt, mittels welcher sich für ein beliebiges ungehemmtes Element von μ herausstellt, dass jede aus ihm hervorgehende ungehemmte unendliche Wahlfolge einen zu μ_1 gehörigen Abschnitt besitzt. (Ein ungehemmtes Element von μ soll nämlich dann und nur dann zu μ_1 gerechnet werden, wenn bei ihm — aber bei keinem seiner echten Abschnitte — nach dem *Algorithmus* des Zuordnungsgesetzes die Entscheidung hinsichtlich β *nicht* bis auf weitere Wahlen aufgeschoben wird; dabei ist es selbstverständlich keineswegs ausgeschlossen, dass man hinterher auch weder zu μ_1 gehörige noch einen zu μ_1 gehörigen Abschnitt besitzende Elemente von μ angeben kann mit der Eigenschaft, dass allen aus einem solchen Elemente von μ hervorgehenden Elementen von M dieselbe natürliche Zahl zugeordnet ist).

Nennen wir ein Element von μ *versichert*, wenn es entweder gehemmt ist oder einen zu μ_1 gehörigen (echten oder nicht echten Abschnitt besitzt, so ist μ in eine zählbare Menge τ von versicherten und eine zählbare Menge σ von nicht versicherten endlichen Wahlfolgen zerlegt, und die Beweisführung h zeigt *für ein beliebiges Element von* σ, dass es *versicherbar* ist, d. h. dass jede aus ihm hervorgehende für M ungehemmte unendliche Wahlfolge einen zu μ_1 gehörigen Abschnitt besitzt. Sei $h_{sn_1 \ldots n_\nu}$ die Spezialisierung von h

welche die Versicherbarkeit des Elementes $F_{sn_1\ldots n_r}$ von σ herleitet, so beruht diese Beweisführung ausschliesslich auf den zwischen den Elementen von μ bestehenden Beziehungen b. Diese Beziehungen aber sind alle in *Elementarbeziehungen* e zerlegbar von der Art, wie sie zwischen je einem *einzigen* Elementepaar $F_{mm_1\ldots m_g}$ und $F_{mm_1\ldots m_g m_{g+1}}$ bestehen, von denen das eine eine unmittelbare Verlängerung des anderen ist. Weil nun eine beliebige Beweisführung, wenn die in derselben benutzten Beziehungen in Grundbeziehungen zerlegbar sind, sich immer (wenn auch auf Kosten der Kürze) derart "kanonisieren" lässt, dass in ihrer kanonisierten Form nur noch die Grundbeziehungen benutzt werden, so kann bei der kanonisierten Form $k_{sn_1\ldots n_r}$ der Beweisführung $h_{sn_1\ldots n_r}$ die Versicherbarkeit von $F_{sn_1\ldots n_r}$ in letzter Instanz ausschliesslich aus den Elementarbeziehungen e gefolgert werden, welche $F_{sn_1\ldots n_r}$ mit $F_{sn_1\ldots n_{r-1}}$ und mit den $F_{sn_1\ldots n_r\nu}$ verbinden. Zum Schlussglied von $k_{sn_1\ldots n_r}$ braucht man also die vorherige Feststellung der Versicherbarkeit entweder von $F_{sn_1\ldots n_{r-1}}$ oder von *allen* $F_{sn_1\ldots n_r\nu}$.

Nennen wir einen Elementarschluss, der die Versicherbarkeit eines $F_{mm_1\ldots m_g}$ aus derjenigen von $F_{mm_1\ldots m_{g-1}}$ folgert, einen ζ-*Schluss*, einen Elementarschluss, der die Versicherbarkeit eines $F_{mm_1\ldots m_g}$ aus derjenigen von *allen* $F_{mm_1\ldots m_g\nu}$ folgert, einen r-*Schluss*, und bezeichnen wir die wohlgeordnete Spezies von Elementen von σ, von denen bei der Beweisführung $k_{sn_1\ldots n_r}$ der Reihe nach die Versicherbarkeit festgestellt wird, mit $f_{sn_1\ldots n_r}$, so kann vom *ersten* Elemente von $f_{sn_1\ldots n_r}$ die Versicherbarkeit unmöglich mittels eines ζ-Schlusses hergeleitet werden, so dass sie also mittels eines r-Schlusses gefolgert werden muss. Auf Grund transfiniter Induktion längs $f_{sn_1\ldots n_r}$ ersehen wir weiter, dass *in jedem Stadium der Beweisführung* $k_{sn_1\ldots n_r}$ von allen schon als versicherbar erkannten Elementen von μ die Verlängerungen ebenfalls schon als versicherbar erkannt worden sind, so dass bei $k_{sn_1\ldots n_r}$ von *jedem* Elemente von $f_{sn_1\ldots n_r}$ die Versicherbarkeit mittels eines r-Schlusses gefolgert wird. [[2]]

Wenn wir nun (in Uebereinstimmung mit den zwischen den entsprechenden Teilmengen von M bestehenden Vereinigungsbeziehungen) jedesmal, wenn bei $k_{sn_1\ldots n_r}$ von einem Elemente $F_{mm_1\ldots m_g}$ von σ die Versicherbarkeit festgestellt wird, dieses Element als nach dem Index ν geordnete Summe der $F_{mm_1\ldots m_g\nu}$ (und dabei jedes gehemmte

$F_{mm_1 \ldots m_g}$, als elementlose Urspezies) auffassen, so ergibt sich auf Grund transfiniter Induktion längs $f_{sn_1 \ldots n_r}$, dass durch diese transfinite Reihe von Summenbildungen $F_{sn_1 \ldots n_r}$ als eine wohlgeordnete Spezies $\varphi_{sn_1 \ldots n_r}$ erzeugt wird, von welcher die Urspezies einkehrenden (d.h. versicherten, aber keinen versicherten echten Abschnitt besitzenden) Elementen von τ und die sonstigen konstruktiven Unterspezies Elementen von σ entsprechen. Umgekehrt entspricht in dieser Weise ein Element von σ oder ein einkehrendes Element von τ dann und nur dann einer konstruktiven Unterspezies oder Urspezies von $\varphi_{sn_1 \ldots n_r}$, wenn es eine Indexreihe $sn_1 \ldots n_r p_1 \ldots p_u$ besitzt, und zwar hat in diesem Falle die betreffende konstruktive Unterspezies oder Urspezies als solche die Indexreihe $p_1 \ldots p_u$.

Das Ergebnis dieses § lässt sich wie folgt zusammenfassen:

⟦3⟧ Theorem 1: *Wenn jedem Elemente einer Menge M eine natürliche Zahl β zugeordnet ist, so ist M durch diese Zuordnung in eine wohlgeordnete Spezies S von Teilmengen M_α zerlegt, deren jede durch ein endliches Anfangssegment von Wahlen bestimmt ist. Jedem Elemente desselben M_α ist dieselbe natürliche Zahl β_α zugeordnet. Die Spezies S kann mittels erzeugender Operationen zweiter Art ω konstruiert werden, deren jede der Fortsetzung eines bestimmten für M ungehemmten endlichen Anfangssegmentes von Wahlen mit einer freien neuen Wahl entspricht. Mit einer für M gehemmten neuen Wahl korrespondiert dabei für die entsprechende Operation ω eine elementlose Urspezies.*

§ 2.

Im Falle, dass M eine finite Menge ist, ist die wohlgeordnete Spezies $\varphi_{sn_1 \ldots n_r}$ einer wohlgeordneten Spezies $\psi_{sn_1 \ldots n_r}$ ähnlich, welche ohne Benutzung von elementlosen Urspezies und zwar in solcher Weise der oben erwähnten Konstruktion von $\varphi_{sn_1 \ldots n_r}$ parallel konstruiert werden kann, dass jeder für die Konstruktion von $\varphi_{sn_1 \ldots n_r}$ angewandten Operation ω bei der Konstruktion von $\psi_{sn_1 \ldots n_r}$ eine endliche Anzahl von erzeugenden Operationen erster Art χ entspricht. Die wohlgeordnete Spezies $\psi_{sn_1 \ldots n_r}$ ist also unter ausschliesslicher Anwendung von erzeugenden Operationen erster Art konstruierbar. Hieraus folgt aber, dass sowohl $\psi_{sn_1 \ldots n_r}$ wie $\varphi_{sn_1 \ldots n_r}$ *endlich* sind, und dass insbesondere für jede natürliche Zahl s die wohlgeordnete Spezies φ_s endlich ist. Mithin kann eine solche natürliche Zahl z bestimmt werden, dass ein beliebiges einkehrendes Element von μ höchstens z Indizes besitzt, so dass die einem beliebigen Elemente e

⟦288⟧

von M zugeordnete natürliche Zahl β_e durch die ersten z erzeugenden Wahlen von e vollständig bestimmt ist.

Somit haben wir bewiesen:

Theorem 2. *Wenn jedem Elemente e einer finiten Menge M eine natürliche Zahl β_e zugeordnet ist, so kann eine solche natürliche Zahl z bestimmt werden, dass β_e durch die ersten z von den e erzeugenden Wahlen vollständig bestimmt ist.* [1]) [[4]]

§ 3.

Wir bestimmen nun auf der X-Achse für jede natürliche Zahl ν die k_ν-Intervalle $k'_\nu, k''_\nu, \dots k_\nu^{(s_\nu)}$, d. h. die von links nach rechts geordneten vom Einheitsintervall der X-Achse ganz oder teilweise überdeckten $\lambda_{4\nu+2}$-Intervalle. Alsdann stellt die finite Menge I der Intervallschachtelungen $k_1^{(\mu_1)}, k_2^{(\mu_2)}, k_3^{(\mu_3)}, \dots$ (wo jedes folgende Intervall im vorhergehenden im engern Sinne enthalten ist) eine mit dem geschlossenen Einheitsintervall der X-Achse, d. h. mit der Spezies der zum geschlossenen Einheitsintervall der X-Achse gehörigen Punkte zusammenfallende Punktmenge dar.

Bei einer *vollen* (d.h. für jeden Punkt des geschlossenen Einheitsintervalls definierten) *Funktion* $y = f(x)$ ist jeder Intervallschachtelung $k_1^{(\mu_1)}, k_2^{(\mu_2)}, \dots$ eine Schachtelung von λ-Intervallen der Y-Achse

[1]) Dieses Theorem 2 ist implizite in der in Bd. XIII Nr. 2 der Verhandelingen dieser Akademie (1. Sektion) auf S. 4 befindlichen Formel (II) enthalten. Zur der dortigen summarischen Erörterung zu Grunde liegenden Formel (I) ist zu bemerken, dass der durch diese Formel (I) gegebene Ausdruck für $a_z(s)$ sich weiter kompliziert, wenn die Zahl k keine Konstante ist, sondern ihrerseits wiederum durch einen Ausdruck der Gestalt des rechten Gliedes von (I) gegeben wird, und dass diese Komplikation sich dem Inhalte des obigen § 1 entsprechend in mannigfacher Weise ausdehnen lässt, ohne dass dadurch die endliche Darstellbarkeit von $a_z(s)$ beeinträchtigt wird. Die Form von (II) wird von derartigen weiteren Komplikationen von (I) nicht beeinflusst. [[5]]

Ich benutze diese Gelegenheit, um darauf hinzuweisen, dass in Z. 4 der auf der hier zitierten Seite befindlichen Fussnote statt von *Ausfüllungselementen*, von *Lokalisierungselementen* gesprochen werden muss. Dabei ist ein Lokalisierungselement r von μ'' eine jedenfalls ein Element besitzende Spezies von in unbegrenzter Fortsetzung begriffenen Folgen $r_\alpha, r_{\alpha+1}, r_{\alpha+2}, \dots$ (α eine für r bestimmte natürliche Zahl), wo jedes r_ν ein i''_ν und jedes $r_{\nu+1}$ in r_ν enthalten ist, während r_ν für jedes ν zu einer Species S_ν gehört, von der je zwei Elemente ein Element von s''_ν gemeinsam haben [[6]]

Weiter sind auf S. 6 der zitierten Abhandlung in Z. 10 nach dem Worte "dass" die Worte: "für eine bestimmte gegen Null konvergierende Fundamentalreihe von Breiten der $\varkappa^{(\sigma)}$" einzufügen.

$\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ zugeordnet, und zwar besteht auf Grund des Theorems 2 für jede natürliche Zahl ν eine solche natürliche Zahl m_ν (von der wir voraussetzen dürfen, dass sie mit wachsendem ν nicht abnimmt), dass $\lambda^{(\nu)}$ durch die Wahl von $k_1^{(\mu_1)}, k_2^{(\mu_2)}, \ldots k_{m_\nu}^{(\mu_{m_\nu})}$ bestimmt ist. Für jedes ν kann mithin nur eine endliche Anzahl l_ν von λ-Intervallen der Y-Achse als $\lambda^{(\nu)}$ auftreten, und es besteht für dieselben eine maximale Breite b_ν, die für unbeschränkt wachsendes ν gegen Null konvergiert.

Bezeichnen wir mit $t_\nu^{(\rho)}$ das zu $k_\nu^{(\rho)}$ konzentrisch liegende Intervall der X-Achse, dessen Breite $\frac{3}{4}$ der Breite von $k_\nu^{(\rho)}$ beträgt, und seien P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte des geschlossenen Einheitsintervalls der X-Achse, deren Abstand $< 2^{-4\nu-3}$, d.h. $< \frac{1}{4}$ der Breite der k_ν-Intervalle ist. Alsdann kann ein $t_\nu^{(\mu_\nu)}$ bestimmt werden, in dem P_1 und P_2 beide enthalten sind, und mittels dieses $t_\nu^{(\mu_\nu)}$ eine mit P_1 zusammenfallende Intervallschachtelung $k_1^{(\mu_1)}, \ldots, k_\nu^{(\mu_\nu)}, k_{\nu+1}^{(\sigma_1)}, k_{\nu+2}^{(\sigma_2)}, \ldots$ und eine mit P_2 zusammenfallende Intervallschachtelung $k_1^{(\mu_1)}, \ldots, k_\nu^{(\mu_\nu)}, k_{\nu+1}^{(\tau_1)}, k_{\nu+2}^{(\tau_2)}, \ldots$

Sei ε eine beliebige positive Grösse. Wählen wir ν_ε so gross, dass $b_{\nu_\varepsilon} < \varepsilon$ und setzen wir $2^{-4m_{\nu_\varepsilon}-3} = a_\varepsilon$, so gehören nach dem zweiten Absatze dieses § zu zwei beliebigen Elementen von I, für welche $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{m_{\nu_\varepsilon}}$ gleich sind, zwei Werte von f, deren Differenz weniger als b_{ν_ε}, mithin weniger als ε beträgt. Nach dem dritten Absatze dieses § gehören also auch zu zwei beliebigen Punkten P_1 und P_2 des geschlossenen Einheitsintervalls der X-Achse, deren Abstand $< a_\varepsilon$ ist, zwei Werte von f, deren Differenz weniger als ε beträgt, so dass f sich als *gleichmässig stetig* herausstellt und wir bewiesen haben:

Theorem 3. *Jede volle Funktion ist gleichmässig stetig.*[2])

[7] [2]) Theorem 3 sowie eine Skizze seines Beweises befinden sich schon auf S. 5 der in Fussnote [1]) zitierten Abhandlung.

[290]

Mathematics. — "*Intuitionistische Ergänzung des Fundamentalsatzes der Algebra*". By Prof. L. E. J. BROUWER. 1924 E

(Communicated at the meeting of May 31, 1924).

§ 1.

Unter einer *r-normalen Gleichung n-ten Grades* verstehen wir eine algebraische Gleichung n-ten Grades $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$, deren Koeffizient a_r von 0 positiv-verschieden ist. Eine 0-normale Gleichung n-ten Grades werden wir kurz *normal* nennen. Auf Grund des (*beschränkten*) *Fundamentalsatzes der Algebra* [1]) ist dann bekannt, dass das linke Glied einer normalen Gleichung n-ten Grades in ein Produkt $a_0 (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)$, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ Zahlen vorstellen, entwickelt werden kann. Unter Verwendung dieser Eigenschaft werden wir jetzt von einer r-normalen Gleichung ($r \leq n-1$)

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$$

eine Wurzel α_1 bestimmen. Wir werden diese Wurzel erzeugen als Limes einer positiv-konvergenten Reihe $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$, in welcher *für jedes* ν

$$\varrho_{\nu+1} - \varrho_\nu \leq 2^{-\nu},$$

während überdies sogar, *ausgenommen für höchstens* n *Werte von* ν, $\varrho_{\nu+1} - \varrho_\nu = 0$.

Dabei wird jedesmal ϱ_{m+1} folgendermassen aus ϱ_m hergeleitet: Wenn wir für eine gewisse natürliche Zahl $m \geq 1$ über ϱ_m verfügen als Wurzel der normalen Gleichung

$$f_m(x) \equiv a_{\sigma_m} x^{n-\sigma_m} + a_{\sigma_m+1} x^{n-\sigma_m-1} + \ldots a_n = 0 \; (\sigma_m \leq n-1),$$

deren linkes Glied ein Endsegment von $f(x)$ darstellt, während für $0 \leq \tau < \sigma_m$ derartige positive Grössen ${}_m g_\tau$ bekannt sind, dass $|a_\tau| < {}_m g_\tau \; (0 \leq \tau < \sigma_m)$ und jede *normale* Gleichung

$$b_0 x^n + \ldots b_{\sigma_m-1} x^{n-\sigma_m+1} + f_m(x) = 0,$$

in welcher $|b_\tau| < {}_m g_\tau \; (0 \leq \tau < \sigma_m)$, eine um höchstens 2^{-m} von ϱ_m verschiedene Wurzel besitzt, so bestimmen wir ϱ_{m+1} als Wurzel einer normalen Gleichung

$$f_{m+1}(x) \equiv a_{\sigma_{m+1}} x^{n-\sigma_{m+1}} + \ldots a_n = 0 \; (\sigma_{m+1} \leq \sigma_m),$$

[1]) Vgl. die in diesem Jahre erschienenen Beweise von H. WEYL, Math. Zeitschr. 20, S. 142—146, und von L. E. J. BROUWER und B. DE LOOR, diese Proceedings 27, S. 186—188. [[1]]

wobei für $0 \leq \tau < \sigma_{m+1}$ derartige positive Grössen ${}_{m+1}g_\tau$ bekannt sind, dass $|a_\tau| < {}_{m+1}g_\tau \, (0 \leq \tau < \sigma_{m+1})$ und jede *normale* Gleichung

$$b_0 x^n + \dots b_{\sigma_{m+1}-1} x^{n-\sigma_{m+1}+1} + f_{m+1}(x) = 0,$$

in welcher $|b_\tau| < {}_{m+1}g_\tau \, (0 \leq \tau < \sigma_{m+1})$ eine um höchstens 2^{-m-1} von ϱ_{m+1} verschiedene Wurzel besitzt.

Diese Bestimmung geschieht wie folgt: Wir schlagen in der x-Ebene um ϱ_m mit einem Radius $\leq 2^{-m-1}$ einen Kreis, der von allen Wurzeln von $f_m(x) = 0$ einen von 0 positiv-verschiedenen Abstand besitzt. Sei k_m das vom absoluten Werte von f_m auf diesem Kreise angenommene Minimum und ${}_m h_\tau$ für $0 \leq \tau < \sigma_m$ eine solche positive Grösse, dass auf dem genannten Kreise

$$\left| b_0 x^n + \dots b_{\sigma_m -1} x^{n-\sigma_m+1} \right| < k_m$$

für $|b_\tau| < {}_m h_\tau \, (0 \leq \tau < \sigma_m)$. Alsdann besitzt jede *normale* Gleichung

$$b_0 x^n + \dots b_{\sigma_m -1} x^{n-\sigma_m+1} + f_m(x) = 0,$$

für welche $|b_\tau| < {}_m h_\tau \, (0 \leq \tau < \sigma_m)$, innerhalb des genannten Kreises eine Wurzel.

Jetzt können wir *entweder* die Ungleichungen $|a_\tau| < {}_m h_\tau \, (0 \leq \tau < \sigma_m)$ herleiten, in welchem Falle wir, um unser Ziel zu erreichen, nur $\varrho_{m+1} = \varrho_m$ und $f_{m+1}(x) \equiv f_m(x)$ zu setzen brauchen, *oder* eine normale Gleichung

$$f'_m(x) \equiv a_{\sigma'_m} x^{n-\sigma'_m} + \dots a_n = 0 \; (\sigma'_m < \sigma_m),$$

deren linkes Glied wiederum ein Endsegment von $f(x)$ darstellt, bilden, und von derselben eine um höchstens 2^{-m} von ϱ_m verschiedene Wurzel ϱ'_m angeben.

Im letzteren Falle verfahren wir mit f'_m und ϱ'_m genau so, wie vorhin mit f_m und ϱ_m, schlagen also in der x-Ebene um ϱ'_m mit einem Radius $\leq 2^{-m-1}$ einen Kreis, der von allen Wurzeln von $f'_m(x) = 0$ einen von 0 positiv-verschiedenen Abstand besitzt. Sei k'_m das vom absoluten Werte von f'_m auf diesem Kreise angenommene Minimum und ${}_m h'_\tau$ für $0 \leq \tau < \sigma'_m$ eine solche positive Grösse, dass auf dem genannten Kreise

$$\left| b_0 x^n + \dots b_{\sigma'_m -1} x^{n-\sigma'_m+1} \right| < k'_m$$

für $|b_\tau| < {}_m h'_\tau \, (0 \leq \tau < \sigma'_m)$. Alsdann besitzt jede *normale* Gleichung

$$b_0 x^n + \dots b_{\sigma'_m -1} x^{n-\sigma'_m+1} + f'_m(x) = 0,$$

für welche $|b_\tau| < {}_m h'_\tau \, (0 \leq \tau < \sigma'_m)$, innerhalb des genannten Kreises eine Wurzel.

Jetzt können wir wieder *entweder* die Ungleichungen $|a_\tau| < {}_m h'_\tau$ $(0 \leq \tau < \sigma'_m)$ herleiten, in welchem Falle wir, um unser Ziel zu erreichen, nur $\varrho_{m+1} = \varrho'_m$ und $f_{m+1}(x) \equiv f'_m(x)$ zu setzen brauchen, *oder* eine normale Gleichung

$$f''_m(x) \equiv a_{\sigma''_m} x^{n-\sigma''_m} + \ldots a_n = 0 \, (\sigma''_m < \sigma'_m),$$

deren linkes Glied wiederum ein Endsegment von $f(x)$ darstellt, bilden, und von derselben eine um höchstens 2^{-m} von ϱ_m verschiedene Wurzel ϱ''_m angeben.

Im letzteren Falle verfahren wir mit f''_m und ϱ''_m genau so, wie vorhin mit f_m und ϱ_m und mit f'_m und ϱ'_m, und finden dann, dass wir *entweder*, um unser Ziel zu erreichen, nur $\varrho_{m+1} = \varrho''_m$ und $f_{m+1}(x) \equiv f''_m(x)$ zu setzen brauchen, *oder* eine normale Gleichung

$$f'''_m(x) \equiv a_{\sigma'''_m} x^{n-\sigma'''_m} + \ldots a_n = 0 \; (\sigma'''_m < \sigma''_m)$$

bilden und von derselben eine um höchstens 2^{-m} von ϱ_m verschiedene Wurzel ϱ'''_m angeben können.

Indem wir in dieser Weise fortfahren, gelangen wir für ein gewisses $\mu_m \leq n-1$ zu einer solchen normalen Gleichung $f_m^{(\mu_m)}(x)$ mit einer solchen um höchstens 2^{-m} von ϱ_m verschiedenen Wurzel $\varrho_m^{(\mu_m)}$, dass wir, um unser Ziel zu erreichen, nur $\varrho_{m+1} = \varrho_m^{(\mu_m)}$ und $f_{m+1}(x) \equiv f_m^{(\mu_m)}(x)$ zu setzen brauchen.

Zur Vervollständigung der Berechnungsmethode für die Wurzel α_1 von $f(x) = 0$ braucht nunmehr nur noch ein ϱ_1 und $f_1(x)$ lieferndes Verfahren angegeben zu werden. Dazu gehen wir aus von einer auf jedem Fall bestehenden normalen Gleichung

$$f_0(x) \equiv a_{\sigma_0} x^{n-\sigma_0} + a_{\sigma_0+1} x^{n-\sigma_0-1} + \ldots a_n = 0 \; (\sigma_0 \leq n-1),$$

deren linkes Glied ein Endsegment von $f(x)$ darstellt, und von einer beliebigen Wurzel ϱ_0 von $f_0(x)$. Aus ϱ_0 und $f_0(x)$ leiten wir dann $\varrho_1 = \varrho_0^{(\mu_0)}$ und $f_1(x) \equiv f_0^{(\mu_0)}(x)$ in analoger Weise her, wie wir oben, aus ϱ_m und $f_m(x)$, $\varrho_{m+1} = \varrho_m^{(\mu_m)}$ und $f_{m+1}(x) \equiv f_m^{(\mu_m)}(x)$ hergeleitet haben.

§ 2.

Auf Grund des obigen stellen wir uns zum Ziel, eine r-normale $(r \leq n)$ Gleichung n-ten Grades

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$$

in n Faktoren ersten Grades zu zerlegen. Hierbei dürfen wir annehmen $r \leq n-1$, weil für $r=n$ die Zerlegung schon auf Grund des (*beschränkten*) *Fundamentalsatzes der Algebra*, und zwar in der Form $f(x) \equiv (1-\beta_1 x)(1-\beta_2 x) \ldots (1-\beta_n x) a_n$, bewerkstelligt werden kann. Wenn aber $r \leq n-1$, so können wir nach § 1 eine Wurzel α_1 von $f(x)=0$ berechnen, und weiter ein solches a_s $(0 \leq s \leq r)$ angeben, dass

$$\frac{|a_s|}{\alpha_1^s} > \sum_{\nu=0}^{s-1} |a_\nu| < |a_s|,$$

wobei $\sum\limits_{\nu=0}^{s-1} |a_\nu| = 0$ für $s=0$ gerechnet wird. In der mittels des Divisionsalgorithmus gefundenen Zerlegung $f(x) \equiv (x-\alpha_1)(c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots c_{n-1})$ stellt nun $c_0 x^{n-1} + \ldots c_{n-1} = 0$ eine s-normale $(s \leq r)$ Gleichung dar. Für die letztere Gleichung können wir *entweder* (für $s = n-1$) auf Grund des (beschränkten) Fundamentalsatzes der Algebra eine Zerlegung in $n-1$ Linearfaktoren, *oder* (für $s \leq n-2$) eine Wurzel α_2 bestimmen, worauf wir im letzteren Falle mit ihr genau so weiter verfahren können, wie vorhin mit $f(x)=0$ geschehen ist.

Indem wir in dieser Weise fortfahren, gelangen wir schliesslich zu einer Zerlegung in Faktoren folgender Form:

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_p)(1-\beta_{p+1} x) \ldots (1-\beta_n x)\, c, \tag{1}$$

wo c positiv-verschieden von 0 und $p \geq n-r$ ist. Daneben gibt es, wie sich in derselben Weise herausstellt, eine Zerlegung gleicher Gestalt, für welche aber $p \leq n-r$ ist. Mithin kann, wie eine kurze Ueberlegung zeigt, die Zerlegung in der Form (1) auch so bewerkstelligt werden, dass $p = n-r$ ist.

Zur intuitionistischen Zerlegung mathematischer Grundbegriffe.[1]

1924 F

Von L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Im § 3 meines Aufsatzes „Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe"[2]) wurden als *ebene Einhüllungsbeziehungen von einem Punkt zu einer Punktspezies* eingeführt die zwischen einem Punkt P und einer Punktspezies Q möglichen Relationen, die aus der Einhüllungs- und der Entfernungsbeziehung als Grundrelationen durch Einwirkung der Absurditätsprädikate ableitbar sind. Lassen wir allgemeiner als Grundrelationen zu: *erstens* die Beziehung, welche darin besteht, daß P zu einem Punkte von Q die positive Verschmelzungsbeziehung besitzt, *zweitens* eine beliebige Beziehung, welche darin besteht, daß P zu allen Punkten von Q die gleiche negative Verschmelzungsbeziehung (also entweder die Abweichungs- oder die Entfernungsbeziehung) besitzt, so kommen keine neuen Einhüllungsbeziehungen zustande, denn sowohl die genannten Grundrelationen wie die aus denselben durch Einwirkung der Absurditätsprädikate hervorgehenden Relationen, fallen, wie sofort ersichtlich, unter das im zitierten § 3 aufgestellte Relationenschema.

Im § 4 des zitierten Aufsatzes wurden als *ebene Verschmelzungsbeziehungen zweier Punktspezies* eingeführt die zwischen zwei Punktspezies Q und R möglichen Relationen, die aus der Zusammenfallung, der Abweichung und der Entfernung als Grundrelationen durch Einwirkung der Absurditätsprädikate ableitbar sind. Lassen wir allgemeiner als Grundrelationen zu: *erstens* eine beliebige Beziehung, welche darin besteht, daß alle Punkte von Q eine bestimmte positive Einhüllungsbeziehung (Einhüllung, Anschließung oder Anlehnung) zu R und alle Punkte von R dieselbe Einhüllungsbeziehung zu Q haben, *zweitens* eine beliebige Beziehung, welche darin besteht, daß ein Punkt der einen Punktspezies eine bestimmte negative Einhüllungsbeziehung (Entfernung, Abtrennung oder Abweichung) zur anderen Punktspezies hat, so fallen wieder alle die genannten Grundrelationen sowie die aus denselben durch Einwirkung der Absurditätsprädikate hervorgehenden Relationen, *bis auf eine einzige Ausnahme*, unter das im zitierten § 4 aufgestellte Relationenschema. Die einzige Ausnahme wird gebildet von der *Weg-*

1) Der Inhalt dieses Aufsatzes wurde der Amsterdamer Akademie der Wiss. am 28. Juni 1924 vorgelegt. [[1]]

2) Jahresber. der Deutschen Math.-Ver. 33 (1925), S. 251—256. [[2]]

schiebungsbeziehung, welche darin besteht, daß eine der Punktspezies einen von der anderen Punktspezies abgetrennt liegenden Punkt enthält, und welche weder mit einer dem betreffenden Relationenschema angehörigen Beziehung noch mit einer Kombination mehrerer solcher Beziehungen äquivalent ist. Für die Wegschiebungsbeziehung bestehen nämlich folgende logische Zusammenhänge:

1. Es folgt einerseits aus der Entfernungsbeziehung die Wegschiebungsbeziehung, andererseits aus der Wegschiebungsbeziehung sowohl die Absonderungsbeziehung, wie die Abweichungsbeziehung.

2. Aus der Wegschiebungsbeziehung kann nicht auf die Entfernungsbeziehung geschlossen werden.

3. Aus der Kombination der Absonderungsbeziehung und der Abweichungsbeziehung kann nicht auf die Wegschiebungsbeziehung geschlossen werden.

Die Aussagen 1. und 2. bedürfen keiner näheren Begründung, wohl aber die Aussage 3., zu deren Rechtfertigung wir folgendes Beispiel aufstellen:

[[3]] Wir gehen aus von zwei positiven Zahlen p und $q < 1$, die von der Spezies R der rationalen Zahlen abweichen, ohne von R abgetrennt zu liegen. Wir verstehen unter a_n bzw. b_n die rationale Zahl, die man erhält, wenn man die Dezimalbruchentwicklung von π bzw. von $\pi + 1$ bei der n-ten Ziffer nach dem Komma abbricht, und definieren k_1 nach
[[4]] S. 252 meines zitierten Aufsatzes. Ferner setzen wir:

$p_n = a_{k_1} + p \cdot 10^{-k_1-1}$, wenn n größer ist als eine *gerade* Zahl k_1, andernfalls $p_n = a_n + p \cdot 10^{-n-1}$;

$q_n = b_{k_1} + q \cdot 10^{-k_1-1}$, wenn n größer ist als eine *ungerade* Zahl k_1, andernfalls $q_n = b_n + q \cdot 10^{-n-1}$;

$p' = \lim p_n$; $q' = \lim q_n$;

$Q = \mathfrak{S}(R, p', q')$.

Dann weicht Q von R ab; denn es weichen ja p' und q' beide von R ab. Auch liegt Q abgesondert von R; denn es ist ja ausgeschlossen, daß p' und q' beide an R sich anlehnen (nehmen wir nämlich einen Augenblick an, daß p' und q' sich beide an R anlehnten; dann führt die Annahme eines *geraden* k_1 zur Ungereimtheit $q' = \pi + 1$, und die Annahme eines *ungeraden* k_1 zu der Ungereimtheit $p' = \pi$, *so daß unmöglich eine Zahl k_1 auftreten kann;* das aber führt zur Ungereimtheit, daß *sowohl $p' = \pi$, als auch $q' = \pi + 1$* gelten müßten).

Aber wir müssen mit der Möglichkeit rechnen, daß p' sich an R anlehnt; denn wir müssen ja erstens mit der Möglichkeit α rechnen, daß ein gerades k_1 existiert; zweitens müssen wir, da p von R nicht abgetrennt liegt, mit der Möglichkeit β rechnen, daß p an R sich anlehnt; wir müssen daher auch mit den kombinierten Möglichkeiten α und β rechnen, d. h. mit der Möglichkeit, daß p' sich an R anlehnt. *Und aus demselben Grund müssen wir mit der Möglichkeit rechnen, daß q' an R sich anlehnt.* Es ist also keine Rede davon, daß wir behaupten könnten, daß Q einen von R abgetrennt liegenden Punkt enthält, w. z. b. w.

Das mit der Wegschiebungsbeziehung vervollständigte Schema der ebenen Verschmelzungsbeziehungen zweier Punktspezies gestaltet sich wie folgt:

$$
\begin{tikzcd}
\textit{Entfernung} \arrow[dr] & & & \\
& \textit{Wegschiebung} \arrow[r] \arrow[d] & \textit{Absonderung} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \textit{Übereinstimmung} \\
& \textit{Abweichung} \arrow[r] & \textit{Loslösung} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr] & \textit{Kongruenz} \arrow[u] \\
& \textit{Zusammenfallung} \arrow[r] & \textit{Verflechtung} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[ur] & \textit{Loswindung}
\end{tikzcd}
$$

(Eingegangen am 18. 10. 26.)

1924 G **Mathematics.** — "*Bemerkungen zum Beweise der gleichmässigen Stetigkeit voller Funktionen*". By Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of September 27, 1924).

§ 1.

Die Entstehungsweise der beim im Titel angeführten Beweise
⟦1⟧ (diese Proceedings 27, S. 189—193) im zweiten Absatz von S. 190 eingeführten wohlgeordneten Spezies $f_{sn_1 \ldots n_r}$ erfordert folgende nähere Erörterung:

Die Beweisführung $k_{sn_1 \ldots n_r}$ bildet eine wohlgeordnete Spezies, von der jedes Element entweder ein $\digamma$-Schluss oder ein ζ-Schluss oder ein Nullelement ist. Mittels transfiniter Induktion ergibt sich aber die Existenz eines Gesetzes, das einem beliebigen, die Versicherbarkeit eines Elementes $F_{mm_1 \ldots m_g}$ von σ feststellenden, Elemente e von $k_{sn_1 \ldots n_r}$ ein solches in $k_{sn_1 \ldots n_r}$ nicht höher als e geordnetes Element e_0 von $k_{sn_1 \ldots n_r}$ zuordnet, das erstens ein $\digamma$-Schluss ist und zweitens ebenfalls die Versicherbarkeit von $F_{mm_1 \ldots m_g}$ feststellt [1]. Wenn also $k'_{sn_1 \ldots n_r}$ die Beweisführung vorstellt, die aus $k_{sn_1 \ldots n_r}$ entsteht, wenn alle Elemente von $k_{sn_1 \ldots n_r}$, welche ζ-Schlüsse sind oder die Versicherbarkeit eines Elementes von τ feststellen, durch Nullelemente ersetzt werden, so ist (wie sich wiederum mittels transfiniter Induktion herausstellt) auch $k'_{sn_1 \ldots n_r}$ eine zur Herleitung der Versicherbarkeit von $F_{sn_1 \ldots n_r}$ ausreichende Beweisführung.

---

[1]) Diese Eigenschaft kann auch wie folgt mittels des im § 3 zitierten (übrigens ebenfalls auf transfiniter Induktion beruhenden) *Haupttheorems der Theorie der wohlgeordneten Spezies* hergeleitet werden: Es stelle e die Versicherbarkeit von $F_{mm_1 \ldots m_g}$ als ζ-Schluss fest und es sei S die Vereinigung der Elemente F_m, $F_{mm_1}, \ldots F_{mm_1 \ldots m_g}$ von σ. Dann geht aus $k_{sn_1 \ldots n_r}$ auf Grund des Haupttheorems ein Gesetz hervor, das eine nach der Wohlordnung in $k_{sn_1 \ldots n_r}$ absteigende Folge $e, e', e'', \ldots e^{(t)}$ von Elementen von $k_{sn_1 \ldots n_r}$ bestimmt, zu der eine solche Folge $\eta, \eta', \eta'', \ldots \eta^{(t)}$ von Elementen von S gehört, dass $e^{(\nu)}$ für $0 \leq \nu < t$ die Versicherbarkeit von $\eta^{(\nu)}$ aus (wenigstens unter andern aus) derjenigen von $\eta^{(\nu+1)}$, $e^{(t)}$ aber die Versicherbarkeit von $\eta^{(t)}$ aus derjenigen von einem oder mehreren *nicht* zu S gehörenden Elementen von μ herleitet. Dann aber ist $e^{(t)}$ ein die Versicherbarkeit von $\eta = F_{mm_1 \ldots m_g}$ feststellender $\digamma$-Schluss.

Wenn wir nun in $k'_{sn_1 \ldots n_r}$ jedes Element, das ein r-Schluss ist, durch das Element von σ, dessen Versicherbarkeit es feststellt, ersetzen, so entsteht die a. a. O. eingeführte wohlgeordnete Spezies $f_{sn_1 \ldots n_r}$, welche aber wegen des Auftretens eventueller Nullelemente *nicht* notwendig ein *erstes* nicht-verschwindendes Element zu besitzen braucht. Ein solches *erstes* Element wird also a. a. O. Z. 24 mit Unrecht erwähnt, die Beweiskraft des betreffenden Passus wird jedoch hierdurch nicht beeinträchtigt, weil eben die jetzt gegebene nähere Beschreibung der Entstehungsweise von $f_{sn_1 \ldots n_r}$ für die Herleitung der Versicherbarkeit der Elemente dieser wohlgeordneten Spezies mittels $k'_{sn_1 \ldots n_r}$ ohne weiteres die Ausschaltung des ζ-Schlusstypus impliziert.

An die obige Erörterung wird a. a. O. Anschluss erhalten, wenn daselbst, S. 190 Z. 31 und Z. 35, $k_{sn_1 \ldots n_r}$ durch $k'_{sn_1 \ldots n_r}$ ersetzt wird.

Hinsichtlich des a. a. O. im dritten Absatz von S. 190 angegebenen Verfahrens ist weiter zu bemerken, dass (wie sich mittels transfiniter Induktion in bezug auf $f_{sn_1 \ldots n_r}$ ergibt) ein in $f_{sn_1 \ldots n_r}$ *öfters* auftretendes Element $F_{mm_1 \ldots m_g}$ von σ dabei auf Grund des angeführten Verfahrens jedesmal in dieselbe wohlgeordnete Spezies übergeht. Hieraus folgt insbesondere, dass die durch Theorem 1 (a. a. O. S. 191) erklärte wohlgeordnete Spezies S eindeutig bestimmt ist.

§ 2.

Das *Prinzip der transfiniten Induktion*, von dem in diesem Zusammenhang fortwährend die Rede ist, kann wie folgt formuliert werden: [[2]]

Wenn für eine wohlgeordnete Spezies W und eine Eigenschaft E feststeht:

1. *dass E erfüllt ist für das erste (verschwindende oder nicht verschwindende) Element von W*,

2. *dass E, wenn sie erfüllt ist für die konstruktive Unterspezies w von W, ebenfalls erfüllt ist für $w + e$, wo e eine Urspezies von W vorstellt*,

3. *dass, wenn bei einer beliebigen in einer Summierung $u + w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = w$ bestehenden zweiten erzeugenden Operation von W für jedes ganze positive ν aus der Erfüllung von E für $u + w_1 + \ldots w_{\nu-1}$ die Erfüllung von E für $u + w_1 + \ldots w_\nu$ folgt, aus der Erfüllung von E für u die Erfüllung von E für w folgt*,

so ist E erfüllt für W.

Für die Herleitung von Theorem 1 (a. a. O. S. 191) mittels dieses Prinzips ist genaugenommen die a. a. O. geschehene Einführung von $f_{sn_1 \dots n_r}$ nicht nötig; auch transfinite Induktion in bezug auf $k'_{sn_1 \dots n_r}$ oder sogar in bezug auf $k_{sn_1 \dots n_r}$ führt zum Ziel.

§ 3.

Das sich a. a. O. als besonderer Fall von Theorem 1 ergebende Theorem 2 kann auch unabhängig von Theorem 1 bewiesen werden, und zwar mittels Anwendung des folgenden *Haupttheorems der Theorie der wohlgeordneten Spezies:*

[[3]] *Ein Gesetz, welches in einer wohlgeordneten Spezies W ein Element e' bestimmt, und jedem schon bestimmten Elemente $e^{(\nu)}$ entweder die Hemmung des Prozesses, oder ein in W niedriger als $e^{(\nu)}$ geordnetes Element $e^{(\nu+1)}$ zuordnet, bestimmt sicher eine natürliche Zahl n und ein zugehöriges Element $e^{(n)}$, dem es die Hemmung des Prozesses zuordnet.*

Nehmen wir nämlich an, dass F_s zu σ gehört. Einem die Versicherbarkeit von F_s feststellenden Elemente e von k_s ist ein in k_s nicht höher als e geordnetes Element ${}_0e$ von k_s zugeordnet, das als ι-Schluss die Versicherbarkeit von F_s feststellt; dem Elemente ${}^0e$ von k_s für jedes zu σ gehörige $F_{s\alpha}$ ein in k_s niedriger als ${}_0e$ geordnetes Element e'_α von k_s, das die Versicherbarkeit von $F_{s\alpha}$ feststellt; jedem e'_α ein in k_s nicht höher als e'_α geordnetes Element ${}_0e'_\alpha$ von k_s, das als ι-Schluss die Versicherbarkeit von $F_{s\alpha}$ feststellt; jedem ${}_0e'_\alpha$ für jedes zu σ gehörige $F_{s\alpha\beta}$ ein in k_s niedriger als ${}_0e'_\alpha$ geordnetes Element $e''_{\alpha\beta}$ von k_s, das die Versicherbarkeit von $F_{s\alpha\beta}$ feststellt; usw. Im Falle einer finiten Menge M gibt es unter den e'_α ein in k_s am höchsten geordnetes Element e'; unter den $e''_{\alpha\beta}$ ein in k_s am höchsten geordnetes Element e''; usw. Weiter gibt es ein Gesetz, das das Element e' dem Elemente e, das Element e'' dem Elemente e', das Element e''' dem Elemente e'', usw. zuordnet, wobei jedesmal $e^{(\nu+1)}$ in k_s niedriger als $e^{(\nu)}$ geordnet ist; nach dem oben zitierten Haupttheorem der Theorie der wohlgeordneten Spezies bestimmt mithin dieses Gesetz eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass $\nu < n$ für jedes $e^{(\nu)}$. Dies aber ist nur dann möglich, wenn jedes Element von μ, das eine Verlängerung von F_s bildet und mindestens $z = n + 1$ Wahlen enthält, zu τ gehört. Von der letzteren Eigenschaft ist aber das zitierte Theorem 2 eine unmittelbare Folge [1]).

[1]) Der obige Beweis lässt sich formal noch etwas kürzen, indem man, statt mit k_s, mit f_s operiert.

[[300]]

Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik[1]). I. 1925 A

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Mengen und Spezies. Ihre Vergleichung.

§ 1. Der Mathematik liegt eine unbegrenzte Folge von Zeichen bzw. endlichen Zeichenreihen zugrunde, welche bestimmt wird durch ein erstes Zeichen und das Gesetz, das aus jeder dieser Zeichenreihen die nächstfolgende herleitet. Insbesondere ist zu diesem Zweck die Folge ζ der „Nummern" $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ brauchbar.

Eine *Menge* ist ein *Gesetz*, auf Grund dessen, wenn immer wieder eine willkürliche Nummer gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder eine bestimmte Zeichenreihe mit oder ohne Beendigung des Prozesses[2]) erzeugt, oder aber die Hemmung des Prozesses mitsamt der definitiven Vernichtung

---

[1]) Die Reihe von Aufsätzen, die ich unter diesem Titel in den Mathematischen Annalen veröffentlichen werde, soll eine erweiterte und wo nötig emendierte Wiedergabe bilden vom Inhalte meiner von 1918 an in den Verhandelingen der Amsterdamer Akademie erscheinenden Abhandlungen: *„Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten"* und *„Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten"*. [[1]]

[2]) In dieser Mengendefinition kann selbstverständlich die Möglichkeit der Beendigung des Prozesses auch durch die Möglichkeit, daß nach einer bestimmten Wahl jede weitere Wahl anstatt einer Zeichenreihe immer wieder *nichts* erzeugt, ersetzt werden.

Dem Umstand, daß die Mengendefinition langatmig ist, ist leider nicht abzuhelfen. Zur Erleichterung des Verständnisses sei schon hier auf den speziellen Fall hingewiesen, der eintritt, wenn sowohl von Beendigungen wie von Hemmungen des Prozesses Abstand genommen wird und wenn man überdies jede Wahl einer Nummer immer nur die Nummer selbst erzeugen läßt. Dieser Fall liefert die im § 4 zur Behandlung gelangende Menge C. [[2]]

seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes $n > 1$ nach jeder unbeendigten und ungehemmten Folge von $n - 1$ Wahlen, wenigstens eine Nummer angegeben werden kann, die, wenn sie als n-te Nummer gewählt
[[3]] wird, *nicht* die Hemmung des Prozesses herbeiführt. Jede in dieser Weise von einer unbegrenzten Wahlfolge erzeugte Folge von Zeichenreihen[3]) (welche also im allgemeinen nicht fertig darstellbar ist), heißt ein *Element der Menge.* Die gemeinsame Entstehungsart der Elemente einer
[[4]] Menge M werden wir kurz ebenfalls als *die Menge* M bezeichnen.

Wenn zu jedem n in ζ eine solche Nummer k_n bestimmt ist, daß jedesmal, wenn bei der n-ten Wahl eine in ζ höher als k_n liegende Nummer gewählt wird, die Hemmung des Prozesses zustande kommt, so heißt die Menge *finit*[4]).

Wenn verschiedene ungehemmte Wahlfolgen immer zu verschiedenen Folgen von Zeichenreihen führen, so heißt die Menge *individualisiert.*

Die Bestimmungsgesetze endlicher Folgen von Zeichenreihen sowie unbegrenzter Folgen von Zeichenreihen von der Art der Folge ζ bilden besondere Fälle von Mengen, deren Elemente von den einzelnen Zeichen gebildet werden. Die Menge der Nummern, d. h. der Zeichenreihen von ζ, werden wir mit A bezeichnen.

Zwei Mengenelemente heißen *gleich* oder *identisch,* wenn man sicher ist, daß für jedes n die n-te Wahl für beide Elemente dieselbe Zeichenreihe erzeugt.

Zwei Mengen heißen *gleich* oder *identisch,* wenn zu jedem Element der einen Menge ein gleiches Element der anderen Menge angegeben werden kann.

Die Menge M heißt eine *Teilmenge* der Menge N, wenn zu jedem Elemente von M ein gleiches Element von N existiert.

Mengen und Elemente von Mengen werden *mathematische Entitäten* genannt.

Unter einer *Spezies erster Ordnung* verstehen wir eine (begrifflich fertig definierte) Eigenschaft, welche nur eine mathematische Entität besitzen kann, in welchem Falle sie ein *Element der Spezies erster Ordnung* genannt wird. Die Mengen bilden besondere Fälle von Spezies erster Ordnung.

Zwei Spezies erster Ordnung heißen *gleich* oder *identisch,* wenn zu jedem Elemente der einen Spezies ein gleiches Element der anderen Spezies angegeben werden kann

[3]) Inklusive des Charakters ihrer Fortsetzbarkeitsfreiheit, welche sich nach jeder Wahl beliebig (eventuell bis zur völligen Bestimmtheit, jedenfalls aber einem Mengengesetze entsprechend) verengern kann

[4]) Insbesondere bilden also die unbeschränkt fortgesetzten Folgen von *einziffrigen* Nummern die Elemente einer finiten Menge.

[[302]]

Unter einer *Spezies zweiter Ordnung* verstehen wir eine Eigenschaft, welche nur eine mathematische Entität oder Spezies erster Ordnung besitzen kann, in welchem Falle sie ein *Element der Spezies zweiter Ordnung* genannt wird.

Zwei Spezies zweiter Ordnung heißen *gleich* oder *identisch*, wenn zu jedem Elemente der einen Spezies ein gleiches Element der anderen Spezies angegeben werden kann.

In analoger Weise definieren wir *Spezies n-ter Ordnung*, sowie deren Gleichheit bzw. Identität, wo n ein beliebiges Element von A repräsentiert.

Die Spezies M heißt eine *Teilspezies* der Spezies N, wenn zu jedem Elemente von M ein gleiches Element von N existiert. Läßt sich überdies ein Element von N angeben, das nicht gleich einem Elemente von M sein kann, so heißt M eine *echte Teilspezies* von N.

Zwei Mengenelemente heißen *verschieden*, wenn die Unmöglichkeit ihrer Gleichheit feststeht, d. h. wenn man Sicherheit hat, daß sich im Laufe ihrer Erzeugung nie ihre Gleichheit wird beweisen lassen.

Zwei Spezies heißen *verschieden*, wenn die Unmöglichkeit ihrer Gleichheit feststeht.

Eine Spezies, von der je zwei Elemente entweder als gleich oder als verschieden erkannt werden können, nennen wir *diskret*.

Wir sagen, daß die Spezies M aus der Spezies N *herausragt*, wenn N ein von jedem Elemente von M verschiedenes Element besitzt.

Zwei Spezies M und N heißen *kongruent*, wenn keine von beiden aus der anderen herausragen kann, mit anderen Worten, wenn jede für die Elemente der einen Spezies unmögliche Eigenschaft auch für die Elemente der anderen Spezies unmöglich ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn von den unendlichen Dualbruchentwicklungen des Einheitsintervalls M diejenigen enthält, von denen entweder feststeht, wieviele Ziffern 0 der ersten Ziffer 1 vorangehen, oder daß gar keine Ziffer 1 auftritt, und N diejenigen, von denen entweder feststeht, wieviele Ziffern 1 der ersten Ziffer 0 vorangehen, oder daß gar keine Ziffer 0 auftritt. Offenbar sind zwei Spezies, welche beide einer dritten Spezies kongruent sind, auch untereinander kongruent.

Eine mit M kongruente Teilspezies von N heißt auch *halbidentisch* mit N. Dies ist z. B. der Fall, wenn M dieselbe Spezies wie im vorigen Absatz und N die Spezies der unendlichen Dualbruchentwicklungen des Einheitsintervalls vorstellt.

Die Spezies, welche diejenigen Elemente umfaßt, welche sowohl zur Spezies M wie zur Spezies N gehören, heißt der *Durchschnitt* von M und N, und wird mit $\mathfrak{D}(M, N)$ bezeichnet. Daß der Durchschnitt zweier Mengen keine Menge zu sein braucht, sehen wir ein, indem wir für M

eine einen einzigen unendlichen Dualbruch a und für N eine einen einzigen unendlichen Dualbruch b umfassende Menge wählen, während man von a und b weder die Gleichheit noch die Verschiedenheit beweisen kann.

Die Spezies, welche diejenigen Elemente umfaßt, welche entweder zur Spezies M oder zur Spezies N gehören, heißt die *Vereinigung* von M und N, und wird bezeichnet mit $\mathfrak{S}(M, N)$. Die Vereinigung zweier Mengen ist wiederum eine Menge, die Vereinigung zweier individualisierter Mengen braucht aber keine individualisierte Menge zu sein.

Zwei Spezies M und N heißen *elementefremd*, wenn sie verschieden sind und unmöglich ein Element von M und ein Element von N existieren können, welche miteinander identisch sind.

Sind M' und M'' elementefremd und Teilspezies von N, und ist $\mathfrak{S}(M', M'')$ halbidentisch mit N, so sagen wir, daß N sich aus M' und M'' *zusammensetzt*, und nennen M' und M'' *Komplementärspezies* voneinander in N. Dies ist z. B. der Fall, wenn N sämtliche Nummern umfaßt, M' diejenigen Nummern, welche als Exponent der Fermatschen Gleichung diese Gleichung lösbar machen, und M'' diejenigen Nummern, welche als Exponent der Fermatschen Gleichung diese Gleichung unlösbar machen.

Sind M' und M'' elementefremd und Teilspezies von N, und $\mathfrak{S}(M', M'')$ und N identisch, so sagen wir, daß N in M' und M'' *zerlegt* ist, und nennen M' und M'' *konjugierte Zerlegungsspezies von* N und sowohl M' wie M'' eine *abtrennbare Teilspezies* von N. Dies ist z. B. der Fall, wenn N sämtliche Nummern umfaßt, M' diejenigen Nummern, welche höchstens fünf Ziffern enthalten, und M'' diejenigen Nummerrn, welche mehr als fünf Ziffern enthalten.

In analoger Weise wie den Durchschnitt und die Vereinigung von zwei Spezies definiert man den Durchschnitt und die Vereinigung einer willkürlichen Spezies von Spezies.

In analoger Weise wie zwei Komplementärspezies in N bzw. zwei konjugierte Zerlegungsspezies von N definiert man eine diskrete Spezies von Komplementärspezies in N bzw. eine diskrete Spezies von konjugierten Zerlegungsspezies von N.

Wenn zwischen zwei Spezies M und N eine eineindeutige Beziehung hergestellt werden kann, d. h. ein Gesetz, welches jedem Elemente von M ein Element von N zuordnet in solcher Weise, daß gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen, und jedes Element von N einem Elemente von M zugeordnet wird, so schreiben wir $M \sim N$, und sagen, daß M und N dieselbe *Mächtigkeit* oder *Kardinalzahl* besitzen, oder *gleichmächtig* sind. Die Menge der Nummern $2, 3, 4, \ldots$ ist z. B. gleichmächtig mit der Menge der Nummern $1, 2, 3, \ldots$

Wenn jedem Elemente von M ein Element von N zugeordnet ist in solcher Weise, daß gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen und die Spezies der Elementen von M zugeordneten Elemente von N mit N halbidentisch ist, so sagen wir, daß M mit N *halbgleichmächtig* ist.

§ 2. Eine Spezies heißt *endlich*, wenn sie mit der Menge der Nummern eines gewissen (eventuell fortfallenden) Anfangssegmentes der Folge ζ gleichmächtig ist.

Eine Spezies heißt *unendlich*, wenn sie eine mit A gleichmächtige Teilspezies enthält, und insbesondere *reduzierbar unendlich*, wenn die betreffende Teilspezies abtrennbar ist.

Es existiert kein Grund zu behaupten, daß jede Menge oder Spezies entweder endlich oder unendlich sei. Dagegen steht fest, daß eine Spezies nicht gleichzeitig endlich und unendlich sein kann, und zwar auf Grund des folgenden Satzes:

Haupteigenschaft der endlichen Spezies. *Für jede Herstellungsweise der eineindeutigen Beziehung zwischen einer endlichen Spezies E und der Menge der Nummern eines Anfangssegmentes von ζ, kurz: für jede Zählungsweise von E, wird dasselbe Anfangssegment von ζ benutzt.*

Beweis. Seien zwei Zählungen von E gegeben, von denen die „erste" das Anfangssegment $1, 2, 3, \ldots, \tau$ von ζ benutzt, während die andere (als „neue Zählung" zu bezeichnen) *nicht weniger* als $1, 2, 3, \ldots, \tau$ benutzt. Die Zählung, in welche die erste Zählung durch Vertauschung der Elemente, denen bei der ersten und bei der neuen Zählung die Ziffer 1 zugeordnet ist, übergeht, werden wir als „zweite Zählung" bezeichnen. Alsdann benutzen die erste und die zweite Zählung dasselbe Anfangssegment von ζ, während bei der zweiten und bei der neuen Zählung die Ziffer 1 demselben Elemente von E zugeordnet ist. Die Zählung, in welche die zweite Zählung durch Vertauschung der Elemente, denen bei der zweiten und bei der neuen Zählung die Ziffer 2 zugeordnet ist, übergeht, werden wir als „dritte Zählung" bezeichnen. Alsdann benutzen die erste und die dritte Zählung dasselbe Anfangssegment von ζ, während bei der dritten und bei der neuen Zählung die Ziffern 1 und 2 je demselben Elemente von E zugeordnet sind. In dieser Weise fortfahrend, gelangen wir schließlich zu einer „letzten Zählung", welche einerseits dasselbe Anfangssegment von ζ wie die erste Zählung, also das Segment $1, 2, 3, \ldots, \tau$ benutzt, andererseits die Nummern $1, 2, \ldots, \tau$ je demselben Elemente von E zuordnet wie die neue Zählung. Hieraus folgern wir hinsichtlich der neuen Zählung, daß, nachdem wir die Nummern $1, 2, \ldots, \tau$ denjenigen

Elementen von E zugeordnet haben, denen sie bei der neuen Zählung entsprechen, die Menge E erschöpft ist, d. h. daß *die neue Zählung dasselbe Anfangssegment von ζ benutzt wie die erste Zählung*, w. z. b. w.

Auf Grund der Haupteigenschaft dürfen wir die Kardinalzahl einer endlichen Spezies mit der letzten Nummer der Folge ζ, die bei der Zählung der Menge benutzt wird, bezeichnen. Die Kardinalzahl einer Spezies ohne Element heißt *Null* und wird mit 0 bezeichnet.

Aus dem Beweise der Haupteigenschaft folgt unmittelbar, daß *eine echte Teilspezies einer endlichen Spezies E nicht mit E selbst gleichmächtig sein kann* (die entgegengesetzte Annahme führt nämlich sofort auf einen Widerspruch). Insbesondere *kann eine endliche Spezies nicht gleichzeitig unendlich sein.*

Sei U eine reduzierbar unendliche Spezies; U_1 die abtrennbare, mit A gleichmächtige Teilspezies; $e_1, e_2, e_3, \ldots$ die Elemente von U_1; U_2 die zu U_1 in U konjugierte Zerlegungsspezies. Indem wir e_1 mit e_2, e_2 mit e_3, usw. und jedes Element von U_2 mit sich selbst korrespondieren lassen, erzeugen wir eine eineindeutige Beziehung zwischen U und einer echten Teilspezies von U. Mithin gilt der

Satz: *Jede reduzierbar unendliche Spezies U enthält mit U gleichmächtige echte Teilspezies.*

§ 3. Das einfachste Beispiel einer unendlichen Menge bildet die Menge A selbst, deren Kardinalzahl wir mit a bezeichnen werden. Spezies, welche diese Kardinalzahl besitzen, heißen *abzählbar unendlich*, so daß folgende Aussage gilt: *Jede unendliche Spezies enthält eine abzählbar unendliche Teilspezies.*

Einfache Beispiele von abzählbar unendlichen Spezies lassen sich in mannigfacher Weise angeben. Die Menge der positiven und negativen ganzen Zahlen (d. h. genau genommen die Menge der diese Zahlen bezeichnenden Zeichenkomplexe) erscheint als abzählbar unendlich, wenn wir diese Zahlen nach steigenden absoluten Werten ordnen. Die Spezies der rationalen Zahlen x erscheint als abzählbar unendliche Menge, wenn wir jede dieser Zahlen als Wurzel einer bestimmten Gleichung $px + q = 0$ (in welcher p und q möglichst kleine ganze Zahlen sind und p positiv ist) betrachten und diese Gleichungen nach der Summe der absoluten Werte von p und q ordnen.

Um zu beweisen, daß auch die Spezies der algebraischen Zahlen eine abzählbar unendliche Menge ist, bemerken wir zunächst, daß jede algebraische Zahl ϑ als Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten und lauter einfachen Wurzeln betrachtet werden kann. Ist nämlich ϑ gegeben als Wurzel der algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffi-

[[306]]

zienten $\chi(x) = 0$, so ist sie auch Wurzel der lauter einfache Wurzeln besitzenden Gleichung mit rationalen Koeffizienten $\eta(x) = 0$, wo $\chi(x) \equiv \eta(x)\zeta(x)$ ist und $\zeta(x)$ den größten gemeinsamen Teiler von $\chi(x)$ und $\chi'(x)$ vorstellt.

Nun kann man von jeder algebraischen Funktion n-ten Grades mit *ganzen* rationalen Koeffizienten $\varphi(x)$ leicht für jede natürliche Zahl ν untersuchen, ob $\varphi(x)$ einen Faktor mit *ganzen* rationalen Koeffizienten $\psi(x)$ vom Grade ν enthält. Dazu wähle man $\nu + 1$ verschiedene feste ganze rationale Zahlen $r_0, r_1, \ldots, r_\nu$ und für jedes r_μ einen beliebigen ganzzahligen Teiler τ_μ von $\varphi(r_\mu)$ als hypothetischen Wert von $\psi(r_\mu)$. Durch diese $\nu + 1$ Werte $\psi(r_\mu)$ ist die hypothetische Funktion $\psi(x)$ bestimmt, so daß man kontrollieren kann, ob sie in der Tat einen Teiler von $\varphi(x)$ darstellt. In dieser Weise kann man mit jeder der endlichvielen für das System der τ_μ möglichen Wahlen verfahren.

Mithin kann die obige Funktion $\eta(x)$ in Faktoren mit rationalen Koeffizienten $\zeta_1(x), \ldots, \zeta_r(x)$ zerlegt werden, welche irreduzibel sind, d. h. selber keine derartige Zerlegung mehr zulassen. Weil sich weiter für die Differenz zweier beliebiger Wurzeln von $\eta(x) = 0$ eine untere Grenze bestimmen läßt, so stellt, für ein einziges eindeutig bestimmtes ν, ϑ eine Wurzel der Gleichung $\zeta_\nu(x) = 0$ dar.

Gehört ϑ als Wurzel zu noch einer anderen irreduziblen algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten $\lambda(x) = 0$, so können λ und ζ_ν sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Denn sonst könnte man von $\lambda(x)$ und $\zeta_\nu(x)$ einen größten gemeinsamen Teiler mit rationalen Koeffizienten berechnen, dessen Grad sowohl von 0 wie vom Grade von wenigstens einer der beiden Funktionen λ und ζ_ν verschieden wäre, so daß λ und ζ_ν nicht beide irreduzibel wären.

Jede algebraische Zahl gehört mithin als Wurzel zu einer *eindeutig bestimmbaren* irreduziblen algebraischen Gleichung mit möglichst kleinen ganzzahligen Koeffizienten, von denen der erste positiv ist. Wählen wir als Bestimmungsgrößen einer algebraischen Zahl den Grad und die Koeffizienten *dieser* Gleichung, so können wir die Spezies der algebraischen Zahlen nach steigenden Werten der Summe der absoluten Beträge der Bestimmungsgrößen ordnen und ihr in dieser Weise den Charakter einer abzählbar unendlichen Menge verleihen.

Die Spezies der Paare von Nummern ist eine abzählbar unendliche Menge; wir brauchen, um dies einzusehen, diese Paare nur nach der Summe der zugehörigen ganzen Zahlen zu ordnen. Hieraus folgt, daß eine Spezies, welche in eine abzählbar unendliche Spezies von abzählbar unendlichen Spezies zerlegt ist, ebenfalls eine abzählbar unendliche Spezies darstellt.

§ 4. Ein zweites Beispiel einer unendlichen Menge bildet die Menge C der unbeschränkt fortgesetzten Folgen von Nummern, deren Kardinalzahl wir mit c bezeichnen werden. Obgleich die Menge C nicht reduzierbar unendlich ist, so besitzt sie dennoch, wie sich leicht zeigen läßt, analog wie die reduzierbar unendlichen Spezies, mit C gleichmächtige echte Teilspezies. Lassen wir der Folge von positiven ganzen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die reelle Zahl

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}} + \cdots$$

entsprechen, so erscheint C als Erzeugungsmittel der dual entwickelbaren[5])
⟦5⟧ reellen Zahlen > 0 und ≤ 1. Ordnen wir jeder Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die reelle Zahl

⟦6⟧
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{a_1-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}} + \cdots$$

zu, so erscheint C als Erzeugungsmittel der dual entwickelbaren reellen Zahlen > 0 und < 1. Hieraus folgt unmittelbar, daß C sich schließlich auch als Erzeugungsmittel aller dual entwickelbaren reellen (positiven und negativen) Zahlen, inklusive 0, deuten läßt. Lassen wir der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die reelle Zahl

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

entsprechen, so erscheint die Menge C als Erzeugungsmittel der positiv-irrationalen (d. h. von jeder beliebigen rationalen Zahl durch andere rationale Zahlen getrennten) Zahlen > 0 und < 1.

Die Spezies C_n der Gruppen von n unbeschränkt fortgesetzten Folgen von Nummern ist eine Menge derselben Kardinalzahl wie die Menge C. Um dies einzusehen, braucht man nur dem Elemente $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ von C das Element

$$\begin{array}{llll} a_1 & a_{n+1} & a_{2n+1} & \cdots \\ a_2 & a_{n+2} & a_{2n+2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{2n} & a_{3n} & \cdots \end{array}$$

von C_n zuzuordnen. In dieser Weise bestimmt man gleichzeitig eine eineindeutige Beziehung zwischen den dual entwickelbaren Punkten eines n-dimensionalen Kubus und den dual entwickelbaren Punkten eines geraden

[5]) Die reelle Zahl a heißt hier *dual entwickelbar*, wenn für jeden endlichen Dualbruch e die Beziehung $a > e$ (d. h. a wird durch einen endlichen Dualbruch $e_1 > e$ von e getrennt) sich entweder beweisen oder ad absurdum führen läßt.

⟦308⟧

Liniensegmentes (aus welcher unmittelbar eine eineindeutige Beziehung zwischen den dual entwickelbaren Punkten des n-dimensionalen Cartesischen Raumes und den dual entwickelbaren Punkten der geraden Linie folgt). Diese Beziehung ist aber *nicht stetig*: wenn man z. B. (bei konstanten $a_1, \ldots, a_n, a_{n+3}, a_{n+4}, \ldots$) a_{n+2} abwechselnd gleich 1 und 2 wählt und a_{n+1} unbeschränkt wachsen läßt, so bekommt man auf dem Liniensegmente eine gegen einen einzigen Punkt konvergierende Folge von Punkten, im n-dimensionalen Kubus aber eine *nicht* gegen einen einzigen Punkt konvergierende Folge von Punkten.

§ 5. Zwei Spezies M und N (und ebenso die betreffenden Kardinalzahlen m und n) heißen *äquivalent*, wenn durch ein Gesetz G_1 jedem Element von M ein solches Element von N zugeordnet ist, daß gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen, und durch ein Gesetz G_2 jedem Element von N ein solches Element von M, daß gleichen und nur gleichen Elementen von N gleiche Elemente von M entsprechen, eine Eigenschaft, welche wir auch durch die Formel $m = n$ ausdrücken. Wenn ⟦7⟧ einerseits jedem Element von M ein solches Element von N zugeordnet ist, daß gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen, andererseits aber kein Gesetz existieren kann, das jedem Elemente von N ein solches Element von M zuordnet, daß gleichen und nur gleichen Elementen von N gleiche Elemente von M entsprechen, so schreiben wir $m < n$ oder $n > m$ und sagen, daß N (bzw. n) *größer* ist als M (bzw. m), und daß M (bzw. m) *kleiner* ist als N (bzw. n).

Wenn wir nur wissen, daß jedem Elemente von M ein solches Element von N zugeordnet ist, daß gleichen und nur gleichen Elementen von M gleiche Elemente von N entsprechen, so schreiben wir auch $m \leqq n$ oder $n \geqq m$, obgleich in diesem Falle nicht notwendig eine der Relationen $m < n$ und $m = n$ zu gelten braucht.

Folgende Eigenschaften sind evident:

1. *Die Relationen $m = n$, $m > n$ und $m < n$ schließen einander aus.*

2. *Aus $m = n$ und $n = p$ folgt $m = p$ (denn aus $m \geqq n$ und $n \geqq p$ folgt $m \geqq p$).*

3. *Aus $m > n$ und $n \geqq p$ folgt $m > p$.* Wenn man nämlich jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von P zuordnen könnte, so könnte man weiter auf Grund von $n \geqq p$ auch jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von N zuordnen.

4. *Aus $m \geqq n$ und $n > p$ folgt $m > p$.* Wenn man nämlich jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von P zuordnen könnte, so könnte man jedem Elemente von N ein verschiedenes Element von M, also auch ein verschiedenes Element von P zuordnen.

Um ein Beispiel äquivalenter Spezies herzustellen, bezeichnen wir mit K die Spezies der durch ein Gesetz definierten unbegrenzten Folgen von Nummern. Sodann bezeichnen wir auf dem Zahlenkontinuum ein Intervall mit den Endpunkten $a \, . \, 2^{-n}$ und $(a+1)\, 2^{-n}$ bzw. mit den Endpunkten $a \, . \, 2^{-n}$ und $(a+2)\, 2^{-n}$ (wo a eine beliebige ganze rationale Zahl und n eine beliebige natürliche Zahl vorstellt) als ein $\varkappa$-Intervall bzw. als ein λ-Intervall. Alsdann kann eine beliebige, im geschlossenen Intervall $(0, 1)$ überall definierte *stetige Funktion* bestimmt werden durch ein *Funktionsgesetz*, d. h. ein Gesetz, welches jedem zum Intervall $(0, 1)$ gehörigen $\varkappa$-Intervall $\varkappa_a$ ein λ-Intervall λ_b zuordnet in solcher Weise, daß aneinander grenzenden $\varkappa_a$ teilweise übereinander greifende λ_b und ineinander enthaltenen $\varkappa_a$ ebenfalls ineinander enthaltene λ_b entsprechen, und daß die Breite der λ_b mit der Breite der entsprechenden $\varkappa_a$ gleichmäßig gegen Null konvergiert. Im besonderen Falle, daß die stetige Funktion *dual geeicht* ist, d. h. daß für die zu einem beliebigen geschlossenen $\varkappa$-Intervall $\varkappa_a$ gehörige Spezies von Funktionswerten φ_a und für ein beliebiges λ-Intervall λ_b bekannt ist, ob φ_a in einem im engeren Sinne in λ_b enthaltenen Intervall enthalten ist oder nicht, kann überdies das entsprechende Funktionsgesetz leicht eindeutig so gewählt werden, daß zu gleichen Funktionen immer gleiche Funktionsgesetze gehören. Bezeichnen wir nun die Spezies der betreffenden Funktionsgesetze mit G und die Spezies der betreffenden dual geeichten Funktionen mit F, so haben wir zunächst auf Grund der Tatsache, daß sowohl die $\varkappa$-Intervalle wie die λ-Intervalle des Einheitsintervalls eine abzählbar unendliche Spezies bilden, die Formeln $k \geqq g$ und $k \geqq f$. Indem wir andererseits jedem Elemente e von K, das in obiger Weise mittels eines unendlichen regelmäßigen Kettenbruchs eine positiv-irrationale Zahl z_e erzeugt, die Funktion mit dem konstanten Wert z_e bzw. ein diese Funktion bestimmendes Funktionsgesetz zuordnen, gelangen wir zu den Formeln $f \geqq k$ und $g \geqq k$. Mithin sind die Spezies K, G und F äquivalent.

Die Menge C ist größer als die Menge A. Ein Gesetz, das jedem Elemente g von C ein Element h von A zuordnet, muß nämlich das Element h vollständig bestimmt haben nach dem Bekanntwerden eines gewissen Anfangssegmentes α der Nummernfolge g. Dann aber wird jedem Elemente von C, das α als Anfangssegment besitzt, dasselbe Element h von A zugeordnet, so daß die Formel $a \geqq c$ sich als kontradiktorisch erweist, während man andererseits leicht ersieht, daß $c \geqq a$ ist. Hiermit ist die Behauptung bewiesen. Die gleiche Beweismethode ergibt, daß *die*
[[8]] *Menge C auch größer ist als die Menge K.*

§ 6. Eine Spezies M (bzw. ihre Kardinalzahl m) heißt einer Spezies N (bzw. ihrer Kardinalzahl n) *übergeordnet* und wir schreiben $m \overset{\circ}{\geqq} n$, wenn jedem Elemente α einer gewissen Teilspezies M_1 von M je ein Element β von N zugeordnet ist in solcher Weise, daß die Spezies N' der β mit N ⟦9⟧ halbidentisch ist. Im besonderen Falle, daß N' mit N identisch ist, heißt die Spezies M (bzw. ihre Kardinalzahl m) der Spezies N (bzw. ihrer Kardinalzahl n) *überlagert* und schreiben wir $m \overset{\cdot}{\geqq} n$.[6]) Im besonderen Falle, daß M_1 mit M identisch ist, heißt M (bzw. m) N (bzw. n) *superponiert* ⟦10⟧ und schreiben wir $m \overset{\cdot\cdot}{\geqq} n$. Ist schließlich sowohl N' mit N wie M_1 mit M identisch, so sagen wir, daß N (bzw. n) von M (bzw. m) *überdeckt* ist, und schreiben $m \overset{\cdot\cdot\cdot}{\geqq} n$.

Wenn die Spezies M der Spezies N übergeordnet ist, die Spezies N aber unmöglich der Spezies M übergeordnet werden kann, so heißt M (bzw. m) *von größerem Umfang* als N (bzw. n) und schreiben wir $m \overset{\circ}{>} n$.

Wenn sowohl $m \overset{\circ}{\geqq} n$, wie $n \overset{\circ}{\geqq} m$, so heißen M und N (bzw. m und n) *von gleichem Umfang* und schreiben wir $m \overset{\circ}{=} n$.

Folgende Eigenschaften sind leicht zu beweisen:

1. *Die Relationen* $m \overset{\circ}{=} n$, $m \overset{\circ}{>} n$ *und* $n \overset{\circ}{>} m$ *schließen einander aus.*

2. *Aus* $m \overset{\circ}{\geqq} n$ *und* $n \overset{\circ}{\geqq} p$ *folgt* $m \overset{\circ}{\geqq} p$. Sei nämlich N' die Spezies der Elementen von M zugeordneten Elemente von N, und P' bzw. P'' die Spezies der Elementen von N bzw. N' zugeordneten Elemente von P. Wenn nun ein von jedem Elemente von P'' verschiedenes Element von P' existierte, so wäre es einem Elemente von N zugeordnet, das eine für die Elemente von N' unmögliche Eigenschaft besäße, was der Kongruenz von N und N' widerspricht. Es kann mithin kein von jedem Elemente von P'' verschiedenes Element von P' existieren, d. h. P'' und P' sind kongruent. Weil aber P und P' ebenfalls kongruent sind, so sind schließlich auch P und P'' kongruent, also halbidentisch, w. z. b. w.

3. *Aus* $m \overset{\circ}{=} n$ *und* $n \overset{\circ}{=} p$ *folgt* $m \overset{\circ}{=} p$.

4. *Aus* $m \overset{\circ}{>} n$ *und* $n \overset{\circ}{\geqq} p$ *folgt* $m \overset{\circ}{>} p$. Wenn nämlich $p \overset{\circ}{\geqq} m$ wäre, so wäre wegen $n \overset{\circ}{\geqq} p$ auch $n \overset{\circ}{\geqq} m$, was mit $m \overset{\circ}{>} n$ unverträglich ist.

5. *Aus* $m \overset{\circ}{\geqq} n$ *und* $n \overset{\circ}{>} p$ *folgt* $m \overset{\circ}{>} p$. Wenn nämlich $p \overset{\circ}{\geqq} m$ wäre, so wäre wegen $m \overset{\circ}{\geqq} n$ auch $p \overset{\circ}{\geqq} n$, was mit $n \overset{\circ}{>} p$ unverträglich ist.

Wenn die Spezies M der Spezies N überlagert ist, die Spezies N aber unmöglich der Spezies M überlagert werden kann, so heißt M (bzw. m) *von größerer Weite* als N (bzw. n) und schreiben wir $m \overset{\cdot}{>} n$.

Wenn die Spezies M der Spezies N superponiert ist, die Spezies N aber unmöglich der Spezies M superponiert werden kann, so heißt M

[6]) Wenn $m \geqq n$, so bilden diejenigen Elemente von M, welche Elementen von N zugeordnet sind, eine Teilspezies M_1 von M, deren jedem Elemente ein solches Element β von N zugeordnet ist, daß die β eine mit N identische Spezies bilden. Mithin folgt aus $m \geqq n$, daß M der Spezies N überlagert werden kann.

(bzw. m) *von größerer Ausdehnung* als N (bzw. n) und schreiben wir $m \ddot{>} n$. Wenn N von M überdeckt ist, M aber unmöglich von N überdeckt werden kann, so heißt M (bzw. m) *von größerem Gewicht* als N (bzw. n) und schreiben wir $m \dddot{>} n$.

Wenn wohl $m \dot{\geqq} n$, wie $n \dot{\geqq} m$, so heißen M und N *von gleicher Weite* und schreiben wir $m \dot{=} n$. Wenn sowohl $m \ddot{\geqq} n$, wie $n \ddot{\geqq} m$, so heißen M und N *von gleicher Ausdehnung* und schreiben wir $m \ddot{=} n$. Wenn sowohl $m \dddot{\geqq} n$, wie $n \dddot{\geqq} m$, so heißen M und N *von gleichem Gewicht* und schreiben wir $m \dddot{=} n$.

Folgende Eigenschaften leuchten unmittelbar ein:

1. *Die Relationen* $m \dot{=} n$, $m \dot{>} n$, $n \dot{>} m$, *ebenso wie die Relationen* $m \ddot{=} n$, $m \ddot{>} n$, $n \ddot{>} m$, *und die Relationen* $m \dddot{=} n$, $m \dddot{>} n$, $n \dddot{>} m$ *schließen einander aus.*

2. *Aus* $m \dot{\geqq} n$ *und* $n \dot{\geqq} p$ *folgt* $m \dot{\geqq} p$. *Aus* $m \ddot{\geqq} n$ *und* $n \ddot{\geqq} p$ *folgt* $m \ddot{\geqq} p$. *Aus* $m \dddot{\geqq} n$ *und* $n \dddot{\geqq} p$ *folgt* $m \dddot{\geqq} p$.

3. *Aus* $m \dot{=} n$ *und* $n \dot{=} p$ *folgt* $m \dot{=} p$. *Aus* $m \ddot{=} n$ *und* $n \ddot{=} p$ *folgt* $m \ddot{=} p$. *Aus* $m \dddot{=} n$ *und* $n \dddot{=} p$ *folgt* $m \dddot{=} p$.

4. *Aus* $m \dot{>} n$ *und* $n \dot{\geqq} p$ *folgt* $m \dot{>} p$. *Aus* $m \ddot{>} n$ *und* $n \ddot{\geqq} p$ *folgt* $m \ddot{>} p$. *Aus* $m \dddot{>} n$ *und* $n \dddot{\geqq} p$ *folgt* $m \dddot{>} p$.

5. *Aus* $m \dot{\geqq} n$ *und* $n \dot{>} p$ *folgt* $m \dot{>} p$. *Aus* $m \ddot{\geqq} n$ *und* $n \ddot{>} p$ *folgt* $m \ddot{>} p$. *Aus* $m \dddot{\geqq} n$ *und* $n \dddot{>} p$ *folgt* $m \dddot{>} p$.

§ 7. Eine der Formel $m \leqq a$ genügende Spezies M heißt *abzählbar.* Sie heißt insbesondere *zählbar*, wenn sie sich auf eine *abtrennbare* Teilspezies von A eineindeutig abbilden läßt. Gilt die Formel $m = a$, so heißt M *nachzählbar*. Weiter nennen wir in den Fällen, die durch die Formeln $m \mathring{\leqq} a$, $m \dot{\leqq} a$, $m \ddot{\leqq} a$ und $m \dddot{\leqq} a$ ausgedrückt werden, die Spezies M der Reihe nach *auszählbar*, *überzählbar*, *durchzählbar* und *aufzählbar*.

Wählen wir unter den Begriffen: „*abzählbar*", „*zählbar*", „*nachzählbar*", „*auszählbar*", „*überzählbar*", „*durchzählbar*" und „*aufzählbar*" einen beliebigen aus und bezeichnen wir ihn mit dem Worte „x-zählbar", so folgt aus der oben erwähnten Eigenschaft, daß eine in eine abzählbar unendliche Spezies von abzählbar unendlichen Spezies zerlegte Spezies ebenfalls abzählbar unendlich ist, unmittelbar, daß eine in eine x-zählbare Spezies von x-zählbaren Spezies zerlegte Spezies ebenfalls x-zählbar ist.

Zur näheren Erläuterung der x-zählbarkeitsbegriffe bezeichnen wir mit d_ν die ν-te Ziffer hinter dem Komma der Dezimalbruchentwicklung von π, setzen $m = k_n$, wenn es sich in der fortschreitenden Dezimalbruchentwicklung von π bei d_m zum n-ten Male ereignet, daß $d_m d_{m+1} \ldots d_{m+9}$ eine Sequenz 0123456789 bildet, und bezeichnen die Spezies der als Index eines k_n unmöglich auftreten könnenden geraden natürlichen Zahlen n mit S_1 und die Vereinigung von S_1 mit der Spezies der ungeraden natürlichen Zahlen mit S_2. Alsdann sind S_1 und S_2 beide abzählbar, mithin auch auszählbar und überzählbar; weder S_1 noch S_2 sind zählbar; S_2 ist nachzählbar, S_1 aber nicht; weder S_1 noch S_2 sind durchzählbar oder aufzählbar [7]).

Bezeichnen wir mit S_3 die Menge von ungehemmten Wahlfolgen, welche entsteht, wenn die Wahl von $3, 4, \ldots$ immer zur Hemmung des Prozesses führt, während *nach* einer Wahl von 1 immer sowohl 1 wie 2 ohne Hemmung gewählt werden kann, *nach* einer Wahl von 2 jedoch nur 2 ohne Hemmung gewählt werden kann, so ist S_3 nicht abzählbar, also auch weder zählbar noch nachzählbar, ebensowenig überzählbar oder aufzählbar, wohl aber auszählbar und durchzählbar. ⟦11⟧

Bezeichnen wir mit S_4 bzw. S_5 den Durchschnitt der Spezies, welche die unendliche Dezimalbruchentwicklung von π als einziges Element enthält, mit der Spezies derjenigen unendlichen Dezimalbruchentwicklungen, die unendlichviele Paare von gleichen aufeinanderfolgenden Ziffern aufweisen, bzw. eine Sequenz 0123456789 enthalten, so sind S_4 und S_5 beide abzählbar, mithin auch auszählbar und überzählbar; weder S_4 noch S_5 sind nachzählbar; S_5 ist zählbar, S_4 aber nicht; weder S_4 noch S_5 sind durchzählbar oder aufzählbar.

Bezeichnen wir mit S_6 die Spezies derjenigen natürlichen Zahlen n, für welche die n-te und die $(n+1)$-te Ziffer der unendlichen Dezimalbruchentwicklung von π gleich sind, so ist S_6 abzählbar und zählbar, aber nicht nachzählbar; wohl aber aufzählbar, mithin auch auszählbar, überzählbar und durchzählbar.

Um ein geometrisches Beispiel einer zählbaren Spezies zu geben, schicken wir folgende Definitionen voraus:

Wir wählen in der Euklidischen Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem und verstehen unter einem $\varkappa$-Quadrat ein Quadrat mit den Eckpunkten $(a.2^{-n}, b.2^{-n}), (a.2^{-n}, b.2^{-} + 2^{-n}) (a.2^{-n} + 2^{-n}, b.2^{-n}), (a.2^{-n} + 2^{-n}, b.2^{-n} + 2^{-n})$, wo a eine beliebige ganze rationale Zahl und n eine beliebige natürliche Zahl vorstellt. Unter einem *Bereich* verstehen wir eine solche Spezies der Kardinalzahl a von $\varkappa$-Quadraten (einschließlich der Grenze), daß sich zu jedem $\varkappa$-Quadrat $\varkappa'$ des Bereichs eine endliche Menge von ebenfalls zum Bereiche gehörigen $\varkappa$-Quadraten angeben läßt, welche $\varkappa'$ vollständig einschließen. Läßt sich überdies von

---

[7]) Wo hier und im folgenden vom Nichtbestehen eines x-zählbarkeitsprädikates für ein S_ν die Rede ist, ist dies so zu verstehen, daß der jetzige Stand der Wissenschaft keinen Grund abgibt, das Prädikat dem betreffenden S_ν zuzusprechen.

⟦313⟧

jedem $\varkappa$-Quadrate angeben, entweder daß es von einem bestimmten Anfangssegmente des Bereichs überdeckt wird, oder daß es von keinem Anfangssegmente des Bereichs überdeckt wird, so heißt der Bereich ein *Gebiet.* Läßt sich für zwei willkürliche $\varkappa$-Quadrate des Bereichs entscheiden, ob sie sich durch einen vom Bereiche überdeckten Streckenzug verbinden lassen, so heißt der Bereich *differenziert.* Lassen zwei willkürliche $\varkappa$-Quadrate des Bereichs sich durch einen vom Bereiche überdeckten Streckenzug verbinden, so heißt der Bereich *einfach.*

Wir denken uns nun einen differenzierten Bereich β, und lassen aus der entsprechenden Quadratspezies diejenigen $\varkappa$-Quadrate fort, welche sich mit einem vorangehenden (d. h. einer früheren Nummer zugeordneten) $\varkappa$-Quadrate von β durch einen von β überdeckten Streckenzug verbinden lassen. Die übrigbleibenden Quadrate bilden eine zählbare Spezies $\varkappa', \varkappa'', \varkappa''', \ldots$, und jedes Quadrat $\varkappa^{(\nu)}$ bildet zusammen mit denjenigen $\varkappa$-Quadraten von β, welche sich durch einen von β überdeckten Streckenzug mit $\varkappa^{(\nu)}$ verbinden lassen, einen in β enthaltenen einfachen Bereich. Wir haben mithin den Satz, daß *jeder differenzierte Bereich in eine zählbare Spezies von einfachen Bereichen zerlegt ist.*

(Eingegangen am 20. 6. 1924.)

⟦314⟧

Mathematics. — *"Intuitionistischer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes."* By Prof. L. E. J. BROUWER. 1925 B

(Communicated at the meeting of June 27, 1925.)

§ 1. Unter einer *ebenen Kernspezies* verstehen wir eine Spezies von Punktkernen der Ebene.

Unter einer *geschlossenen stetigen Kurve* S verstehen wir eine ebene Kernspezies, welche eindeutiges Bild eines mit einem Umlaufssinne versehenen (als Kernspezies zu betrachtenden) Quadratumfanges K ist.

Nach Bd. XXVII, S. 193 dieser Proceedings ist die geschlossene stetige Kurve S *gleichmässig stetig*es Bild des Quadratumfanges K. ⟦1⟧

Unter einer *Jordanschen Kurve* J verstehen wir eine geschlossene stetige Kurve, welche als Abbildung des Quadratumfanges K eine stetige (mithin eindeutige und nach Bd. XIII, Nr. 2, S. 4 der Verhandelingen dieser Akademie auch gleichmässig stetige) Umkehrung besitzt. ⟦2⟧

Auf Grund der Beziehung zwischen J und K existiert zu jedem ε ein solches mit ε gegen 0 konvergierendes (d.h. positiv-konvergierendes) ε_1, dass die Bildpunktkerne A' und B' auf K je zweier Punktkerne A und B von J, deren Entfernung $< \varepsilon$[1] ist, eine Entfernung $< \varepsilon_1$ besitzen, so dass auch die Breite von einem der Bogen $A'B'$ von K kleiner als ε_1 ist und somit die Breite von einem der Bogen AB von J kleiner als ε_2, wo ε_2 mit ε_1, also mit ε, gegen 0 konvergiert.

Sei nun ε so gewählt, dass das zugehörige $\varepsilon_2 < \frac{1}{3}$ der Breite von J ist, ⟦3⟧ und seien A, B und C drei derartige Punktkerne von J, dass $\varrho(A', C) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\varrho(C, B) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Alsdann kann man entweder einen A, B und C enthaltenden Bogen von J der Breite $< \varepsilon_2$ oder für je zwei der Punktkerne A, B und C einen Abstand > 0 bestimmen. Im letzteren Falle sei $A\alpha B$ ein Bogen von J der Breite $< \varepsilon_2$; zu diesem Bogen muss C entweder gehören, oder von ihm einen Abstand > 0 besitzen. Im ersteren Falle hat man wiederum einen A, B und C enthaltenden Bogen von J der Breite $< \varepsilon_2$; im letzteren Falle unterscheiden wir zwei Unterfälle: 1. Es gibt einen den Punktkern B enthaltenden Bogen $A\alpha B \beta C$ von J der Breite $< \varepsilon_2$, der also wiederum als A, B und C enthaltender Bogen von J der Breite $< \varepsilon_2$ auftritt. 2. Es gibt einen Bogen $C\gamma A$ von J der Breite $< \varepsilon_2$, von welchem B eine Entfernung > 0 besitzt. Alsdann hat derjenige Bogen CB von J, von dem A eine Entfernung > 0 besitzt, eine Breite $> \varepsilon_2$, so dass die Breite des Bogens $C\gamma A \alpha B$ von J kleiner als ε_2 sein muss,

[1] Die Formel $a > b$ (*a grösser als b*), wo a und b reelle Grössen vorstellen, besagt in diesem Aufsatze, dass eine natürliche Zahl n angegeben werden kann, so dass $a - b \geq 2^{-n}$.

und wiederum ein A, B und C enthaltender Bogen von J der Breite $< \varepsilon_2$ existiert. Aus der Annahme dass $\varrho(A, C) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\varrho(C, B) < \frac{1}{2}\varepsilon$ folgt mithin für drei Punktkerne A, B und C von J *immer* die Existenz eines A, B und C enthaltenden Bogens von J der Breite $< \varepsilon_2$.

Sei nun in J eine $\frac{1}{2}\varepsilon$-Kette gegeben. Wenn wir je zwei aufeinanderfolgende Punkte dieser Kette durch einen Bogen von J der Breite $< \varepsilon_2$ verbinden, erzeugen wir eine ganze (positive, negative oder verschwindende) Totalanzahl von Umläufen von J, die wir die *Ordnung* der Kette nennen. Auf Grund des Resultates des vorstehenden Absatzes *wird die Ordnung einer in J gelegenen $\frac{1}{2}\varepsilon$-Kette durch eine $\frac{1}{2}\varepsilon$-Abänderung in J nicht geändert.*

§ 2. Sei P ein von J *vollständig entfernter*, d.h. von J einen Abstand > 0 besitzender Punkt. Wir wählen $\varepsilon'' < \frac{1}{2}\varepsilon$ in solcher Weise, dass $\varrho(P, J) > \varepsilon'' > 0$. Sei ε' eine solche Grösse $< \frac{1}{2}\varepsilon''$, dass für je zwei in einer Entfernung $< \varepsilon'$ voneinander gelegene Punktkerne A und B von J die Breite von einem der Bogen AB von $J < \varepsilon''$ ist. Sei weiter $\varkappa^0$ eine in J gelegene *kanonische*, d.h. J genau einmal im positiven Sinne ohne Umkehrung des Richtungssinnes durchlaufende ε'-Kette und $\varkappa_2$ eine beliebige in J gelegene ε'-Kette. Alsdann kann $\varkappa_2$ in J durch eine endliche Folge von ε''-Abänderungen *in bezug auf $\varkappa^0$ kanonisiert*, d.h. in eine solche Kette $\varkappa_3$ übergeführt werden, welche aus einer ganzen (positiven, negativen oder verschwindenden), mit der Ordnung von $\varkappa_2$ identischen Anzahl von aufeinanderfolgenden mit $\varkappa^0$ zusammenfallenden Ketten besteht.

Sei Q ein Quadrat, das in seinem Inneren P und in einer Entfernung $> \varepsilon''$ von seinem Umfang J enthält. Wir zerlegen Q in kongruente, homothetische Teilquadrate q mit einer Seitenlänge $< \frac{1}{16}\varepsilon'$. Unter diesen q-Quadraten
[[4]] wählen wir eine Teilspezies τ'' aus, welche alle in einer Entfernung $> \frac{1}{4}\varepsilon'$ von J liegenden q-Quadrate enthält, während alle zu ihr gehörenden q-Quadrate in einer Entfernung $> \frac{1}{8}\varepsilon'$ von J gelegen sind. Der Teilspezies τ' fügen wir alle diejenigen q-Quadrate hinzu, welche in einem von τ' bestimmten, J nicht enthaltenden Komplementärbereich gelegen sind, und demzufolge einen Abstand $> \frac{1}{8}\varepsilon'$ von J besitzen. Durch diese Hinzufügung geht τ' in eine Spezies τ von q-Quadraten über, welche innerhalb Q nur einen einzigen Komplementärbereich bestimmt und alle in einer Entfernung $> \frac{1}{4}\varepsilon'$ von J liegenden q-Quadrate enthält, während alle zu ihr gehörenden q-Quadrate in einer Entfernung $> \frac{1}{8}\varepsilon'$ von J gelegen sind.

Sei β^0 der grösste P enthaltende ganz von τ überdeckte Bereich. Der nicht im Umfange von Q gelegene Teil der Grenze von β^0 (ebenso wie von einem beliebigen unausdehnbaren ganz von τ überdeckten Bereich) ist zusammenhängend und jeder seiner Punkte besitzt von J eine Entfernung $< \frac{3}{8}\varepsilon'$ und $> \frac{1}{8}\varepsilon'$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Der Umfang von Q gehört nicht zur Grenze von β^0. Sei $\varkappa'$ eine aus in der Grenze π von β^0 in positivem Sinne in jeweiligen

Abständen gleich $\frac{1}{16}\varepsilon'$ aufeinanderfolgenden Eckpunkten von q-Quadraten bestehende, in π kanonische Kette. In bezug auf diese Kette $\varkappa'$ (d.h. in bezug auf die aus den Verbindungsstrecken der sukzessiven Punkte von $\varkappa'$ hervorgehende geschlossene polygonale Linie) besitzt P die Ordnung 1. Indem wir der Reihe nach jeden Punkt von $\varkappa'$ durch einen in einer Entfernung $< \frac{3}{8}\varepsilon'$ gelegenen Punkt von J ersetzen, erzeugen wir eine Reihe von Ketten $\varkappa'_1, \varkappa'_2, \varkappa'_3, \ldots \varkappa'_m$, wo $\varkappa'_m = \varkappa''$ eine in J gelegene ε'-Kette vorstellt. Sei $\varkappa'_p = \ldots RST \ldots$ und $\varkappa'_{p+1} = \ldots RS_1T\ldots$, dann kann weder das Dreieck RSS_1 noch das Dreieck TSS_1 den Punkt P in seinem Innern enthalten. Hieraus folgt, dass P in bezug auf $\varkappa'_p$ und $\varkappa'_{p+1}$ für jedes p die gleiche Ordnung, mithin auch in bezug auf $\varkappa'$ und $\varkappa''$ die gleiche Ordnung besitzt, so dass die Ordnung von P in bezug auf $\varkappa''$ gleich 1 ist.

Sei $\varkappa'_g = \ldots RSU \ldots$ bzw. $\ldots RU \ldots$ eine in J gelegene ε''-Kette, welche durch eine ε''-Abänderung in eine in J gelegene ε''-Kette $\varkappa'_h = \ldots RTU \ldots$ übergeht. Alsdann ist es ausgeschlossen, dass eines von den Dreiecken RST und UST bzw. dass das Dreieck RTU den Punkt P in seinem Innern enthält, so dass P in bezug auf $\varkappa'_g$ und in bezug auf $\varkappa'_h$ die gleiche Ordnung besitzt. Wenn wir also die im vorigen Absatz bestimmte Kette $\varkappa''$ durch eine endliche Folge vón ε''-Abänderungen in J in bezug auf $\varkappa^0$ kanonisieren, erhalten wir eine in J gelegene ε'-Kette $\varkappa$, in bezug auf welche P noch immer die Ordnung 1 besitzt.

Wenn wir je zwei aufeinanderfolgende Punkte von $\varkappa$ durch einen Bogen von J der Breite $< \varepsilon''$ verbinden, erzeugen wir eine eine ganze Totalanzahl a von Umläufen von J darstellende geschlossene stetige Kurve V, in bezug auf welche P die Ordnung 1 besitzt, so dass a nicht verschwinden kann und die Ordnung von P in bezug auf J gleich $\frac{1}{a}$ ist. Weil aber die letztere Ordnung eine ganze Zahl sein muss, so ist a entweder gleich $+1$ oder gleich -1, und auch *die Ordnung von P in bezug auf J entweder gleich* $+1$ *oder gleich* -1.

2. Der Umfang von Q gehört zur Grenze von β^0. Alsdann kann P durch eine in einer Entfernung > 0 von J gelegene unendliche polygonale Linie mit dem Unendlichen verbunden werden, so dass *die Ordnung von P in bezug auf J gleich* 0 *ist*.

Aus den für die obigen Fälle 1. und 2. hergeleiteten Ordnungseigenschaften folgt, dass für einen beliebigen von J vollständig entfernten Punkt P die Entscheidung zwischen den Fällen 1. und 2. unabhängig von der Wahl der (den Bedingungen $\varepsilon'' > 0$, $\varepsilon'' < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\varepsilon'' < \varrho(P,J)$ genügenden) Grösse ε'' ausfällt.

§ 3. Seien P_1 und P_2 zwei von J vollständig entfernte Punkte. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. P_1 und P_2 befinden sich beide im ersten Falle von § 2. Alsdann wählen wir ε'' in sowohl für P_1 wie für P_2 passender Weise,

[[317]]

d.h. so dass sowohl P_1 wie P_2 eine Entfernung $> \varepsilon''$ von J besitzt, und bestimmen nach § 2 ein entsprechendes Quadrat Q, eine entsprechende Spezies τ von q-Quadraten, und in τ die zu P_1 bzw. P_2 gehörigen Bereiche $\beta_1{}^0$ und $\beta_2{}^0$. Wären nun $\beta_1{}^0$ und $\beta_2{}^0$ verschieden, dann besässe P_2 in bezug auf $\varkappa'_1$ die Ordnung 0, mithin der Reihe nach auch in bezug auf $\varkappa_1''$, $\varkappa_1$, V_1 und J die Ordnung 0. Aus diesem Widerspruche folgern wir, dass $\beta_1{}^0$ und $\beta_2{}^0$ identisch sind, *dass also P_1 und P_2 durch einen von J vollständig entfernten endlichen Streckenzug verbunden werden können.*

2. P_1 und P_2 befinden sich beide im zweiten Falle von § 2. Alsdann wählen wir wiederum ε'' in sowohl für P_1 wie für P_2 passender Weise, und bestimmen nach § 2 ein entsprechendes Quadrat Q und eine entsprechende Spezies τ von q-Quadraten. Hierauf kann sowohl P_1 wie P_2 durch einen von J vollständig entfernten endlichen Streckenzug mit dem Umfang von Q verbunden werden, *so dass P_1 und P_2 auch untereinander durch einen von J vollständig entfernten endlichen Streckenzug verbunden werden können.*

3. Von den Punkten P_1 und P_2 befindet sich der eine im ersten, der andere in zweiten Falle von § 2. *Alsdann ist die Existenz eines von J vollständig entfernten, P_1 und P_2 verbindenden Streckenzugs ungereimt,* weil auf einem derartigen Streckenzuge einerseits alle Punkte gleiche, andererseits die Punkte P_1 und P_2 verschiedene Ordnungen in bezug auf J haben müssten.

Diejenigen von J vollständig entfernten Punkte, die sich im ersten bzw. im zweiten Falle von § 2 befinden, nennen wir *positiv-innere* bzw. *positiv-äussere* Punkte von J.

[[5]] § 4. Positiv-äussere Punkte von J lassen sich in mannigfacher Weise unmittelbar angeben. Einen positiv-inneren Punkt von J bestimmen wir wie folgt:

Sei ε der in § 1 formulierten Forderung entsprechend gewählt, und ε'' eine der Beziehung $\frac{1}{32}\varepsilon > \varepsilon'' > 0$ genügende Grösse. Sei ε' im Anschluss an ε'' so gewählt, dass der im ersten Absatz von § 2 angegebenen Beziehung zwischen ε' und ε'' genügt wird. Sei Q ein Quadrat, das in einer Entfernung $> \varepsilon''$ von seinem Umfang J in seinem Inneren enthält. Zu Q und ε' konstruieren wir nach der im zweiten Absatz von § 2 angegebenen Methode eine entsprechende Spezies von q-Quadraten τ. Sei β_1 der grösste an den Umfang von Q grenzende, ganz von τ überdeckte Bereich. Dieser Bereich β_1 bestimmt innerhalb Q einen einzigen Komplementärbereich K, der J enthält und dessen Grenze zusammenhängend ist. *Wir wollen einen Augenblick annehmen, dass jedes in einem sowohl zu K wie zu τ gehörigen Bereich enthaltene, aus q-Quadraten bestehende Quadrat eine Seitenlänge $< \frac{1}{16}\varepsilon$ besitzt.*

Alsdann hat jeder Punkt von K eine Entfernung $< \frac{3}{8}\varepsilon' + \frac{1}{8}\varepsilon$ von J. Hieraus folgern wir, dass die im ersten Absatz von § 2 definierte kanonische ε'-Kette $\varkappa^0$ sich mittels einer endlichen Folge von zunächst ε''-Abänderungen und sodann $(\frac{3}{4}\varepsilon' + \frac{1}{4}\varepsilon)$-Abänderungen in J, mithin mittels einer endlichen Folge von $\frac{1}{2}\varepsilon$-Abänderungen in J, in eine aus einem einzigen Punkt von J bestehende singuläre Kette überführen lässt. Dies aber widerspricht der am Schluss von § 1 formulierten Eigenschaft. *Es gibt also einen solchen unausdehnbaren, ganz von τ überdeckten, nicht an den Umfang von Q grenzenden Bereich β, in welchem ein aus q-Quadraten bestehendes Quadrat g der Seitenlänge $> \frac{1}{16}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon'$ enthalten ist.*

Ein zum Mittelpunktkerne von g gehöriger Punkt P genügt der Beziehung $\varrho\,(P, J) > \frac{1}{32}\varepsilon$, so dass für die Entitäten P, ε'' und ε' dieses § alle für die im § 2 eingeführten Entitäten P, ε'' und ε' daselbst geforderten Beziehungen bestehen. Auf Grund der ersten drei Absätze des § 2 *erscheint mithin der Bereich β als grösster P enthaltender, ganz von τ überdeckter Bereich β^0, und befindet sich als solcher im ersten der beiden dortigen Fälle,* d. h. wir erkennen in P einen positiv-inneren Punkt von J.

§ 5. Unter einem *stetigen Kurvenbogen* verstehen wir eine ebene Kernspezies, welche eindeutiges, mithin gleichmässig stetiges Bild des (als Kernspezies zu betrachtenden) Einheitsintervalles der X-Achse ist.

Unter einem *Jordanschen Kurvenbogen F* verstehen wir einen stetigen Kurvenbogen, der als Abbildung des Einheitsintervalles der X-Achse eine stetige (mithin eindeutige und gleichmässig stetige) Umkehrung besitzt.

Sei P ein von F vollständig entfernter Punkt. Wir wählen ε'' in solcher Weise, das $\varrho\,(P, F) > \varepsilon'' > 0$. Sei ε' eine solche Grösse $< \frac{1}{2}\varepsilon''$, dass für je zwei in einer Entfernung $< \varepsilon'$ voneinander gelegene Punktkerne A und B von F die Breite des Bogens AB von $F < \varepsilon''$ ist. Alsdann kann eine beliebige in F gelegene ε'-Kette in F durch eine endliche Folge von ε''-Abänderungen *zusammengezogen*, d.h. in eine aus einem einzigen Punkte bestehende "singuläre Kette" übergeführt werden.

Sei Q ein Quadrat, das in einer Entfernung $> \varepsilon''$ von seinem Umfang F in seinem Innern enthält. In analoger Weise wie im § 2 konstruieren wir in Q die q-Quadrate, und bilden eine Spezies τ von q-Quadraten, welche innerhalb Q nur einen einzigen Komplementärbereich bestimmt und alle in einer Entfernung $> \frac{1}{4}\varepsilon'$ von F liegenden q-Quadrate enthält, während alle zu ihr gehörenden q-Quadrate in einer Entfernung $> \frac{1}{8}\varepsilon'$ von F gelegen sind. Sei β^0 der grösste P enthaltende ganz von τ überdeckte Bereich. Nehmen wir an, dass der Umfang von Q nicht zur Grenze von β^0 gehört, und erörtern wir diese Voraussetzung analog wie im § 2. Alsdann gelangen wir zu einer in F gelegenen ε'-Kette $\varkappa''$, in bezug auf welche P die Ordnung 1 besitzt. Wenn wir aber durch eine endliche Folge von ε''-Abänderungen diese Kette $\varkappa''$ in eine aus einem einzigen Punkte bestehende singuläre Kette $\varkappa$ überführen, dann muss die Ordnung von P in bezug auf $\varkappa$ einerseits gleich 1, andererseits gleich 0 sein. Aus diesem Widerspruche ergibt sich, dass *der Umfang* *von Q notwendig zur Grenze von β^0 gehören muss,* und hieraus nach der Methode des § 3 weiter, dass *je zwei von F vollständig entfernte Punkte durch einen von F vollständig entfernten Streckenzug verbunden werden können.*

Wenn wir jetzt zur Jordanschen Kurve J zurückkehren, so folgt aus dem vorstehenden Absatze, dass für einen beliebig kleinen Teilbogen β von J ein beliebiger positiv-innerer und ein beliebiger positiv-äusserer Punkt von J durch einen vom Komplementärbogen von β in J vollständig entfernten endlichen Streckenzug verbunden werden können. Mittels einer kurzen Ueberlegung folgt hieraus weiter, dass zu einem beliebigen Punktkern A von J sowohl eine gegen A positiv konvergierende Folge von positiv-inneren Punkten von J wie eine gegen A positiv konvergierende Folge von positiv-äusseren Punkten von J konstruiert werden kann, m. a. W. dass *jeder beliebige zu J gehörige Punkt sowohl Grenzpunkt von positiv-inneren wie Grenzpunkt von positiv-äusseren Punkten von J ist.*

Sei G_1 die Spezies der positiv-inneren, G_2 die Spezies der positiv-äusseren Punkte von J. Alsdann muss jeder Grenzpunkt von G_1 ab-
[[6]] weichen von G_2 und jeder Grenzpunkt von G_2 abweichen von G_1. Sei γ_1 die *Grenze von* G_1, d.h. die Spezies der von G_1 abweichenden Grenzpunktkerne von G_1 und γ_2 die *Grenze von* G_2, d.h. die Spezies der von G_2 abweichenden Grenzpunktkerne von G_2. Auf Grund des Resultates des vorigen Absatzes gehört dann jeder Punktkern von J sowohl zu γ_1 wie zu γ_2. Andererseits folgt aus der am Anfang des laufenden Absatzes befindlichen Aussage, dass jeder Punktkern von γ_1 sowie jeder Punktkern von γ_2 einen Abstand Null von J besitzen, mithin zu J gehören muss.

Somit ist sowohl von der Spezies der positiv-inneren wie von der Spezies der positiv-äusseren Punkte von J die Grenze mit J identisch.

[[320]]

Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. II. 1926 A

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Ordnung.

§ 1. Eine Spezies P heißt *virtuell geordnet*, wenn für die Elemente einer Teilspezies der Spezies der Elementepaare (a, b) von P eine als *ordnende Relation* zu bezeichnende asymmetrische Relation definiert ist, welche wir durch „$a < b$" oder „*a vor b*" oder „*a links von b*" oder „*a niedriger als b*" oder „$b > a$" oder „*b nach a*" oder „*b rechts von a*" oder „*b höher als a*" ausdrücken, und welche, wenn die Identität zweier Elemente p und q von P durch die Formel „$p = q$" zum Ausdruck gebracht wird, folgende „*Ordnungseigenschaften*" besitzt:

1. *Die Beziehungen $r = s$, $r < s$ und $r > s$ schließen einander aus.*

2. *Aus $r = u$, $s = v$ und $r < s$ folgt $u < v$.*

3. *Aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen $r > s$ und $r = s$ folgt $r < s$.*

4. *Aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen $r > s$ und $r < s$ folgt $r = s$.*

5. *Aus $r < s$ und $s < t$ folgt $r < t$.*

Aus den Ordnungseigenschaften folgt unmittelbar, daß jede der drei Beziehungen $r = s$, $r < s$ und $r > s$ mit der Absurdität ihrer Absurdität äquivalent ist.

Unter einer *ordnungsgemäßen Teilung* einer virtuell geordneten Spezies P verstehen wir eine solche Bestimmung einer virtuell geordneten Spezies von Teilspezies P_a von P, deren Vereinigung mit P identisch ist, daß, wenn p und q Elemente von P der Reihe nach aus P_{a_1} und aus P_{a_2} sind, $P_{a_1} = P_{a_2}$ aus $p = q$ und $p < q$ aus $P_{a_1} < P_{a_2}$ folgt.

Die Ungereimtheit von $r > s$ wird auch durch die Formel $r \leq s$ oder durch die Formel $s \geq r$ ausgedrückt, die Verschiedenheit von r und s durch $r \neq s$.

Wenn a und b zwei Elemente der virtuell geordneten Spezies P sind, so verstehen wir unter dem *geschlossenen Intervall* $a\,b$ die Spezies derjenigen Elemente c von P, für welche weder die Beziehungen $c < a$ und $c < b$ noch die Beziehungen $c > a$ und $c > b$ zusammen bestehen können. Die Elemente a und b heißen die *Endelemente* des geschlossenen Intervalls $a\,b$.

Wenn a und b zwei Elemente der virtuell geordneten Spezies P sind, so verstehen wir unter dem *offenen Intervall* $a\,b$ die Spezies derjenigen Elemente c von P, welche *zwischen* a und b liegen, d. h. erstens sowohl von a wie von b verschieden sind und zweitens zum geschlossenen Intervall $a\,b$ gehören. Die Elemente a und b heißen die *Endelemente* des offenen Intervalls $a\,b$. Im Falle, daß $a < b$ ist, haben wir $a < c < b$.

Die virtuell geordnete Spezies P heißt *überall dicht zwischen ihren Elementen* a *und* b, wenn zwischen je zwei verschiedenen Elementen des geschlossenen Intervalls $a\,b$ Elemente von P liegen.

Die virtuell geordnete Spezies P heißt *überall dicht im weiteren Sinne* oder kurz *überall dicht*, wenn zwischen je zwei verschiedenen Elementen von P Elemente von P liegen, und *überall dicht im engeren Sinne*, wenn sich überdies ein Element von P angeben läßt und sowohl rechts wie links von einem beliebigen Elemente von P Elemente von P liegen.

Die virtuell geordnete Spezies P heißt *nirgends dicht zwischen ihren Elementen* a *und* b, wenn in jedem zum geschlossenen Intervall $a\,b$ gehörigen geschlossenen Intervall $p\,q$ [1]) mit verschiedenen Endelementen

---

[1]) Damit das geschlossene Intervall $p\,q$ zum geschlossenen Intervall $a\,b$ gehört, ist es nicht nur (wie sofort einleuchtet) notwendig, sondern auch hinreichend, daß p und q zum geschlossenen Intervall $a\,b$ gehören. Unter der letzteren Annahme folgt nämlich aus $r < a$ und der Alternative von $r > p$ und $r = p$, daß $p < a$, und aus $r < b$ und der Alternative von $r > p$ und $r = p$, daß $p < b$, mithin aus der Kombination von $r < a$ und $r < b$ und der Alternative von $r > p$ und $r = p$ die unmögliche Kombination von $p < a$ und $p < b$. Aus der Kombination von $r < a$ und $r < b$ folgt mithin die Unmöglichkeit sowohl von $r > p$, wie von $r = p$, d. h. die Relation $r < p$, und in analoger Weise die Relation $r < q$, d. h. die Kombination von $r < p$ und $r < q$. Gehört mithin r zum geschlossenen Intervall $p\,q$, dann gehört es auch zum geschlossenen Intervall $a\,b$.

Aus dieser Eigenschaft folgt weiter, daß, wenn p und q zum geschlossenen Intervall $a\,b$ gehören und s ein Element von P ist, das unmöglich zum geschlossenen Intervall $a\,b$ gehören kann, die Beziehungen $p < s < q$ und $p > s > q$ unmöglich sind. Mithin ist mit $s < p$ weder $s > q$ noch $s = q$ und mit $s < q$ weder $s > p$ noch $s = p$ verträglich, so daß die Beziehungen $s < p$ und $s < q$ (und ebenso die Beziehungen $s > p$ und $s > q$) auseinander folgen.

zwei verschiedene Elemente r und s angegeben werden können, welche ein *freies Intervall* bilden, d. h. zwischen denen kein Element von P liegen kann.

Die virtuell geordnete Spezies P heißt *nirgends dicht*, wenn in jedem geschlossenen Intervall pq mit verschiedenen Endelementen zwei verschiedene Elemente r und s angegeben werden können, welche ein freies Intervall bilden.

Wenn zwischen zwei virtuell geordneten Spezies P und Q eine eineindeutige Beziehung hergestellt ist, welche die ordnenden Relationen invariant läßt, so sagen wir, daß P und Q dieselbe *Ordinalzahl* besitzen oder *ähnlich* sind.

Eine virtuell geordnete Spezies heißt *geordnet*, wenn für *jedes* Paar (a, b) von *verschiedenen* Elementen eine ordnende Relation besteht[2]).

Eine diskrete geordnete Spezies heißt auch *vollständig geordnet.*

§ 2. Ein einfaches Beispiel einer vollständig geordneten Spezies liefert die Menge A, d. h. die Menge der Nummern, wenn wir die ordnenden Relationen der in der Folge $\mathfrak{z}$ auftretenden „natürlichen Rangordnung" der Elemente entnehmen. Die hierbei auftretende Ordinalzahl wird mit ω bezeichnet. Kehren wir den Sinn aller ordnenden Relationen um, so entsteht eine neue Ordinalzahl, die mit $^*\omega$ bezeichnet wird. Geordnete Spezies der Ordinalzahl ω werden auch *Fundamentalreihen* genannt.

Eine geordnete (mithin vollständig geordnete) endliche Menge E besitzt ein erstes Element, d. h. ein Element, welches *vor* jedem von ihm verschiedenen Elemente liegt. Um dies zu beweisen, unterziehen wir E einer bestimmten Zählung, so daß wir in E ein bestimmtes Element 1, ein bestimmtes Element 2, usw. erhalten. Wenn nun das Element 1 nicht das erste Element der geordneten Menge E ist, so gibt es in der Folge $\mathfrak{z}$ eine erste solche Nummer a_2, daß das Element a_2 von E vor dem Elemente 1 von E liegt. Wenn auch das Element a_2 nicht das erste Element der geordneten Spezies E ist, so gibt es in der Folge $\mathfrak{z}$ eine erste solche

---

[2]) Daß schon eine virtuell geordnete Spezies P von zwei verschiedenen Elementen a und b nicht notwendig geordnet zu sein braucht, geht aus folgendem Beispiel hervor: Es sei d_ν die ν-te Ziffer hinter dem Komma der Dezimalbruchentwickelung von π und $m = k_1$, wenn es sich in der fortschreitenden Dezimalbruchentwickelung von π bei d_m zum ersten Male ereignet, daß der Teil $d_m\, d_{m+1} \ldots d_{m+9}$ dieser Dezimalbruchentwickelung eine Sequenz 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 bildet. Es sei weiter $a < b$, wenn sich von k_1 entweder die Existenz oder die Absurdität der Absurdität der Existenz, und $a > b$, wenn sich von k_1 die Absurdität der Existenz herleiten läßt. Diese Festsetzung genügt den fünf Ordnungsbeziehungen, bestimmt also eine virtuelle Ordnung von P. Weil aber nicht entschieden ist, daß für das Elementepaar (a, b) eine ordnende Relation besteht, so liegt keine Ordnung der Spezies P vor.

Nummer a_3, daß das Element a_3 von E vor dem Elemente a_2 — und gleichzeitig vor allen Elementen $1, 2, 3, \ldots (a_3 - 1)$ — von E liegt. Indem wir in dieser Weise fortfahren, erreichen wir schließlich eine solche Nummer a_h der Folge $\mathfrak{z}$, daß, wenn a in der Folge $\mathfrak{z}$ weiter liegt als a_h, das Element a von E nach dem Elemente a_h und E liegt. Alsdann ist a_h notwendig das erste Element der geordneten Spezies E.

In analoger Weise zeigt man, daß *jede geordnete endliche Spezies ein letztes Element besitzt*, d. h. ein *nach* jedem von ihm verschiedenen Elemente liegendes Element.

Je zwei geordnete endliche Spezies E_1 und E_2 derselben Kardinalzahl besitzen dieselbe Ordinalzahl. Wenn wir nämlich sowohl E_1 wie E_2 in solcher Weise zählen, daß dem ersten Elemente die Nummer 1, dem ersten Elemente des Restes die Nummer 2, usw. zugeordnet wird, so brechen beide Zählungen bei derselben Nummer a von $\mathfrak{z}$ ab. Die beiden Zählungen erzeugen mithin eine eineindeutige Beziehung zwischen E_1 und E_2, und diese Beziehung besitzt auch die für die Ähnlichkeit beider Spezies erforderliche Eigenschaft.

Jeder endlichen Kardinalzahl (inklusive Null) entspricht somit nur eine einzige vollständig geordnete Ordinalzahl, so daß wir die letztere mit derselben Nummer wie die erstere bezeichnen können.

Daß diese Eigenschaft bei den unendlichen Kardinalzahlen fortfällt, sieht man sofort ein, wenn man z. B. die Menge der rationalen Zahlen einerseits als eine der Folge $\mathfrak{z}$ ähnliche Menge, andererseits in der natürlichen Rangordnung dieser Zahlen betrachtet.

§ 3. Es sei R eine solche virtuell geordnete Spezies von virtuell geordneten Spezies N, daß gleiche Elemente e von $M \equiv \mathfrak{S}(N)$ immer nur zu gleichen Spezies N gehören, und gleiche Spezies N immer in gleicher Weise virtuell geordnet sind. Die ordnenden Relationen der gegebenen virtuellen Ordnungen von R und den N bezeichnen wir mit $\gtrdot$ bzw. $\lessdot$, und definieren wie folgt eine virtuelle Ordnung von M: Wir schreiben $e' \gtrdot e''$ oder $e'' \lessdot e'$, wenn entweder $N' \gtrdot N''$ oder $N' = N''$ und $e' \gtrdot e''$; $e' \mathrel{\underline{\gtrdot}} e''$ oder $e'' \mathrel{\underline{\lessdot}} e'$, wenn $e' \lessdot e''$ unmöglich ist; $e' > e''$, wenn $e' \mathrel{\underline{\gtrdot}} e''$ und überdies $e' \neq e''$. Die Beziehungen $e' \geq e''$ und $e' \mathrel{\underline{\gtrdot}} e''$ sind dann äquivalent, denn einerseits können $e' \mathrel{\underline{\lessdot}} e''$, $e' \neq e''$ und $e' \mathrel{\underline{\gtrdot}} e''$ nicht alle drei zusammen bestehen, so daß $e' \geq e''$ folgt aus $e' \mathrel{\underline{\gtrdot}} e''$, andererseits folgt $e'' > e'$ aus $e'' \gtrdot e'$, mithin $e' \mathrel{\underline{\gtrdot}} e''$ aus $e' \geq e''$. Daß für diese ordnende Relation der e die Ordnungseigenschaften 1. und 2. erfüllt sind, ist evident. Weil die Vereinigung von $e' \neq e''$ und $e' \leq e''$ mit der Vereinigung von $e' \neq e''$ und $e' \mathrel{\underline{\lessdot}} e''$, d. h. mit $e' < e''$ und die Vereinigung von $e' \geq e''$ und $e' \leq e''$ mit der Vereinigung von $e' \mathrel{\underline{\gtrdot}} e''$ und $e' \mathrel{\underline{\lessdot}} e''$,

[[324]]

d. h. mit $e' = e''$ äquivalent ist, so gelten auch die Ordnungseigenschaften 3. und 4. Um schließlich die Ordnungseigenschaft 5. zu beweisen, setzen wir die Beziehungen $e' < e''$ und $e'' < e'''$ voraus. Wär dann $e' = e'''$, so hätte man gleichzeitig $e''' < e''$ und $e'' < e'''$, was unmöglich ist. Und wäre $e' > e'''$, so hätte man (weil die Vereinigung von $e' > e'''$ und $e'' > e'$ zu $e'' > e'''$ führen würde) $e'' \not< e'$ und daneben (wegen $e' < e''$) $e'' \not> e'$, also $e'' = e'$, was wiederum unmöglich ist. Aus $e' < e''$ und $e'' < e'''$ folgt mithin die Vereinigung von $e' \neq e'''$ und $e' \not> e'''$, m. a. W. $e' < e'''$, w. z. b. w.

Die in obiger Weise virtuell geordnete Spezies M bzw. ihre Ordinalzahl m bezeichnen wir als die *ordnungsgemäße Summe* der Spezies N bzw. ihrer Ordinalzahlen n, und die Erzeugung dieser Summe als *Addition* der N bzw. der n. Im Falle, daß R eine endliche vollständige Ordinalzahl oder die Ordinalzahl ω besitzt, findet für die Bezeichnung der Addition in üblicher Weise das Zeichen $+$ Verwendung.

Es sei eine ordnungsgemäße Teilung der virtuell geordneten Spezies M in eine virtuell geordnete Spezies R von Teilspezies N gegeben, wobei die innerhalb R und innerhalb M, mithin auch innerhalb eines jeden N gegebenen ordnenden Relationen mit $>$ bzw. $<$ bezeichnet werden. Alsdann ist die ordnungsgemäße Summe der N mit M identisch. *Wir werden zeigen, daß die in M auf Grund der Addition auftretenden ordnenden Relationen $>$ bzw. $<$ mit den in M ursprünglich vorhandenen ordnenden Relationen $>$ bzw. $<$ äquivalent sind.*

Es sei e' ein Element von N' und e'' ein Element von N'' und es sei $e' < e''$. Dann ist sowohl die Beziehung $N' > N''$ wie die Vereinigung der Beziehungen $N' = N''$ und $e' > e''$ unmöglich, d. h. es ist die Beziehung $e' > e''$ unmöglich. Wir haben also gleichzeitig $e' \not> e''$ und $e' \neq e''$, d. h. wir haben $e' < e''$.

Es sei umgekehrt $e' < e''$, d. h. einerseits $e' \neq e''$, andererseits $e' \not> e''$. Dann ist erstens die Beziehung $N' > N''$, zweitens die Vereinigung der Beziehungen $N' = N''$ und $e' > e''$, drittens die Beziehung $e' = e''$ unmöglich. Nehmen wir nun einen Augenblick an, daß $e' > e''$ wäre. Dann wäre $N' = N''$ unmöglich (weil nämlich, wie eben hervorgehoben, die Vereinigung von $N' = N''$ und $e' > e''$ unmöglich ist) und $N' > N''$ unmöglich (wie ebenfalls eben hervorgehoben wurde). Wir hätten also $N' < N''$, mithin (nach der Definition der ordnungsgemäßen Teilung) $e' < e''$, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind und somit die Unmöglichkeit von $e' > e''$ bewiesen haben. Und weil $e' = e''$ ebenfalls unmöglich ist, so haben wir $e' < e''$.

Mithin führt die Addition der aus einer ordnungsgemäßen Teilung *hervorgehenden virtuell geordneten Teilspezies zur ursprünglichen virtuell geordneten Spezies zurück. Umgekehrt gibt es, wie sofort ersichtlich, zu jeder Addition eine ordnungsgemäße Teilung der ordnungsgemäßen Summe, welche zu den Summanden zurückführt.*

Es sei M die ordnungsgemäße Summe einer virtuell geordneten Spezies von ordnungsgemäßen Summen N von virtuell geordneten Spezies von virtuell geordneten Spezies P. Alsdann ist sowohl die Spezies der bei der Definition von M auftretenden N wie (auf Grund des Additionsverfahrens) die Spezies der bei der Definition von M auftretenden P virtuell geordnet. Bezeichnen wir die Elemente der P mit e, dann besteht nicht nur für die e eines beliebigen P, sondern auch (auf Grund des Additionsverfahrens) für die e eines beliebigen N eine virtuelle Ordnung. Alle diese ordnenden Relationen werden wir durch die Zeichen $>$ und $<$ ausdrücken. Es entsteht nun für die Spezies der e eine virtuelle Ordnung einerseits auf Grund der Addition der P, andererseits auf Grund der Addition der N. Die aus der ersteren hervorgehenden Beziehungen werden wir durch die Zeichen $>$, $<$, $\gtrdot$, $\lessdot$, $\geq$ und $\leq$, die aus der letzteren hervorgehenden Beziehungen durch die Zeichen $\dot{>}$, $\dot{<}$, $\dot{\gtrdot}$, $\dot{\lessdot}$, $\dot{\geq}$ und $\dot{\lessdot}$ andeuten. (Innerhalb eines jeden N fallen diese beiden neuen virtuellen Ordnungen mit der für dieses N schon bestehenden virtuellen Ordnung zusammen). Unser Ziel ist, die Äquivalenz der zwischen den e bestehenden Beziehungen $\leq$ und $\dot{\leq}$, mithin die Gleichheit der beiden erwähnten virtuellen Ordnungen der Spezies der e, d. h. die *assoziative Eigenschaft der Addition* zu beweisen.

Es sei e' ein Element von P', P' ein Element von N', e'' ein Element von P'', P'' ein Element von N'', und es sei $e' \leq e''$. Alsdann ist $P' \leq P''$, mithin $N' \leq N''$. Wir sehen also, daß weder die Beziehung $N' \dot{>} N''$, noch die Vereinigung der Beziehungen $N' = N''$ und $e' \dot{>} e''$ bestehen kann, d. h. wir haben $e' \dot{\leq} e''$.

Es sei umgekehrt $e' \dot{\leq} e''$, mithin $N' \leq N''$. Falls nun $N' = N''$, ist wegen $e' \dot{<} e''$ auch $e' \leq e''$, mithin ist $P' > P''$ unmöglich. Weil mithin einerseits die Beziehung $N' > N''$, andererseits die Vereinigung der Beziehungen $N' = N''$ und $P' > P''$ unmöglich ist, so ist $P' \gtrdot P''$ unmöglich, mithin auch $P' > P''$ unmöglich. Und falls $P' = P''$ (mithin auch $N' = N''$), ist wiederum wegen $e' \dot{\leq} e''$ auch $e' \leq e''$, so daß die Kombination von $P' = P''$ und $e' > e''$ unmöglich ist. Wir sehen also, daß weder die Beziehung $P' > P''$, noch die Vereinigung der Beziehungen $P' = P''$ und $e' > e''$ bestehen kann, d. h. wir haben $e' \leq e''$, und die assoziative Eigenschaft der Addition ist bewiesen.

Daß dagegen für die Addition von Ordinalzahlen *keine kommutative Eigenschaft besteht,* zeigt das Beispiel $\omega + 1 \neq 1 + \omega$.

[326]

§ 4. Wir denken eine geordnete endliche Anzahl k bzw. eine Fundamentalreihe[3]) von elementefremden, je wenigstens ein Element enthaltenden virtuell geordneten Spezies $M_1, M_2, M_3, \ldots$ mit den Ordinalzahlen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ gegeben, bezeichnen ein willkürliches Element von M_ν mit p_ν, und betrachten die Spezies $M \equiv V(\ldots, M_3, M_2, M_1)$ der k-elementigen bzw. unbegrenzt fortgesetzten Folgen $\mathcal{F} \equiv \mathfrak{S}(p_1, p_2, \ldots)$. Diese Spezies M bezeichnen wir als das *Vollprodukt* der ***Faktoren*** $\ldots, M_3, M_2, M_1$, nachdem wir sie durch die folgenden Festsetzungen virtuell geordnet haben: Wir schreiben $\mathcal{F}' \gtrdot \mathcal{F}''$ oder $\mathcal{F}'' \lessdot \mathcal{F}'$, wenn ein solches r existiert, daß $p'_r > p''_r$ und $p'_\nu \geq p''_\nu$ für $\nu < r$; $\mathcal{F}' \underline{\gtrdot} \mathcal{F}''$ oder $\mathcal{F}'' \underline{\lessdot} \mathcal{F}'$, wenn $\mathcal{F}' \lessdot \mathcal{F}''$ unmöglich ist[4]); $\mathcal{F}' > \mathcal{F}''$, wenn $\mathcal{F}' \underline{\gtrdot} \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}''$. Die Beziehungen $\mathcal{F}' \geq \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F}' \underline{\gtrdot} \mathcal{F}''$ sind dann äquivalent, denn einerseits können $\mathcal{F}' \underline{\lessdot} \mathcal{F}''$, $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F}' \underline{\gtrdot} \mathcal{F}''$ nicht alle drei zusammen bestehen, so daß $\mathcal{F}' \geq \mathcal{F}''$ aus $\mathcal{F}' \underline{\gtrdot} \mathcal{F}''$ folgt, andererseits folgt $\mathcal{F}'' > \mathcal{F}'$ aus $\mathcal{F}'' \gtrdot \mathcal{F}'$, mithin $\mathcal{F}' \underline{\gtrdot} \mathcal{F}''$ aus $\mathcal{F}' \geq \mathcal{F}''$. Weiter sieht man unmittelbar, daß für diese ordnende Relation der $\mathcal{F}$ die Ordnungseigenschaften 1. und 2. erfüllt sind. Die Tatsache, daß aus der Vereinigung von $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F}' \leq \mathcal{F}''$ die Vereinigung von $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F}' \underline{\lessdot} \mathcal{F}''$, d. h. $\mathcal{F}' < \mathcal{F}''$ folgt, bringt die Ordnungseigenschaft 3. zum Ausdruck. Weil nach dem Vorhergehenden aus der Vereinigung von $\mathcal{F}' \geq \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F}' \leq \mathcal{F}''$ die Vereinigung von $\mathcal{F}' \underline{\gtrdot} \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F}' \underline{\lessdot} \mathcal{F}''$, d. h. $\mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ hervorgeht, so ist auch die Ordnungseigenschaft 4. erfüllt. Um schließlich die Ordnungseigenschaft 5. zu beweisen, nehmen wir an, daß die Beziehungen $\mathcal{F}' < \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F}'' < \mathcal{F}'''$ erfüllt sind. Wäre dann $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'''$, so hätte man gleichzeitig $\mathcal{F}''' < \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F}'' < \mathcal{F}'''$, was unmöglich ist. Und wäre $\mathcal{F}' \gtrdot \mathcal{F}'''$, so hätte man (weil die Vereinigung von $\mathcal{F}' \gtrdot \mathcal{F}'''$ und $\mathcal{F}'' \gtrdot \mathcal{F}'$ zu $\mathcal{F}'' \gtrdot \mathcal{F}'''$ führen würde) $\mathcal{F}'' \underline{\lessdot} \mathcal{F}'$ und daneben

---

[3]) Die obige Theorie läßt sich mühelos auf Vollprodukte von beliebigen wohlgeordneten Mengen von Ordinalzahlen erweitern. Weil aber die Theorie der wohlgeordneten Mengen erst später zur Behandlung gelangt, so müssen wir uns an dieser Stelle auf Vollprodukte von endlichvielen oder von abzählbarunendlichvielen Faktoren beschränken.

[4]) Schreiben wir $\mathcal{F}' \circ\!\gtrdot \mathcal{F}''$ oder $\mathcal{F}'' \lessdot\!\circ \mathcal{F}'$, wenn ein solches r existiert, daß $p'_r > p''_r$ und $p'_\nu = p''_\nu$ für $\nu < r$, weiter $\mathcal{F}' \circ\!\underline{\gtrdot} \mathcal{F}''$ oder $\mathcal{F}'' \underline{\lessdot}\!\circ \mathcal{F}'$, wenn $\mathcal{F}' \lessdot\!\circ \mathcal{F}''$ unmöglich ist, so folgt einerseite $\mathcal{F}' \gtrdot \mathcal{F}''$ aus $\mathcal{F}' \circ\!\gtrdot \mathcal{F}''$, mithin $\mathcal{F}' \underline{\lessdot\!\circ} \mathcal{F}''$ aus $\mathcal{F}' \underline{\lessdot} \mathcal{F}''$. Nehmen wir andererseits einen Augenblick das Zusammenbestehen von $\mathcal{F}' \gtrdot \mathcal{F}''$ und der Unmöglichkeit von $\mathcal{F}' \circ\!\gtrdot \mathcal{F}''$ an. Alsdann würden für ein gewisses r die Beziehungen $p'_1 \geq p''_1$, $p'_2 \geq p''_2, \ldots, p'_{r-1} \geq p''_{r-1}$ und $p'_r > p''_r$ zusammen mit der Unmöglichkeit von $\mathcal{F}' \circ\!\gtrdot \mathcal{F}''$ bestehen. Hieraus würden wir *der Reihe nach* die Beziehungen $p'_1 = p''_1$, $p'_2 = p''_2, \ldots, p'_{r-1} = p''_{r-1}$ herleiten können, welche zusammen mit der Beziehung $p'_r > p''_r$ die Beziehung $\mathcal{F}' \circ\!\gtrdot \mathcal{F}''$, mithin einen Widerspruch ergeben würden. Also folgt aus der Unmöglichkeit von $\mathcal{F}' \circ\!\gtrdot \mathcal{F}''$ die Unmöglichkeit von $\mathcal{F}' \gtrdot \mathcal{F}''$, womit die Äquivalenz der Beziehungen $\mathcal{F}' \underline{\lessdot\!\circ} \mathcal{F}''$ und $\mathcal{F}' \underline{\lessdot} \mathcal{F}''$ bewiesen ist.

(wegen $\mathfrak{f}' < \mathfrak{f}''$) auch $\mathfrak{f}'' \geqslant \mathfrak{f}'$, also $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}''$, was wiederum unmöglich ist. Aus $\mathfrak{f}' < \mathfrak{f}''$ und $\mathfrak{f}'' < \mathfrak{f}'''$ folgt mithin die Vereinigung von $\mathfrak{f}' \neq \mathfrak{f}'''$ und $\mathfrak{f}' \lessdot \mathfrak{f}'''$, d. h. $\mathfrak{f}' < \mathfrak{f}'''$, w. z. b. w.

Die Ordinalzahl der in obiger Weise virtuell geordneten Spezies M bezeichnen wir als das *Vollprodukt* $V(\ldots, m_3, m_2, m_1)$ der *Faktoren* $\ldots, m_3, m_2, m_1$.

Um die *assoziative Eigenschaft* dieser „*Vollmultiplikation*" zu beweisen, setzen wir für eine endliche bzw. unbegrenzte Folge $\nu_1 = 1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ von wachsenden positiven Zahlen $V(M_{\nu_{r+1}-1}, M_{\nu_{r+1}-2}, \ldots, M_{\nu_r+1}, M_{\nu_r}) = N_r$ und ordnen jedes N_r und jedes $V(N_r, N_{r-1}, \ldots, N_1)$ virtuell mittels der obigen Festsetzungen auf Grund der virtuellen Ordnungen der M_σ. Alsdann läßt jedes Element $\mathfrak{f}$ von M sich auch als eine Vereinigung $\mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots)$ auffassen, wo $\mathfrak{z}_\nu$ für jedes ν ein Element der virtuell geordneten Spezies N_ν vorstellt. Die virtuelle Ordnung, die M auf Grund der letzteren Auffassung erhält, bringen wir mittels der Zeichen $\dot{=}$, $\dot{\geqslant}$, $\dot{\gtrsim}$, $\dot{\neq}$, $\dot{>}$ und $\dot{\geq}$ zum Ausdruck. Die Äquivalenz der Beziehungen $=$ und $\dot{=}$ ist dann evident. Unser Ziel ist, auch die Äquivalenz der Beziehungen $\leq$ und $\dot{\leq}$, mithin die Gleichheit der beiden eingeführten virtuellen Ordnungen der Spezies M herzuleiten.

Es sei $\mathfrak{f}' \leq \mathfrak{f}''$, mithin für beliebiges r (weil nämlich aus $\mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1', \ldots, \mathfrak{z}_r') \geqslant \mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1'', \ldots, \mathfrak{z}_r'')$ folgen würde $\mathfrak{f}' \geqslant \mathfrak{f}''$) auch $\mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1', \ldots, \mathfrak{z}_r') \leq \mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1'', \ldots, \mathfrak{z}_r'')$. Nehmen wir einen Augenblick an, daß die Beziehungen $\mathfrak{z}_1' \geq \mathfrak{z}_1'', \ldots, \mathfrak{z}_{r-1}' \geq \mathfrak{z}_{r-1}'', \mathfrak{z}_r' > \mathfrak{z}_r''$ zusammen existierten. Alsdann wäre sowohl $\mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1', \ldots, \mathfrak{z}_r') \lessdot \mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1'', \ldots, \mathfrak{z}_r'')$ (woraus nämlich $\mathfrak{z}_\nu' \lessdot \mathfrak{z}_\nu''$ für *wenigstens ein* $\nu \leq r$ folgen würde) wie $\mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1', \ldots, \mathfrak{z}_r') = \mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1'', \ldots, \mathfrak{z}_r'')$ unmöglich, d. h. wir hätten $\mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1', \ldots, \mathfrak{z}_r') > \mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1'', \ldots, \mathfrak{z}_r'')$, was der Voraussetzung widerspricht. Aus $\mathfrak{f}' \leq \mathfrak{f}''$ folgt mithin für beliebiges r die Unmöglichkeit der gleichzeitigen Existenz der Beziehungen $\mathfrak{z}_1' \geq \mathfrak{z}_1'', \ldots, \mathfrak{z}_{r-1}' \geq \mathfrak{z}_{r-1}'', \mathfrak{z}_r' > \mathfrak{z}_r''$, d. h. die Beziehung $\mathfrak{f}' \dot{\leq} \mathfrak{f}''$.

Insbesondere zieht also die Beziehung $\mathfrak{f}' < \mathfrak{f}''$ die Beziehung $\mathfrak{f}' \dot{\leq} \mathfrak{f}''$ nach sich. Also folgt aus $\mathfrak{f}' < \mathfrak{f}''$ einerseits $\mathfrak{f}' \dot{\leq} \mathfrak{f}''$, andererseits $\mathfrak{f}' \dot{\neq} \mathfrak{f}''$, mithin $\mathfrak{f}' \dot{<} \mathfrak{f}''$. Dann aber folgt aus der Beziehung $\mathfrak{f}' \dot{\geq} \mathfrak{f}''$ die Beziehung $\mathfrak{f}' \geq \mathfrak{f}''$, mithin auch aus der Beziehung $\mathfrak{f}' \dot{\leq} \mathfrak{f}''$ die Beziehung $\mathfrak{f}' \leq \mathfrak{f}''$.

Hiermit ist die Äquivalenz der beiden Beziehungen $\leq$ und $\dot{\leq}$, mithin die Gleichheit der beiden eingeführten virtuellen Ordnungen der Spezies M, mithin die assoziative Eigenschaft der Vollmultiplikation hergeleitet.

Für die Vollmultiplikation zweier Faktoren folgt die *distributive Eigenschaft nach dem rechtsseitigen Faktor* unmittelbar aus der assoziativen Eigenschaft der Addition in Zusammenhang mit Fußnote [4]). Hieraus folgt auf Grund der assoziativen Eigenschaft der Vollmultiplikation, daß die distri-

[[328]]

butive Eigenschaft ebenfalls für den am weitesten rechts stehenden Faktor einer beliebigen Vollmultiplikation besteht. Für andere Faktoren besteht sie aber nicht, denn sie versagt für den linksseitigen Faktor einer Vollmultiplikation zweier Faktoren, wie aus dem Beispiel $(\omega+1)3=\omega\cdot 3+1\neq\omega\cdot 3+3$ hervorgeht.

Das Vollprodukt einer endlichen Anzahl a bzw. einer Fundamentalreihe von gleichen Ordinalzahlen z wird auch als a-te bzw. ω-te *Vollpotenz* von z bezeichnet; a bzw. ω heißt dann der *Exponent* der Vollpotenz.

Vollprodukte von endlichvielen Faktoren und Vollpotenzen mit endlichem Exponenten werden auch *Produkte* bzw. *Potenzen* und ihre Erzeugung *Multiplikation* bzw. *Potenzierung* genannt. Für die a-te Potenz (wo also a endlich ist) der Ordinalzahl z wird auch die Bezeichnung z^a gebraucht.

§ 5. In einer virtuell geordneten Spezies M heißt eine unbegrenzte Folge von geschlossenen Intervallen $i_1, i_2, \ldots$, wo jedes $i_{\nu+1}$ eine Teilspezies von i_ν ist, eine *hohle Intervallschachtelung*, wenn zu jedem Elemente p von M ein solches ν_p bestimmt ist, daß p nicht zu i_{ν_p} gehören kann, und eine *einschmelzende Intervallschachtelung mit dem Kern* q, wenn je zwei Intervalle der Folge verschieden sind, das Element q von M zu allen i_ν gehört, und umgekehrt jedes zu allen i_ν gehörende Element von M mit q identisch ist.

Jedes Element von M, das als Kern einer einschmelzenden Intervallschachtelung auftritt, heißt ein *Hauptelement* von M. Wenn alle Elemente von M Hauptelemente sind, heißt M *in sich dicht.*

Wenn in M keine hohle Intervallschachtelung existieren kann, heißt M *abgeschlossen.* Ist M sowohl abgeschlossen wie in sich dicht, dann heißt M *perfekt.*

Ein Beispiel einer überall dichten, perfekten virtuell geordneten Menge liefert die Menge C, virtuell geordnet auf Grund der „natürlichen Ordnung" der von ihr nach Math. Ann. **93**, S. 251 erzeugten dual entwickelbaren reellen Zahlen >0 und ≤ 1, d. h. in folgender Weise: Es seien $a_1' a_2' a_3' \ldots$ und $a_1'' a_2'' a_3'' \ldots$ zwei Elemente von C, die wir der Reihe nach mit α' und α'' bezeichnen. Alsdann schreiben wir $\alpha' \gtrdot \alpha''$ oder $\alpha'' \lessdot \alpha'$, wenn es ein solches r gibt, daß $a_r' < a_r''$ und $a_\nu' = a_\nu''$ für $\nu < r$; $\alpha' \underline{\gtrdot} \alpha''$ oder $\alpha'' \underline{\lessdot} \alpha'$, wenn $\alpha' \lessdot \alpha''$ unmöglich ist; $\alpha' \gtrdot \alpha''$, wenn gleichzeitig $\alpha' \underline{\gtrdot} \alpha''$ und $\alpha' \neq \alpha''$. [[1]]

Zum Beweise unserer Behauptung definieren wir zu α' und α'' ein mit α''' zu bezeichnendes Element $a_1''' a_2''' a_3''' \ldots$ von C in folgender Weise: Wenn $a_\nu' = a_\nu''$ für $\nu \leq r$, so ist $a_r''' = a_r' = a_r''$. Wenn $a_\nu' = a_\nu''$ für $\nu \leq r-1$,

[[329]]

aber $a_r' < a_r''$ (bzw. $a_r'' < a_r'$), so ist $a_r''' = a_r'$ (bzw. $a_r''' = a_r''$). Wenn $a_\nu' = a_\nu''$ für $\nu \leq r-2$, aber $a_{r-1}' < a_{r-1}''$ (bzw. $a_{r-1}'' < a_{r-1}'$), so ist $a_r''' = a_r' + 1$ (bzw. $a_r''' = a_r'' + 1$). Wenn $a_\nu' = a_\nu''$ für $\nu < s \leq r-2$, aber $a_s' < a_s''$ (bzw. $a_s'' < a_s'$), so ist $a_r''' = a_r'$ (bzw. $a_r''' = a_r''$). Wenn nun α' und α'' verschieden sind, so liegt α''' zwischen α' und α'', so daß die betrachtete virtuell geordnete Menge *überall dicht* ist.

Versuchen wir weiter in der betrachteten virtuell geordneten Menge eine hohle Schachtelung von geschlossenen Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ zu erzeugen. Seien (für jedes σ) ${}_\sigma a_1' \, {}_\sigma a_2' \, {}_\sigma a_3' \ldots$ und ${}_\sigma a_1'' \, {}_\sigma a_2'' \, {}_\sigma a_3'' \ldots$ die mit ${}_\sigma\alpha'$ und ${}_\sigma\alpha''$ zu bezeichnenden Endelemente von i_σ und sei (für jedes σ) ${}_\sigma\alpha' \leq {}_\sigma\alpha''$.[5]) Wir zeigen zunächst, daß zu jedem ganzen positiven ν ein kleinstes ganzes positives σ_ν existiert, so daß ${}_{\sigma_\nu}a_\mu' = {}_{\sigma_\nu}a_\mu''$ für $\mu \leq \nu$, mithin auch ${}_\sigma a_\mu' = {}_\sigma a_\mu''$ für $\mu \leq \nu$ und $\sigma \geq \sigma_\nu$.

Nehmen wir an, daß ${}_1a_\mu' = {}_1a_\mu''$ *nicht* für jedes $\mu \leq \nu$ gilt, daß also ${}_1a_\mu' = {}_1a_\mu''$ für $\mu \leq r$ $(r < \nu)$ und ${}_1a_{r+1}' > {}_1a_{r+1}''$. Alsdann ist auch ${}_\sigma a_\mu' = {}_\sigma a_\mu'' = {}_1a_\mu' = {}_1a_\mu''$ für $\mu \leq r$, weiter aber ${}_\sigma a_{r+1}' \leq {}_1a_{r+1}'$ und ${}_\sigma a_{r+1}'' \geq {}_1a_{r+1}''$. Für diejenigen Werte von σ, für welche sowohl ${}_\sigma a_{r+1}' = {}_1a_{r+1}'$ wie ${}_\sigma a_{r+1}'' = {}_1a_{r+1}''$, gehört nun das Element ${}_1a_1'' \, {}_1a_2'' \, {}_1a_3'' \ldots {}_1a_r'' ({}_1a_{r+1}'' + 1) \, 111 \ldots$ zu i_σ, so daß sich auf Grund der Definition der hohlen Schachtelung ein solches h angeben

---

[5]) Zu jedem geschlossenen Intervall mit den Endelementen $\alpha' (a_1' a_2' a_3' \ldots)$ und $\alpha'' (a_1'' a_2'' a_3'' \ldots)$ der betrachteten virtuell geordneten Menge existiert nämlich ein gleiches geschlossenes Intervall mit den Endelementen $\beta' (b_1' b_2' b_3' \ldots)$ und $\beta'' (b_1'' b_2'' b_3'' \ldots)$, so daß $\beta' \leq \beta''$. Hierbei werden die b_ν' und b_ν'' folgendermaßen aus den a_ν' und a_ν'' hergeleitet: wenn $a_\nu' = a_\nu''$ für $\nu \leq r$, so ist $b_r' = b_r'' = a_r' = a_r''$; wenn $a_\nu' = a_\nu''$ für $\nu \leq r-1$, aber $a_r^{(\pi)} < a_r^{(\varrho)}$, so ist $b_\nu' = a_\nu^{(\varrho)}$ und $b_\nu'' = a_\nu^{(\pi)}$ für $\nu \geq r$. Zum Beweise der Gleichheit der geschlossenen Intervalle $\alpha' \alpha''$ und $\beta' \beta''$ bemerken wir zunächst, daß in einer beliebigen virtuell geordneten Spezies aus den Beziehungen $r > s$ und $s \geq t$ die Beziehung $r > t$ folgt, daß mithin wegen $\beta'' \geq \alpha'$ und $\beta'' \geq \alpha''$ *die Beziehung* $\alpha > \beta''$ *die Beziehungen* $\alpha > \alpha'$ *und* $\alpha > \alpha''$ *nach sich zieht* (1) und wegen $\beta'' \geq \beta'$ *die Beziehung* $\alpha > \beta''$ *mit der Vereinigung der Beziehungen* $\alpha > \beta'$ *und* $\alpha > \beta''$ *äquivalent ist* (2).

Wenn weiter die Beziehungen $\beta'' \neq \alpha'$ und $\beta'' \neq \alpha''$ zusammen gälten, wäre sowohl $\alpha' \mathrel{>\!\!\!\!\!\cdot} \alpha''$ wie $\alpha' \mathrel{<\!\!\!\!\!\cdot} \alpha''$ unmöglich, und wir hätten $\alpha' = \alpha''$, also $\beta'' = \alpha' = \alpha''$. Die Beziehungen $\beta'' \neq \alpha'$ und $\beta'' \neq \alpha''$ können also nicht zusammen gelten, so daß auch die Beziehungen $\beta'' > \alpha'$ und $\beta'' > \alpha''$ nicht zusammen gelten können. Hieraus folgt, daß neben der Vereinigung von $\alpha > \alpha'$ und $\alpha > \alpha''$ weder $\beta'' > \alpha$ noch $\beta'' = \alpha$ bestehen kann, daß also *die Vereinigung von* $\alpha > \alpha'$ *und* $\alpha \geq \alpha''$ *die Beziehung* $\alpha > \beta''$ *nach sich zieht* (3).

Aus (1), (2) und (3) ergibt sich, daß *die Vereinigung von* $\alpha > \beta'$ *und* $\alpha > \beta''$ *und die Vereinigung von* $\alpha > \alpha'$ *und* $\alpha > \alpha''$ *äquivalent sind.* Weil sich in derselben Weise herleiten läßt, daß auch *die Vereinigung von* $\alpha < \beta'$ *und* $\alpha < \beta''$ *und die Vereinigung von* $\alpha < \alpha'$ *und* $\alpha < \alpha''$ *äquivalent sind,* so hat sich in der Tat die Gleichheit der geschlossenen Intervalle $\beta' \beta''$ und $\alpha' \alpha''$ erwiesen.

[[330]]

läßt, daß entweder ${}_h a'_{r+1} < {}_1 a'_{r+1}$ oder ${}_h a''_{r+1} > {}_1 a''_{r+1}$. Weil dieselbe Schlußfolgerung sich beliebig oft wiederholen läßt, läßt sich schließlich ein kleinstes solches σ_{r+1} angeben, daß ${}_{\sigma_{r+1}} a'_{r+1} = {}_{\sigma_{r+1}} a''_{r+1}$, mithin ${}_{\sigma_{r+1}} a'_\mu = {}_{\sigma_{r+1}} a''_\mu$ für $\mu \leq r+1$. In derselben Weise gelangen wir der Reihe nach zu $\sigma_{r+2}, \sigma_{r+3}, \ldots, \sigma_\nu$.

Bestimmen wir in dieser Weise der Reihe nach $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, wobei $\sigma_{\nu+1} \geq \sigma_\nu$ für jedes ν, dann erzeugen wir gleichzeitig das Element ${}_{\sigma_1} a'_1\, {}_{\sigma_2} a'_2\, {}_{\sigma_3} a'_3 \ldots$ von C, das wir mit i_ω bezeichnen wollen. Weil nun nach dem obigen ${}_\sigma \alpha' \leq i_\omega \leq {}_\sigma \alpha''$ für jedes σ, so muß i_ω zu jedem i_σ gehören, womit sich die Ungereimtheit der Existenz der hohlen Schachtelung, mithin die *Abgeschlossenheit* der betrachteten virtuell geordneten Menge herausgestellt hat. [[2]]

Sei $a_1 a_2 a_3 \ldots$ ein beliebiges Element von C, das wir mit α bezeichnen. Bezeichnen wir weiter das Element $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} (a_n + 1) 1 1 1 \ldots$ von C mit α'_n, das Element $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n 1 1 1 \ldots$ von C mit α''_n und das geschlossene Intervall $\alpha'_n \alpha''_n$ der betrachteten virtuell geordneten Menge mit i_n, so bildet die Intervallfolge $i_1, i_2, i_3, \ldots$ eine einschmelzende Intervallschachtelung mit dem Kern α, womit wir die betrachtete virtuell geordnete Menge als *in sich dicht* erkannt haben[6]).

Ein Beispiel einer nirgends dichten, perfekten virtuell geordneten Menge wird gebildet von der Vereinigung D der Menge C und der Menge E der endlichen Folgen von Nummern, wenn wir jedem Elemente $a_1 \ldots a_n$ von E die reelle Zahl

$$\frac{2}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2}} + \cdots + \frac{2}{3^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}$$

und jedem Elemente $a_1 a_2 a_3 \ldots$ von C die reelle Zahl

$$\frac{2}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2+a_3}} + \cdots$$

[6]) Die obige virtuell geordnete Menge ist nicht zu verwechseln mit der mit ihr verwandten, ebenfalls auf Grund der „natürlichen Ordnung" virtuell geordneten, Spezies der Spezies der mit einem unendlichen Dualbruch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ (wo jedes $a_n = 0$ oder $= 1$ ist) „zusammenfallenden" unendlichen Dualbrüche $\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n}$ (wo jedes $b_n = 0$ oder $= 1$ ist). Hierbei gelten die unendlichen Dualbrüche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n}$ als „zusammenfallend", wenn für jedes ganze positive m *entweder* $a_\nu = b_\nu$ für $\nu \leq m$, *oder* $a_\nu = b_\nu$ für $\nu < r \leq m$, $a_r = 1$, $b_r = 0$, $a_\nu = 0$ und $b_\nu = 1$ für $r < \nu \leq m$, *oder* aber $a_\nu = b_\nu$ für $\nu < s \leq m$, $a_s = 0$, $b_s = 1$, $a_\nu = 1$ und $b_\nu = 0$ für $s < \nu \leq m$. Die in dieser Weise definierte virtuell geordnete Spezies ist zwar perfekt, aber nicht überall dicht.

zuordnen, und sodann auf Grund der „natürlichen Ordnung" dieser reellen Zahlen eine virtuelle Ordnung von D herstellen.

Zum Beweise dieser Behauptung definieren wir zu den mit α' und α'' zu bezeichnenden Elementen $a_1' a_2' a_3' \ldots$ und $a_1'' a_2'' a_3'' \ldots$ von D in folgender Weise zwei weitere, mit β' und β'' zu bezeichnende Elemente $b_1' b_2' b_3' \ldots$ und $b_1'' b_2'' b_3'' \ldots$ von D: Wenn a_ν' und a_ν'' für $\nu \leq r$ beide existieren und gleich sind, dann existieren auch b_r' und b_r'' und es ist $b_r' = b_r'' = a_r' = a_r''$; wenn a_ν' und a_ν'' für $\nu \leq r-1$ beide existieren und gleich sind, während $a_r^{(\pi)}$ existiert und $a_r^{(\varrho)}$ entweder nicht existiert oder $> a_r^{(\pi)}$ ist, so ist $b_r' = a_r^{(\pi)} + 1$, $b_\nu' = 1$ für $\nu > r$, $b_r'' = a_r^{(\pi)}$, während b_ν'' für $\nu > r$ nicht existiert. Im Falle der Verschiedenheit von α' und α'' sind dann β' und β'' ebenfalls verschieden, bilden ein freies Intervall und gehören zum geschlossenen Intervall $\alpha' \alpha''$, so daß die betrachtete virtuell geordnete Menge *nirgends dicht* ist.

Versuchen wir weiter in der betrachteten virtuell geordneten Menge eine hohle Schachtelung von geschlossenen Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ zu erzeugen. Seien ${}_\sigma a_1' \, {}_\sigma a_2' \, {}_\sigma a_3' \ldots$ und ${}_\sigma a_1'' \, {}_\sigma a_2'' \, {}_\sigma a_3'' \ldots$ die mit ${}_\sigma\alpha'$ und ${}_\sigma\alpha''$ zu bezeichnenden Endelemente von i_σ und sei ${}_\sigma\alpha' \leq {}_\sigma\alpha''$. Wir zeigen zunächst, daß zu jedem ganzen positiven ν ein kleinstes ganzes positives σ_ν existiert, so daß ${}_{\sigma_\nu}a_\mu'$ und ${}_{\sigma_\nu}a_\mu''$ für $\mu \leq \nu$ beide existieren und gleich sind, mithin auch ${}_\sigma a_\mu'$ und ${}_\sigma a_\mu''$ für $\sigma \geq \sigma_\nu$ und $\mu \leq \nu$ beide existieren und gleich sind.

Nehmen wir an, daß ${}_1a_\mu'$ und ${}_1a_\mu''$ für $\mu \leq r$ $(r < \nu)$ existieren und gleich sind, während ${}_1a_{r+1}''$ existiert und ${}_1a_{r+1}'$ entweder nicht existiert oder $> {}_1a_{r+1}''$ ist. Alsdann müssen auch ${}_\sigma a_\mu'$ und ${}_\sigma a_\mu''$ für ein beliebiges σ und $\mu \leq r$ existieren und gleich ${}_1a_\mu' = {}_1a_\mu''$ sein, während ${}_\sigma a_{r+1}''$ existiert und $\geq {}_1a_{r+1}''$ ist und ${}_\sigma a_{r+1}'$ entweder nicht existiert oder $> {}_\sigma a_{r+1}''$ und, falls ${}_1a_{r+1}'$ existiert, $\leq {}_1a_{r+1}'$ ist. Nun gehört für diejenigen Werte von σ, für welche ${}_\sigma a_{r+1}'$ nicht existiert, das Element ${}_1a_1' \, {}_1a_2' \, {}_1a_3' \ldots {}_1a_r'$ zu i_σ; für diejenigen Werte von σ aber, für welche erstens ${}_\sigma a_{r+1}'$ und ${}_1a_{r+1}'$ existieren und gleich sind, zweitens ${}_\sigma a_{r+1}''$ und ${}_1a_{r+1}''$ existieren und gleich sind, gehört das Element ${}_1a_1'' \, {}_1a_2'' \ldots {}_1a_r'' ({}_1a_{r+1}'' + 1) 1 1 1 \ldots$ zu i_σ. Mithin läßt sich auf Grund der Definition der hohlen Schachtelung ein solches h angeben, daß, falls ${}_1a_{r+1}'$ nicht existiert, ${}_ha_{r+1}'$ existiert, und, falls ${}_1a_{r+1}'$ existiert, entweder ${}_ha_{r+1}' < {}_1a_{r+1}'$ oder ${}_ha_{r+1}'' > {}_1a_{r+1}''$ ist. Weil dieselbe Schlußfolgerung sich beliebig oft wiederholen läßt, so läßt sich ein kleinstes solches σ_{r+1} angeben, daß ${}_{\sigma_{r+1}}a_{r+1}'$ und ${}_{\sigma_{r+1}}a_{r+1}''$ beide existieren und gleich sind, mithin ${}_{\sigma_{r+1}}a_\mu'$ und ${}_{\sigma_{r+1}}a_\mu''$ für $\mu \leq r+1$ beide existieren und gleich sind. In derselben Weise gelangen wir der Reihe nach zu $\sigma_{r+2}, \sigma_{r+3}, \ldots, \sigma_\nu$.

Bestimmen wir in dieser Weise der Reihe nach $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, wobei $\sigma_{\nu+1} \geq \sigma_\nu$ für jedes ν, dann erzeugen wir gleichzeitig das Element

[332]

${}_{\sigma_1}a'_1\, {}_{\sigma_2}a'_2\, {}_{\sigma_3}a'_3 \ldots$ von D, das wir mit i_ω bezeichnen wollen. Weil nun nach dem obigen ${}_\sigma\alpha' \leq i_\omega \leq {}_\sigma\alpha''$ für jedes σ, so gehört i_ω zu jedem i_σ, wo- ⟦3⟧
mit sich die Ungereimtheit der Existenz der hohlen Schachtelung, mithin die *Abgeschlossenheit* der betrachteten virtuell geordneten Menge herausgestellt hat.

Sei α ein beliebiges Element von D. Nehmen wir erstens an, daß α ein Element $a_1\, a_2 \ldots a_p$ von E darstellt. Alsdann bezeichnen wir das Element $a_1\, a_2 \ldots a_p\, n$ von E mit α_n und das geschlossene Intervall $\alpha\alpha_n$ der betrachteten virtuell geordneten Menge mit i_n. Nehmen wir zweitens an, daß α ein Element $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ von C darstellt. Alsdann bezeichnen wir das Element $a_1\, a_2 \ldots a_n$ von E mit α'_n, das Element $a_1\, a_2 \ldots a_n\, 1\,1\,1 \ldots$ von C mit α''_n und das geschlossene Intervall $\alpha'_n\alpha''_n$ der betrachteten virtuell geordneten Menge mit i_n. In beiden Fällen bildet die Intervallfolge $i_1, i_2, i_3, \ldots$ eine einschmelzende Intervallschachtelung mit dem Kern α, womit wir die betrachtete virtuell geordnete Menge als *in sich dicht* erkannt haben [7]).

§ 6. Die Ordinalzahl der Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 (exklusive 0 und 1) in ihrer „natürlichen Ordnung“ wird mit η bezeichnet. Wir werden zeigen, daß *jede abzählbar unendliche, im engeren Sinne überall dichte geordnete Spezies* (*welche also auch vollständig geordnet ist*) *die Ordinalzahl η besitzt.*

Sei M die gegebene geordnete Spezies, $m_1, m_2, m_3, \ldots$ ihre Elemente, R die auf Grund der „natürlichen Ordnung“ geordnete Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1, $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ihre Elemente, wobei die Indizes auf Grund einer eineindeutigen Beziehung zwischen R und der Folge ζ bestimmt sind. Dem Elemente m_1 ordnen wir das Element r_1 zu; sodann dem Elemente r_2 dasjenige mit m'_2 zu bezeichnende Element m_ν mit möglichst kleinem Index ν, das zu m_1 dieselbe ordnende Relation besitzt wie r_2 zu r_1; sodann dem Elemente m'_3 (welches mit m_3 oder mit m_2 identisch ist, je nachdem wir m_2 schon benutzt haben oder nicht) dasjenige mit r'_3 zu bezeichnende Element r_ν mit möglichst kleinem Index ν, das zu r_1 und r_2 dieselben ordnenden Relationen besitzt wie m'_3 zu m_1 und m'_2; sodann dem Elemente r'_4 (d. h. dem noch nicht benutzten Elemente r_ν mit möglichst kleinem Index ν) dasjenige mit m'_4 zu bezeichnende

[7]) Die obige virtuell geordnete Menge ist nicht zu verwechseln mit der mit ihr verwandten, ebenfalls auf Grund der „natürlichen Ordnung“ virtuell geordneten, Menge der unendlichen Ternalbrüche $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$, wo jedes a_n entweder $= 0$ oder $= 2$ ist. Die letztere virtuell geordnete Menge ist übrigens, wie die obige, sowohl nirgends dicht wie perfekt.

⟦333⟧

Element m_ν mit möglichst kleinem Index ν, das zu m_1, m_2' und m_3' dieselben ordnenden Relationen besitzt wie r_4' zu r_1, r_2 und r_3'. Indem wir in dieser Weise fortfahren, bestimmen wir zwischen M und R eine solche eineindeutige Beziehung, welche die beiden Spezies als ähnlich erkennen läßt.

Eine geordnete Spezies P heißt *differenziert geordnet,* wenn *erstens* je zwei verschiedene Elemente von P entweder ein freies Intervall bilden, oder zwischen ihnen ein Element von P liegt, *zweitens* ein beliebiges Element von P entweder das erste Element von P ist oder links von ihm ein Element von P liegt, *drittens* ein beliebiges Element von P entweder das letzte Element von P ist oder rechts von ihm ein Element von P liegt. Wir werden zeigen, daß *jede abzählbar unendliche, differenziert geordnete Spezies M sich als abtrennbare Teilspezies einer geordneten Spezies der Ordinalzahl η auffassen läßt.*

Die obige Konstruktion einer eineindeutigen Beziehung zwischen M und R läßt sich nämlich auf diesen Fall erweitern, wenn wir nur jedesmal, wenn in M zu einem vorgegebenen Elemente r_ν' kein die erforderten ordnenden Relationen besitzendes Element m_ν' existiert, ein solches Element der Spezies M hinzufügen.

Die Menge T der endlichen Ternalbrüche zwischen 0 und 1 (exklusive 0 und 1) der Form

$$\frac{2}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2}} + \dots + \frac{2}{3^{a_1+a_2+\dots+a_n}}$$

oder

$$\frac{2}{3^{a_1}} + \dots + \frac{2}{3^{a_1+\dots+a_{n-1}}} + \frac{1}{3^{a_1+\dots+a_n}},$$

wo jedes a_ν eine ganze positive Zahl vorstellt, besitzt in ihrer „natürlichen Ordnung", wie man unmittelbar einsieht, die Ordinalzahl $2 \cdot \eta$. Man hat nun den Satz: *Jede abzählbar unendliche geordnete Spezies S, von der jedes Element a entweder rechtes Endelement eines freien Intervalls ist, während zu a spätere Elemente existieren und zwischen a und einem willkürlichen späteren Elemente andere Elemente liegen, oder linkes Endelement eines freien Intervalls ist, während zu a frühere Elemente existieren und zwischen a und einem willkürlichen früheren Elemente andere Elemente liegen, besitzt die Ordinalzahl $2 \cdot \eta$.*

Man kann nämlich nach der obigen Methode zwischen der Spezies der freien Intervalle von T und der Spezies der freien Intervalle von S eine eineindeutige Beziehung herstellen, welche die beiden Intervallspezies als ähnlich erkennen läßt.

[[334]]

§ 7. Sei M eine abzählbar unendliche, im engern Sinne überall dichte geordnete Spezies, deren Elemente durch die Fundamentalreihe $g_1, g_2, g_3, \ldots$ abgezählt werden. Wir setzen $\mathfrak{S}(g_1, g_2, \ldots, g_\nu) = s_\nu$. In M nehmen wir eine „Einschaltungsteilung" vor, d. h. wir erzeugen durch eine unbegrenzte Folge von freien Wahlen in solcher Weise in M eine linke und eine rechte Teilspezies (wobei ein beliebiges Element der linken einem beliebigen Elemente der rechten Teilspezies vorangeht), daß der Reihe nach in $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die linke und die rechte Teilspezies bestimmt werden, wobei von diesen Teilspezies von s_ν nur ein einziges Element g_{α_ν} von s_ν ausgenommen bleiben darf, und für jedes ν das Element $g_{\alpha_{\nu+1}}$, falls es besteht, entweder mit g_{α_ν} oder mit $g_{\nu+1}$ identisch ist. Die Spezies derjenigen (*zu beliebigen verschiedenen Abzählungen von M gehörigen*) Einschaltungsteilungen t von M, welche mit einer gewissen Einschaltungsteilung t_1 von M „zusammenfallen", womit gemeint wird, daß niemals ein Element der linken Teilspezies der einen Teilung rechts von einem Elemente der rechten Teilspezies der anderen Teilung gelegen ist, nennen wir ein *Einschaltungselement* von M und t bzw. t_1 eine „Teilung" dieses Einschaltungselementes. Die Spezies der Einschaltungselemente e von M ordnen wir virtuell, indem wir folgende Festsetzungen treffen: Wir schreiben $e' \lessdot e''$, wenn eine Teilung t' von e', eine Teilung t'' von e'' und zwei Elemente g_σ und g_τ von M angegeben werden können, welche zur rechten Teilspezies von t' und zur linken Teilspezies von t'' gehören; $e' \underset{\cdot}{\leq} e''$, wenn $e' \gtrdot e''$ unmöglich ist; $e' < e''$, wenn $e' \lessdot e''$ und überdies $e' \neq e''$ ist. Nach der im vorigen schon mehrfach angewandten Methode ergibt sich, daß diese Festsetzungen in der Tat die Gültigkeit der fünf Ordnungseigenschaften nach sich ziehen. Wir nennen die in dieser Weise virtuell geordnete Spezies der Einschaltungselemente von M das *Kontinuum über M* und bezeichnen sie mit $K(M)$.

Offenbar sind alle Kontinua ähnlich; ihre Ordinalzahl, die, wie man ohne Schwierigkeit beweist, überall dicht und perfekt ist, bezeichnen wir mit $\varkappa$.

Wenn zu einem Einschaltungselement von M eine Teilung gehört, an [[4]]
der jedes Element von M teilnimmt, dann sprechen wir von einem *Einschaltungselement erster Ordnung* von M.

Wenn zu einem Einschaltungselement erster Ordnung von M eine Teilung gehört, an der jedes Element von M teilnimmt, und bei der die linke Teilspezies kein am weitesten rechts gelegenes Element besitzen kann, dann sprechen wir von einem *Einschaltungselement zweiter Ordnung* von M.

Wenn zu einem Einschaltungselement zweiter Ordnung von M eine Teilung gehört, an der jedes Element von M teilnimmt, und bei der rechts von einem beliebigen Elemente der linken Teilspezies ein weiteres Element der linken Teilspezies gelegen ist, dann sprechen wir von einem *Einschaltungselement dritter Ordnung erster Art* von M.

Wenn zu einem Einschaltungselement zweiter Ordnung von M eine Teilung gehört, an der jedes Element von M teilnimmt, und zwar *entweder* als am weitesten links gelegenes Element der rechten Teilspezies auftritt, *oder* weder ein am weitesten rechts gelegenes Element der linken Teilspezies noch ein am weitesten links gelegenes Element der rechten Teilspezies darstellen kann, dann sprechen wir von einem *Einschaltungselement dritter Ordnung zweiter Art* von M. [8])

Wenn zu einem Einschaltungselement dritter Ordnung von M eine Teilung gehört, an der jedes Element von M teilnimmt, und zwar *entweder* als am weitesten links gelegenes Element der rechten Teilspezies auftritt, *oder* links von einem Elemente der linken Teilspezies, *oder aber* rechts von einem Elemente der rechten Teilspezies gelegen ist, dann sprechen wir von einem *Einschaltungselement vierter Ordnung* von M.

Wenn für die Teilung t' des Elementes e' von $K(M)$ jedes links vom Elemente g_ϱ von M gelegene Element von M zur linken Teilspezies und jedes rechts von g_ϱ gelegene Element von M zur rechten Teilspezies gehört, dann sagen wir, daß *e' mit g_ϱ zusammenfällt*, und bezeichnen e' mit $z(g_\varrho)$. Statt $e \gtrdot z(g_\varrho)$ schreiben wir auch $e \gtrdot g_\varrho$, statt $e > z(g_\varrho)$ auch $e > g_\varrho$, statt $e = z(g_\varrho)$ auch $e = g_\varrho$, usw. Wenn e ein beliebiges Einschaltungselement von M vorstellt, so gilt für jedes ν, mit einer eventuellen einzigen, aufwärts beweglichen, Ausnahme, entweder die Beziehung $e > g_\nu$ oder die Beziehung $e < g_\nu$, und durch diese Beziehung ist e eindeutig bestimmt. Ebenfalls gilt für jedes ν, mit einer eventuellen einzigen, aufwärts beweglichen, Ausnahme, entweder die Beziehung $e \gtrdot g_\nu$ oder die Beziehung $e \lessdot g_\nu$, während e durch diese Beziehungen wiederum eindeutig bestimmt ist.

Unter den Einschaltungselementen von M sind die Einschaltungselemente erster Ordnung dadurch (notwendig und hinreichend) charakterisiert, daß nicht nur für jedes ν, mit einer eventuellen einzigen, aufwärts beweglichen, Ausnahme entweder die Beziehung $e > g_\nu$ oder die Beziehung $e < g_\nu$ gilt, sondern überdies für die eventuelle aufwärts bewegliche Ausnahme g_π entweder die Beziehung $e \geq g_\pi$ oder die Beziehung $e \leq g_\pi$ be-

[8]) Unter den Einschaltungselementen dritter Ordnung sind weder diejenigen erster Art notwendig auch zweiter Art, noch diejenigen zweiter Art notwendig auch erster Art.

[336]

steht. Diese Charakterisierung kann auch so formuliert werden, daß nicht nur für jedes ν, mit einer eventuellen einzigen, aufwärts beweglichen, Ausnahme entweder die Beziehung $e \gg g_\nu$ oder die Beziehung $e \ll g_\nu$ gilt, sondern überdies für die eventuelle aufwärts bewegliche Ausnahme g_ϱ entweder die Beziehung $e \geqq g_\varrho$ oder die Beziehung $e \leqq g_\varrho$ besteht[9]). ⟦5⟧

Unter den Einschaltungselementen erster Ordnung von M sind die Einschaltungselemente zweiter Ordnung dadurch (notwendig und hinreichend) charakterisiert, daß für jedes ν, mit einer eventuellen einzigen, aufwärts beweglichen, Ausnahme entweder die Beziehung $e > g_\nu$ oder die Beziehung $e < g_\nu$ gilt, während für die eventuelle aufwärts bewegliche Ausnahme g_σ die Beziehung $e \leq g_\sigma$ besteht. ⟦6⟧

Unter den Einschaltungselementen zweiter Ordnung von M sind die Einschaltungselemente dritter Ordnung erster Art dadurch (notwendig und hinreichend) charakterisiert, daß für jedes ν, mit einer eventuellen einzigen, aufwärts beweglichen, Ausnahme entweder die Beziehung $e \gg g_\nu$ oder die Beziehung $e \ll g_\nu$ gilt, während für die eventuelle aufwärts bewegliche Ausnahme g_τ die Beziehung $e \leq g_\tau$ besteht[10]). ⟦7⟧

Unter den Einschaltungselementen zweiter Ordnung von M sind die Einschaltungselemente dritter Ordnung zweiter Art dadurch (notwendig und hinreichend) charakterisiert, daß für jedes ν entweder die Beziehung $e > g_\nu$ oder die Beziehung $e < g_\nu$ oder aber die Beziehung $e = g_\nu$ gilt. ⟦8⟧

Unter den Einschaltungselementen dritter Ordnung von M sind die Einschaltungselemente vierter Ordnung dadurch (notwendig und hinreichend) charakterisiert, daß für jedes ν entweder die Beziehung $e \gg g_\nu$ oder die Beziehung $e \ll g_\nu$ oder aber die Beziehung $e = g_\nu$ gilt[11]). ⟦9⟧

§ 8. Sei S eine geordnete Spezies der Ordinalzahl $2 \cdot \eta$, deren freie Intervalle durch die Fundamentalreihe $i_1, i_2, i_3, \ldots$ abgezählt werden, und sei a_ν bzw. b_ν das linke bzw. rechte Endelement von i_ν. In S nehmen wir

[9]) Im Falle, daß für M die „natürlich geordnete" Spezies der endlichen Dualbrüche zwischen 0 und 1 gewählt wird, stellen die Einschaltungselemente erster Ordnung von M die Spezies der mit einem unendlichen Dualbruch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ (wo jedes $a_n = 0$ oder $= 1$ ist) „zusammenfallenden" unendlichen Dualbrüche $\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n}$ (wo jedes $b_n = 0$ oder $= 1$ ist) dar. Vgl. Fußnote [6]).

[10]) Im Falle, daß für M die „natürlich geordnete" Spezies der endlichen Dualbrüche zwischen 0 und 1 gewählt wird, stellen die Einschaltungselemente dritter Ordnung erster Art von M, bei denen eine linke Teilspezies mit wenigstens einem Elemente auftritt, die dual entwickelbaren reellen Zahlen > 0 und ≤ 1 dar. Vgl. das Beispiel des § 5.

[11]) Man vergleiche in diesem Zusammenhang meinen Aufsatz: „*Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwickelung?*", Math. Annalen **83**, S. 201—210, wo die Trag- ⟦10⟧

eine „Einschaltungsteilung“ vor, d. h. wir zerlegen die Spezies der i_ν durch eine unbegrenzte Folge von freien Wahlen in eine linke und eine rechte Teilspezies (wobei ein beliebiges Element der linken einem beliebigen Elemente der rechten Teilspezies vorangeht). Die Spezies der Einschaltungsteilungen t von S ordnen wir virtuell, indem wir folgende Festsetzungen treffen: Wir schreiben $t' \lessdot t''$, wenn ein i_ν angegeben werden kann, das zur rechten Teilspezies von t' und zur linken Teilspezies von t'' gehört; $t' \underline{\lessdot} t''$, wenn $t' \gtrdot t''$ unmöglich ist; $t' < t''$, wenn $t' \underline{\lessdot} t''$ und überdies $t' \neq t''$ ist. Nach der im vorigen schon mehrfach angewandten Methode ergibt sich, daß diese Festsetzungen in der Tat die Gültigkeit der fünf Ordnungseigenschaften nach sich ziehen. Wir nennen die in dieser Weise virtuell geordnete Spezies der Einschaltungsteilungen von S das *Diskontinuum über* S und bezeichnen sie mit $D(S)$.

Offenbar sind alle Diskontinua ähnlich; ihre Ordinalzahl, die, wie man ohne Schwierigkeit beweist, nirgends dicht und perfekt ist, bezeichnen wir mit δ.[12])

Wenn bei einer Einschaltungsteilung von S jedes i_ν *entweder* als am weitesten links gelegenes Intervall der rechten Teilspezies *oder* als am weitesten rechts gelegenes Intervall der linken Teilspezies auftritt *oder aber* weder ein am weitesten rechts gelegenes Intervall der linken Teilspezies noch ein am weitesten links gelegenes Intervall der rechten Teilspezies

---

weite der obigen Unterscheidungen zum Ausdruck kommt. Zu diesem Aufsatz ist zu bemerken, daß die aus dem Zusammenhang ersichtliche Bedeutung des daselbst S. 205, Z. 10 v. u. und Z. 1 v. u. befindlichen Wortes „verschieden“ nicht der später Math.
[[11]] Annalen **93**, S. 246 für die intuitionistische Mathematik aufgestellten Definition des Begriffes „verschieden“ entspricht.

[12]) Im Falle, daß S von der „natürlich geordneten“ Spezies der speziellen endlichen Ternalbrüche $\sum_{n=1}^{r} a_n 3^{-n}$, wo für a_r entweder 1 oder 2, für jedes a_ν $(\nu < r)$ dagegen entweder 0 oder 2 gewählt werden darf, geliefert wird, stellen die Einschaltungsteilungen von S die unendlichen Ternalbrüche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$, wo für jedes a_n entweder 0 oder 2 gewählt werden darf, dar (vgl. Fußnote [7])).

Im Falle, daß S von der „natürlich geordneten“, durch eine Fundamentalreihe von positiven ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ (alle ≥ 2) bestimmten Spezies der echten Brüche

$$\frac{2(z_1-1)}{2n_1-1} + \frac{2(z_2-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)} + \cdots + \frac{2(z_\nu-1)}{(2n_1-1)\ldots(2n_\nu-1)}$$

und

$$\frac{2(z_1-1)}{2n_1-1} + \frac{2(z_2-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)} + \cdots + \frac{2z_\nu}{(2n_1-1)\ldots(2n_\nu-1)},$$

wo z_ν eine ganze positive Zahl $\leq n_\nu - 1$, für jedes $\sigma < \nu$ jedoch z_σ eine ganze posi-

[[338]]

darstellen kann, dann sprechen wir von einer *Einschaltungsteilung ersten Grades* von S.

Wenn bei einer Einschaltungsteilung ersten Grades von S jedes i_ν *entweder* als am weitesten links gelegenes Intervall der rechten Teilspezies *oder* als am weitesten rechts gelegenes Intervall der linken Teilspezies auftritt *oder aber* links von einem Intervall der linken Teilspezies *oder schließlich* rechts von einem Intervall der rechten Teilspezies gelegen ist, dann sprechen wir von einer *Einschaltungsteilung zweiten Grades* von S.

Wenn für das Element t' von $D(S)$ das freie Intervall i_ϱ zur rechten, jedes links von i_ϱ gelegene freie Intervall aber zur linken Teilspezies gehört, dann sagen wir, daß *t' mit a_ϱ zusammenfällt*, und bezeichnen t' mit $z(a_\varrho)$. Wenn für das Element t'' von $D(S)$ das freie Intervall i_σ zur linken, jedes rechts von i_σ gelegene freie Intervall aber zur rechten Teilspezies gehört, dann sagen wir, daß *t'' mit b_σ zusammenfällt*, und bezeichnen t'' mit $z(b_\sigma)$. Statt $t \lessdot z(a_\varrho)$ bzw. $t \gtrdot z(b_\sigma)$ bzw. $t < z(a_\varrho)$ bzw. $t > z(b_\sigma)$ bzw. $t = z(a_\varrho)$ bzw. $t = z(b_\sigma)$ usw. schreiben wir auch $t \lessdot a_\varrho$ bzw. $t \gtrdot b_\sigma$ bzw. $t < a_\varrho$ bzw. $t > b_\sigma$ bzw. $t = a_\varrho$ bzw. $t = b_\sigma$ usw.

Wenn für das Element t von $D(S)$ das freie Intervall i_τ zur rechten (bzw. linken) Teilspezies gehört, dann schreiben wir $t < i_\tau$ (bzw. $t > i_\tau$). Wenn $t < i_\tau$ (bzw. $t > i_\tau$), aber i_τ unmöglich ein am weitesten links gelegenes Intervall der rechten Teilspezies (bzw. ein am weitesten rechts gelegenes Intervall der linken Teilspezies) von t darstellen kann, dann schreiben wir $t \lessdot i_\tau$ (bzw. $t \gtrdot i_\tau$). Wenn i_τ für t rechts von einem Intervall der rechten (bzw. links von einem Intervall der linken) Teilspezies gelegen ist, dann schreiben wir $t \lll i_\tau$ (bzw. $t \ggg i_\tau$).

Wenn t eine beliebige Einschaltungsteilung von S vorstellt, so gilt für jedes ν entweder die Beziehung $t > i_\nu$ oder die Beziehung $t < i_\nu$ und durch diese Beziehungen ist t eindeutig bestimmt.

Unter den Einschaltungsteilungen von S sind die Einschaltungsteilungen ersten Grades dadurch (notwendig und hinreichend) charakteri-

---

tive Zahl $\leq n_\sigma$ ist, geliefert wird, stellen die Einschaltungsteilungen von S die reellen Zahlen

$$\frac{2(z_1-1)}{2n_1-1}+\frac{2(z_2-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)}+\frac{2(z_3-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)(2n_3-1)}+\cdots$$

dar, wo jedes z_σ eine ganze positive Zahl $\leq n_\sigma$ ist.

Bezeichnen wir also mit $G_{n_1 n_2 n_3 \ldots}$, wo die n_ν eine Fundamentalreihe von positiven ganzen Zahlen ≥ 2 bilden, die Menge der unbegrenzten Folgen $z_1, z_2, z_3, \ldots$, wo jedes z_σ eine positive ganze Zahl $\leq n_\sigma$ ist, so geht aus der Ähnlichkeit aller Diskontinua die Gleichmächtigkeit von $G_{n_1 n_2 n_3 \ldots}$ und $G_{2\,2\,2\ldots}$ hervor.

[[339]]

siert, daß für jedes ν eine der Beziehungen $t \gg i_\nu$, $t \ll i_\nu$, $t = a_\nu$, $t = b_\nu$ besteht.

Unter den Einschaltungsteilungen ersten Grades von S sind die Einschaltungsteilungen zweiten Grades dadurch (notwendig und hinreichend) charakterisiert, daß für jedes ν eine der Beziehungen $t \ggg i_\nu$, $t \lll i_\nu$, $t = a_\nu$, $t = b_\nu$ besteht.

(Eingegangen am 14. 3. 1925.)

Berichtigung

zu dem Aufsatz von L. E. J. Brouwer: „Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. I“ in Band **93**, S. 244—257.

S. 254, Z. 2 v. o. statt „in solcher Weise, daß die Spezies N' der β mit N halbidentisch ist“ lies „in solcher Weise, daß gleichen Elementen α gleiche Elemente β entsprechen und die Spezies N' der β mit N halbidentisch ist“.

Mathematics. — "*Intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriffes.*" **1926 B**
By Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of May 29, 1926).

§ 1. *Definition der katalogisiertkompakten Spezies.*

Unter einer *Teilmenge der Menge M* verstehen wir im folgenden eine derweise aus M entstehende Menge, dass mittels einer unbeschränkten Folge von Entscheidungen der Reihe nach für jede ungehemmte endliche Wahlfolge von M entschieden wird, entweder dass sie ungehemmt bleibt, oder dass sie gehemmt wird. Der Mengenbegriff erleidet hierbei gegenüber der Math. Ann. 93, S. 244 gegebenen Definition insofern ⟦1⟧ eine Erweiterung, dass die Entscheidung zwischen Gehemmtheit und Ungehemmtheit nicht mehr von vornherein für alle endlichen Wahlfolgen durch ein Gesetz gänzlich festgelegt zu sein braucht.

Unter einer *katalogisierten Folge* verstehen wir eine unbegrenzte Folge $p_1, p_2, \ldots,$ in welcher zu je zwei Elementen p_{ν_1} und p_{ν_2} ein Abstand $\varrho(p_{\nu_1}, p_{\nu_2}) \geqq 0$ (aber nicht notwendig entweder > 0 oder $= 0$) definiert ⟦2⟧ wird, der folgenden Bedingungen genügt: Es ist stets $\varrho(p_\nu, p_\nu) = 0$ und $\varrho(p_{\nu_1}, p_{\nu_2}) \leqq \varrho(p_{\nu_1}, p_{\nu_3}) + \varrho(p_{\nu_2}, p_{\nu_3})$. Weiter existiert zu jedem n ein μ_n und ein ν_n, so dass für $\nu > \nu_n$ jedes p_ν in einer Entfernung $\leqq a <\!\circ\, 4^{-n}$ von $s_{\mu_n} = \mathfrak{S}(p_1, p_2, \ldots, p_{\mu_n})$ gelegen ist. Schliesslich ist jedes Element p_{α_n} von s_{μ_n} entweder ein *β_n-Element* oder ein *α_n-Element* (niemals aber beides gleichzeitig); im ersteren Falle ist für $\nu > m(\eta_n)$ jedes p_ν in einer Entfernung $\geqq \frac{5}{4} \cdot 4^{-n}$ von p_{α_n} gelegen, im letzteren Falle gibt es eine unbegrenzte Folge von verschiedenen p_ν in einer Entfernung $\leqq b <\!\circ\, \frac{3}{2} \cdot 4^{-n} \left(b \circ\!> \frac{5}{4} \cdot 4^{-n}\right)$ von p_{α_n}. (Demzufolge besitzt dann auch ein beliebiges p_ν entweder die für die α_n oder die für die β_n charakteristische Eigenschaft.)

Was wir auf dieser Grundlage unter einer *positiv-konvergenten unbegrenzten Folge* (bzw. unter *zusammengehörigen positiv-konvergenten unbegrenzten Folgen*) von verschiedenen Elementen einer katalogisierten Folge zu verstehen haben, ist ohne weiteres klar. ⟦3⟧

Die Spezies S der *Spezies zusammengehöriger positiv-konvergenter unbegrenzter Folgen von verschiedenen Elementen* einer katalogisierten Folge r ist *kompakt*, d.h. wenn wir in auf der Hand liegender Weise ide Entfernung je zweier Elemente von S definieren, so konvergiert jede positiv-konvergente Folge von Elementen von S positiv gegen ein Element von S. Weiter ist S *in bezug auf* F *katalogisiert*, d.h. die Entfernung zwischen S und einem beliebigen Elemente p_ν von F lässt sich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit approximieren (ohne dass jedoch stets ein Element q von S angegeben werden kann so dass $\varrho(q, p_\nu) = \varrho(S, p_\nu)$). Die Spezies S *„fällt zusammen"* mit einer kompakten finiten Menge M von positiv-konvergenten unbegrenzten Folgen von (eventuell teilweise identischen) Elementen von F, welche erhalten werden, indem in solcher Weise der Reihe nach ein α_1-Element, ein α_2-Element, u.s.w. gewählt werden, dass nach der Wahl eines bestimmten α_n-Elementes α_n^0 jedes α_{n+1}-Element in einer Entfernung $\lesssim 2.4^{-n}$ von α_n^0 wählbar und jedes α_{n+1}-Element in einer Entfernung $\gtrsim 3.4^{-n}$ von α_n^0 unwählbar ist. Die Folge F_1, welche der Reihe nach die α_1-Elemente, die α_2-Elemente, u.s.w. enthält, ist wiederum katalogisiert (wobei man diesmal ohne die Analoga der β_n-Elemente auskommen kann) und die Spezies der Spezies zusammengehöriger positiv-konvergenter unbegrenzter Folgen von verschiedenen Elementen von F_1 fällt zusammen mit S. Jede in derselben Weise wie S mittels einer katalogisierten Folge definierte Spezies, und überdies die leere Spezies, heisst eine *katalogisiert-kompakte Spezies*.

Sei S' eine in bezug auf F_1 katalogisierte kompakte Teilspezies von S (also z.B. die „Abschliessung" einer beliebigen Teilmenge von M; übrigens werden wir auch die leere Spezies zu den in bezug auf F_1 katalogisierten kompakten Teilspezies von S rechnen). Jedem α_n-Elemente ${}_1\alpha_n$ geben wir entweder das Prädikat eines α_n'*-Elementes* (in welchem Falle es Elemente von S' in einer Entfernung $\lesssim c <\circ \frac{3}{2} \cdot 4^{-n}$ ($c \circ\!> \frac{5}{4} \cdot 4^{-n}$) von ${}_1\alpha_n$ gibt) oder das Prädikat eines β_n'*-Elementes* (in welchem Falle jedes Element von S' in einer Entfernung $\gtrsim \frac{5}{4} \cdot 4^{-n}$ von ${}_1\alpha_n$ gelegen ist), mit der Massgabe, dass die beiden Prädikate sich gegenseitig ausschliessen. Sodann bestimmen wir eine mit S' zusammenfallende Teilmenge M' von M, für welche in solcher Weise der Reihe nach ein α_1'-Element, ein α_2'-Element, u. s. w. gewählt werden, dass nach der Wahl eines bestimmten α_n'-Elementes ${}_0\alpha_n'$ jedes nach derselben für M unwählbare α_{n+1}'-Element sowie jedes in einer Entfernung $\gtrsim 3.4^{-n}$ von ${}_0\alpha_n'$ gelegene α_{n+1}'-Element unwählbar und jedes in einer Entfernung $\lesssim 2.4^{-n}$ von ${}_0\alpha_n'$ gelegene α_{n+1}'-Element wählbar ist. Die Folge F_1', welche der Reihe nach die α_1'-Elemente, die α_2'-Elemente, u.s.w. enthält, ist wiederum katalogisiert (wobei man wiederum ohne die Analoga der β_n-Elemente auskommen kann) und die Spezies der Spezies zusammengehöriger positiv-konvergenter unbegrenzter Folgen von verschiedenen Elementen von F_1' fällt zusammen mit S'.

In analoger Weise stellt sich heraus, dass eine in bezug auf F_1' katalogisierte kompakte Teilspezies S'' von S' mit einer Teilmenge M'' von

M' zusammenfällt; demzufolge ist sie ebenfalls in bezug auf F_1 (sowie in bezug auf F und in bezug auf S) katalogisiert. [[4]]

§ 2. *Ein Satz über Erweiterung von Trennungen in katalogisiertkompakten Spezies.*

In Anschluss an eine vorgegebene in bezug auf F_1 katalogisierte kompakte Teilspezies S' von S bestimmen wir in folgender Weise eine Teilmenge $M_n'(S')$ von M: Jedem a_{n+2}-Elemente ${}_1a_{n+2}$ sprechen wir entweder das Prädikat eines a''_{n+2}-*Elementes* zu (in welchen Falle es in einer Entfernung $\geqq 4^{-n}+4^{-n-1}$ von S' gelegen ist) oder das Prädikat eines β''_{n+2}-*Elementes* (in welchem Falle es einen Abstand $\lessdot 4^{-n}+2.4^{-n-1}$ von S' besitzt). Alsdann wird $M_n'(S')$ von denjenigen zu M gehörigen Folgen, deren $(n+2)$-tes Element ein a''_{n+2}-Element ist, gebildet. Jedes Element der Abschliessung $A_n(S')$ von $M_n'(S')$ besitzt einen Abstand $\geqq 4^{-n}$ von S', während jedes in einer Entfernung $\geqq 4^{-n}+2.4^{-n-1}+4^{-n-2}$, a fortiori also jedes in einer Entfernung $\geqq 2.4^{-n}$ von S' gelegene Element von S zu $A_n(S')$ gehört. Sei $M_n(S')$ eine nach dem Verfahren des § 1 konstruierte mit $A_n(S')$ zusammenfallende Teilmenge von M, und sei jeder Teilmenge τ von $M_n(S')$ eine positive rationale Zahl ϱ_τ zugeordnet. Alsdann bestehen, *weil die Spezies der τ eine finite Menge darstellt*, nach dem in diesen Proceedings XXVII, S. 192 (vgl. auch S. 646) hergeleiteten Satze, für ϱ_τ nur endlichviele Werte und unter denselben ein positiver, rationaler Minimalwert. [[5]]

Wir sagen, dass die Teilspezies a von S zwischen den Teilspezies β und γ von S eine *Sprungweite* b aufweist, wenn in jeder endlichen Folge von Elementen von S, von denen das erste zu β, das letzte zu γ und alle anderen zu a gehören, zwei aufeinanderfolgende Elemente vorkommen, deren Abstand $\geqq b$ ist. Im Falle, dass a, β und γ kompakt und in bezug auf F_1 katalogisiert sind, besteht offenbar eine Maximalsprungweite von a zwischen β und γ, welche sich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit approximieren lässt.

Seien A und B in bezug auf F_1' katalogisierte kompakte Teilspezies von S' und C und D in bezug auf F_1 katalogisierte kompakte Teilspezies von S, während von den Spezies A, B und C je zwei einen Abstand $\circ\!> 0$ besitzen, und seien A und B in S' durch C *getrennt*, womit wir (für Spezies S, S', A, B und C der angegebenen Art) meinen, dass jede in bezug auf F_1' katalogisierte kompakte Teilspezies S'' von S', welche eine Entfernung $\circ\!> 0$ von C besitzt, eine Sprungweite (mithin auch eine rationale Sprungweite) $\circ\!> 0$ zwischen A und B aufweist[1]). Alsdann

[1]) Dieser "*schwachen Trennung*" lassen sich an die Seite stellen:

1. Die „*starke Trennung*", welche stattfindet, wenn jedes in einer Entfernung $\circ\!> 0$ von C gelegene Element von S' entweder mit dem Prädikate eines g_A-Elementes, oder mit

können wir nach der obigen Methode eine mit einer in bezug auf Γ'_1 katalogisierten kompakten Teilspezies von S' zusammenfallende Teilmenge ${}_{S'}M_n(C)$ von M' bestimmen, so dass jedes Element von ${}_{S'}M_n(C)$ einen Abstand $\geqq 4^{-n}$ von C besitzt, während jedes in einer Entfernung $\geqq 2.4^{-n}$ von C liegende Element von S' mit einem Elemente von ${}_{S'}M_n(C)$ zusammenfällt. Jeder Teilmenge von ${}_{S'}M_n(C)$ ist als Sprungweite ihrer Abschliessung zwischen A und B eine positive rationale Zahl zugeordnet; diese positive rationale Zahl besitzt nach dem ersten Absatze dieses § einen Minimalwert σ_n, welcher als Sprungweite der Abschliessung einer *beliebigen* Teilmenge von ${}_{S'}M_n(C)$ zwischen A und B, mithin insbesondere als Sprungweite einer *beliebigen* in einer Entfernung $\geqq 2.4^{-n}$ von C gelegenen, in bezug auf Γ'_1 katalogisierten kompakten Teilspezies von S' zwischen A und B auftritt. Wenn n hinreichend gross gewählt wird, dürfen wir, wenn wie immer $\varrho(X, Y)$ den Abstand zwischen X und Y vorstellt, annehmen, dass σ_n, sowie 2.4^{-n+1}, $< \varrho(A, B)$, $< \varrho(A, C)$ und $< \varrho(B, C)$ sind.

Sei A_1 (bzw. B_1) eine solche gänzlich in einem Abstande $<\circ \frac{1}{4}\sigma_n$ von S' gelegene, in bezug auf Γ_1 katalogisierte kompakte Teilspezies von S, dass jedes in einer Entfernung $< \frac{1}{4}\sigma_n$ von A_1 (bzw. von B_1) gelegene Element von S' zu A (bzw. zu B) gehört, so dass A_1 (bzw. B_1) auch gänzlich in einem Abstande $<\circ \frac{1}{4}\sigma_n$ von A (bzw. von B) gelegen ist. Sei T eine gänzlich in einer Entfernung $<\circ \frac{1}{4}\sigma_n$ von S' und gänzlich in einer Entfernung $\geqq 2.4^{-n} + \frac{1}{4}\sigma_n$ von C gelegene, in bezug auf Γ_1 katalogisierte kompakte Teilspezies von S. *Alsdann weist T zwischen A_1 und B_1 eine Sprungweite $\frac{1}{2}\sigma_n$ auf.* Wenn wir nämlich eine endliche Folge von Elementen von S betrachten, von denen das erste zu A_1,
[[6]] das letzte zu B_1 und alle anderen zu T gehören, so können wir, indem

dem Prädikate eines g_B-Elementes (welche Prädikate sich gegenseitig ausschliessen) versehen ist, mit der Massgabe, dass jedes Element von A (bzw. von B) ein g_A-Element (bzw. ein g_B-Element) ist, und dass zu jedem $\varepsilon_1 \circ\!> 0$ ein solches $\varepsilon_2 \circ\!> 0$ bestimmt werden kann, dass jedes in einer Entfernung $\leqq \varepsilon_2$ von einem in einer Entfernung $\geqq \varepsilon_1$ von C gelegenen g_A-Elemente (bzw. g_B-Elemente) liegende Element von S' ebenfalls ein g_A-Element (bzw. g_B-Element) ist.

2. Die *"mittlere Trennung"*, welche stattfindet, wenn jedes in einer Entfernung $\circ\!> 0$ von C gelegene Element von S' entweder die t_A-Eigenschaft oder die t_B-Eigenschaft (welche sich übrigens nicht ausschliessen) besitzt. Dabei sagen wir, dass ein Element q' von S' die t_A-Eigenschaft (bzw. die t_B-Eigenschaft) besitzt, wenn ein $\varepsilon(q') \circ\!> 0$ existiert, so dass jede in bezug auf Γ'_1 katalogisierte kompakte Teilspezies von S', welche gänzlich in einer Entfernung $\leqq \varepsilon(q')$ von q' gelegen ist, in S' durch C von A (bzw. von B) "schwach getrennt" wird.

[[344]]

wir jedes Element der Folge einer passenden Verrückung $<\!\circ \frac{1}{4}\sigma_n$ unterziehen, eine endliche Folge von Elementen von S erzeugen, von denen das erste zu A, das letzte zu B und alle anderen zu S' gehören und in einer Entfernung $\circ\!> 2.4^{-n}$ von C liegen, in welcher mithin zwei aufeinanderfolgende Elemente vorkommen, deren Abstand $\geqq \sigma_n$ ist.

Sei R eine alle Elemente von D in einem Abstande $\leqq \frac{1}{8}\sigma_n$ von S' enthaltende und gänzlich in einer Entfernung $<\!\circ \frac{1}{4}\sigma_n$ von S' gelegene, in bezug auf $/_1$ katalogisierte kompakte Teilspezies von D; seien A_1 und B_1 den im vorigen Absatz aufgestellten Forderungen entsprechend, und überdies innerhalb R gewählt; und sei C_1 eine alle Elemente von D in einem Abstande $\leqq 2.4^{-n} + \frac{1}{4}\sigma_n$ von C enthaltende, in einem Abstande $\circ\!> \frac{1}{4}\sigma_n$ von A sowie von B gelegene, in bezug auf $/_1$ katalogisierte kompakte Teilspezies von D. Alsdann besitzen erstens je zwei der Spezies A_1, B_1 und C_1 einen Abstand $\circ\!> 0$ voneinander, zweitens sind nach dem vorigen Absatze *A_1 und B_1 in R durch C_1 getrennt.*

Mit dem obigen ist folgende Eigenschaft bewiesen: *Sei S eine katalogisiertkompakte Spezies; S' und D in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S; A und B je eine Relativumgebung von S' enthaltende, in einem Abstande $\circ\!> 0$ voneinander gelegene, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S'; C eine in einem Abstande $\circ\!> 0$ von A sowohl wie von B gelegene, A und B in S' trennende, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S; C_1 eine alle Elemente von D in einem Abstande $\leqq \alpha_1$ von C enthaltende, in einem Abstande $\circ\!> \alpha_2 \circ\!> 0$ von A sowohl wie von B gelegene, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von D; n und ein zugehöriges $\sigma(n)$ (d.h. eine für eine beliebige in einer Entfernung $\geqq 2.4^{-n}$ von C gelegene, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S' bestehende Sprungweite zwischen A und B) so gewählt, dass je zwei der Spezies A, B und C in einer Entfernung $\geqq \sigma_n$ und $\geqq 2.4^{-n+1}$ voneinander gelegen sind und überdies die Ungleichungen $2.4^{-n} + \frac{1}{4}\sigma_n \leqq \alpha_1$ und $\frac{1}{4}\sigma_n <\!\circ \alpha_2$ bestehen; R eine alle Elemente von D in einem Abstande $\leqq \frac{1}{8}\sigma_n$ von S' enthaltende, gänzlich innerhalb einer Entfernung $<\!\circ \frac{1}{4}\sigma_n$ von S' gelegene, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von D; A_1 (bzw. B_1) eine solche in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von R, dass jedes in einer Entfernung $\leqq \frac{1}{4}\sigma_n$ von A_1 (bzw. B_1) gelegene Element von S' zu A (bzw. B) gehört. Alsdann sind A_1 und B_1 in R durch C_1 getrennt.*

§ 3. *Der Begriff des Dimensionsgrades für katalogisiertkompakte Spezies.*

Wir sagen, dass die kompaktkatalogisierte Spezies S den *unteren Dimensionsgrad* n besitzt, wenn in S zwei in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies A und B angegeben werden können, welche in einem Abstande $\circ\!> 0$ voneinander gelegen sind und die Eigenschaft besitzen, dass jede A und B in S trennende[2]), in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S den unteren Dimensionsgrad $n-1$ besitzt. Weiter sagen wir, dass S den *unteren Dimensionsgrad Null bzw.* ω besitzt, wenn ein Element von S angegeben werden kann, bzw. wenn S für jede natürliche Zahl n den unteren Dimensionsgrad n besitzt.

Wir sagen, dass die kompaktkatalogisierte Spezies S den *oberen Dimensionsgrad* n besitzt, wenn je zwei in einem Abstande $\circ\!> 0$ voneinander gelegene, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S durch eine den oberen Dimensionsgrad $n-1$ besitzende, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S, in S getrennt werden können. Weiter sagen wir, dass S den *oberen Dimensionsgrad Null bzw.* ω besitzt, wenn S zwischen je zwei in einem Abstande $\circ\!> 0$ voneinander gelegenen, in bezug auf S katalogisierten kompakten Teilspezies von S eine Sprungweite $\circ\!> 0$ aufweist bzw. wenn je zwei in einem Abstande $\circ\!> 0$ voneinander gelegene, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S durch eine einen endlichen oberen Dimensionsgrad besitzende, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S, in S getrennt werden können.

Wenn eine kompaktkatalogisierte Spezies sowohl den oberen wie den unteren Dimensionsgrad n bzw. 0 bzw. ω besitzt, so sagen wir, dass sie den *allgemeinen Dimensionsgrad* n *bzw.* 0 *bzw.* ω besitzt.

Den obigen Definitionen lässt sich leicht eine von der Rekurrenz unabhängige Form geben. Dazu denken wir uns die Spezies S von zwei Personen P und Q der „*Dimensionsoperation*" unterzogen, worunter wir folgendes verstehen: P wählt in S zwei in einem Abstande $\circ\!> 0$ voneinander gelegene, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies A und B, worauf Q die Spezies A und B in S trennt durch eine in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies S_1 von S. Sodann wählt P zwei in einem Abstande $\circ\!> 0$ voneinander gelegene, in bezug auf S_1 katalogisierte kompakte Teilspezies A_1 und B_1 von S_1, worauf Q die Spezies A_1 und B_1 in S_1 trennt durch eine in bezug auf S_1 katalogisierte kompakte Teilspezies S_2 von S_1. Dieser Prozess wird unbeschränkt wiederholt, bis eventuell eine Spezies S_h auftritt, welche zwischen je zwei in einem Abstande $\circ\!> 0$ voneinander gelegene, in bezug auf S_h katalogisierten kompakten Teilspezies von S_h eine Sprungweite $\circ\!> 0$ aufweist.

---

[2]) Zu je zwei in einem Abstande $\circ\!> 0$ voneinander gelegenen, in bezug auf S katalogisierten kompakten Teilspezies von S kann *immer eine* in einem Abstande $\circ\!> 0$ sowohl von A wie von B gelegene, in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S angegeben werden, welche A und B in S trnent.

Wenn nun Q unabhängig von den Wahlen der A_ν und B_ν (inklusive A und B) dafür sorgen kann, dass eine Spezies S_h auftritt, deren $h \leq n$, so sagen wir, dass S den oberen Dimensionsgrad n besitzt. Wenn dagegen P unabhängig von den Wahlen der S_ν dafür sorgen kann, dass keine Spezies S_h auftritt, deren $h < n$, so sagen wir, dass S den unteren Dimensionsgrad n besitzt [3]).

§ 4. *Die Dimensionsgrade der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.*

SATZ 1. *Jedes n-dimensionale Fragment S* (worunter wir hier die [[7]]
„vereinigende" katalogisiertkompakte Punktkernspezies der n-dimensionalen Elemente von S verstehen) *besitzt den oberen Dimensionsgrad n.*

BEWEIS. Nachdem P in S die Spezies A und B gewählt hat, bestimmt Q eine so dichte simpliziale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von S, dass er auf Grund derselben eine Gruppe g von Grundsimplexen von $\mathfrak{Z}$ und zwei Grössen $a \circ\!> 0$ und $b \circ\!> 0$ bestimmen kann mit der Eigenschaft, dass jedes in einem Abstande $\leq a$ von A gelegene Grundsimplex von $\mathfrak{Z}$ zu g gehört und jedes zu g gehörige Grundsimplex von $\mathfrak{Z}$ einen Abstand $\geqq b$ von B besitzt. Die Gruppe g bildet ein n-dimensionales Fragment, deren A *und* B *in* S *trennende* Grenze, welche von Q als S_1 gewählt wird, aus der „vereinigenden" katalogisiertkompakten Puntkernspezies einer endlichen Anzahl von geschlossenen $(n-1)$-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeiten besteht, mithin ein $(n-1)$-dimensionales Fragment bildet (in welchem übrigens mehrere Elementseiten, welche als verschieden zu betrachten sind, zusammenfallen können). Falls darauf P die Spezies A_1 und B_1 im selben Teilkontinuum von S_1 wählt, bestimmt Q eine so dichte simpliziale Zerlegung $\mathfrak{Z}_1$ von S_1, dass er auf Grund derselben eine Gruppe g_1 von Grundsimplexen von $\mathfrak{Z}_1$ und zwei Grössen $a_1 \circ\!> 0$ und $b_1 \circ\!> 0$ bestimmen kann mit der Eigenschaft dass jedes in einem Abstande $\leq a_1$ von A_1 gelegene Grundsimplex von $\mathfrak{Z}_1$ zu g_1 gehört und jedes zu g_1 gehörige Grundsimplex von $\mathfrak{Z}_1$ einen Astand $\geqq b_1$ von B_1 besitzt. Die Gruppe g_1 bildet ein $(n-1)$-dimensionales Fragment, deren A_1 *und* B_1 *in* S_1 *trennende* Grenze, welche von Q als S_2 gewählt wird, aus der „vereinigenden" katalogisiertkompakten Punktkernspezies einer endlichen Anzahl von geschlossenen $(n-2)$-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeiten besteht, mithin ein $(n-2)$-dimensionales Fragment bildet (in welchem übrigens wieder mehrere Elementseiten, welche als verschieden zu betrachten sind, zusammenfallen können). In dieser Weise fortfahrend, ge-

[3]) Die im § 3 aufgestellten Definitionen bilden mit der im § 4 enthaltenen Beweisführung eine intuitionistische Ausarbeitung der in diesen Proceedings Bd. XXVII, S. 636—638 [[8]]
gegebenen Variante zur Einführung des "*natürlichen Dimensionsbegriffes*". Ich benutze diese Gelegenheit, um darauf hinzuweisen, dass a. a. O. S. 636 Z. 13—14 anstatt: *jede zusammenhängende Teilspezies von* π, *welche sowohl mit* ρ *wie mit* ρ' *Punkte gemeinsam hat*, zu lesen ist: *jede zwischen* ρ *und* ρ' *zusammenhängende Teilspezies von* π, *welche sowohl mit* ρ *wie mit* ρ' *Punkte gemeinsam hat.*

langt Q schliesslich zu einem aus endlichvielen Punkten bestehenden S_n, es sei denn, dass der Prozess schon früher dadurch beendet wurde, dass
[[9]] P einmal A_ν und B_ν nicht in demselben Teilkontinuum von S_ν wählte.

SATZ 2. *Jede kompakte Teilspezies S eines n-dimensionalen Fragmentes F, welche in bezug auf F katalogisiert ist und ein Grundsimplex G einer simplizialen Zerlegung von F enthält, besitzt den unteren Dimensionsgrad n.*

BEWEIS. Seien $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$ die Eckpunkte eines Grundsimplexes einer simplizialen Zerlegung von G, das von allen Seiten von G einen Abstand $\circ\!> 0$ besitzt. Alsdann wählt P für A (bzw. B) eine in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S, welche für gewisse Grössen ε und $\varepsilon' \circ\!> 0$ alle in einer Entfernung $\lessapprox \varepsilon$ von E_1 (bzw. vom Simplex $E_2 E_3 \ldots E_{n+1}$) gelegenen Punktkerne von S enthält und eine Entfernung $\gtrapprox \varepsilon'$ vom Simplex $E_2 E_3 \ldots E_{n+1}$ (bzw. von E_1) besitzt, wobei dafür gesorgt wird, dass A und B in einer Entfernung $\circ\!> 0$ voneinander liegen; für A_1 (bzw. B_1) eine in bezug auf S_1 katalogisierte kompakte Teilspezies von S_1, welche für gewisse Grössen ε_1 und $\varepsilon'_1 \circ\!> 0$ alle in einer Entfernung $\lessapprox \varepsilon_1$ vom Segment $E_1 E_2$ (bzw. vom Simplex $E_1 E_3 \ldots E_{n+1}$) gelegenen Punktkerne von S_1 enthält und eine Entfernung $\gtrapprox \varepsilon'_1$ vom Simplex $E_1 E_3 \ldots E_{n+1}$ (bzw. vom Segment $E_1 E_2$) besitzt, wobei dafür gesorgt wird, dass A_1 und B_1 in einer Entfernung $\circ\!> 0$ voneinander liegen; für A_2 (bzw. B_2) eine in bezug auf S_2 katalogisierte kompakte Teilspezies von S_2, welche für gewisse Grössen ε_2 en $\varepsilon'_2 \circ\!> 0$ alle in einer Entfernung $\lessapprox \varepsilon_2$ vom Simplex $E_1 E_2 E_3$ (bzw. vom Simplex $E_1 E_2 E_4 \ldots E_{n+1}$) gelegenen Punktkerne van S_2 enthält und eine Entfernung $\gtrapprox \varepsilon'_2$ vom Simplex $E_1 E_2 E_4 \ldots E_{n+1}$ (bzw. vom Simplex $E_1 E_2 E_3$) besitzt, wobei dafür gesorgt wird, dass A_2 und B_2 in einer Entfernung $\circ\!> 0$ voneinander liegen; u. s. w. Um zu beweisen, dass von den Spezies $S_1, S_2, \ldots, S_n$ keine in Fortfall kommen kann, bezeichnen wir mit T das (abgeschlossene) Simplex $E_1 E_2 E_3 \ldots E_{n+1}$ und konstruieren nach irgend einem Gesetz eine Fundamentalreihe $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots$ von simplizialen Zerlegungen von T, deren jede eine Unterteilung der ihr vorangehenden ist, während für unbeschränkt wachsendes ν die Maximalbreite der Grundsimplexe von $\mathfrak{Z}_\nu$ positiv gegen Null konvergiert. Nehmen wir nun an, dass es ein solches $\nu_1 \lessapprox n$ gibt, dass S_{ν_1-1} noch auftritt, aber S_{ν_1} nicht mehr auftritt. Alsdann bestimmen wir als K_{ν_1-1} eine solche in einer Entfernung $\circ\!> 0$ von A_{ν_1-2}, B_{ν_1-2} und den Simplexen $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1-1}$; $E_2 E_3 \ldots E_{n+1}$; $E_1 E_3 \ldots E_{n+1}$; $\ldots$; $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1-2} E_{\nu_1} \ldots E_{n+1}$ gelegene „vereinigende" katalogisiertkompakte Punktkernspezies einer Gruppe von Grundsimplexen eines passenden $\mathfrak{Z}_{\varkappa_{\nu_1-1}}$, dass für ein gewisses $e_{\nu_1-1} \circ\!> 0$ alle in einer Entfernung $\lessapprox e_{\nu_1-1}$ von S_{ν_1-1} gelegenen Grundsimplexe von $\mathfrak{Z}_{\varkappa_{\nu_1-1}}$ zu K_{ν_1-1} gehören, während K_{ν_1-1} zwischen seinen Durchschnitten mit den Simplexen $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1}$ und $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1-1} E_{\nu_1+1} E_{\nu_1+2} \ldots E_{n+1}$ eine Sprungweite $\circ\!> 0$ aufweist. Sodann wählen wir *nach dem Resultate des* § 2 als K_{ν_1-2} eine solche in einer Entfernung $\circ\!>0$ von A_{ν_1-3}, B_{ν_1-3} und den Simplexen $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1-2}$; $E_2 E_3 \ldots E_{n+1}$; $E_1 E_3 \ldots E_{n+1}$; $\ldots$; $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1-3} E_{\nu_1-1} \ldots E_{n+1}$ gelegene „vereinigende"

[[348]]

katalogisiertkompakte Punktkernspezies einer Gruppe von Grundsimplexen eines passenden $\mathfrak{Z}_{\alpha_{\nu_1-2}}(\alpha_{\nu_1-2} \geqq \alpha_{\nu_1-1})$, dass für ein gewisses $e_{\nu_1-2} \circ\!> 0$ alle in einer Entfernung $\leqq e_{\nu_1-2}$ von S_{ν_1-2} gelegenen Grundsimplexe von $\mathfrak{Z}_{\alpha_{\nu_1-2}}$ zu K_{ν_1-2} gehören, und die Durchschnitte von K_{ν_1-2} mit den Simplexen $E_1 E_2 \ldots . E_{\nu_1-1}$ und $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1-2} E_{\nu_1} \ldots E_{n+1}$ in K_{ν_1-2} durch K_{ν_1-1} getrennt werden. Darauf wählen wir, *wiederum nach dem Resultate des* § 2, als K_{ν_1-3} eine solche in einer Entfernung $\circ\!> 0$ von A_{ν_1-4}, B_{ν_1-4} und den Simplexen $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1-3}$; $E_2 E_3 \ldots E_{n+1}$; $E_1 E_3 \ldots E_{n+1}$; $\ldots$; $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1-4} E_{\nu_1-2} \ldots E_{n+1}$ gelegene „vereinigende" katalogisiertkompakte Punktkernspezies einer Gruppe von Grundsimplexen eines passenden $\mathfrak{Z}_{\alpha_{\nu_1-3}}(\alpha_{\nu_1-3} \geqq \alpha_{\nu_1-2})$, dass für ein gewisses $e_{\nu_1-3} \circ\!> 0$ alle in einer Entfernung $\leqq e_{\nu_1-3}$ von S_{ν_1-3} gelegenen Grundsimplexe von $\mathfrak{Z}_{\alpha_{\nu_1-3}}$ zu K_{ν_1-3} gehören, und die Durchschnitte von K_{ν_1-3} mit den Simplexen $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1-2}$ und $E_1 E_2 \ldots E_{\nu_1-3} E_{\nu_1-1} \ldots E_{n+1}$ in K_{ν_1-3} durch K_{ν_1-2} getrennt werden. Indem wir in dieser Weise fortfahren, bestimmen wir schliesslich als K_1 eine solche in einer Entfernung $\circ\!> 0$ von A, B, dem Punkte E_1 und dem Simplexe $E_2 E_3 \ldots E_{n+1}$ gelegene „vereinigende" katalogisiertkompakte Punktkernspezies einer Gruppe von Grundsimplexen eines passenden $\mathfrak{Z}_{\alpha_1}$ $(\alpha_1 \geqq \alpha_2)$, dass für ein gewisses $e_1 \circ\!> 0$ alle in einer Entfernung $\leqq e_1$ von S_1 gelegenen Grundsimplexe von $\mathfrak{Z}_{\alpha_1}$ zu K_1 gehören, und die Durchschnitte von K_1 mit dem Segmente $E_1 E_2$ und dem Simplexe $E_1 E_3 \ldots E_{n+1}$ in K_1 durch K_2 getrennt werden. (Hierzu ist zu bemerken, dass auch $K_{\nu_1-1}, K_{\nu_1-2}, \ldots, K_2$ „vereinigende" katalogisiertkompakte Punktkernspezies von Gruppen von Grundsimplexen von $\mathfrak{Z}_{\alpha_1}$ darstellen). Bezeichnen wir noch das Grundsimplex $E_1 E_2 \ldots E_{n+1}$ mit K, so werden auch die Durchschnitte von K mit dem Punkte E_1 und dem Simplexe $E_2 E_3 \ldots E_{n+1}$ in K durch K_1 getrennt.

Mit der obigen Konstruktion ist der Beweis von Satz 2 zurückgeführt auf den S. 150 von Bd. 142 des Journ. f. Math. formulierten Hilfssatz, [[10]]
dessen a.a. O. S. 151 u. 152 gegebene Herleitung auch für die intuitionistische Mathematik in Kraft bleibt[4]).

[4]) Aus den Entwickelungen des § 4 geht gleichzeitig hervor, dass der aus den Sätzen 1 und 2 zusammengesetzte "Satz von der n-dimensionalität des R_n" bestehen bleibt, wenn anstatt des schwachen der mittlere oder der starke Trennungsbegriff dem Dimensionsbegriffe zu Grunde gelegt wird.

1926 C **Mathematics.** — *"Die intuitionistische Form des* HEINE-BOREL*schen Theorems".* By Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of June 26, 1926).

In der klassischen Mathematik gilt für einen kompakten metrischen Raum R folgende Eigenschaft:

HEINE-BORELSCHES THEOREM: *Wenn in R jedem Punkte einer kompakten Teilspezies R' von R eine Umgebung dieses Punktes zugeordnet ist, so besteht eine endliche Anzahl dieser Umgebungen, in denen R' vollständig enthalten ist.*

Bei einer früheren Gelegenheit [1]) habe ich gezeigt, dass diese Eigenschaft in ihrer allgemeinen Form in der intuitionistischen Mathematik unrichtig ist. Hier werde ich eine Spezialisierung des Theorems herleiten, welche auch in der intuitionistischen Mathematik in Kraft bleibt.

Es sei S eine katalogisiertkompakte Spezies [2]), P ein Element von S, n eine natürliche Zahl. Eine Teilspezies von S, zu der jedes in einer Entfernung $\leqslant 4^{-n}$ von P gelegene Element von S gehört, nennen wir eine *n-Umgebung von P in S*. Eine Teilspezies von S, welche für eine passende natürliche Zahl n eine n-Umgebung von P ist, nennen wir eine *Umgebung von P in S*.

Es sei S' eine in bezug auf S katalogisierte kompakte Teilspezies von S, und es sei mittels eines Gesetzes w jedem Element P' von S' eine Umgebung $\omega(P')$ von P' in S zugeordnet. In der in diesen Proceedings
[[2]] XXIX, S. 856 angegebenen Weise bestimmen wir zu S' für jede natürliche Zahl n die α'_n-Elemente, und sodann die mit S' „zusammenfallende" finite Menge M'. Alsdann ist jedem Elemente e' von M' infolge w eine Umgebung in S eines mit e' zusammenfallenden Elementes P' von S', und somit gleichzeitig eine natürliche Zahl $m(e')$, mittels deren die betreffende Umgebung als $m(e')$-Umgebung charakterisiert wird, zuge-
[[3]] ordnet. Auf Grund der in diesen Proceedings XXVII, S. 192 (vgl. auch S. 646) hergeleiteten Eigenschaft besteht dann, bei Variierung von e' innerhalb M', für $m(e')$ nur eine endliche Anzahl von Werten, und darunter ein Maximalwert $m_1 - 1$. Zum Gesetze w gehört also eine solche natürliche Zahl m_1, dass für jedes Element P' von S' die Umgebung $\omega(P')$ eine (m_1-1)-Umgebung ist.

Wir bezeichnen die Anzahl der α'_{m_1}-Elemente mit d_{m_1} und die α'_{m_1}-Elemente selber der Reihe nach mit ${}_\nu\alpha'_{m_1}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant d_{m_1})$. Für jedes ν wählen

---

[[1]] 1) Vgl. Wis- en Natuurkundig Tijdschrift **2**, S. 4; Journ. f. Math. 154, S. 4—5.

2) Vgl. diese Proceedings XXIX, S. 856.

wir als $P({}_\nu a'_{m_1})$ ein in einer Entfernung $\leqslant c <_\circ \frac{3}{2} \cdot 4^{-m_1}$ von ${}_\nu a'_{m_1}$ gelegenes Element von S'. Alsdann liegt ein beliebiges Element von S', weil es in einer Entfernung $<_\circ 4^{-m_1}$ von einem der ${}_\nu a'_{m_1}$ gelegen ist, in einer Entfernung $<_\circ \frac{5}{2} \cdot 4^{-m_1}$ von einem der $P({}_\nu a'_{m_1})$, liegt also innerhalb eines der $\omega\{P({}_\nu a'_{m_1})\}$.

Hiermit ist folgende Eigenschaft bewiesen:

INTUITIONISTISCHES ÜBERDECKUNGSTHEOREM: *Wenn in der katalogisiertkompakten Spezies S durch ein Gesetz w einem beliebigen Elemente e einer in bezug auf S katalogisierten kompakten Teilspezies S′ von S eine Umgebung von e in S zugeordnet ist, so kann eine endliche Anzahl dieser Umgebungen angegeben werden, in denen S′ vollständig enthalten ist*[3]). [[4]]

[3]) Die Aussage des Satzes bleibt bestehen, wenn durch w nicht einem beliebigen Elemente e von S', sondern nur einem beliebigen (eine positiv-konvergente unbegrenzte Folge von verschiedenen Elementen einer katalogisierten Folge darstellenden) Elemente eines beliebigen Elementes e von S' eine Umgebung von e in S zugeordnet ist (ohne dass dabei notwendigerweise den verschiedenen Elementen von e die gleiche Umgebung zugeordnet zu sein braucht).

1927 A **Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. III.**

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Wohlordnung.

§ **1.** Die *wohlgeordneten Spezies* sind geordnete Spezies, welche auf Grund der folgenden Festsetzungen definiert sind:

1. Ein beliebiges Element einer wohlgeordneten Spezies ist entweder ein als „*Vollelement*" zu bezeichnendes *Element erster Art*, oder ein als
[1] „*Nullelement*" zu bezeichnendes *Element zweiter Art*.

2. Eine Spezies mit einem einzigen Elemente wird, nachdem man dieses Element entweder mit dem Prädikate eines Vollelementes oder mit dem Prädikate eines Nullelementes versehen hat, zu einer wohlgeordneten Spezies, und wird als solche insbesondere als *Urspezies* bezeichnet.

3. Aus bekannten wohlgeordneten Spezies werden weitere wohlgeordnete Spezies hergeleitet durch die *erste erzeugende Operation*, welche in der Addition einer nicht verschwindenden endlichen Anzahl, und durch die *zweite erzeugende Operation*, welche in der Addition einer Fundamentalreihe von bekannten wohlgeordneten Spezies besteht.

Jede wohlgeordnete Spezies, welche bei der Herstellung der wohlgeordneten Spezies F nach dem vorigen Absatz eine Rolle gespielt hat, heißt eine *konstruktive Unterspezies* von F. Diejenigen konstruktiven Unterspezies, welche bei der letzten erzeugenden Operation von F eine Rolle gespielt haben, heißen *konstruktive Unterspezies erster Ordnung* von F und werden durch einen Index ν voneinander unterschieden, also mit $F_1, F_2, \ldots, F_m$ bzw. mit $F_1, F_2, F_3, \ldots$ bezeichnet. Die konstruktiven Unterspezies erster Ordnung eines F_ν heißen *konstruktive Unterspezies zweiter Ordnung* von F und werden mit $F_{\nu 1}, F_{\nu 2}, \ldots, F_{\nu m}$ bzw. mit $F_{\nu 1}, F_{\nu 2}, F_{\nu 3}, \ldots$ bezeichnet. Die konstruktiven Unterspezies erster Ordnung eines $F_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ heißen *konstruktive Unterspezies* $(n+1)$*-ter Ordnung* von F und werden mit $F_{\nu_1 \ldots \nu_n 1}, F_{\nu_1 \ldots \nu_n 2}, \ldots, F_{\nu_1 \ldots \nu_n m}$ bzw. mit $F_{\nu_1 \ldots \nu_n 1}, F_{\nu_1 \ldots \nu_n 2}, F_{\nu_1 \ldots \nu_n 3}, \ldots$

bezeichnet (F selbst gilt als *konstruktive Unterspezies nullter Ordnung* von F). Jede bei der Herstellung von F benutzte Urspezies erscheint in dieser Weise als *konstruktive Unterspezies endlicher Ordnung* von F (obgleich es natürlich möglich ist, daß diese Ordnung für passend gewählte Urspezies von F unbeschränkt wächst). Um dies einzusehen, braucht man nur die *induktive Methode* anzuwenden, d. h. zu bemerken, daß die betreffende Eigenschaft für Urspezies erfüllt ist, daß, wenn $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und $\xi' = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{m-1}$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation ist ($m \geqq 2$), die betreffende Eigenschaft, wenn sie für $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ sowie für ξ' gilt, ebenfalls für ξ besteht, und schließlich, daß, wenn $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation ist, die betreffende Eigenschaft, wenn sie für jedes ξ_ν gilt, ebenfalls für ξ besteht.

Mittels der induktiven Methode ersieht man, daß für eine beliebige wohlgeordnete Spezies F sowohl die Spezies der Indizesreihen der Elemente wie die Spezies der Indizesreihen der konstruktiven Unterspezies eine abtrennbare Teilspezies der Spezies der endlichen Nummernreihen bildet; weiter, daß für eine beliebige konstruktive Unterspezies $F_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ von F die Kardinalzahl der $F_{\nu_1 \ldots \nu_n \mu}$ bekannt ist.

Wir heben hervor, daß die Definition einer bestimmten wohlgeordneten Spezies F *auf der Erzeugung von F beruht* (mithin insbesondere die Bestimmung der Indizesreihen der einzelnen Elemente in sich schließt), daß also die Bestimmung der Elemente von F und der zwischen denselben bestehenden ordnenden Relationen zur Festlegung der Definition von F im allgemeinen nicht ausreicht.

Offenbar ist jede wohlgeordnete Spezies diskret und mithin vollständig geordnet.

Die ordnungsgemäße Summe einer wohlgeordneten Spezies von wohlgeordneten Spezies liefert in auf der Hand liegender Weise wiederum eine wohlgeordnete Spezies, welche auch kurz als die ordnungsgemäße Summe der von den Summanden dargestellten wohlgeordneten Spezies bezeichnet wird.

Zwei wohlgeordnete Urspezies F' und F'' besitzen *denselben Erzeugungswert* oder heißen *erzeugungsgleich*, wenn das einzige Element, aus dem jede von ihnen besteht, entweder für beide ein Vollelement oder für beide ein Nullelement ist.

Zwei wohlgeordnete Spezies F' und F'' heißen *erzeugungsgleich*, wenn für ein beliebiges ν die konstruktiven Unterspezies erster Ordnung F'_ν und F''_ν entweder beide nicht existieren oder beide existieren und erzeugungsgleich sind. In diesem Falle sind, wie man mittels der induktiven Methode ersieht, die Spezies der Indizesreihen der konstruktiven Unterspezies von F' und von F'' identisch. Wenn umgekehrt die letztere Eigenschaft besteht, und überdies jedem Vollelemente bzw. Nullelemente von F' ein Vollelement bzw. Nullelement der gleichen Indizesreihe von F'' entspricht, dann ergibt die induktive Methode an der Hand der Erzeugung von F', daß zu jeder konstruktiven Unterspezies von F' eine mit ihr erzeugungsgleiche und die gleiche Spezies der Indizesreihen der konstruktiven Unterspezies besitzende konstruktive Unterspezies von F'' existiert, so daß insbesondere F' sich als mit F'' erzeugungsgleich herausstellt.

Zwei wohlgeordnete Spezies (oder Teilspezies von wohlgeordneten Spezies) F' und F'' besitzen *denselben Ordnungswert* oder heißen *gleichwertig*, und wir schreiben $F' \sim F''$, wenn zwischen ihnen eine solche Ähnlichkeitskorrespondenz besteht, daß dabei immer Vollelemente mit Vollelementen und Nullelemente mit Nullelementen korrespondieren. Wenn F' und F'' gleichwertig sind, besteht ein Gesetz, auf Grund dessen aus der Indizesreihe eines Elementes von F' bzw. F'' die Indizesreihe des korrespondierenden Elementes von F'' bzw. F' hergeleitet werden kann.

Zwei wohlgeordnete Spezies (oder Teilspezies von wohlgeordneten Spezies) F' und F'' heißen *inhaltsgleich*, wenn die Spezies der Vollelemente von F' und die Spezies der Vollelemente von F'' ähnlich sind.

Es sei a ein Element der wohlgeordneten Spezies F, das in F die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_m$ besitzt. Alsdann geht in leicht ersichtlicher, eindeutiger Weise aus der Erzeugung von F als wohlgeordneter Spezies die Erzeugung einer bestimmten, die a in F nicht vorangehenden Elemente von F als Elemente besitzenden und zwischen denselben die gleichen ordnenden Relationen wie F aufweisenden, wohlgeordneten Spezies ${}_aF$ hervor, wobei von einem beliebigen Elemente von ${}_aF$ der erste Index in ${}_aF$ um $i_1 - 1$ niedriger ist als in F, von einem beliebigen, in F den ersten Index i_1 besitzenden Elemente von ${}_aF$ der zweite Index in ${}_aF$ um $i_2 - 1$ niedriger ist als in F, von einem beliebigen, in F die beiden ersten Indizes i_1 und i_2 besitzenden Elemente von ${}_aF$ der dritte Index in ${}_aF$ um $i_3 - 1$ niedriger ist als in $F, \ldots,$ von einem beliebigen, in F die $m-1$ ersten Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$ besitzenden Elemente von ${}_aF$ der m-te Index in ${}_aF$ um $i_m - 1$ niedriger ist als in F, während alle weiteren Indizes der Elemente von ${}_aF$ in ${}_aF$ die gleichen sind wie in F. Wir nennen die wohlgeordnete Spezies ${}_aF$ einen *Rest* der wohlgeordneten Spezies F.

In analoger Weise geht, wenn a nicht das erste Element von F ist, aus der Erzeugung von F als wohlgeordneter Spezies die Erzeugung einer bestimmten, die a in F vorangehenden Elemente von F als Elemente besitzenden und zwischen denselben die gleichen ordnenden Relationen wie in F aufweisenden, wohlgeordneten Spezies F_a hervor, wobei von den Ele-

⟦354⟧

menten von F_a alle Indizes in F_a die gleichen sind wie in F. Wir nennen die wohlgeordnete Spezies F_a einen *Abschnitt* der wohlgeordneten Spezies F. Wir schreiben auch ${}_aF \mathrel{\underset{\cdot}{\sim}} F - F_a$ und bezeichnen ${}_aF$ als die *Differenz* von F und F_a. Unter den Abschnitten von F rechnen wir F selbst als uneigentlichen Abschnitt mit.

Es seien a und b zwei verschiedene Elemente der wohlgeordneten Spezies F, und es sei $a < b$. Alsdann geht aus der Erzeugung von F als wohlgeordneter Spezies die Erzeugung einer bestimmten, die a in F nicht vorangehenden, aber b in F vorangehenden Elemente von F als Elemente besitzenden und zwischen denselben die gleichen ordnenden Relationen wie in F aufweisenden, wohlgeordneten Spezies ${}_aF_b$ hervor, wobei von den Elementen von ${}_aF_b$ alle Indizes in ${}_aF_b$ die gleichen sind wie in ${}_aF$. Wir nennen die wohlgeordnete Spezies ${}_aF_b$ einen *Ausschnitt* der wohlgeordneten Spezies F. Unter den Ausschnitten von F rechnen wir die Reste von F als uneigentliche Ausschnitte mit.

Wenn die wohlgeordneten Spezies F' und F'' gleichwertig sind, so korrespondieren für die Gleichwertigkeitskorrespondenz mit den Ausschnitten von F' Ausschnitte von F'', insbesondere also mit den konstruktiven Unterspezies von F' Ausschnitte von F''.

Der Begriff eines *Restes* von F ist enger als derjenige eines *Endteiles* von F, d. h. einer solchen abtrennbaren Teilspezies von F, zu der alle auf eines ihrer Elemente folgenden Elemente ebenfalls gehören. Ebenso ist der Begriff eines *Abschnittes* von F enger als derjenige eines *Anfangsteiles* von F, d. h. einer solchen abtrennbaren Teilspezies von F, zu der alle einem ihrer Elemente vorangehenden Elemente ebenfalls gehören. Anfangsteile und Endteile von F brauchen nicht wohlgeordnet zu sein, sind aber, wie alle abtrennbaren Teilspezies von F, mit wohlgeordneten Spezies inhaltsgleich.

Wenn für eine Fundamentalreihe $a_1, a_2, \ldots$ von Elementen der wohlgeordneten Spezies F für jedes ν die Beziehung $a_\nu < a_{\nu+1}$ gilt, so sprechen wir von einer *steigenden Fundamentalreihe* von F. Wenn überdies a_ω ein derartiges Element von F ist, daß $a_\nu < a_\omega$ für jedes ν, während zu jedem Elemente $b < a_\omega$ von F ein $a_\nu > b$ angegeben werden kann, so heißt a_ω *Grenzelement* der steigenden Fundamentalreihe $a_1, a_2, \ldots$. Wenn aber zu jedem beliebigen Elemente b von F ein $a_\nu > b$ angegeben werden kann, so heißt $a_1, a_2, \ldots$ eine *abschließende Fundamentalreihe* von F.

Eine durch eine endliche Anzahl oder durch eine abschließende Fundamentalreihe von verschiedenen Elementen von F zustande gebrachte ordnungsgemäße Teilung von F in eine endliche Anzahl bzw. in eine Fundamentalreihe von Ausschnitten ${}_1F, {}_2F, \ldots, {}_mF$ bzw. ${}_1F, {}_2F, {}_3F, \ldots$ heißt eine *reguläre Zerlegung* von F, und wir schreiben $F \mathrel{\underset{\cdot}{\sim}} {}_1F + {}_2F + \ldots$ [[2]]

$+ {}_mF$ oder ${}_1F + {}_2F + \ldots + {}_mF \curvearrowright F$ bzw. $F \sim {}_1F + {}_2F + {}_3F + \ldots$ oder ${}_1F + {}_2F + {}_3F + \ldots \curvearrowright F$.[1])

Sei $F_1', F_2', \ldots$ eine Fundamentalreihe, in welcher jedes F_ν' entweder in Fortfall kommt oder eine wohlgeordnete Spezies vorstellt, wobei indes entweder eine steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ definiert ist, so daß jedes F_{ν_σ}' eine wohlgeordnete Spezies vorstellt, oder ein m bekannt ist, so daß F_ν' für $\nu > m$ in Fortfall kommt. Wenn dann $F_\nu = F_1' + F_2' + \ldots + F_\nu'$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, und $F = F_1' + F_2' + F_3' + \ldots$ auf Grund der ersten oder auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, so wird die wohlgeordnete Spezies F auch als $\lim\limits_\nu F_\nu$ bezeichnet.

Mittels der induktiven Methode beweisen wir leicht folgende Sätze:

1. *Ein Gesetz, welches in einer wohlgeordneten Spezies F eine konstruktive Unterspezies F' bestimmt und jeder schon bestimmten konstruktiven Unterspezies $F^{(\nu)}$ entweder die Hemmung des Prozesses oder eine in F vor $F^{(\nu)}$ liegende konstruktive Unterspezies $F^{(\nu+1)}$ zuordnet, bestimmt sicher eine natürliche Zahl n und eine zugehörige konstruktive Unterspezies $F^{(n)}$, der es die Hemmung des Prozesses zuordnet.* Insbesondere gilt diese Eigenschaft, wenn jedes $F^{(\nu)}$ ein *Element* von F ist, und hieraus folgern wir unmittelbar die Unmöglichkeit der Ähnlichkeit und insbesondere der Gleichwertigkeit von F und einer Teilspezies eines eigentlichen Abschnittes von F.

2. *Eine wohlgeordnete Spezies F ist entweder endlich oder abzählbar unendlich, und die Spezies ihrer Vollelemente ist zählbar.* Mithin ist die Spezies derjenigen Nummernreihen, welche als Indizesreihe eines Vollelementes von F auftreten können, eine *Menge*, so daß in dieser Weise *zu jeder wohlgeordneten Spezies eine zählbare vollständig geordnete Menge von endlichen Nummernreihen gehört, welche die Eigenschaft besitzt, daß jedes Gesetz, welches in ihr eine Nummernreihe z' bestimmt, und jeder schon bestimmten Nummernreihe $z^{(\nu)}$ entweder die Hemmung des Prozesses oder eine vor $z^{(\nu)}$ liegende Nummernreihe $z^{(\nu+1)}$ zuordnet, sicher eine natürliche Zahl n und eine zugehörige Nummernreihe $z^{(n)}$, der die Hemmung des Prozesses zugeordnet ist, bestimmt.*

---

[1]) Offenbar ist auf Grund dieser Gleichungen F nicht eindeutig durch die ${}_\nu F$ bestimmt. Weiter ist zu bemerken, daß jedes Element von F in ${}_1F + {}_2F + \ldots + {}_mF$ bzw. in ${}_1F + {}_2F + {}_3F + \ldots$ eine um 1 höhere Anzahl Indizes besitzt als in F. In Übereinstimmung hiermit schreiben wir insbesondere $F \sim G$ oder $G \curvearrowright F$, wenn $F \rightarrow G$ oder $G \leftarrow F$, d. h. wenn G aus F hervorgeht, indem wir auf F die erste erzeugende Operation mit nur einem einzigen Summanden anwenden, also der Indizesreihe eines jeden Elementes von F den Index 1 als ersten Index hinzufügen.

3. *In der wohlgeordneten Spezies F existiert erstens ein erstes Element, zweitens entweder ein letztes Element oder eine abschließende Fundamentalreihe von Elementen. Weiter existiert entweder keine letzte konstruktive Unterspezies nichtverschwindender Ordnung oder eine nicht verschwindende endliche Anzahl m von solchen, nämlich von den Ordnungen* $1, 2, \ldots, m$ *je eine.*

4. *In der wohlgeordneten Spezies F besitzt jedes Element e, mit Ausnahme des ersten, entweder ein ihm unmittelbar vorangehendes Element, oder es ist Grenzelement einer steigenden Fundamentalreihe von Elementen von F.* Schreiben wir nämlich $F \sim F_e + {}_eF$, so ist dieser Satz eine unmittelbare Folge des auf F_e angewandten Satzes 3.

5. *In der wohlgeordneten Spezies F besitzt jedes Element, mit Ausnahme des letzten, falls ein solches existiert, ein nächstfolgendes Element.*

Wenn die wohlgeordnete Spezies F' einem wenigstens ein Vollelement auslassenden Abschnitt der wohlgeordneten Spezies F'' gleichwertig ist, so schreiben wir $F' < F''$ oder $F'' > F'$, und sagen, daß F'' *größer* ist als F', und daß F' *kleiner* ist als F''. Schreiben wir noch $F' \underset{\rightarrow}{\leq} F''$ oder $F'' \underset{\leftarrow}{\geq} F'$, wenn entweder $F' \sim F''$ gilt oder F' einem Abschnitte von F'' gleichwertig ist, so gelangen wir, indem wir die Folgerung des obigen Satzes 1 berücksichtigen, sofort zu den folgenden Eigenschaften:

1. *Die Relationen $F' < F''$ und $F' \underset{\leftarrow}{\geq} F''$ schließen einander aus.*

2. *Aus $F' < F''$ und $F'' \underset{\rightarrow}{\leq} F'''$ sowie aus $F' \underset{\rightarrow}{\leq} F''$ und $F'' < F'''$ folgt $F' < F'''$.*

3. *Aus $F' \sim F''$ und $F'' \sim F'''$ folgt $F' \sim F'''$.*

4. *Aus $F' \underset{\rightarrow}{\leq} F''$ und $F'' \underset{\rightarrow}{\leq} F'''$ folgt $F' \underset{\rightarrow}{\leq} F'''$.*

5. *Die Relationen $F' \underset{\rightarrow}{\leq} F''$ und $G' < G''$ schließen zusammen die Relation $F' + G' \underset{\leftarrow}{\geq} F'' + G''$ aus.*

6. *Die Relationen $F' \underset{\rightarrow}{\leq} F''$ und $G' \underset{\rightarrow}{\leq} G''$ schließen zusammen die Relation $F' + G' > F'' + G''$ aus.*

Eine wohlgeordnete Spezies, welche ausschließlich Vollelemente enthält, nennen wir *vollständig*. Die Ordinalzahlen der vollständigen wohlgeordneten Spezies nennen wir *Ordnungszahlen.*

Die Spezies derjenigen Ordnungszahlen, welche kleiner sind als eine gegebene Ordnungszahl β, besitzt (wenn sie nach der Größe ihrer Elemente geordnet und 0 *mit hinzugerechnet wird) die Ordinalzahl β.* Zwischen den vom ersten verschiedenen Elementen und den eigentlichen Abschnitten einer vollständigen wohlgeordneten Spezies V der Ordnungszahl β besteht nämlich eine solche eineindeutige Beziehung, daß, wenn das Element e_2 *nach* dem Elemente e_1 liegt, der Abschnitt V_{e_2} *größer* als der Abschnitt V_{e_1} ist.

Wir nennen eine wohlgeordnete Spezies *quasi-vollständig*, wenn zu einem beliebigen Nullelement e_0 entweder ein erstes auf e_0 folgendes Vollelement angegeben werden kann oder feststeht, daß keine auf e_0 folgenden Vollelemente existieren; zu einem beliebigen Vollelement e_1 entweder ein erstes e_1 vorangehendes und durch kein Vollelement von e_1 getrenntes Nullelement angegeben werden kann, oder feststeht, daß keine e_1 vorangehenden und durch kein Vollelement von e_1 getrennten Nullelemente existieren; und entweder ein erstes Nullelement, auf welches nur noch Nullelemente folgen, angegeben werden kann, oder feststeht, daß keine Nullelemente, auf welche nur noch Nullelemente folgen, existieren.

Die Ausschnitte und Reste einer quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies sind offenbar ebenfalls quasi-vollständig.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Quasi-Vollständigkeit einer wohlgeordneten Spezies besteht darin, daß während ihrer Erzeugung bei jeder durch eine Formel $F' = F_1' + F_2' + F_3' + \dots$ ausgedrückten Anwendung der zweiten erzeugenden Operation die betreffende Fundamentalreihe *elementar induziert* ist, d. h. entweder eine Fundamentalreihe von unbeschränkt wachsenden natürlichen Zahlen $m_1, m_2, m_3, \dots$ bestimmt ist, so daß in jedem F'_{m_ν} ein Vollelement angegeben werden kann, oder eine natürliche Zahl m besteht, so daß F_ν' für $\nu > m$ lauter Nullelemente enthält. Hieraus folgern wir mittels der induktiven Methode weiter, daß zu einem beliebigen Elemente e einer quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies, mit Ausnahme des ersten, entweder ein erstes e vorangehendes und durch kein Vollelement von e getrenntes Nullelement, oder eine e als Grenzelement besitzende steigende Fundamentalreihe von Vollelementen, oder aber ein e unmittelbar vorangehendes Vollelement angegeben werden kann, während entweder ein erstes Nullelement, auf welches nur noch Nullelemente folgen, oder eine abschließende Fundamentalreihe von Vollelementen, oder aber ein letztes Element, das ein Vollelement ist, existiert.

Mittels der induktiven Methode ersieht man leicht, daß die Spezies der Vollelemente einer quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies F' entweder elementlos ist oder ein angebbares Element besitzt, während im letzteren Falle eindeutig eine „*F' entsprechende*" oder „*mit F' korrespondierende*", mit F' inhaltsgleiche vollständige wohlgeordnete Spezies F'' bestimmt ist. Sei nämlich $F' = F_1' + F_2' + \dots$ auf Grund der ersten oder auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und seien im Falle, daß F' ein angebbares Vollelement besitzt, $F'_{\nu_1}, F'_{\nu_2}, \dots$ diejenigen (endlich- oder abzählbarunendlichvielen) unter den F'_ν, welche je ein angebbares Vollelement und im Anschluß daran eine *entsprechende* vollständige wohl-

[[358]]

geordnete Spezies $F''_{\nu_\varkappa}$ besitzen. Alsdann ist $F'' = F''_{\nu_1} + F''_{\nu_2} + \ldots$ auf Grund der ersten oder auf Grund der zweiten erzeugenden Operation.

Dagegen ist nicht jede mit einer vollständigen inhaltsgleiche wohlgeordneten Spezies F auch quasi-vollständig, und zwar schon deshalb nicht, weil ihre konstruktiven Unterspezies nicht mit vollständigen wohlgeordneten Spezies inhaltsgleich zu sein brauchen, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht: es werde k_1 in üblicher Weise (vgl. z. B. Math. Ann. **93**, S. 255) definiert und es sei $F_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, wo a_ν für $\nu \geqq k_1$ ein Nullelement, sonst ein Vollelement ist; $F_2 = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$, wo b_ν für $\nu = k_1$ ein Vollelement, sonst ein Nullelement ist; $F_3 = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$, wo c_ν für $\nu > k_1$ ein Vollelement, sonst ein Nullelement ist; $F = F_1 + F_2 + F_3$. [[3]]

Einer quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies sprechen wir die gleiche Ordnungszahl zu, wie den vollständigen wohlgeordneten Spezies, mit denen sie inhaltsgleich ist. Den ausschließlich Nullelemente enthaltenden wohlgeordneten Spezies sprechen wir die Ordnungszahl *Null* zu. Die ordnungsgemäße Summe einer „der ersten erzeugenden Operation unterzogenen" endlichen Folge von Ordnungszahlen wird mittels der ordnungsgemäßen Summe entsprechender vollständiger bzw. (im Falle der Ordnungszahl Null) nur ein einziges Nullelement enthaltender wohlgeordneter Spezies wiederum als Ordnungszahl definiert. (Das gleiche Resultat wird erhalten, wenn im Falle, daß alle Summanden gleich Null sind, auch die Summe gleich Null gesetzt wird, und im entgegengesetzten Falle nur die von Null verschiedenen Summanden beibehalten werden).

Eine wohlgeordnete Spezies heißt *basiert*, wenn ihr erstes Element ein Vollelement ist.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *kondensiert*, wenn sie einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Abschnitt der Ordnungszahl 1 besitzt. Der vom auf das erste Vollelement von F folgenden Elemente bestimmte Rest von F heißt *Hauptrest* von F und wird mit $h(F)$ bezeichnet. Selbstverständlich kann $h(F)$ auch in Fortfall kommen.

Bei der Multiplikation von endlichvielen elementefremden wohlgeordneten Spezies erteilen wir das Prädikat eines Vollelementes nur denjenigen Elementen des Produktes, welche aus lauter Vollelementen der Faktoren bestehen; alle anderen Elemente des Produktes erhalten das Prädikat eines Nullelementes. Mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung des rechtsseitigen Faktors ersehen wir, daß das Produkt zweier elementefremder wohlgeordneter Spezies in auf der Hand liegender Weise wiederum eine wohlgeordnete Spezies liefert, welche auch kurz als das Produkt der von den Faktoren dargestellten wohlgeordneten Spezies bezeichnet wird. Diese Erweiterung des Produktbegriffes läßt sich unmittelbar auf das Produkt endlichvieler elementefremder wohlgeordneter Spezies ausdehnen. Erzeugungsgleiche bzw. gleichwertige bzw. inhaltsgleiche Faktoren liefern dabei erzeugungsgleiche bzw. gleichwertige bzw. inhaltsgleiche Produkte. Das Produkt endlichvieler Ordnungszahlen wird mittels des Produktes entsprechender vollständiger bzw. (im Falle der Ordnungszahl Null) nur ein einziges Nullelement enthaltender wohlgeordneter Spezies wiederum als Ordnungszahl definiert.

Man beweist ohne Schwierigkeit, daß das Produkt zweier quasi-vollständiger Faktoren wiederum quasi-vollständig ist und inhaltsgleich mit dem Produkte der vollständigen bzw. nur ein einziges Nullelement enthaltenden wohlgeordneten Spezies, mit denen seine Faktoren inhaltsgleich sind, so daß die Ordnungszahl des Produktes gleich dem Produkte der Ordnungszahlen der Faktoren ist. Mithin gilt dasselbe für das Produkt endlichvieler quasi-vollständiger Faktoren.

§ 2. Unter den *Ordnungszahlen des ersten Bereichs* verstehen wir die endlichen Ordnungszahlen, mit Einschluß der Ordnungszahl *Null.*

Unter einer *Spezies des ersten Bereichs* verstehen wir eine (vollständige oder quasi-vollständige) wohlgeordnete Spezies, welche eine Ordnungszahl des ersten Bereichs besitzt.

Offenbar ist jede Spezies des ersten Bereichs, deren Ordnungszahl von Null verschieden ist, kondensiert.

Zwei beliebige Ordnungszahlen des ersten Bereichs sind *vergleichbar,* d. h. wenn die Relationen $>$, $=$, $\gtrless$ zwischen zwei nicht verschwindenden Ordnungszahlen dann gelten sollen, wenn sie für die entsprechenden vollständigen wohlgeordneten Spezies gelten, und die Ordnungszahl Null als kleiner als die Ordnungszahl einer beliebigen vollständigen Spezies des ersten Bereichs gelten soll, dann sind zwei beliebige Ordnungszahlen des ersten Bereichs entweder einander gleich oder eine von ihnen ist größer als die andere. Überdies besitzen sie, wenn sie voneinander und von Null verschieden sind, eine gleichfalls zum ersten Bereich gehörende Differenz.

Die ordnungsgemäße Summe und das Produkt endlichvieler Ordnungszahlen des ersten Bereichs sind wiederum Ordnungszahlen des ersten Bereichs.

Eine Fundamentalreihe β_1, $\beta_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des ersten Bereichs heißt *induziert in bezug auf den ersten Bereich,* wenn entweder eine Fundamentalreihe von unbeschränkt wachsenden natürlichen Zahlen m_1, m_2, $m_3, \ldots$ bestimmt ist, so daß jedes β_{m_ν} von Null verschieden ist, oder eine natürliche Zahl m besteht, so daß β_ν für $\nu > m$ gleich Null ist.

Wenn wir die ordnungsgemäße Summe einer „der zweiten erzeugenden Operation unterzogenen" in bezug auf den ersten Bereich induzierten Fundamentalreihe von Ordnungszahlen des ersten Bereichs mittels der ordnungsgemäßen Summe entsprechender vollständiger bzw. aus nur einem einzigen Nullelement bestehender wohlgeordneter Spezies definieren (das gleiche — auf eine beliebige elementar induzierte Fundamentalreihe von Ordnungszahlen erweiterbare — Resultat wird erhalten, wenn wir im Falle, daß alle Summanden gleich Null sind, auch die Summe gleich Null setzen und im entgegengesetzten Falle nur die von Null verschiedenen Summanden beibehalten), dann erweist sich diese Summe wiederum als eine Ordnungszahl, und zwar ist dieselbe entweder gleich ω oder gehört wiederum dem ersten Bereiche an.

Wir formulieren folgende vier evidente Eigenschaften:

1. Zu einer beliebigen von Null verschiedenen Ordnungszahl des ersten Bereichs gehört sicher ein vollständiger Erzeugungswert, der *vollständig induziert in bezug auf den ersten Bereich* ist, d. h. dessen konstruktive Unterwerte alle Ordnungszahlen des ersten Bereichs besitzen und für den bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation die betreffende Fundamentalreihe von Ordnungszahlen in bezug auf den ersten Bereich induziert ist.

2. Jeder beliebige Abschnitt einer Ordnungszahl des ersten Bereichs gehört ebenfalls dem ersten Bereiche an, was wir kurz folgendermaßen ausdrücken:

Der erste Bereich der Ordnungszahlen ist ununterbrochen.

3. Eine Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des ersten Bereichs, deren (in der im vorigen schon mehrfach angegebenen Weise definierte) ordnungsgemäße Summe entweder die Ordnungszahl ω oder eine Ordnungszahl des ersten Bereichs ist, ist induziert in bezug auf den ersten Bereich.

4. Ein beliebiger, zu einer Ordnungszahl des ersten Bereichs gehöriger Erzeugungswert ist vollständig induziert in bezug auf den ersten Bereich (um dies für einen quasi-vollständigen Erzeugungswert zu zeigen, setzen wir denselben zum entsprechenden vollständigen Erzeugungswert in Beziehung).

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *unbestimmt zerlegt in bezug auf den ersten Bereich,* wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht oder einen mit ω inhaltsgleichen Anfangsteil besitzt, und F'' mit einer Spezies des ersten Bereichs inhaltsgleich ist (*mithin eine endliche Ordnungszahl besitzt*).

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *scharf zerlegt in bezug auf den ersten Bereich*, wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht oder die Ordnungszahl ω oder einen Abschnitt der Ordnungszahl ω besitzt und F'' eine Ordnungszahl des ersten Bereichs besitzt (hierbei können wir, ohne der wohlgeordneten Spezies F eine weitere Einschränkung aufzuerlegen, überdies fordern, daß F' entweder in Fortfall kommt oder wenigstens ein Vollelement enthält).

Eine quasi-vollständige wohlgeordnete Spezies F ist, wie man unter Verwendung des S. 457, Z. 13 bis 21 erwähnten Satzes mittels der induktiven Methode einsieht, unbestimmt zerlegt in bezug auf den ersten Bereich, dagegen nicht notwendig scharf zerlegt in bezug auf den ersten Bereich, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht: Es bestehe F_ν für $\nu = k_1$ aus einer Fundamentalreihe von Vollelementen, sonst aus einem einzigen Vollelement, und es sei $F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$.

Ebensowenig ist eine in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies F notwendig quasi-vollständig, sogar nicht mit einer vollständigen inhaltsgleich, wie folgendes Beispiel zeigt: Es bestehe G_ν für $\nu \leqq k_1$ aus einer Fundamentalreihe von Vollelementen, für $\nu = k_1 + 1$ und für $\nu = k_1 + 2$ aus einem einzigen Vollelement, für $\nu > k_1 + 2$ aus einem einzigen Nullelement, es sei $G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$, es bestehe H aus einer Fundamentalreihe von Vollelementen, und es sei $F = G + H$ (aus diesem Beispiel geht gleichzeitig hervor, daß die konstruktiven Unterspezies einer in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegten wohlgeordneten Spezies in bezug auf den ersten Bereich nicht einmal unbestimmt zerlegt zu sein brauchen).

Eine mit einer vollständigen inhaltsgleiche wohlgeordnete Spezies F ist nicht notwendig unbestimmt zerlegt in bezug auf den ersten Bereich, wie man aus folgendem Beispiel ersieht: Es bestehe F'_ν für $\nu \leqq k_1 + 1$ aus einem Vollelement, sonst aus einem Nullelement, $F^{(\mu)}_\nu$ $(\mu > 1)$ für $\nu = k_1 + \mu$ aus einem Vollelement, sonst aus einem Nullelement, es sei $F^{(\mu)}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots) = F^{(\mu)}_1 + F^{(\mu)}_2 + F^{(\mu)}_3 + \ldots$ und es sei $F = F' + F'' + F''' + \ldots$ (vom Reste $F'' + F''' + \ldots$ von F läßt sich hier weder behaupten, daß er aus lauter Nullelementen bestehe, noch daß er einen mit ω inhaltsgleichen Anfangsteil besitze).

Wir fügen noch ein Beispiel einer wohlgeordneten Spezies F hinzu, welche einerseits mit einer vollständigen inhaltsgleich, aber nicht quasi-vollständig, andererseits in bezug auf den ersten Bereich unbestimmt, aber nicht scharf zerlegt ist: Es bestehe $F^{(\mu)}_\nu$ $(\mu < k_1)$ für $\nu = \mu$ aus einem Vollelement, sonst aus einem Nullelement, $F^{(\mu)}_\nu$ $(\mu = k_1)$ für $\nu \geqq k_1$ aus

⟦362⟧

einem Vollelement, sonst aus einem Nullelement, $F_\nu^{(\mu)}$ $(\mu > k_1)$ aus einem Nullelement, es sei $F^{(\mu)} = F_1^{(\mu)} + F_2^{(\mu)} + F_3^{(\mu)} + \ldots$ und es sei $F = F' + F'' + F''' + \ldots$.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *vollständig induziert in bezug auf den ersten Bereich,* wenn während ihrer Erzeugung bei jeder durch eine Formel $F_0 = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$ ausgedrückten Anwendung der zweiten erzeugenden Operation, wo jedes F_ν nach der Formel $F_\nu \sim F'_\nu + F''_\nu$ in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegt ist, die betreffende Fundamentalreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$ *in bezug auf den ersten Bereich induziert* ist, d. h. *erstens* entweder eine unbeschränkt wachsende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ existiert, so daß jedes $F'_{\nu_\varkappa}$ Vollelemente besitzt, oder ein solches m angegeben werden kann, daß F'_ν für $\nu > m$ aus lauter Nullelementen besteht bzw. fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_1, F''_2, F''_3, \ldots$ (wobei wir einem fortfallenden F''_ν die Ordnungszahl Null zusprechen) in bezug auf den ersten Bereich induziert ist. Demzufolge ist dann jedesmal auch F_0 in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegt.

Sei $F_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ ein Element der in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F. Der Reihe nach ergibt sich, daß dieses Element in $F_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}$, in $F_{i_1 i_2 \ldots i_{m-2}}$, $\ldots$, in $F_{i_1 i_2}$, in F_{i_1} und in F je einen Abschnitt und einen Rest bestimmt, die in bezug auf den ersten Bereich gleichfalls vollständig induziert sind. Mithin haben wir den Satz, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichfalls in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist.

Eine in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies F ist offenbar erstens quasi-vollständig, zweitens scharf zerlegt in bezug auf den ersten Bereich[2]). Schreiben wir, der scharfen Zerlegbarkeit von F in bezug auf den ersten Bereich entsprechend, $F \sim F' + F''$, so besitzt die wohlgeordnete Spezies F', wenn sie nicht fortfällt, entweder einen Rest der Ordnungszahl ω, oder alle nichtverschwindenden Ordnungszahlen von Resten von F' sind größer als ω.[3])

---

[2]) Dagegen ist sogar eine sowohl vollständige wie in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies nicht notwendig vollständig induziert in bezug auf den ersten Bereich, wie folgendes Beispiel zeigt: Es bestehe F_ν für $\nu \leqq k_1$ aus einer Fundamentalreihe von Vollelementen, für $\nu > k_1$ aus einem einzigen Vollelement, und es sei $F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$.

[3]) Die Aussage, daß eine in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies F in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegt ist, bleibt auch dann richtig, wenn die Bedingungen für die scharfe Zerlegung dahin verschärft werden, daß im entsprechenden F' kein Nullelement, auf welches nur Nullelemente folgen, enthalten sein darf.

Sei F eine in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies, welche mit der ordnungsgemäßen Summe einer Fundamentalreihe $F_1, F_2, \ldots$ von in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegten wohlgeordneten Spezies gleichwertig ist. Wir wollen beweisen, daß die Fundamentalreihe $F_1, F_2, \ldots$ in bezug auf den ersten Bereich induziert ist und bemerken dazu zunächst, daß für die wohlgeordnete Spezies F, eben weil sie in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist, eine der drei folgenden Eigenschaften bestehen muß: *Entweder* F besitzt einen Rest mit einer Ordnungszahl des ersten Bereichs (die auch Null sein kann), *oder* von einem gewissen Rest von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ω, *oder aber* jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \omega$. Diese drei Fälle behandeln wir der Reihe nach.

Erster Fall. *F besitzt einen Rest F^0 mit einer Ordnungszahl des ersten Bereichs.* Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest F_{m2}, daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des ersten Bereichs besitzt und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe eine Ordnungszahl des ersten Bereichs ist) in bezug auf den ersten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$ bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \ldots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_1, F_2, F_3, \ldots$.

Zweiter Fall. *Vom Reste F^0 von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ω.* Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest F_{m2}, daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des ersten Bereichs besitzt und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe gleich ω ist) in bezug auf den ersten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$ bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \ldots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_1, F_2, F_3, \ldots$.

Dritter Fall. *Jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \omega$.* Zu jedem m gibt es dann ein derartiges ν_m, daß für einen bestimmten (eigentlichen oder uneigentlichen) Abschnitt $F^0_{\nu_m}$ von F_{ν_m} die ordnungsgemäße Summe $F_m + F_{m+1} + \ldots + F_{\nu_m - 1} + F^0_{\nu_m}$ die Ordnungszahl ω besitzt, so

[[364]]

daß wenigstens eine der wohlgeordneten Spezies $F'_m, F'_{m+1}, \ldots, F'_{\nu_m-1}, F'_{\nu_m}$ existiert und Vollelemente besitzt. Das heißt aber, daß es zu jedem m ein derartiges $\varrho_m \geqq m$ gibt, daß F'_{ϱ_m} existiert und Vollelemente besitzt, so daß die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_1, F_2, F_3, \ldots$ in bezug auf den ersten Bereich induziert ist.

Kombinieren wir den hiermit bewiesenen Satz mit der Eigenschaft, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies gleichfalls in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist, so ergibt sich, daß jede mit einer in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichwertige wohlgeordnete Spezies G ebenfalls in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist (und zwar mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von G). Auf Grund dieser Eigenschaft *bezeichnen wir eine Ordnungszahl als in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert, wenn jeder zu ihr gehörige vollständige Erzeugungswert in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist.*

Dann aber ist auch jeder zu ihr gehörige quasi-vollständige Erzeugungswert in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert. Sei nämlich β ein solcher quasi-vollständiger Erzeugungswert, daß der entsprechende vollständige Erzeugungswert α in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert ist. Jeder durch eine Formel $\alpha_\tau \sim \alpha'_\tau + \alpha''_\tau$ ausgedrückten scharfen Zerlegung in bezug auf den ersten Bereich eines konstruktiven Unterwertes α_τ von α entspricht dann eine durch eine Formel $\beta_\tau \sim \beta'_\tau + \beta''_\tau$ ausgedrückte scharfe Zerlegung in bezug auf den ersten Bereich des entsprechenden konstruktiven Unterwertes β_τ von β (welche leicht eindeutig festgelegt werden kann, z. B. durch die Forderung, daß, wenn β'_τ nicht fortfällt, jeder Rest von β'_τ Vollelemente aufweisen soll). Auf Grund dieser scharfen Zerlegungen seiner konstruktiven Unterwerte aber stellt sich β an der Hand seiner mit α parallelen Erzeugung unmittelbar als in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert heraus.

§ 3. Sei α ein basierter Erzeugungswert, β ein quasi-vollständiger Erzeugungswert. Alsdann wird die *Potenz* α^β, in welcher α das *Argument*, β der *Exponent* heißt, auf Grund der folgenden Festsetzungen definiert:

Wenn β einer Null-Urspezies entspricht, so ist $\alpha^\beta = 1$, d. h. gleich dem Erzeugungswerte einer Voll-Urspezies.

Wenn β einer Voll-Urspezies entspricht, so ist $\alpha^\beta = \alpha$.

Wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, so ist $\alpha^\beta = \alpha^{\beta_1} + \alpha^{\beta_1} \cdot h(\alpha^{\beta_2}) + \alpha^{\beta_1+\beta_2} \cdot h(\alpha^{\beta_3}) + \ldots + \alpha^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{m-1}} \cdot h(\alpha^{\beta_m}) \sim \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha^{\beta_2} \cdot \alpha^{\beta_3} \ldots \alpha^{\beta_m}$.

Wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, so ist

$$\alpha^\beta = \alpha^{\beta_1} + \alpha^{\beta_1} \cdot h(\alpha^{\beta_2}) + \alpha^{\beta_1+\beta_2} \cdot h(\alpha^{\beta_3}) + \ldots = \lim_\nu \alpha^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}$$
$$\sim \lim_\nu \alpha^{(\beta_1+\ldots+\beta_{\varrho_1})+(\beta_{\varrho_1+1}+\ldots+\beta_{\varrho_2})+\ldots+(\beta_{\varrho_{\nu-1}+1}+\ldots+\beta_{\varrho_\nu})},$$

wo $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ eine beliebige Fundamentalreihe von unbeschränkt wachsenden natürlichen Zahlen vorstellt.

Aus diesen Festsetzungen folgt, daß α^β wiederum ein basierter Erzeugungswert ist. Ist weiter β^0 der mit β korrespondierende vollständige bzw. einer Null-Urspezies entsprechende Erzeugungswert, so ist, wie sich mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von β herausstellt, $\alpha^{\beta^0} = \alpha^\beta$.

Hinsichtlich des Potenzbegriffes gelten zunächst folgende Sätze:

1. Wenn $\beta \dot{\sim} {}_1\beta + {}_2\beta + \ldots + {}_m\beta$, so ist $\alpha^\beta \sim \alpha^{{}_1\beta} \cdot \alpha^{{}_2\beta} \ldots \alpha^{{}_m\beta} \sim \alpha^{{}_1\beta + {}_2\beta + \ldots + {}_m\beta}$.

2. Wenn $\beta \dot{\sim} \sum_{\nu=1}^{\infty} {}_\nu\beta$ (in diesem Falle existiert wegen der Quasivollständigkeit von β entweder eine steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$, so daß ${}_{\nu_\sigma}\beta$ für jedes σ Vollelemente enthaltenden wohlgeordneten Spezies entspricht, oder ein m, so daß ${}_\nu\beta$ für $\nu > m$ immer ausschließlich Nullelemente enthaltenden wohlgeordneten Spezies entspricht), so ist $\alpha^\beta \sim \alpha^{{}_1\beta + {}_2\beta + \ldots} = \lim_\nu \alpha^{{}_1\beta + {}_2\beta + \ldots + {}_\nu\beta}$.

Beide Sätze sind offenbar erfüllt, wenn β den Erzeugungswert einer Urspezies darstellt. Bei ihrem (ja gleichzeitig für die Ausschnitte und Reste von β gültigen) Beweise dürfen wir mithin ihre Gültigkeit für die konstruktiven Unterwerte erster Ordnung von β, sowie für deren Ausschnitte und Reste voraussetzen.

Sei also *erstens* $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und sei $\beta \dot{\sim} {}_1\beta + {}_2\beta + \ldots + {}_m\beta$. Wir können es nun so einrichten, daß

$$\beta_\nu \dot{\sim} \beta^{(r_{\nu-1}+1)} + \beta^{(r_{\nu-1}+2)} + \ldots + \beta^{(r_\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ r_0 = 0;\ r_{\nu+1} > r_\nu);$$
$${}_\nu\beta = \beta^{(h_{\nu-1}+1)} + \ldots + \beta^{(h_\nu)} \text{ bzw. } \leftarrow \beta^{(h_\nu)}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, m;\ h_0 = 0;\ h_\nu > h_{\nu-1} + 1 \text{ bzw. } = h_{\nu-1} + 1).$$

Alsdann ist $\alpha^\beta \sim \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha^{\beta_2} \ldots \alpha^{\beta_n} \sim \alpha^{\beta'} \cdot \alpha^{\beta''} \ldots \alpha^{\beta^{(r_n)}} \sim \alpha^{{}_1\beta} \cdot \alpha^{{}_2\beta} \ldots \alpha^{{}_m\beta}$.

Sei *zweitens* $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und sei $\beta \dot{\sim} {}_1\beta + {}_2\beta + {}_3\beta + \ldots$. Wir können es nun so einrichten, daß

$$\beta_\nu \dot{\sim} \beta^{(r_{\nu-1}+1)} + \beta^{(r_{\nu-1}+2)} + \ldots + \beta^{(r_\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1;\ r_0 = 0;\ r_{\nu+1} > r_\nu);$$

[[366]]

$\beta_n \dot{\sim} \beta^{(r_{n-1}+1)} + \beta^{(r_{n-1}+2)} + \ldots; \ {}_{\nu}\beta = \beta^{(h_{\nu-1}+1)} + \beta^{(h_{\nu-1}+2)} + \ldots + \beta^{(h_\nu)}$ bzw. $\leftarrow\!\!-\, \beta^{(h_\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots; \ h_0 = 0; \ h_\nu > h_{\nu-1} + 1$ bzw. $= h_{\nu-1} + 1)$.

Alsdann ist $\alpha^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{n-1}} \sim \alpha^{\beta'} \cdot \alpha^{\beta''} \ldots \alpha^{\beta^{(r_{n-1})}} \sim \alpha^{\beta'+\beta''+\ldots+\beta^{(r_{n-1})}}$; $\alpha^{\beta_n} \sim \lim\limits_{\mu} \alpha^{\beta^{(r_{n-1}+1)}+\ldots+\beta^{(r_{n-1}+\mu)}}$; $\alpha^{\beta} \sim \alpha^{\beta_1+\ldots+\beta_{n-1}} \cdot \alpha^{\beta_n} \sim \lim\limits_{\mu} \alpha^{\beta'+\ldots+\beta^{(r_{n-1})}} \cdot$ $\cdot\, \alpha^{\beta^{(r_{n-1}+1)}+\ldots+\beta^{(r_{n-1}+\mu)}} \sim \lim\limits_{\tau} \alpha^{\beta'+\beta''+\ldots+\beta^{(\tau)}} \sim \lim\limits_{\nu} \alpha^{{}_1\beta+{}_2\beta+\ldots+{}_\nu\beta}$.

Sei *drittens* $\beta = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und sei $\beta \dot{\sim} {}_1\beta + {}_2\beta + \ldots + {}_m\beta$. Wir können es nun so einrichten, daß $\beta_\nu \dot{\sim} \beta^{(r_{\nu-1}+1)} + \beta^{(r_{\nu-1}+2)} + \ldots + \beta^{(r_\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots; \ r_0 = 0; \ r_{\nu+1} > r_\nu)$; ${}_\nu\beta = \beta^{(h_{\nu-1}+1)} + \ldots + \beta^{(h_\nu)}$ bzw. $\leftarrow\!\!-\, \beta^{(h_\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m-1; \ h_0 = 0;$ $h_\nu > h_{\nu-1} + 1$ bzw. $= h_{\nu-1} + 1)$; ${}_m\beta = \beta^{(h_{m-1}+1)} + \beta^{(h_{m-1}+2)} + \ldots$.

Alsdann ist $\alpha^\beta = \lim\limits_{\nu} \alpha^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu} \sim$ (wie oben unter *erstens* bewiesen wurde)

$$\lim_{\nu} \alpha^{\beta'+\beta''+\ldots+\beta^{(r_\nu)}} \sim \lim_{\mu} \alpha^{\beta'+\beta''+\ldots+\beta^{(\mu)}} \sim \alpha^{\beta'+\beta''+\ldots+\beta^{(h_{m-1})}} \cdot$$
$$\cdot \lim_{\tau} \alpha^{\beta^{(h_{m-1}+1)}+\ldots+\beta^{(h_{m-1}+\tau)}} \sim \alpha^{{}_1\beta} \cdot \alpha^{{}_2\beta} \ldots \cdot \alpha^{{}_m\beta}.$$

Sei *viertens* $\beta = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und sei $\beta \dot{\sim} {}_1\beta + {}_2\beta + {}_3\beta + \ldots$. Wir können es nun so einrichten, daß $\beta_\nu \dot{\sim} \beta^{(r_{\nu-1}+1)} + \beta^{(r_{\nu-1}+2)} + \ldots + \beta^{(r_\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots; \ r_0 = 0; \ r_{\nu+1} > r_\nu)$; ${}_\nu\beta = \beta^{(h_{\nu-1}+1)} + \ldots + \beta^{(h_\nu)}$ bzw. $\leftarrow \beta^{(h_\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots; \ h_0 = 0;$ $h_\nu > h_{\nu-1} + 1$ bzw. $= h_{\nu-1} + 1)$.

Alsdann ist $\alpha^\beta = \lim\limits_{\nu} \alpha^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu} \sim$ (wie oben unter *erstens* bewiesen wurde)

$$\lim_{\nu} \alpha^{\beta'+\beta''+\ldots+\beta^{(r_\nu)}} \sim \lim_{\mu} \alpha^{\beta'+\beta''+\ldots+\beta^{(\mu)}}$$
$$\sim \lim_{\tau} \alpha^{(\beta'+\ldots+\beta^{(h_1)})+(\beta^{(h_1+1)}+\ldots+\beta^{(h_2)})+\ldots+(\beta^{(h_{\tau-1}+1)}+\ldots+\beta^{(h_\tau)})}$$
$$= \lim_{\tau} \alpha^{{}_1\beta+{}_2\beta+\ldots+{}_\tau\beta}.$$

Nachdem hiermit die Sätze 1 und 2 hergeleitet sind, sind wir in der Lage, das nachstehende Theorem auszusprechen:

Wenn β und β^0 gleichwertig sind, dann sind auch α^β und α^{β^0} gleichwertig.

Diese Eigenschaft ergibt sich leicht mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von β. Nehmen wir nämlich an, daß sie für jeden konstruktiven Unterwert β_ν von β bewiesen ist, und sei β_ν^0 ein mit β_ν gleichwertiger Ausschnitt bzw. Rest von β^0, so daß also α^{β_ν} und $\alpha^{\beta_\nu^0}$

für jedes ν gleichwertig sind. Ist nun $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, dann ist (nach dem obigen Satz 1) $\alpha^{\beta^0} \sim \alpha^{\beta_1^0} \cdot \alpha^{\beta_2^0} \ldots \cdot \alpha^{\beta_m^0} \sim \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha^{\beta_2} \ldots \cdot \alpha^{\beta_m} \sim \alpha^{\beta}$. Und ist $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, dann ist (nach dem obigen Satz 2) $\alpha^{\beta^0} \sim \lim\limits_{\nu} \alpha^{\beta_1^0 + \beta_2^0 + \cdots + \beta_\nu^0} \sim \lim\limits_{\nu} \alpha^{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu} = \alpha^{\beta}$.

Sind β und β^0 nur inhaltsgleich, so sind die mit β und β^0 korrespondierenden vollständigen bzw. einer Null-Urspezies entsprechenden Erzeugungswerte ϑ und ϑ^0 gleichwertig, so daß wir haben: $\alpha^{\beta^0} = \alpha^{\vartheta^0} \sim \alpha^{\vartheta} = \alpha^{\beta}$, d. h. *wenn β und β^0 inhaltsgleich sind, dann sind α^{β} und α^{β^0} gleichwertig.*

Noch einfacher ergibt sich (wiederum mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von β) folgende Eigenschaft:

Wenn α und α_1 inhaltsgleich (bzw. gleichwertig) sind, dann sind auch α^{β} und α_1^{β} inhaltsgleich (bzw. gleichwertig).

Mittels der induktiven Methode beweisen wir noch den Satz:

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} \sim \alpha^{\beta\gamma}.$$

Es sei nämlich $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, und es seien die Formeln $(\alpha^{\beta})^{\gamma_\nu} \sim \alpha^{\beta\gamma_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ bewiesen. Alsdann ist

$$\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^{\sum\limits_{\nu=1}^{m} \beta\gamma_\nu} \sim \alpha^{\beta\gamma_1} \cdot \alpha^{\beta\gamma_2} \ldots \alpha^{\beta\gamma_m} \sim (\alpha^{\beta})^{\gamma_1} \cdot (\alpha^{\beta})^{\gamma_2} \ldots (\alpha^{\beta})^{\gamma_m}$$
$$\sim (\alpha^{\beta})^{\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}.$$

Es sei weiter $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und es seien die Formeln $(\alpha^{\beta})^{\gamma_\nu} \sim \alpha^{\beta\gamma_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, mithin auch die Formeln $(\alpha^{\beta})^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu} \sim \alpha^{\beta \sum\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bewiesen. Alsdann ist

$$\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta\gamma_\nu} = \lim_{n} \alpha^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \beta\gamma_\nu} = \lim_{n} \alpha^{\beta \sum\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu} \sim \lim_{n} (\alpha^{\beta})^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu}$$
$$= (\alpha^{\beta})^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}.$$

Im Falle, daß der basierte Erzeugungswert α ebenfalls quasi-vollständig ist, ersehen wir unter Anwendung der Eigenschaft, daß das Produkt zweier quasi-vollständiger Erzeugungswerte wiederum quasi-vollständig ist, sowie des S. 457, Zeilen 13 bis 21 erwähnten Satzes, mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von β, daß auch α^{β} quasi-vollständig ist. Wenn dann α_1 bzw. β_1 ein mit α bzw. β inhaltsgleicher vollständiger bzw.

[[368]]

zu Null-Urspezies gehöriger Erzeugungswert ist, haben wir nach dem Obigen, daß α^β mit $\alpha_1^{\beta_1}$ inhaltsgleich ist, was wir auch wie folgt ausdrücken können:

Ist α ein basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert der Ordnungszahl a und β ein quasi-vollständiger Erzeugungswert der Ordnungszahl b, dann ist α^β ein basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert der Ordnungszahl a^b.

§ 4. Unter den *Ordnungszahlen des zweiten Bereichs vom Grade Null* verstehen wir die Ordnungszahlen des ersten Bereichs. Unter den *Ordnungszahlen des zweiten Bereichs vom Grade p* (p eine nicht verschwindende natürliche Zahl) verstehen wir die Ordnungszahlen

$$\omega^{p_1}\cdot a_1 + \omega^{p_2}\cdot a_2 + \ldots + \omega^{p_n}\cdot a_n,$$

wo n und die a_ν nichtverschwindende natürliche Zahlen sind und die p_ν natürliche Zahlen (unter denen auch 0 vorkommen kann, in welchem Fall $\omega^0 = 1$ ist), deren größte gleich p ist. Offenbar dürfen wir annehmen, daß $p_{\nu+1} > p_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$).

Unter einer *Spezies des zweiten Bereichs vom Grade p* verstehen wir eine (vollständige oder quasi-vollständige) wohlgeordnete Spezies, welche eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs vom Grade p besitzt[4]).

Offenbar ist jede Spezies des zweiten Bereichs, deren Ordnungszahl von Null verschieden ist, kondensiert.

Wie man leicht einsieht, sind zwei beliebige Ordnungszahlen des zweiten Bereichs vergleichbar und besitzen, wenn sie voneinander und von Null verschieden sind, eine gleichfalls zum zweiten Bereich gehörende Differenz.

Die ordnungsgemäße Summe endlichvieler Ordnungszahlen des zweiten Bereichs ist wiederum eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs.

Aus der Formel

$$(\omega^{p_1}\cdot a_1 + \omega^{p_2}\cdot a_2 + \ldots + \omega^{p_n}\cdot a_n)\,\omega = \omega^{p_1}\cdot a_1\cdot\omega = \omega^{p_1}\cdot(a_1\cdot\omega) = \omega^{p_1+1}$$

[4]) Eine wohlgeordnete Spezies der Ordnungszahl $\omega^{p_1}\cdot a_1 + \omega^{p_2}\cdot a_2 + \ldots + \omega^{p_n}\cdot a_n$ können wir erzeugen durch Addition einer — vollständigen oder quasi-vollständigen — wohlgeordneten Spezies der Ordnungszahl $\omega^{p_1}\cdot a_1$ (welche wir ihrerseits herstellen können durch Multiplikation von p_1+1 elementefremden — vollständigen oder quasi-vollständigen — wohlgeordneten Spezies, von denen die ersten p_1 die Ordnungszahl ω und die letzte die Ordnungszahl a_1 besitzt), einer — vollständigen oder quasi-vollständigen — wohlgeordneten Spezies der Ordnungszahl $\omega^{p_2}\cdot a_2, \ldots$, und einer — vollständigen oder quasi-vollständigen — wohlgeordneten Spezies der Ordnungszahl $\omega^{p_n}\cdot a_n$. Diese Erzeugungsweise von Spezies des zweiten Bereichs ist indes keineswegs die einzige, wie man schon für die Ordnungszahl ω^2 durch einfache Beispiele belegen kann.

geht hervor, daß die Multiplikation einer Ordnungszahl des zweiten Bereichs mit einem rechtsseitigen Multiplikator ω, mithin auch mit einem rechtsseitigen Multiplikator ω^{p}, mithin auch mit einem beliebigen, eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs darstellenden rechtsseitigen Multiplikator, wiederum eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs ist. Hieraus folgt, daß allgemein *das Produkt endlichvieler Ordnungszahlen des zweiten Bereichs wiederum eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs ist.*

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des zweiten Bereichs heißt *induziert in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn eine solche steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, daß die Grade von $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ entweder beständig wachsen oder einander gleich sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Grad von β_m kleiner ist als der Grad von $\beta_{\nu_{n+1}}$, und, falls die β_{ν_n} vom Grade Null sind, die Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_1+1}, \beta_{\nu_1+2}, \ldots$ in bezug auf den ersten Bereich induziert ist.

Wenn wir die ordnungsgemäße Summe einer in bezug auf den zweiten Bereich induzierten Fundamentalreihe von Ordnungszahlen des zweiten Bereichs mittels der ordnungsgemäßen Summe entsprechender vollständiger bzw. aus nur einem einzigen Nullelement bestehender wohlgeordneter Spezies definieren, dann erweist sich diese Summe wiederum als eine Ordnungszahl, und zwar ist dieselbe entweder gleich ω^{ω} oder gehört wiederum dem zweiten Bereich an.

Wir formulieren jetzt eine Reihe von sechs Eigenschaften:

1. Zu einer beliebigen von Null verschiedenen Ordnungszahl des zweiten Bereichs gehört sicher ein vollständiger Erzeugungswert, der *vollständig induziert in bezug auf den zweiten Bereich* ist, d. h. dessen konstruktive Unterwerte alle Ordnungszahlen des zweiten Bereichs besitzen, und für den bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation die betreffende Fundamentalreihe von Ordnungszahlen in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist.

2. Eine beliebige von Null verschiedene Ordnungszahl des zweiten Bereichs, deren letzter Exponent von Null verschieden ist, ist gleich der ordnungsgemäßen Summe einer in bezug auf den zweiten Bereich induzierten Fundamentalreihe von nichtverschwindenden Ordnungszahlen des zweiten Bereichs.

3. Jeder Abschnitt (also auch jeder Rest und jeder Ausschnitt) einer Ordnungszahl des zweiten Bereichs ist wiederum eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs (so daß der zweite, ebenso wie der erste Bereich der Ordnungszahlen ununterbrochen ist).

Diese Eigenschaft braucht nur für eine beliebige von Null verschiedene Ordnungszahl des zweiten Bereichs β bewiesen zu werden. Sie ergibt

[[370]]

sich mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung eines (auf Grund der Eigenschaft 1 existierenden) zu β gehörigen vollständigen und in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierten Erzeugungswertes.

4. Eine Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des zweiten Bereichs, deren (in der im vorigen schon mehrfach angegebenen Weise definierte) ordnungsgemäße Summe entweder eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs oder die Ordnungszahl ω^ω ist, ist induziert in bezug auf den zweiten Bereich.

Im ersten Falle dürfen wir, weil die ordnungsgemäße Summe von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ voraussetzungsgemäß quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies entspricht, und mithin feststeht, entweder daß nur endlichviele, oder daß abzählbarunendlichviele nichtverschwindende α_ν existieren, annehmen, daß das letztere der Fall ist. Weiter dürfen wir den Beweis beschränken auf den Fall $\alpha = \omega^p$, wo $p = q + 1$ und q nicht verschwindet, mithin $\alpha = \lim\limits_n \omega^q \cdot n$ (n eine unbeschränkt wachsende natürliche Zahl). Alsdann gibt es ein kleinstes ϱ_1, zu dem ein solches $\nu_1 > 0$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_1 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_1} \geqq \omega^q \cdot \nu_1$; ein kleinstes ϱ_2, zu dem ein solches $\nu_2 > \nu_1$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_2 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_2} \geqq \omega^q \cdot \nu_2$; ein kleinstes ϱ_3, zu dem ein solches $\nu_3 > \nu_2$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_3 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_3} \geqq \omega^q \cdot \nu_3$; usw. Die Exponenten der Anfangsglieder von $\alpha_{\varrho_1}, \alpha_{\varrho_2}, \ldots$ müssen alle gleich q sein, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} die Exponenten von α_m kleiner als q sind. Mithin ist die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ induziert in bezug auf den zweiten Bereich.

Im zweiten Falle ist die Ordnungszahl $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$ gleich der Ordnungszahl $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots$ und gibt es ein kleinstes ϱ_1, zu dem ein solches $\nu_1 > 0$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{\nu_1+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_1} \geqq \omega^{\nu_1}$; ein kleinstes ϱ_2, zu dem ein solches $\nu_2 > \nu_1$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{\nu_2+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_2} \geqq \omega^{\nu_2}$; ein kleinstes ϱ_3, zu dem ein solches $\nu_3 > \nu_2$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{\nu_3+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_3} \geqq \omega^{\nu_3}$; usw. Die Grade von $\alpha_{\varrho_1}, \alpha_{\varrho_2}, \ldots$ müssen beständig wachsen, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} der Grad von α_m kleiner ist als der Grad von $\alpha_{\varrho_{n+1}}$. Mithin ist die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ induziert in bezug auf den zweiten Bereich.

5. Wenn $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ eine Fundamentalreihe von Ordnungszahlen ist, welche mit der in bezug auf den zweiten Bereich induzierten Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des zweiten Bereichs *additiv-zusammengehörig* ist (d. h. daß zu jedem ν ein solches μ gefunden werden kann, daß $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\mu > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$, und zu jedem ϱ ein solches σ, daß $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\sigma > \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\varrho$), so gehört auch jedes β_ν zum

zweiten Bereich und ist die Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ in bezug auf den zweiten Bereich induziert.

Diese Eigenschaft ist eine unmittelbare Folge der Eigenschaften 3 und 4.

6. Ein beliebiger zu einer Ordnungszahl des zweiten Bereichs gehöriger Erzeugungswert ist vollständig induziert in bezug auf den zweiten Bereich.

Für einen vollständigen Erzeugungswert folgt diese Eigenschaft unmittelbar aus den Eigenschaften 3 und 4. Um sie für einen quasi-vollständigen Erzeugungswert (dessen Ordnungszahl wir als nichtverschwindend voraussetzen dürfen) herzuleiten, genügt es, denselben zum entsprechenden vollständigen Erzeugungswert in Beziehung zu setzen.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *unbestimmt zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich,* wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht oder einen mit ω^{ω} inhaltsgleichen Anfangsteil besitzt, und F'' mit einer Spezies des zweiten Bereichs inhaltsgleich ist (ohne deshalb notwendigerweise eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs besitzen zu müssen).

Eine in bezug auf den zweiten Bereich unbestimmt zerlegte wohlgeordnete Spezies F braucht — schon im Falle, daß F'' mit F identisch und mit der Ordnungszahl ω inhaltsgleich ist — nicht notwendig unbestimmt zerlegt in bezug auf den ersten Bereich zu sein, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht: Es sei F_ν für $\nu < k_1$ und G_ν für $\nu \geqq k_1$ eine Voll-Urspezies; F_ν für $\nu \geqq k_1$ und G_ν für $\nu < k_1$ eine Null-Urspezies; $F = (F_1 + F_2 + \ldots) + (G_1 + G_2 + \ldots)$.

Ebensowenig ist eine in bezug auf den ersten Bereich unbestimmt zerlegte wohlgeordnete Spezies G notwendigerweise unbestimmt zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei G_ν eine vollständige wohlgeordnete Spezies, welche für $\nu < k_1$ die Ordnungszahl ω^ν, für $\nu \geqq k_1$ die Ordnungszahl ω^{k_1} besitzt, und es sei $G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *scharf zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht, oder die Ordnungszahl ω^{ω} oder einen Abschnitt der Ordnungszahl ω^{ω} besitzt, und F'' eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs besitzt (hierbei können wir, ohne der wohlgeordneten Spezies F eine weitere Einschränkung aufzuerlegen, überdies fordern, daß F' entweder in Fortfall kommt, oder wenigstens ein Vollelement enthält).

Eine in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies ist ebenfalls scharf zerlegt in bezug auf den ersten Bereich. Nach dem obigen Beispiel $G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$, wo G_ν eine vollständige wohlgeordnete Spezies der Ordnungszahl ω^ν bzw. ω^{k_1} vorstellt, ist aber eine in bezug auf den ersten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies nicht notwendig scharf zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich.

Von einer in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegten wohlgeordneten Spezies ist nicht notwendig auch jede konstruktive Unterspezies in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegt, wie wir aus folgendem Beispiel ersehen: Es besitze G_ν für $\nu \leqq k_1$ die Ordnungszahl ω^ω, für $\nu > k_1$ die Ordnungszahl ω; H_ν für jedes ν die Ordnungszahl ω^ν; und es sei $G = G_1 + G_2 + \ldots$; $H = H_1 + H_2 + \ldots$; $F = G + H$. Alsdann ist F scharf zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich; die konstruktive Unterspezies G von F dagegen ist weder scharf, noch unbestimmt zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *vollständig induziert in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn während ihrer Erzeugung bei jeder durch eine Formel $F_0 = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$ ausgedrückten Anwendung der zweiten erzeugenden Operation, wo jedes F_ν nach der Formel $F_\nu \sim F'_\nu + F''_\nu$ in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegt ist, die betreffende Fundamentalreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$ *in bezug auf den zweiten Bereich induziert* ist, d. h. *erstens* entweder eine unbeschränkt wachsende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ existiert, so daß jedes F'_{ν_α} Vollelemente besitzt, oder ein solches m angegeben werden kann, daß F'_ν für $\nu > m$ aus lauter Nullelementen besteht bzw. fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_1, F''_2, F''_3, \ldots$ (wobei wir einem fortfallenden F''_ν die Ordnungszahl Null zusprechen) in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist. Demzufolge ist dann jedesmal auch F_0 in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegt.

Sei $F_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ ein Element der in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F. Der Reihe nach ergibt sich, daß dieses Element in $F_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}$, in $F_{i_1 i_2 \ldots i_{m-2}}$, $\ldots$, in $F_{i_1 i_2}$, in F_{i_1} und in F je einen Abschnitt und einen Rest bestimmt, die in bezug auf den zweiten Bereich gleichfalls vollständig induziert sind. Mithin haben wir den Satz, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichfalls in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist.

Eine in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies F ist offenbar scharf zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich, weiter quasi-vollständig und, wie wir mittels der induktiven Methode ersehen, auch in bezug auf den ersten Bereich vollständig induziert.

Schreiben wir, der scharfen Zerlegbarkeit von F in bezug auf den zweiten Bereich entsprechend, $F \sim F' + F''$, so besitzt die wohlgeordnete Spezies F', wenn sie nicht fortfällt, entweder einen Rest der Ordnungszahl ω^{ω}, oder alle nichtverschwindenden Ordnungszahlen von Resten von F' sind größer als ω^{ω}.

Sei F eine in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies, welche mit der ordnungsgemäßen Summe einer Fundamentalreihe $F_1, F_2, \ldots$ von in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegten wohlgeordneten Spezies gleichwertig ist. Wir wollen beweisen, daß die Fundamentalreihe $F_1, F_2, \ldots$ in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist, und bemerken dazu zunächst, daß für die wohlgeordnete Spezies F, eben weil sie in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist, eine der drei folgenden Eigenschaften bestehen muß: *entweder* F besitzt einen Rest mit einer Ordnungszahl des zweiten Bereichs (die auch Null sein kann), *oder* von einem gewissen Reste von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ω^{ω}, *oder aber* jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \omega^{\omega}$. Diese drei Fälle behandeln wir der Reihe nach.

Erster Fall. *F besitzt einen Rest F^0 mit einer Ordnungszahl des zweiten Bereichs.* Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest F_{m2}, daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs besitzt, und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs ist) in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$ bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \ldots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_1, F_2, F_3, \ldots$.

Zweiter Fall. *Vom Reste F^0 von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ω^{ω}.* Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest F_{m2}, daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des zweiten Bereichs besitzt und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe gleich ω^{ω} ist) in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots$ bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \ldots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies

[374]

F_{m+1}, F_{m+2}, ..., mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, ...

Dritter Fall. *Jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \omega^{\omega}$.* Zu jedem m gibt es dann ein derartiges ν_m, daß für einen bestimmten (eigentlichen oder uneigentlichen) Abschnitt $F^0_{\nu_m}$ von F_{ν_m} die ordnungsgemäße Summe $F_m + F_{m+1} + \ldots + F_{\nu_m - 1} + F^0_{\nu_m}$ die Ordnungszahl ω^{ω} besitzt, so daß wenigstens eine der wohlgeordneten Spezies F'_m, F'_{m+1}, ..., $F'_{\nu_m - 1}$, F'_{ν_m} existiert und Vollelemente besitzt. Das heißt aber, daß es zu jedem m ein derartiges $\varrho_m \geqq m$ gibt, daß F'_{ϱ_m} existiert und Vollelemente besitzt, so daß die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies F_1, F_2, F_3, ... in bezug auf den zweiten Bereich induziert ist.

Kombinieren wir den hiermit bewiesenen Satz mit der Eigenschaft, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies gleichfalls in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist, so ergibt sich, daß jede mit einer in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichwertige wohlgeordnete Spezies G ebenfalls in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist (und zwar mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von G). Auf Grund dieser Eigenschaft *bezeichnen wir eine Ordnungszahl als in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert, wenn jeder zu ihr gehörige vollständige Erzeugungswert in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist.*

Dann aber ist auch jeder zu ihr gehörige quasi-vollständige Erzeugungswert in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert. Sei nämlich β ein solcher quasi-vollständiger Erzeugungswert, daß der entsprechende vollständige Erzeugungswert α in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert ist. Jeder durch eine Formel $\alpha_\tau \sim \alpha'_\tau + \alpha''_\tau$ ausgedrückten scharfen Zerlegung in bezug auf den zweiten Bereich eines konstruktiven Unterwertes α_τ von α entspricht dann eine durch eine Formel $\beta_\tau \sim \beta'_\tau + \beta_\tau{}'$ ausgedrückte scharfe Zerlegung in bezug auf den zweiten Bereich des entsprechenden konstruktiven Unterwertes β_τ von β (welche leicht eindeutig festgelegt werden kann, z. B. durch die Forderung, daß, wenn β'_τ nicht fortfällt, jeder Rest von β'_τ Vollelemente aufweisen soll). Auf Grund dieser scharfen Zerlegungen seiner konstruktiven Unterwerte aber stellt sich β an der Hand seiner mit α parallelen Erzeugung unmittelbar als in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induziert heraus.

§ 5. Unter den *Ordnungszahlen des dritten Bereichs vom Range Null* verstehen wir die Ordnungszahlen des zweiten Bereichs. Unter den *Ord-*

nungszahlen des dritten Bereichs vom Range 1 verstehen wir die Ordnungszahlen

$$\omega^{p_1} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{p_n} \cdot a_n ,$$

wo n und die a_ν nichtverschwindende natürliche Zahlen sind und die p_ν Ordnungszahlen des zweiten Bereichs, deren Maximalgrad nicht verschwindet. Unter den *Ordnungszahlen des dritten Bereichs vom Range* $p+1$ verstehen wir die Ordnungszahlen

$$\omega^{p_1} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{p_n} \cdot a_n ,$$

wo n und die a_ν nichtverschwindende natürliche Zahlen sind und die p_ν Ordnungszahlen des dritten Bereichs vom Maximalrange p.

Unter einer *Spezies des dritten Bereichs vom Range* p verstehen wir eine (vollständige oder quasi-vollständige) wohlgeordnete Spezies, welche eine Ordnungszahl des dritten Bereichs vom Range p besitzt.

Offenbar ist jede Spezies des dritten Bereichs, deren Ordnungszahl von Null verschieden ist, kondensiert.

Es gelten folgende zwei Eigenschaften:

1. *Je zwei Ordnungszahlen des dritten Bereichs sind vergleichbar und besitzen, wenn sie voneinander und von Null verschieden sind, eine gleichfalls zum dritten Bereich gehörende Differenz.*

2. *Bei der Ordnungszahl* $\omega^{p_1} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{p_n} \cdot a_n$ *darf man annehmen, daß jedes* $p_{\nu+1} < p_\nu$ *ist.*

Diese Sätze begründen wir, indem wir den ersten für Zahlen, deren Rang $< p$ ist, mithin den zweiten für Zahlen, deren Rang $\leqq p$ ist, als bewiesen annehmen, und hieraus die Gültigkeit des ersten für Zahlen, deren Rang $\leqq p$ ist, folgern. Hierzu bemerken wir zunächst, daß wir für zwei Zahlen ϱ und σ, deren Rang $< p$ ist, aus $\varrho < \sigma$ die Formel $\omega^\sigma = \omega^\varrho + \omega^\sigma$ folgern dürfen, und nennen sodann für eine Zahl des dritten Bereichs $\omega^{p_1} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{p_n} \cdot a_n$ den Exponenten p_h das $(2h-1)$-te Bestimmungselement und den Koeffizienten a_h das $2h$-te Bestimmungselement. Unter diesen Voraussetzungen wird von zwei Zahlen, deren Rang $\leqq p$ ist, diejenige als die größere erkannt, von der das erste Bestimmungselement, das nicht für beide Zahlen gleich ist, das größere ist, während als Differenz der beiden Zahlen wiederum eine Zahl des Ranges $\leqq p$ auftritt.

Die ordnungsgemäße Summe endlichvieler Ordnungszahlen des dritten Bereichs ist wiederum eine Ordnungszahl des dritten Bereichs.

Es seien $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} \cdot a_\nu$ und ω^p, wo weder a_1 noch p verschwindet, zwei Zahlen des dritten Bereichs. Indem wir $p = 1 + q$, mithin $\omega^p = \omega \cdot \omega^q$

setzen, ersehen wir, daß ω^p sich mittels der beiden erzeugenden Operationen aus *Urzahlen* ω herstellen läßt. An der Hand *dieser* Konstruktion von ω^p können wir nun die Formel

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\cdot\omega^p=\omega^{p_1}\cdot\omega^p$$

mittels der induktiven Methode beweisen, und zwar auf Grund der Tatsachen, daß

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\cdot\omega=\omega^{p_1}\cdot\omega;$$

daß für $\beta=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, aus

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\cdot\beta_1=\omega^{p_1}\cdot\beta_1;\quad\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\cdot\beta_2=\omega^{p_1}\cdot\beta_2;$$
$$\ldots;\quad\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\cdot\beta_m=\omega^{p_1}\cdot\beta_m$$

folgt

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\cdot\beta=\omega^{p_1}\cdot\beta;$$

und daß für $\beta=\sum_{\mu=1}^{\infty}\beta_\mu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, aus

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\cdot\beta_\mu=\omega^{p_1}\cdot\beta_\mu\quad\text{für jedes }\mu$$

folgt

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\cdot\beta=\omega^{p_1}\cdot\beta.$$

Es seien nun $\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu$ und $\sum_{\mu=1}^{m}\omega^{q_\mu}\cdot b_\mu+b_{m+1}$, wo a_1, b_{m+1} und die q_μ nicht verschwinden, zwei Zahlen des dritten Bereichs. Alsdann ist das Produkt

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\cdot\left[\sum_{\mu=1}^{m}\omega^{q_\mu}\cdot b_\mu+b_{m+1}\right]$$

gleich

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\omega^{q_\mu}\cdot b_\mu+\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]\cdot b_{m+1}=$$
$$=\sum_{\mu=1}^{m}\omega^{p_1+q_\mu}\cdot b_\mu+\omega^{p_1}\cdot(a_1\,b_{m+1})+\sum_{\nu=2}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu.$$

Mithin ist das Produkt von zwei, also auch allgemein von endlichvielen Ordnungszahlen des dritten Bereichs wiederum eine Ordnungszahl des dritten Bereichs.

Insbesondere ist, wenn p_1 nicht verschwindet, $\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^2$ eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1\cdot 2}\cdot a_1$; $\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^3$ eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1\cdot 3}\cdot a_1$; $\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^m$, wo m eine beliebige nichtverschwindende natürliche Zahl vorstellt, eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1\cdot m}\cdot a_1$. Mithin ist

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\omega}=\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\mu}=\sum_{\mu=1}^{\infty}\omega^{p_1\cdot\mu}\cdot a_1=\omega^{p_1\cdot\omega}.$$

Auf Grund dieser Eigenschaft können wir, wenn ω^p, wo p nicht verschwindet, eine Zahl des dritten Bereichs ist, an der Hand einer Konstruktion von ω^p mittels der beiden erzeugenden Operationen aus *Urzahlen* ω, die Formel

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\omega^p}=\omega^{p_1\cdot\omega^p}$$

mittels der induktiven Methode herleiten, und zwar unter Benutzung der Tatsachen, daß für $\beta=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, aus

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\beta_1}=\omega^{p_1\cdot\beta_1};\quad\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\beta_2}=\omega^{p_1\cdot\beta_2};$$
$$\ldots;\quad\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\beta_m}=\omega^{p_1\cdot\beta_m}$$

folgt

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\beta}=\omega^{p_1\cdot\beta},$$

und daß für $\beta=\lim_{\mu}\beta_\mu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, aus

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\beta_\mu}=\omega^{p_1\cdot\beta_\mu}\quad\text{für jedes }\mu$$

folgt

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\beta}=\lim_{\mu}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\beta_\mu}=\lim_{\mu}\omega^{p_1\cdot\beta_\mu}=\omega^{\lim_{\mu}p_1\cdot\beta_\mu}=\omega^{p_1\cdot\beta}.$$

Sei nun $\sum_{\mu=1}^{m}\omega^{q_\mu}\cdot b_\mu+b_{m+1}$, wo die q_μ und b_{m+1} nicht verschwinden, eine weitere Zahl des dritten Bereichs, so ist

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\sum_{\mu=1}^{m}\omega^{q_\mu}\cdot b_\mu+b_{m+1}}=\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{\sum_{\mu=1}^{m}\omega^{q_\mu}\cdot b_\mu}\cdot\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{b_{m+1}}$$
$$=\omega^{p_1\cdot\sum_{\mu=1}^{m}\omega^{q_\mu}\cdot b_\mu}\cdot\left[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}\cdot a_\nu\right]^{b_{m+1}},$$

[378]

welcher Ausdruck als Produkt zweier Zahlen des dritten Bereichs wiederum eine Zahl des dritten Bereichs ist.

Mithin ist eine Potenz, deren Argument und Exponent Zahlen des dritten Bereichs sind, wiederum eine Zahl des dritten Bereichs.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des dritten Bereichs vom Range Null heißt *induziert in bezug auf den dritten Bereich,* wenn sie induziert in bezug auf den zweiten Bereich ist. Eine Fundamentalreihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des dritten Bereichs, bei welcher $\beta_1, \beta_2, \ldots$ alle vom Range Null sind, heißt *induziert in bezug auf den dritten Bereich,* wenn die Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ induziert in bezug auf den dritten Bereich ist.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des dritten Bereichs, bei welcher eine solche steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, daß $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ alle vom Range p (> 0) sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Rang von β_m kleiner als p ist, heißt *induziert in bezug auf den dritten Bereich,* wenn *erstens* eine solche steigende Fundamentalreihe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ existiert, daß die Exponenten $\beta'_{\varrho_1}, \beta'_{\varrho_2}, \ldots$ der Anfangsglieder von $\beta_{\varrho_1}, \beta_{\varrho_2}, \ldots$ entweder beständig wachsen oder einander gleich sind, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} die Exponenten von β_m kleiner sind als $\beta'_{\varrho_{n+1}}$, *zweitens* im ersteren Falle bei der Fundamentalreihe $\beta''_1, \beta''_2, \ldots,$ wo $\beta''_1 = \beta'_{\varrho_1}$ und jedes $\beta''_{n+1} = \beta'_{\varrho_{n+1}} - \beta'_{\varrho_n}$, eine steigende Fundamentalreihe $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ auftritt, so daß $\beta''_{\sigma_1}, \beta''_{\sigma_2}, \ldots$ alle vom Range h $(< p)$ sind, während für m zwischen σ_n und σ_{n+1} der Rang von β''_m kleiner als h ist, und die Fundamentalreihe $\beta''_1, \beta''_2, \ldots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert ist.

Wir wollen jetzt beweisen, daß die (in üblicher Weise definierte) ordnungsgemäße Summe einer in bezug auf den dritten Bereich induzierten Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des dritten Bereichs, bei welcher eine solche steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, daß $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ alle vom Range p sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Rang von β_m kleiner als p ist, wiederum eine Ordnungszahl des dritten Bereichs ist. Weil der Satz offenbar für $p = 0$ erfüllt ist, so dürfen wir beim Beweise des Satzes für den Rang p die Gültigkeit des Satzes für Ränge $< p$ voraussetzen. Überdies dürfen wir bei der Beweisführung annehmen, daß $\varrho_1 = 1$ ist und uns auf den ersten Fall des vorigen Absatzes beschränken, weil für den letzten Fall der Satz ohne weiteres einleuchtet. Für eine derartige im ersten Falle befindliche Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ aber haben wir unter der Voraussetzung $\varrho_1 = 1$:

$\lim\limits_m \sum\limits_{\nu=1}^{m} \beta_\nu = \lim\limits_n \beta_{\varrho_n} = \lim\limits_n \omega^{\beta'_{\varrho_n}} = \omega^{\lim\limits_n \beta'_{\varrho_n}} = \omega^{\beta'_\omega} = \beta_\omega$, wo β'_ω auf Grund

[[379]]

der Gültigkeit des Satzes für Ränge $< p$ eine Zahl des dritten Bereichs vorstellt, so daß sich auch β_ω als eine Zahl des dritten Bereichs ergibt.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des dritten Bereichs heißt *induziert in bezug auf den dritten Bereich,* wenn *erstens* eine solche steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, daß die Ränge von $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ entweder beständig wachsen oder einander gleich sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Rang von β_m kleiner ist als der Rang von $\beta_{\nu_{n+1}}$, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert ist.

Schreiben wir $\omega^\omega = \omega_1$, $\omega^{\omega_1} = \omega_2$, $\omega^{\omega_2} = \omega_3$, $\ldots$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n = \varepsilon$, so ist die (in üblicher Weise definierte) ordnungsgemäße Summe einer in bezug auf den dritten Bereich induzierten Fundamentalreihe von Ordnungszahlen des dritten Bereichs entweder gleich der Ordnungszahl ε oder wiederum eine Ordnungszahl des dritten Bereichs.

Wir leiten jetzt eine Reihe von sechs Eigenschaften her:

1. Zu einer beliebigen von Null verschiedenen Ordnungszahl des dritten Bereichs gehört sicher ein vollständiger Erzeugungswert, der *vollständig induziert in bezug auf den dritten Bereich* ist, d. h. dessen konstruktive Unterwerte alle Ordnungszahlen des dritten Bereichs besitzen, und für den bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation die betreffende Fundamentalreihe von Ordnungszahlen in bezug auf den dritten Bereich induziert ist.

Für eine Ordnungszahl vom Range Null ist die Eigenschaft evident. Beim Beweise für eine Ordnungszahl vom Range p dürfen wir also voraussetzen, daß die Gültigkeit der Eigenschaft für Ordnungszahlen von Rängen $< p$ schon feststeht. Weiter dürfen wir den Beweis beschränken auf eine Ordnungszahl der Form ω^k, wo k eine Ordnungszahl des dritten Bereichs vom Range $q < p$ (für welche also die Gültigkeit unserer Eigenschaft schon feststeht) vorstellt. Wir beweisen nunmehr nach der induktiven Methode, daß derjenige zu ω^k gehörige Erzeugungswert, der einem unserer Eigenschaft genügenden zu k gehörigen Erzeugungswert entspricht, ebenfalls unserer Eigenschaft genügt.

Sei $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_m$ eine bei der Erzeugung des betreffenden zu k gehörigen Erzeugungswertes auftretende Anwendung der ersten erzeugenden Operation. Alsdann gilt unsere Eigenschaft, wenn sie für $\omega^{\tau_1}, \omega^{\tau_2}, \ldots, \omega^{\tau_m}$, sowie für $h(\omega^{\tau_1}), h(\omega^{\tau_2}), \ldots, h(\omega^{\tau_m})$ gilt, ebenfalls für $\omega^{\tau_1} + \omega^{\tau_1} \cdot h(\omega^{\tau_2}) = \omega^{\tau_1+\tau_2}$, sowie für $h(\omega^{\tau_1}) + \omega^{\tau_1} \cdot h(\omega^{\tau_2}) = h(\omega^{\tau_1+\tau_2})$; $\ldots$; mithin auch für $\omega^{\tau_1+\ldots+\tau_{m-1}} + \omega^{\tau_1+\ldots+\tau_{m-1}} \cdot h(\omega^{\tau_m}) = \omega^\tau$, sowie für $h(\omega^{\tau_1+\ldots+\tau_{m-1}}) + \omega^{\tau_1+\ldots+\tau_{m-1}} \cdot h(\omega^{\tau_m}) = h(\omega^\tau)$.

Sei $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots$ eine bei der Erzeugung des betreffenden zu k gehörigen Erzeugungswertes auftretende Anwendung der zweiten erzeugenden Operation. Alsdann gilt unsere Eigenschaft, wenn sie für jedes ω^{τ_ν}, sowie für jedes $h(\omega^{\tau_\nu})$ gilt, nach dem vorhergehenden ebenfalls für jedes $\omega^{\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_\nu}$, und somit (weil die Fundamentalreihe $\tau_1, \tau_2, \ldots$, also auch die Fundamentalreihe $\omega^{\tau_1}, \omega^{\tau_1+\tau_2}, \omega^{\tau_1+\tau_2+\tau_3}, \ldots$ bzw. die Fundamentalreihe $\omega^{\tau_1}, \omega^{\tau_1}\cdot h(\omega^{\tau_2}), \omega^{\tau_1+\tau_2}\cdot h(\omega^{\tau_3}), \ldots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert ist) auch für $\lim\limits_\nu \omega^{\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_\nu} = \omega^\tau$, sowie für $\lim\limits_\nu h(\omega^{\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_\nu}) = h(\omega^\tau)$.

Also gilt unsere Eigenschaft für ω^k.

2. Eine beliebige von Null verschiedene Ordnungszahl des dritten Bereichs, deren letzter Exponent von Null verschieden ist, ist gleich der ordnungsgemäßen Summe einer in bezug auf den dritten Bereich induzierten Fundamentalreihe von nichtverschwindenden Ordnungszahlen des dritten Bereichs.

Diese Eigenschaft ergibt sich unmittelbar mittels der induktiven Methode unter Benutzung der Eigenschaft 1.

3. Jeder Abschnitt (also auch jeder Rest und jeder Ausschnitt) einer Ordnungszahl des dritten Bereichs ist wiederum eine Ordnungszahl des dritten Bereichs (so daß der dritte ebenso wie der erste und der zweite Bereich der Ordnungszahlen ununterbrochen ist).

Die Eigenschaft braucht nur für eine beliebige von Null verschiedene Ordnungszahl des dritten Bereichs β bewiesen zu werden. Sie ergibt sich mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung eines (auf Grund von Eigenschaft 1 existierenden) zu β gehörigen vollständigen und in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierten Erzeugungswertes.

4. Eine Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des dritten Bereichs, deren (in üblicher Weise definierte) ordnungsgemäße Summe entweder eine Ordnungszahl des dritten Bereichs oder die Ordnungszahl ε ist, ist induziert in bezug auf den dritten Bereich.

Im ersten Falle dürfen wir, weil die ordnungsgemäße Summe von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ voraussetzungsgemäß quasi-vollständigen wohlgeordneten Spezies entspricht und mithin feststeht, entweder daß nur eine endliche Anzahl, oder daß eine Fundamentalreihe von nichtverschwindenden α_ν existiert, annehmen, daß das letztere der Fall ist. Auch dürfen wir annehmen, daß $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ eine Ordnungszahl des dritten Bereichs α vom Range k ist, während die Gültigkeit der zu beweisenden Eigenschaft für Ränge der ordnungsgemäßen Summe $< k$ schon feststeht. Weiter dürfen wir den Beweis beschränken auf den Fall $\alpha = \omega^p$, wo p eine Ordnungszahl des dritten Bereichs vorstellt, deren Rang $< k$ ist.

Nehmen wir als ersten Unterfall an, daß der letzte Exponent von p

verschwindet, mithin $p = q + 1$ (wo q ebenfalls eine Ordnungszahl des dritten Bereichs, deren Rang $< k$ ist, vorstellt) und $\alpha = \lim\limits_{n} \omega^q \cdot n$ (n eine unbeschränkt wachsende natürliche Zahl). Alsdann gibt es ein kleinstes ϱ_1, zu dem ein solches $\nu_1 > 0$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_1 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_1} \geqq \omega_q \cdot \nu_1$; ein kleinstes ϱ_2, zu dem ein solches $\nu_2 > \nu_1$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_2 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_2} \geqq \omega^q \cdot \nu_2$; ein kleinstes ϱ_3, zu dem ein solches $\nu_3 > \nu_2$ bestimmt werden kann, daß $\omega^q \cdot (\nu_3 + 1) > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_3} \geqq \omega^q \cdot \nu_3$; usw. Die Exponenten der Anfangsglieder von $\alpha_{\varrho_1}, \alpha_{\varrho_2}, \ldots$ müssen alle gleich q sein, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} die Exponenten von α_m kleiner als q sind. Mithin ist die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ induziert in bezug auf den dritten Bereich.

Bleibt als zweiter Unterfall, daß der letzte Exponent von p nicht verschwindet. Alsdann ist (nach Eigenschaft 2) $p = \lim\limits_{\nu} p_\nu$, wo jedes p_ν eine Ordnungszahl des dritten Bereichs vorstellt, und $p_{\nu+1} > p_\nu$ für jedes ν. Mithin ist auch die Ordnungszahl $\alpha = \omega^p$ gleich der Ordnungszahl $\lim\limits_{\nu} \omega^{p_\nu}$ und gibt es ein kleinstes ϱ_1, zu dem ein solches $\nu_1 > 0$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{p_{\nu_1}+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_1} \geqq \omega^{p_{\nu_1}}$; ein kleinstes ϱ_2, zu dem ein solches $\nu_2 > \nu_1$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{p_{\nu_2}+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_2} \geqq \omega^{p_{\nu_2}}$; ein kleinstes ϱ_3, zu dem ein solches $\nu_3 > \nu_2$ bestimmt werden kann, daß $\omega^{p_{\nu_3}+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_3} \geqq \omega^{p_{\nu_3}}$; usw. Bezeichnen wir den Exponenten des Anfangsgliedes von α_ν mit α'_ν, so müssen $\alpha'_{\varrho_1}, \alpha'_{\varrho_2}, \ldots$ eine beständig wachsende Fundamentalreihe bilden, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} die Exponenten von α_m kleiner als $\alpha'_{\varrho_{n+1}}$ sind. Weiter ist die Ordnungszahl $\lim\limits_{\nu} \alpha'_{\varrho_\nu} = p$. Schreiben wir also $\alpha''_{\varrho_1} = \alpha'_{\varrho_1}$ und $\alpha''_{\varrho_{n+1}} = \alpha'_{\varrho_{n+1}} - \alpha'_{\varrho_n}$ für jedes $n \geqq 1$, so ist (eben weil die zu beweisende Eigenschaft für Ränge der ordnungsgemäßen Summe $< k$ schon feststeht) die Fundamentalreihe $\alpha''_{\varrho_1}, \alpha''_{\varrho_2}, \ldots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert. Mithin sind auch zunächst die Fundamentalreihe $\omega^{\alpha'_{\varrho_1}}, \omega^{\alpha'_{\varrho_2}}, \ldots$, sodann die Fundamentalreihe $\omega^{\alpha'_1}, \omega^{\alpha'_2}, \ldots$ und schließlich die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert.

Im zweiten Falle ist die Ordnungszahl $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ gleich der Ordnungszahl $\omega + \omega_1 + \omega_2 + \ldots$ und gibt es ein kleinstes ϱ_1, zu dem ein solches $\nu_1 > 0$ bestimmt werden kann, daß $\omega_{\nu_1+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_1} \geqq \omega_{\nu_1}$; ein kleinstes ϱ_2, zu dem ein solches $\nu_2 > \nu_1$ bestimmt werden kann, daß $\omega_{\nu_2+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_2} \geqq \omega_{\nu_2}$; ein kleinstes ϱ_3, zu dem ein solches $\nu_3 > \nu_2$ bestimmt werden kann, daß $\omega_{\nu_3+1} > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varrho_3} \geqq \omega_{\nu_3}$; usw. Die Ränge von $\alpha_{\varrho_1}, \alpha_{\varrho_2}, \ldots$ müssen beständig wachsen, während für m zwischen ϱ_n und ϱ_{n+1} der Rang von α_m kleiner ist als der Rang von $\alpha_{\varrho_{n+1}}$.

[382]

Mithin ist die Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ induziert in bezug auf den dritten Bereich.

5. Wenn $\beta_1, \beta_2, \ldots$ eine Fundamentalreihe von Ordnungszahlen ist, welche mit der in bezug auf den dritten Bereich induzierten Fundamentalreihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von Ordnungszahlen des dritten Bereichs *additiv-zusammengehörig* ist, so gehört auch jedes β_ν zum dritten Bereich und ist die Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert.

Diese Eigenschaft ist eine unmittelbare Folge der Eigenschaften 3 und 4.

6. Ein beliebiger zu einer Ordnungszahl des dritten Bereichs gehöriger Erzeugungswert ist vollständig induziert in bezug auf den dritten Bereich.

Für einen vollständigen Erzeugungswert folgt diese Eigenschaft unmittelbar aus den Eigenschaften 3 und 4. Um sie für einen quasi-vollständigen Erzeugungswert (dessen Ordnungszahl wir als nichtverschwindend voraussetzen dürfen) herzuleiten, genügt es, denselben zum entsprechenden vollständigen Erzeugungswert in Beziehung zu setzen.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *unbestimmt zerlegt in bezug auf den dritten Bereich*, wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht oder einen mit ε inhaltsgleichen Anfangsteil besitzt und F'' mit einer Spezies des dritten Bereichs inhaltsgleich ist (ohne deshalb notwendigerweise eine Ordnungszahl des dritten Bereichs besitzen zu müssen).

Eine in bezug auf den dritten Bereich unbestimmt zerlegte wohlgeordnete Spezies F braucht — schon im Falle, daß F'' mit F identisch und mit der Ordnungszahl ω_1 inhaltsgleich ist — nicht notwendig unbestimmt zerlegt in bezug auf den zweiten Bereich zu sein, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht: Es sei F_ν für $\nu < k_1$ und G_ν für $\nu \geqq k_1$ eine vollständige wohlgeordnete Spezies der Ordnungszahl ω^ν; es bestehe F_ν für $\nu \geqq k_1$ und G_ν für $\nu < k_1$ aus einem einzigen Nullelement; und es sei $F = (F_1 + F_2 + F_3 + \ldots) + (G_1 + G_2 + G_3 + \ldots)$.

Ebensowenig ist eine in bezug auf den zweiten Bereich unbestimmt zerlegte wohlgeordnete Spezies G notwendigerweise unbestimmt zerlegt in bezug auf den dritten Bereich, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei G_ν eine vollständige wohlgeordnete Spezies, welche für $\nu < k_1$ die Ordnungszahl ω_ν, für $\nu \geqq k_1$ die Ordnungszahl ω_{k_1} besitzt, und es sei $G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *scharf zerlegt in bezug auf den dritten Bereich*, wenn sie in solcher Weise in einen (evtl. fortfallenden) Abschnitt F' und einen (evtl. fortfallenden) Rest F'' regulär zerlegt werden kann, daß jeder Rest von F' entweder aus lauter Nullelementen besteht oder die Ordnungszahl ε oder einen Abschnitt der Ordnungszahl ε besitzt, und F'' eine Ordnungszahl des dritten Bereichs besitzt (hierbei können wir, ohne der wohlgeordneten Spezies F eine weitere Einschränkung aufzuerlegen, überdies fordern, daß F' entweder in Fortfall kommt oder wenigstens ein Vollelement enthält).

Eine in bezug auf den dritten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies ist ebenfalls scharf zerlegt in bezug auf den zweiten (mithin auch in bezug auf den ersten) Bereich. Nach dem obigen Beispiel $G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$, wo G_ν eine vollständige wohlgeordnete Spezies der Ordnungszahl ω_ν bzw. ω_{k_1} vorstellt, ist aber eine in bezug auf den zweiten Bereich scharf zerlegte wohlgeordnete Spezies nicht notwendig scharf zerlegt in bezug auf den dritten Bereich.

Eine wohlgeordnete Spezies F heißt *vollständig induziert in bezug auf den dritten Bereich*, wenn während ihrer Erzeugung bei jeder durch eine Formel $F_0 = F_1 + F_2 + \ldots$ ausgedrückten Anwendung der zweiten erzeugenden Operation, wo jedes F_ν nach der Formel $F_\nu \dot{\sim} F'_\nu + F''_\nu$ in bezug auf den dritten Bereich scharf zerlegt ist, die betreffende Fundamentalreihe $F_1, F_2, \ldots$ *in bezug auf den dritten Bereich induziert* ist, d. h. *erstens* entweder eine unbeschränkt wachsende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, so daß jedes F'_{ν_κ} Vollelemente besitzt, oder ein solches m angegeben werden kann, daß F'_ν für $\nu > m$ aus lauter Nullelementen besteht bzw. fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_1, F''_2, \ldots$ (wobei wir einem fortfallenden F''_ν die Ordnungszahl Null zusprechen) in bezug auf den dritten Bereich induziert ist. Demzufolge ist dann jedesmal auch F_0 in bezug auf den dritten Bereich scharf zerlegt.

Sei $F_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ ein Element der in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F. Der Reihe nach ergibt sich, daß dieses Element in $F_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}$, in $F_{i_1 i_2 \ldots i_{m-2}}, \ldots$, in $F_{i_1 i_2}$, in F_{i_1} und in F je einen Abschnitt und einen Rest bestimmt, die in bezug auf den dritten Bereich gleichfalls vollständig induziert sind. Mithin haben wir den Satz, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichfalls in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist.

Eine in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies F ist offenbar scharf zerlegt in bezug auf den dritten Bereich, weiter quasi-vollständig und, wie wir mittels der induktiven Methode ersehen, auch in bezug auf den zweiten (mithin ebenfalls in bezug auf den ersten) Bereich vollständig induziert. Schreiben wir, der scharfen

[[384]]

Zerlegbarkeit von F in bezug auf den dritten Bereich entsprechend, $F \sim F' + F''$, so besitzt die wohlgeordnete Spezies F', wenn sie nicht fortfällt, entweder einen Rest der Ordnungszahl ε, oder alle nichtverschwindenden Ordnungszahlen von Resten von F' sind größer als ε.

Sei F eine in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierte wohlgeordnete Spezies, welche mit der ordnungsgemäßen Summe einer Fundamentalreihe $F_1, F_2, \dots$ von in bezug auf den dritten Bereich scharf zerlegten wohlgeordneten Spezies gleichwertig ist. Wir wollen beweisen, daß die Fundamentalreihe $F_1, F_2, \dots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert ist, und bemerken dazu zunächst, daß für die wohlgeordnete Spezies F, eben weil sie in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist, eine der drei folgenden Eigenschaften bestehen muß: *entweder* F besitzt einen Rest mit einer Ordnungszahl des dritten Bereichs (die auch Null sein kann), *oder* von einem gewissen Reste von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ε, *oder aber* jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \varepsilon$. Diese drei Fälle behandeln wir der Reihe nach.

Erster Fall. *F besitzt einen Rest F^0 mit einer Ordnungszahl des dritten Bereichs.* Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest F_{m2}, daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des dritten Bereichs besitzt, und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe eine Ordnungszahl des dritten Bereichs ist) in bezug auf den dritten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$ bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \dots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_1, F_2, F_3, \dots$.

Zweiter Fall. *Vom Reste F^0 von F besitzt jeder Rest die Ordnungszahl ε.* Für ein bestimmtes m besitzt dann F_m einen derartigen Rest F_{m2}, daß die ordnungsgemäße Summe der Fundamentalreihe $F_{m2}, F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$ mit F^0 gleichwertig ist, so daß jedes Glied der letzteren Fundamentalreihe eine Ordnungszahl des dritten Bereichs besitzt und die Fundamentalreihe dieser Ordnungszahlen (eben weil ihre ordnungsgemäße Summe gleich ε ist) in bezug auf den dritten Bereich induziert ist. Dann aber gilt dasselbe für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$ bzw. für die Fundamentalreihe der Ordnungszahlen von $F''_{m+1}, F''_{m+2}, \dots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_{m+1}, F_{m+2}, \dots$, mithin auch für die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_1, F_2, F_3, \dots$.

Dritter Fall. *Jeder Rest von F besitzt eine Ordnungszahl $> \varepsilon$.* Zu jedem m gibt es dann ein derartiges ν_m, daß für einen bestimmten (eigentlichen oder uneigentlichen) Abschnitt $F^0_{\nu_m}$ von F_{ν_m} die ordnungsgemäße Summe $F_m + F_{m+1} + \dots + F_{\nu_m-1} + F^0_{\nu_m}$ die Ordnungszahl ε besitzt, so daß wenigstens eine der wohlgeordneten Spezies $F'_m, F'_{m+1}, \dots, F'_{\nu_m-1}, F'_{\nu_m}$ existiert und Vollelemente besitzt. Das heißt aber, daß es zu jedem m ein derartiges $\varrho_m \geqq m$ gibt, daß F'_{ϱ_m} existiert und Vollelemente besitzt, so daß die Fundamentalreihe der wohlgeordneten Spezies $F_1, F_2, F_3, \dots$ in bezug auf den dritten Bereich induziert ist.

Kombinieren wir den hiermit bewiesenen Satz mit der Eigenschaft, daß jeder Ausschnitt sowie jeder Rest einer in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies gleichfalls in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist, so ergibt sich, daß jede mit einer in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierten wohlgeordneten Spezies F gleichwertige wohlgeordnete Spezies G ebenfalls in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist (und zwar mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von G). Auf Grund dieser Eigenschaft *bezeichnen wir eine Ordnungszahl als in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert, wenn jeder zu ihr gehörige vollständige Erzeugungswert in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist.*

Dann aber ist auch jeder zu ihr gehörige quasi-vollständige Erzeugungswert in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert. Sei nämlich β ein solcher quasi-vollständiger Erzeugungswert, daß der entsprechende vollständige Erzeugungswert α in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert ist. Jeder durch eine Formel $\alpha_\tau \sim \alpha'_\tau + \alpha''_\tau$ ausgedrückten scharfen Zerlegung in bezug auf den dritten Bereich eines konstruktiven Unterwertes α_τ von α entspricht dann eine durch eine Formel $\beta_\tau \sim \beta'_\tau + \beta''_\tau$ ausgedrückte scharfe Zerlegung in bezug auf den dritten Bereich des entsprechenden konstruktiven Unterwertes β_τ von β (welche leicht eindeutig festgelegt werden kann, z. B. durch die Forderung, daß, wenn β'_τ nicht fortfällt, jeder Rest von β'_τ Vollelemente aufweisen soll). Auf Grund dieser scharfen Zerlegungen seiner konstruktiven Unterwerte aber stellt sich β an der Hand seiner mit α parallelen Erzeugung unmittelbar als in bezug auf den dritten Bereich vollständig induziert heraus.

§ 6. Im vorigen haben wir gesehen, wie zur endlichen Bezeichnung von Ordnungszahlen zweierlei Elementarsymbole benutzt werden, nämlich *Zahlsymbole,* welche je eine bestimmte Ordnungszahl, und *Verknüpfungssymbole,* welche je ein aus gewissen geordneten endlichen Mengen von vorgegebenen Ordnungszahlen jedesmal eine Ordnungszahl erzeugendes Gesetz repräsentieren. Zur Bezeichnung der Ordnungszahlen des ersten Bereichs genügten dabei das Zahlsymbol 1 und das Verknüpfungssymbol der Addition; zur Bezeichnung der Ordnungszahlen des zweiten Bereichs kam das Zahlsymbol ω und das Verknüpfungssymbol der Multiplikation hinzu, während die weitere Hinzunahme des Verknüpfungssymbols der Potenzierung die Bezeichnung der Ordnungszahlen des dritten Bereichs erlaubte. Indem wir auf den Aufbau systematischer Theorien von Bereichen von Ordnungszahlen, welche über den dritten Bereich hinausgehen, verzichten, beschränken wir uns darauf, ein Beispiel eines Verknüpfungssymbols anzugeben, das, in Vereinigung mit den Zahlsymbolen 1 und ω und den Verknüpfungssymbolen der Addition, Multiplikation und Potenzierung, die Bezeichnung von Ordnungszahlen erlaubt, welche nicht nur größer sind als die Ordnungszahlen des dritten Bereichs, sondern auch größer als die Ordnungszahlen ε, $\varepsilon_1 = \varepsilon^{\varepsilon}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon^{\varepsilon_1}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon^{\varepsilon_2}, \ldots, \varepsilon' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$.

Es sei α ein beliebiger basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert, β ein beliebiger quasi-vollständiger Erzeugungswert. Alsdann definieren wir den symbolischen Ausdruck $\{\alpha, \beta\}$ mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von β durch folgende Festsetzungen:

Wenn β einer aus einem einzigen Nullelemente bestehenden Spezies entspricht, so ist $\{\alpha, \beta\} = \alpha$.

Wenn β einer aus einem einzigen Vollelemente bestehenden Spezies entspricht, so ist $\{\alpha, \beta\} = \alpha^{\alpha}$.

Wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und der symbolische Ausdruck $\{\alpha, \beta_\nu\}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ für jeden basierten quasi-vollständigen Erzeugungswert α als basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert definiert ist, während überdies ein beliebiger basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert α für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ einen Abschnitt von $\{\alpha, \beta_\nu\}$ darstellt, so ist $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta_1\} + [\{\{\alpha, \beta_1\}, \beta_2\} - \{\alpha, \beta_1\}] + [\{\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\}, \beta_3\} - \{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\}] + \ldots + [\{\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{m-1})\}, \beta_m\} - \{\alpha, (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{m-1})\}]$, so daß auch $\{\alpha, \beta\}$ für jeden basierten quasi-vollständigen Erzeugungswert α als basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert definiert ist, während überdies ein beliebiger basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert α einen Abschnitt von $\{\alpha, \beta\}$ darstellt.

Wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und $\{\alpha, \beta_\nu\}$ für jeden basierten quasi-vollständigen Erzeugungswert α und jedes ν als basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert definiert ist, während überdies ein beliebiger basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert α für jedes ν einen Abschnitt von $\{\alpha, \beta_\nu\}$ darstellt, so ist $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta_1\} + [\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\} - \{\alpha, \beta_1\}] + [\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\} - \{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\}] + \ldots$

$= \lim\limits_{\nu} \{ \alpha, (\beta_1 + \dots + \beta_\nu) \}$, so daß auch $\{ \alpha, \beta \}$ für jeden basierten quasi-vollständigen Erzeugungswert α als basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert definiert ist, während überdies ein beliebiger basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert α einen Abschnitt von $\{ \alpha, \beta \}$ darstellt.

Auf Grund dieser Definition beweist man, in derselben Weise wie die analoge Eigenschaft der Potenz α^β, daß die Gleichwertigkeit bzw. Inhaltsgleichheit von β und β^0 einerseits und von α und α^0 andererseits, die Gleichwertigkeit bzw. Inhaltsgleichheit von $\{ \alpha, \beta \}$ und $\{ \alpha^0, \beta^0 \}$ nach sich zieht. Der symbolische Ausdruck $\{ \alpha, \beta \}$ ist mithin nicht nur für einen beliebigen basierten quasi-vollständigen Erzeugungswert α und einen beliebigen quasi-vollständigen Erzeugungswert β als basierter quasi-vollständiger Erzeugungswert, sondern auch für eine beliebige nichtverschwindende Ordnungszahl α und eine beliebige Ordnungszahl β als nichtverschwindende Ordnungszahl definiert.

Wie weit man indessen zur Bezeichnung von Ordnungszahlen mit der Einführung neuer Zahlsymbole und Verknüpfungssymbole auch fortfährt, so läßt sich dabei doch die Spezies der eingeführten Symbole in jedem Stadium als endlich betrachten, weil jede Definition einer Fundamentalreihe von Symbolen $\tau_1, \tau_2, \dots$ auf die Definition eines *einzigen*, auf ein *beliebiges* Element von A, mithin auf eine *beliebige endliche* Gruppe von Symbolen 1 bezüglichen Symboles τ hinauskommt. Wenn wir nun nur solche Verknüpfungssymbole zulassen, welche je aus einer beliebig vorgegebenen endlichen geordneten Menge von Ordnungszahlen entweder eine Ordnungszahl erzeugen oder unmöglich eine Ordnungszahl erzeugen können, so bilden in jedem Stadium der Symboleinführung diejenigen Zusammensetzungen der schon eingeführten Elementarsymbole, welche Ordnungszahlen repräsentieren, eine zählbare (und selbstverständlich auch abzählbar unendliche) Spezies, von der übrigens mehrere Elemente dieselbe Ordnungszahl repräsentieren können.

Hieraus folgern wir die Unmöglichkeit, ein System σ von Zahlsymbolen und Verknüpfungssymbolen der angegebenen Art einzuführen, das die Darstellung *aller* Ordnungszahlen erlaubt. Nehmen wir nämlich einen Augenblick die Existenz eines diese Eigenschaft besitzenden Systems σ an, zählen wir diejenigen durch σ gelieferten endlichen Zusammensetzungen von Elementarsymbolen, welche nichtverschwindende Ordnungszahlen repräsentieren, als eine Fundamentalreihe ab und sei β_ν die dabei der natürlichen Zahl ν entsprechende Ordnungszahl. Alsdann kann die Ordnungszahl $\beta_\omega = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ keinem β_ν gleich sein, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind.

In analoger Weise zeigt man, daß die Spezies O der Ordnungszahlen *nicht aufzählbar* ist. Andererseits kann man jeder endlichen Ordnungszahl

[[388]]

die entsprechende Nummer der Folge ζ und jeder unendlichen Ordnungszahl die Nummer 1 zuordnen. Bezeichnen wir also die Kardinalzahl von O mit o, so haben wir nebst der Beziehung $o \mathrel{\ddot{\geqq}} a$ die Unmöglichkeit der Beziehung $a \mathrel{\ddot{\geqq}} o$, mithin die Beziehung $o \mathrel{\ddot{>}} a$, d. h. *O ist von größerem Gewicht als A.*

(Eingegangen am 28. 11. 1925.)

1927 B

Über Definitionsbereiche von Funktionen.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

§ 1.

Nach § 5 meines Aufsatzes „Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I“[1]) definieren wir in der „natürlich geordneten“ Spezies der endlichen Dualbrüche die *$\varkappa$-Intervalle* und die *λ-Intervalle*; insbesondere werden wir dieselben als *$\varkappa^{(\nu)}$-Intervalle* bzw. *$\lambda^{(\nu)}$-Intervalle* bezeichnen, wenn ihre Länge gleich $2^{-\nu}$ ist.

Unter einem *Punkte des Linearkontinuums* verstehen wir eine unbegrenzte Folge von λ-Intervallen (den „erzeugenden Intervallen“ des Punktes), deren jedes im engern Sinne in dem ihm vorangehenden enthalten ist, deren Größe mithin positiv gegen Null konvergiert[2]).

Eine Menge, in der jede nicht die Hemmung des Prozesses herbeiführende Wahl ein λ-Intervall erzeugt, während jedes dieser λ-Intervalle in dem von der vorangehenden Wahl erzeugten λ-Intervall im engern Sinne enthalten ist, heiße eine *Punktmenge des Linearkontinuums.*

Die Spezies derjenigen Punkte p des Linearkontinuums, welche mit einem gewissen Punkte p_1 des Linearkontinuums „zusammenfallen“ (womit gemeint wird, daß jedes erzeugende Intervall von p jedes erzeugende Intervall von p_1 ganz oder teilweise überdeckt) heiße ein *Punktkern des Linearkontinuums.* Wir wollen im folgenden die Punktkerne des Linearkontinuums mit y bezeichnen.

Diejenigen Punkte bzw. Punktkerne, welche ausschließlich von das Intervall $(0, 1)$ teilweise überdeckenden λ-Intervallen erzeugt werden, heißen *Punkte bzw. Punktkerne des Einheitskontinuums.* Die Punktkerne des Einheitskontinuums werden im folgenden mit x bezeichnet.

In ähnlicher Weise, wie dies im § 7 meines Aufsatzes „Zur Begrün-

[[1]] [1]) Math. Annalen **93**, S. 253.

[2]) Journ. f. Math. **154**, S. 6.

dung der intuitionistischen Mathematik II“ für die Spezies der Einschaltungselemente einer abzählbar unendlichen, im engern Sinne überall dichten geordneten Spezies ausgeführt ist[3]), kann auch die Spezies der Punktkerne des Linearkontinuums bzw. des Einheitskontinuums virtuell geordnet werden; mit dieser virtuellen Ordnung versehen, wird sie als *Linearkontinuum* bzw. als *Einheitskontinuum* bezeichnet.

Wenn die „natürlich geordnete“ Spezies der endlichen Dualbrüche zwischen 0 und 1 mit M bezeichnet wird, so werden wir sagen, daß der Punktkern π des Einheitskontinuums und das Element e von $K(M)$ [3]) *zusammenfallen*, wenn niemals ein Element der rechten bzw. linken Teilspezies einer zu e gehörigen Einschaltungsteilung von M links bzw. rechts von einem erzeugenden Intervalle eines Punktes von π gelegen sein kann. Durch diese Zusammenfallbeziehungen wird offenbar zwischen dem Einheitskontinuum und $K(M)$ eine *Ähnlichkeitskorrespondenz*[4]) bestimmt.

Unter einer ***reellen Funktion*** oder kurz unter einer ***Funktion*** $f(x)$ von x verstehen wir ein Gesetz, das gewissen mit ξ zu bezeichnenden, den „*Definitionsbereich*“ der Funktion bildenden Punktkernen des Einheitskontinuums je einen mit $\eta = f(\xi)$ zu bezeichnenden Punktkern des Linearkontinuums zuordnet.

Eine Funktion $f(x)$ heißt *negativ stetig für den Wert* ξ_0, wenn für eine beliebige gegen ξ_0 positiv konvergierende Fundamentalreihe $\xi_1, \xi_2, \ldots$ die Fundamentalreihe $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots$ negativ gegen $f(\xi_0)$ konvergiert[2]).

Eine Funktion $f(x)$ heißt *positiv stetig für den Wert* ξ_0 oder kurz *stetig für den Wert* ξ_0, wenn zu jedem positiven rationalen ε ein solches positives rationales a_ε bestimmt werden kann, daß für $|\xi - \xi_0| < a_\varepsilon$ die Ungleichung $|f(\xi) - f(\xi_0)| < \varepsilon$ besteht.

Eine für jedes ξ negativ bzw. positiv stetige Funktion wird kurz als eine *negativ stetige* bzw. als eine *stetige Funktion* bezeichnet werden.

Eine Funktion $f(x)$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem positiven rationalen ε ein solches positives rationales a_ε bestimmt werden kann, daß für $|\xi_2 - \xi_1| < a_\varepsilon$ immer die Ungleichung $|f(\xi_2) - f(\xi_1)| < \varepsilon$ besteht[5]).

[3]) Math. Annalen **95**, S. 467. [[1]]

[4]) loc. cit. [3]), S. 455.

[5]) Die Stetigkeitsdefinitionen sind nur der Einfachheit halber in die obige metrische Form gebracht worden, von der sie ihrem Inhalte nach unabhängig sind. Um dies einzusehen, greifen wir auf die die den x bzw. den y entsprechenden Einschaltungselemente erzeugenden abzählbar unendlichen, überall dichten geordneten Mengen μ' und μ'' der Ordinalzahlen $1 + \eta + 1$ bzw. η zurück, zählen μ' und μ'' durch Fundamentalreihen $g_1', g_2', \ldots$ bzw. $g_1'', g_2'', \ldots$ ab, bezeichnen $\mathfrak{S}(g_1', g_2', \ldots, g_\nu')$ bzw. $\mathfrak{S}(g_1'', g_2'', \ldots, g_\nu'')$ mit s_ν' bzw. s_ν'' und verstehen unter einem i_ν' bzw. einem i_ν'' ein

Eine Funktion $f(x)$ heißt *unstetig für den Wert* ξ_0, wenn eine natürliche Zahl n und eine gegen ξ_0 positiv konvergierende[2]) Fundamentalreihe $\xi_1, \xi_2, \ldots$ angegeben werden können, so daß $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots$ alle um mehr als $\frac{1}{n}$ von $f(\xi_0)$ verschieden sind.

Eine für irgendeinen bestimmten zu ihrem Definitionsbereiche gehörigen Wert unstetige Funktion heißt auch kurz *unstetig.*

Eine Funktion $f(x)$ heißt *voll,* wenn ihr Definitionsbereich mit dem Einheitskontinuum zusammenfällt.

Theorem 1. *Jede volle Funktion ist negativ stetig.*

Beweis. Sei $f(x)$ eine volle Funktion, ξ_0 ein beliebiger Punktkern x und $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine gegen ξ_0 positiv konvergierende Fundamentalreihe von Punktkernen x. Wir nehmen nun einen Augenblick an, daß es eine natürliche Zahl p und eine Fundamentalreihe von beständig wachsenden natürlichen Zahlen $p_1, p_2, \ldots$ gäbe, so daß $|f(\xi_{p_\nu}) - f(\xi_0)| > \frac{1}{p}$ für jedes ν, und definieren einen Punktkern ξ_ω des Einheitskontinuums, indem wir von einer unbegrenzten Folge $\mathcal{F}_1$ von erzeugenden Intervallen eines zu ξ_0 gehörigen Punktes ausgehen, und sodann durch eine unbegrenzte Folge von Wahlen von λ-Intervallen in solcher Weise einen Punkt $\mathcal{F}_2$ des Einheitskontinuums konstruieren, daß wir einstweilen für jede schon ins Auge gefaßte natürliche Zahl n die ersten n Intervalle mit den ersten n Intervallen von $\mathcal{F}_1$ identisch wählen, uns aber die Freiheit vorbehalten, jederzeit, nachdem das erste, zweite, ..., $(m-1)$-te und m-te Intervall gewählt worden sind, die Wahl aller weiteren (d. h. des $(m+1)$-ten, $(m+2)$-ten usw.) Intervalle in der Weise festzulegen, daß entweder ein zu ξ_0 oder ein zu einem gewissen ξ_{p_ν} gehöriger Punkt erzeugt wird. Alsdann ist für den $\mathcal{F}_2$ enthaltenden Punktkern ξ_ω die Funktion $f(x)$ nicht definiert, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind, und unsere Annahme sich als unstatthaft erwiesen hat. Dies aber besagt die negative Stetigkeit der Funktion $f(x)$.

Durch dieses eine unmittelbare Konsequenz des intuitionistischen Standpunktes bildende, seit 1918 von mir vielfach in Vorlesungen und Gesprächen erwähnte Theorem 1 wird die Vermutung der Gültigkeit des untenstehenden viel mehr aussagenden Theorems 3 nahegelegt, dessen Be-

geschlossenes Intervall von μ' bzw. μ'', dessen Endelemente zu s'_ν bzw. s''_ν gehören, dessen Inneres aber höchstens ein Element von s'_ν bzw. s''_ν enthält. Auf dieser Grundlage ist dann z. B. eine *gleichmäßig stetige Funktion* eine solche Funktion, daß für eine beliebige Abzählung von μ' und eine beliebige Abzählung von μ'' zu jeder natürlichen Zahl m eine solche natürliche Zahl n bestimmt werden kann, daß, wenn ξ_1 und ξ_2 zum selben i'_n gehören, $f(\xi_1)$ und $f(\xi_2)$ zum selben i''_m gehören.

weis mir indessen erst viel später gelungen ist[6]). Es ist eine möglichst durchsichtige Darstellung dieses Beweises, welche den Gegenstand der folgenden beiden Paragraphen bildet.

§ 2.

Sei M eine beliebige Menge, μ die ihr zugrunde liegende abzählbar unendliche Menge der endlichen (gehemmten und ungehemmten) Wahlfolgen $F_{sn_1 \ldots n_r}$ (wo s und die n_ν die für die betreffende Wahlfolge der Reihe nach gewählten natürlichen Zahlen vorstellen), und sei jedem Elemente von M eine natürliche Zahl β zugeordnet. Alsdann ist in μ eine solche abtrennbare zählbare Teilmenge μ_1 von ungehemmten endlichen Wahlfolgen ausgezeichnet, daß einem beliebigen Elemente von μ_1 für alle aus ihm hervorgehenden Elemente von M dieselbe natürliche Zahl β zugeordnet ist, während weiter eine Beweisführung h vorliegt, mittels welcher sich für ein beliebiges ungehemmtes Element von μ herausstellt, daß jede aus ihm hervorgehende ungehemmte unendliche Wahlfolge einen zu μ_1 gehörigen Abschnitt besitzt. (Ein ungehemmtes Element von μ soll nämlich dann und nur dann zu μ_1 gerechnet werden, wenn bei ihm — aber bei keinem seiner echten Abschnitte — nach dem *Algorithmus* des Zuordnungsgesetzes die Entscheidung hinsichtlich β *nicht* bis auf weitere Wahlen aufgeschoben wird; dabei ist es selbstverständlich keineswegs ausgeschlossen, daß man hinterher auch weder zu μ_1 gehörige noch einen zu μ_1 gehörigen Abschnitt besitzende Elemente von μ angeben kann mit der Eigenschaft, daß allen aus einem solchen Elemente von μ hervorgehenden Elementen von M dieselbe natürliche Zahl zugeordnet ist.)

Nennen wir ein Element von μ *versichert*, wenn es entweder gehemmt ist oder einen zu μ_1 gehörigen (echten oder nicht echten) Abschnitt besitzt, so ist μ in eine zählbare Menge τ von versicherten und eine zählbare Menge σ von nicht versicherten endlichen Wahlfolgen zerlegt, und die Beweisführung h zeigt, daß ein beliebiges F_s *versicherbar* ist, d. h. daß jede aus ihm hervorgehende für M ungehemmte unendliche Wahlfolge einen bestimmten zu μ_1 gehörigen Abschnitt besitzt[7]). Sei $h_{sn_1 \cdots n_r}$ eine Beweis- [[3]]
führung, welche die Versicherbarkeit des Elementes $F_{sn_1 \cdots n_r}$ von σ herleitet, so

[6]) Vgl. Amsterdamer Proceedings 27, S. 189—193; 644—646. [[2]]

[7]) Intuitionistisch durchdacht, ist diese Versicherbarkeit nichts anderes als diejenige Eigenschaft, welche dadurch definiert ist, daß sie für jedes Element von μ_1 und für jedes gehemmte Element von μ besteht, und daß sie für ein beliebiges $F_{sn_1 \cdots n_r}$ besteht, sobald sie für jedes ν für $F_{sn_1 \cdots n_r \nu}$ erfüllt ist. Diese Bemerkung zieht die Wohlordnungseigenschaft eines beliebigen $F_{sn_1 \cdots n_r}$ sofort nach sich. Der im Texte für die letztere Eigenschaft geführte Beweis scheint mir aber trotzdem wegen der in seinem Gedankengange enthaltenen Aussagen Interesse zu besitzen.

beruhen diese Versicherbarkeit und diese Beweisführung, außer auf dem Gegebensein von μ_1 und den gehemmten Wahlfolgen von μ, ausschließlich auf denjenigen zwischen den Elementen von μ bestehenden Beziehungen, welche sich zusammensetzen aus ***Elementarbeziehungen*** e von der Art, wie sie zwischen zwei Elementen $F_{m m_1 \dots m_g}$ und $F_{m m_1 \dots m_g m_{g+1}}$ bestehen, von denen das eine eine unmittelbare Verlängerung des anderen ist. Weil nun von einer beliebigen Beweisführung, wenn die in derselben benutzten Beziehungen in Grundbeziehungen zerlegbar sind, die „kanonisierte", d. h. in Elementarschlüsse[8]) zerlegte Form nur noch die Grundbeziehungen benutzt, so kann bei der kanonisierten Form $k_{s n_1 \dots n_r}$ der Beweisführung $h_{s n_1 \dots n_r}$ die Versicherbarkeit von $F_{s n_1 \dots n_r}$ in letzter Instanz ausschließlich aus einer Kombination der von den Elementarbeziehungen e, welche $F_{s n_1 \dots n_r}$ mit $F_{s n_1 \dots n_{r-1}}$ und mit den $F_{s n_1 \dots n_r \nu}$ verbinden, gebildeten Spezies $S_{s n_1 \dots n_r}$ mit einer aus beliebigen Elementarbeziehungen e, sowie dem Gegebensein von μ_1 und den gehemmten Wahlfolgen, zuvor hergeleiteten Eigenschaft gefolgert werden. Zum Schlußglied von $k_{s n_1 \dots n_r}$ braucht man also die vorherige Feststellung der Versicherbarkeit entweder von $F_{s n_1 \dots n_{r-1}}$ oder von *allen* $F_{s n_1 \dots n_r \nu}$.

Bezeichnen wir nun die Herleitung der Versicherbarkeit eines $F_{m m_1 \dots m_g}$ aus derjenigen von $F_{m m_1 \dots m_{g-1}}$ als ζ-*Schluß*, die Herleitung der Versicherbarkeit eines $F_{m m_1 \dots m_g}$ aus derjenigen von *allen* $F_{m m_1 \dots m_g \nu}$ als $\digamma$-*Schluß*, dann bildet die Beweisführung $k_{s n_1 \dots n_r}$ eine wohlgeordnete Spezies, von der jedes Vollelement von einem Elementarschluß gebildet wird, der im Falle, daß er die Versicherbarkeit eines Elementes von σ herleitet, entweder einen $\digamma$-Schluß oder einen ζ-Schluß darstellt.

---

8) Genau so wie im allgemeinen wohlgeordnete Spezies mittels der beiden erzeugenden Operationen aus Urspezies (vgl. meinen Aufsatz „Zur Begründung der in-
[[4]] tuitionistischen Mathematik III", Math. Annalen **96**, S. 451) werden insbesondere mathematische Beweisführungen mittels der beiden erzeugenden Operationen aus Nullelementen und der Intuition unmittelbar gegebenen Elementarschlüssen hergestellt (wobei allerdings die Beschränkung besteht, daß immer ein letzter Elementarschluß auftritt). Diese *gedanklichen*, im allgemeinen unendlichviele Glieder aufweisenden mathematischen Beweisführungen dürfen mit ihren endlichen, notwendigerweise inadäquaten, mithin nicht zur Mathematik gehörenden sprachlichen Begleitungen nicht verwechselt werden.

Die vorstehende Bemerkung enthält mein Hauptargument gegen die Ansprüche der Hilbertschen Metamathematik; ein zweites Argument ist dieses, daß die Erledigung der (übrigens dem Intuitionismus entnommenen) Sicherheitsfrage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, von Hilbert in einem circulus vitiosus gesucht wird; wenn man nämlich die Richtigkeit dieses Satzes mittels des Beweises seiner Widerspruchsfreiheit begründen will, so wird dabei das Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies, mithin der Satz vom ausgeschlossenen Dritten selbst (vgl. Jahresber. d.
[[5]] D. M.-V. **33**, S. 252) implizite vorausgesetzt.

Wir behaupten nun, daß jedes Element $F_{sn_1 \ldots n_r}$ von σ die *Wohlordnungseigenschaft* besitzt, d. h. daß die durch $F_{sn_1 \ldots n_r}$ bestimmte Teilmenge $M_{sn_1 \ldots n_r}$ von M in eine mit der Spezies der Vollelemente einer wohlgeordneten Spezies $T_{sn_1 \ldots n_r}$ ähnliche Spezies von Teilmengen M_α, deren jede durch ein $F_{sn_1 \ldots n_r}$ enthaltendes, zu μ_1 gehöriges endliches Anfangssegment F_α von Wahlen bestimmt wird, zerlegt ist. Die Spezies $T_{sn_1 \ldots n_r}$ wird mittels erzeugender Operationen zweiter Art w konstruiert, deren jede der Umkehrung der Fortsetzung eines bestimmten für M ungehemmten endlichen Anfangssegmentes von Wahlen mit einer freien neuen Wahl entspricht. Mit einer für M gehemmten bzw. ein Element von μ_1 abschließenden neuen Wahl korrespondiert dabei für die entsprechende Operation w eine aus einem Nullelement bzw. aus einem Vollelement bestehende Urspezies.

Zum Beweise dieser Behauptung bezeichnen wir mit $f_{sn_1 \ldots n_r}$ die Spezies derjenigen Elemente von σ, von denen im Laufe von $k_{sn_1 \ldots n_r}$ die Versicherbarkeit festgestellt wird, und sagen, daß eine konstruktive Unterspezies u von $k_{sn_1 \ldots n_r}$ die Wohlordnungseigenschaft besitzt, wenn jedes Element von σ, von dem im Laufe von u die Versicherbarkeit festgestellt wird, die Wohlordnungseigenschaft besitzt. Weiter werden wir sagen, daß für eine konstruktive Unterspezies u von $k_{sn_1 \ldots n_r}$ die *Erhaltungseigenschaft* besteht, wenn *im Falle, daß* jedes Element von $f_{sn_1 \ldots n_r}$, dessen Versicherbarkeit der Beweisführung u zugrunde liegt, die Wohlordnungseigenschaft besitzt, jedes Element von $f_{sn_1 \ldots n_r}$, von dem im Laufe von u die Versicherbarkeit hergeleitet wird, gleichfalls die Wohlordnungseigenschaft besitzt. Alsdann ersehen wir mittels der induktiven Methode an der Hand der Erzeugung von $k_{sn_1 \ldots n_r}$, daß für jede konstruktive Unterspezies von $k_{sn_1 \ldots n_r}$, mithin insbesondere für $k_{sn_1 \ldots n_r}$ selbst, die Erhaltungseigenschaft besteht. Aus der Erhaltungseigenschaft von $k_{sn_1 \ldots n_r}$ folgt aber unmittelbar die Wohlordnungseigenschaft von $k_{sn_1 \ldots n_r}$, mithin die Wohlordnungseigenschaft von $F_{sn_1 \ldots n_r}$[9]).

Im Falle, daß M eine *finite* Menge ist, ist die wohlgeordnete Spezies $T_{sn_1 \ldots n_r}$ inhaltsgleich mit einer wohlgeordneten Spezies $Q_{sn_1 \ldots n_r}$, welche [[6]]
ohne Benutzung von Nullelementen, und zwar in solcher Weise der oben besprochenen Konstruktion von $T_{sn_1 \ldots n_r}$ parallel konstruiert wird, daß jeder für die Konstruktion von $T_{sn_1 \ldots n_r}$ verwandten Operation w_α eine

[9]) Falls die Versicherbarkeit von $F_{sn_1 \ldots n_r}$ bei mehreren Beweisführungen $k_{sn_1 \ldots n_r}$ oder an mehreren Stellen einer und derselben Beweisführung $k_{sn_1 \ldots n_r}$ festgestellt wird, so sind die entsprechenden $T_{sn_1 \ldots n_r}$ alle erzeugungsgleich, wie sich mittels der induktiven Methode an der Hand der Entstehung einer von ihnen ergibt. Für den obigen Beweis ist diese Bemerkung übrigens überflüssig.

für die Konstruktion von $Q_{sn_1 \ldots n_r}$ verwandte erzeugende Operation erster Art v_α entspricht, wobei die Summanden von v_α der Reihe nach ähnlich sind mit den Spezies der Vollelemente derjenigen Summanden von w_α, die Vollelemente enthalten. Die wohlgeordnete Spezies $Q_{sn_1 \ldots n_r}$ wird also unter ausschließlicher Anwendung von erzeugenden Operationen erster Art konstruiert. Hieraus folgt aber, daß sowohl die Spezies der Elemente von $Q_{sn_1 \ldots n_r}$, wie die Spezies der Vollelemente von $T_{sn_1 \ldots n_r}$ *endlich* ist, daß also insbesondere für jede natürliche Zahl s die Spezies der Vollelemente von T_s endlich ist. Mithin kann eine solche natürliche Zahl z angegeben werden, daß ein beliebiges Element von μ_1 höchstens z Indizes besitzt, so daß die einem beliebigen Elemente e von M zugeordnete natürliche Zahl β_e durch die ersten z erzeugenden Wahlen von e vollständig bestimmt ist und wir folgende Eigenschaft bewiesen haben:

Theorem 2. *Wenn jedem Elemente e einer finiten Menge M eine natürliche Zahl β_e zugeordnet ist, so kann eine solche natürliche Zahl z angegeben werden, daß β_e durch die ersten z der e erzeugenden Wahlen vollständig bestimmt ist.*

§ 3.

Wir bestimmen nun im Einheitskontinuum für jede natürliche Zahl ν die k_ν-Intervalle $k_\nu', k_\nu'', \ldots, k_\nu^{(s_\nu)}$, d. h. die von links nach rechts geordneten, das Intervall $(0, 1)$ teilweise überdeckenden $\lambda^{(4\nu+1)}$-Intervalle. Alsdann fällt die finite Punktmenge J, welche von den Intervallschachtelungen $k_1^{(\mu_1)}, k_2^{(\mu_2)}, k_3^{(\mu_3)}, \ldots$ (wo jedes folgende Intervall im ihm vorangehenden im engeren Sinne enthalten ist) gebildet wird, mit der Spezies der x zusammen, d. h. jede derartige Intervallschachtelung gehört zu einem x und jedes x enthält eine derartige Intervallschachtelung[10]).

Bei einer vollen Funktion $f(x)$ ist nun jeder Intervallschachtelung $k_1^{(\mu_1)}, k_2^{(\mu_2)}, \ldots$ eine Schachtelung von λ-Intervallen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zugeordnet, und zwar besteht auf Grund des Theorems 2 für jede natürliche Zahl ν eine solche natürliche Zahl m_ν (von der wir voraussetzen dürfen, daß sie mit wachsendem ν nicht abnimmt), daß λ_ν durch die Wahl von $k_1^{(\mu_1)}, k_2^{(\mu_2)}, \ldots, k_{m_\nu}^{(\mu_{m_\nu})}$ bestimmt ist. Für jedes ν kann mithin nur eine endliche Anzahl l_ν von λ-Intervallen als λ_ν auftreten, und es besteht für

[10]) Wenn wir in analoger Weise eine passende, mit der Spezies der *Punktkernpaare* des Einheitskontinuums zusammenfallende *finite Menge von Punktepaaren* betrachten, so ergibt sich auf Grund von Theorem 2 mühelos die *Unzerlegbarkeit des Kontinuums*, d. h. die Eigenschaft, daß bei einer beliebigen Zerlegung des Einheitskontinuums in eine diskrete Spezies von Teilspezies eine dieser Teilspezies mit dem Einheitskontinuum identisch ist.

[[396]]

dieselben eine maximale Breite b_ν, die für unbeschränkt wachsendes ν gegen Null konvergiert.

Bezeichnen wir mit $t_\nu^{(\varrho)}$ das zu $k_\nu^{(\varrho)}$ konzentrisch liegende Intervall, dessen Breite $\frac{3}{4}$ der Breite von $k_\nu^{(\varrho)}$ beträgt, und seien P_1 und P_2 zwei beliebige Punktkerne des Einheitskontinuums, deren Abstand $\mathrel{<\!\!\circ} 2^{-4\nu-3}$, d. h. $\mathrel{<\!\!\circ} \frac{1}{4}$ der Breite der k_ν-Intervalle ist. Alsdann kann ein $t_\nu^{(\mu_\nu)}$ bestimmt werden, in dem P_1 und P_2 beide enthalten sind, und mittels dieses $t_\nu^{(\mu_\nu)}$ eine zu P_1 gehörige Intervallschachtelung $k_1^{(\mu_1)}, \ldots, k_\nu^{(\mu_\nu)}, k_{\nu+1}^{(\sigma_1)}, k_{\nu+2}^{(\sigma_2)}, \ldots$ und eine zu P_2 gehörige Intervallschachtelung $k_1^{(\mu_1)}, \ldots, k_\nu^{(\mu_\nu)}, k_{\nu+1}^{(\tau_1)}, k_{\nu+2}^{(\tau_2)}, \ldots$.

Sei ε eine beliebige positive, von Null positiv verschiedene Größe. Wählen wir ν_ε so groß, daß $b_{\nu_\varepsilon} < \varepsilon$ und setzen wir $2^{-4m_{\nu_\varepsilon}-3} = a_\varepsilon$, dann gehören nach dem zweiten Absatze dieses Paragraphen zu zwei beliebigen Elementen von J, für welche $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m_{\nu_\varepsilon}}$ gleich sind, zwei „Werte" von $f(x)$, deren Differenz dem absoluten Werte nach weniger als b_{ν_ε}, mithin weniger als ε beträgt. Nach dem dritten Absatze dieses Paragraphen gehören also auch zu zwei beliebigen Punktkernen P_1 und P_2 des Einheitskontinuums, deren Abstand $\mathrel{<\!\!\circ} a_\varepsilon$ ist, zwei Werte von $f(x)$, deren Differenz dem absoluten Werte nach weniger als ε beträgt, so daß $f(x)$ sich als *gleichmäßig stetig* herausstellt und wir bewiesen haben:

Theorem 3. *Jede volle Funktion ist gleichmäßig stetig.*

§ 4.

Es fragt sich nun, ob von den verschiedenen unstetigen bzw. keine festgestellte Stetigkeit besitzenden Funktionen, die nach der klassischen Auffassung als „überall definiert" gelten (und die im allgemeinen keineswegs die Vereinigung einer Spezies von Teilkontinuen des Einheitskontinuums als Definitionsbereich besitzen) sich vom intuitionistischen Standpunkt wenigstens eine Teilkategorie unter einen vernünftigen Begriff der *pseudovollen Funktion* zusammenfassen läßt, d. h. ob sich ein vernünftiger Begriff des *pseudovollen Definitionsbereichs* auffinden läßt, der solche nach der klassischen Auffassung mit dem vollen Einheitskontinuum identische Teilspezies des Einheitskontinuums umfaßt, die auch vom intuitionistischen Standpunkt eine hinreichend enge Anschmiegung an das volle Einheitskontinuum aufweisen. Zu dieser Frage wollen wir hier einige (übrigens keinerlei abschließenden Charakter beanspruchende) Bemerkungen machen

Selbstverständlich werden wir dabei von den Teilspezies des Einheitskontinuums nur die *geometrischen Typen*[11]) unserer Betrachtung zu unter-

[11]) In den Amsterdamer Proceedings **15**, S. 1262 wird dieser Begriff in einem Sinne eingeführt, der im allgemeinen Falle von dem hier gebrauchten verschieden ist. Der enge Zusammenhang der beiden Definitionen geht aus Fußnote [12]) hervor. [[7]]

ziehen haben, d. h. wir werden jede Spezies S von Punktkernen des Einheitskontinuums als gleichberechtigt anzusehen haben mit denjenigen, in die sie durch *topologische* (d. h. eindeutige und eine eindeutige Umkehrung besitzende) *Transformationen* des Einheitskontinuums in sich, übergeführt werden kann. Das Kontinuum über M fällt nämlich zusammen mit dem Kontinuum über eine beliebige *Verzerrung von* M, d. h. über eine beliebige abzählbare, im engeren Sinne überall dichte und in M überall dichte Menge M' von in M paarweise örtlich verschiedenen (d. h. durch wenigstens zwei Elemente von M getrennten) Einschaltungselementen von M[12]).

Zur Charakterisierung der pseudovollen Definitionsbereiche bzw. geometrischen Typen liegt es nun nahe, in erster Linie solche Kriterien, die sich auf den Grad der *Verschmelzung mit dem Einheitskontinuum*[13]), und (weil diese, wie wir sehen werden, nicht ausreichen) in zweiter Linie solche, die sich auf den Grad der *Inhaltsgleichheit mit dem Einheitskontinuum*[14]) beziehen, zu versuchen. Den letzteren Kriterien werden wir nicht eine feste Maßbestimmung, sondern die volle *Spezies der Maßbestimmungen des Einheitskontinuums*[15]) (welche aus einer beliebigen von ihnen mittels der vollen Spezies der topologischen Transformationen des Einheitskontinuums in sich erzeugt wird) zugrunde legen müssen.

§ 5.

⟦11⟧ Um für die gesuchte Charakterisierung eine orientierende Grundlage zu gewinnen, erörtern wir eine Reihe von Beispielen:

1. Es sei A der geometrische Typus derjenigen Spezies von Punktkernen, zu der ein beliebiger Punktkern des Einheitskontinuums dann und nur dann gehört, wenn der Satz vom ausgeschlossenen Dritten richtig ist. Alsdann enthalten die Spezies vom Typus A keinen einzigen Punktkern, während ihre Komplementärspezies in bezug auf das Einheitskontinuum

---

[12]) Falls die Spezies S eine Verzerrung M_1 von M enthält und wir die Endpunktkerne des Einheitskontinuums mit E_1 und E_2 bezeichnen, dann sind die nach dem Obigen mit S gleichberechtigten Spezies diejenigen, welche aus den samt ihren Umkehrungen eindeutigen, gleichmäßig stetigen und E_1 und E_2 fest lassenden Transformationen von $\mathfrak{S}(E_1, S, E_2)$ innerhalb des Einheitskontinuums hervorgehen, was eine unmittelbare Folge davon ist, daß die letzteren Transformationen die Trennung und Nichttrennung von Punktepaaren von $\mathfrak{S}(E_1, M_1, E_2)$ im Einheitskontinuum erhalten.

⟦8⟧ [13]) Jahresber. d. D. M.-V. **33**, S. 255.

[14]) Die intuitionistische Theorie des Inhaltes und der Meßbarkeit findet sich kurz skizziert in den Amsterdamer Verhandelingen (1. Sektion) **12**, Nr. 7, und wird aus-
⟦9⟧ führlich dargestellt in einem demnächst in diesen Annalen erscheinenden Aufsatz der Serie „Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik".

⟦10⟧ [15]) Vgl. in diesem Zusammenhang Enseignement Math. **13**, S. 377.

sogar *unmöglich einen Punktkern enthalten können,* so daß zum Typus A für keine einzige Maßbestimmung eine meßbare[14]) Repräsentante gehört. Nichtsdestoweniger sind alle Spezies vom Typus A mit dem Einheitskontinuum verflochten[16]); a fortiori sind sie also mit dem Einheitskontinuum kongruent[16]) und stimmen mit dem Einheitskontinuum überein[16]).

2. Es sei B_1 der geometrische Typus der Spezies G_1 der Punktkerne des Einheitskontinuums, die gegeben sind durch die unendlichen Dualbrüche $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{2^\nu}$, zu denen je drei Indizes m, $n_1 > m$ und $n_2 > m$ angegeben werden können, so daß $a_m = a_{n_1} = 1$, $a_{n_2} = 0$; B_2 der geometrische Typus der Spezies der positiv-irrationalen[16]) Punktkerne des Einheitskontinuums. Alle Repräsentanten der Typen B_1 und B_2 sind für jede Maßbestimmung meßbar und vom Inhalte 1. Indessen lassen sich für eine beliebige Repräsentante der Typen B_1 oder B_2 Punktkerne angeben, welche von ihr entfernt liegen, so daß für eine beliebige Repräsentante der Typen B_1 oder B_2 die Übereinstimmung mit dem Einheitskontinuum (a fortiori also die Kongruenz und die Verflechtung mit dem Einheitskontinuum) absurd ist.

3. Es sei C_1 der geometrische Typus der Vereinigung H_1 der obigen Spezies G_1 und der Spezies der durch die Zahlen 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ usw. gegebenen Punktkerne des Einheitskontinuums; C_2 der geometrische Typus der Vereinigung H_2 von G_1 und der Komplementärspezies von G_1 in bezug auf das Einheitskontinuum. Alsdann ist C_1 in C_2 als Teilspezies enthalten, aber nicht umgekehrt; z. B. gehört der durch die Zahl r^2[17]) gegebene Punktkern des Einheitskontinuums zu C_2, aber nicht zu C_1. Alle Repräsentanten der Typen C_1 und C_2 sind für jede Maßbestimmung meßbar und vom Inhalte 1. Weiter stimmen sie mit dem Einheitskontinuum überein, sind aber auch vom Einheitskontinuum losgewunden, so daß ihre Verflechtung mit dem Einheitskontinuum absurd ist. Schließlich sind die Repräsentanten des Typus C_2 mit dem Einheitskontinuum kongruent, die Repräsentanten des Typus C_1 aber nicht.

Zu einer beliebigen Repräsentante c des Typus C_1 oder des Typus C_2 läßt sich im Einheitskontinuum eine Fundamentalreihe von nicht zu c gehörigen, paarweise örtlich verschiedenen Punktkernen angeben. Um dies einzusehen, genügt es zu bemerken, daß in bezug auf die Spezies H_1 und H_2 die Spezies der durch die reellen Zahlen $b + r^2$ gegebenen Punktkerne

[16]) Jahresber. d. D. M.-V. **33,** S. 255. Man bemerke die Äquivalenz der Begriffe „Verflechtung" und „Zusammenfallung" im Falle, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten richtig ist. [[12]]

[17]) Jahresber. d. D. M.-V. **33,** S. 252.

die geforderte Eigenschaft besitzt, wenn $b = 2^{-n}$ (n eine beliebige nicht verschwindende natürliche Zahl) und r nach dem Zitate in Fußnote [17]) erklärt ist.

4. Es sei D_1 der geometrische Typus der Vereinigung I_1 der Spezies der rationalen und der Spezies der positiv-irrationalen Punktkerne des Einheitskontinuums; D_2 der geometrische Typus der Vereinigung I_2 der Spezies der rationalen Punktkerne des Einheitskontinuums und ihrer Komplementärspezies in bezug auf das Einheitskontinuum, d. h. der Spezies der negativ-irrationalen Punktkerne des Einheitskontinuums; D_3 der geometrische Typus der Vereinigung I_3 der Spezies der negativ-irrationalen Punktkerne des Einheitskontinuums und ihrer Komplementärspezies in bezug auf das Einheitskontinuum. Alle Repräsentanten der Typen D_1, D_2 und D_3 sind für jede Maßbestimmung meßbar und vom Inhalte 1. Weiter stimmen sie mit dem Einheitskontinuum überein, während ihre Verflechtung mit dem Einheitskontinuum absurd ist. Schließlich sind die Repräsentanten der Typen D_2 und D_3 mit dem Einheitskontinuum kongruent, die Repräsentanten des Typus D_1 aber nicht.

Zu einer beliebigen Repräsentante d der Typen D_1, D_2 oder D_3 läßt sich eine im Einheitskontinuum überall dichte Spezies der Ordinalzahl η von nicht zu d gehörigen, paarweise örtlich verschiedenen Punktkernen angeben. Um dies einzusehen, genügt es zu bemerken, daß in bezug auf die Spezies I_1 und I_2 die Spezies der durch die zwischen 0 und 1 gelegenen reellen Zahlen $a + r$, und in bezug auf die Spezies I_3 die Spezies der durch die zwischen 0 und 1 gelegenen reellen Zahlen $a + \pi \cdot r$ gegebenen Punktkerne die geforderte Eigenschaft besitzt (wo a eine beliebige rationale Zahl vorstellt und r nach dem Zitate in Fußnote [17]) erklärt ist).

5. Es sei E der geometrische Typus der Vereinigung J der Spezies J' der Punktkerne des Einheitskontinuums, welche gegeben sind durch die unendlichen Ternalbrüche $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{3^\nu}$, wo a_ν für jedes ν entweder gleich 0 oder gleich 2 zu wählen ist, und der Spezies J'' der Punktkerne des Einheitskontinuums, welche gegeben sind durch die unendlichen Ternalbrüche $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{3^\nu}$, für welche eine natürliche Zahl n existiert, so daß a_ν für $\nu < n$ gleich 0 oder gleich 2 und für $\nu = n$ gleich 1 ist, während für $\nu > n$ für a_ν eine beliebige der Zahlen 0, 1 und 2 gewählt werden kann mit der Maßgabe, daß unter diesen a_ν $(\nu > n)$ wenigstens eine von 0 und wenigstens eine von 2 verschiedene Zahl vorkommen muß. Alle Repräsentanten des Typus E stimmen mit dem Einheitskontinuum überein und sind mit dem Einheitskontinuum kongruent, während ihre Verflechtung mit dem

[[400]]

Einheitskontinuum absurd ist. Weiter besitzt für eine beliebige Maßbestimmung jede meßbare Repräsentante von E den Inhalt 1.

Zu einer beliebigen Repräsentante e von E läßt sich im Einheitskontinuum eine katalogisierte perfekte Spezies[18]) von nicht zu e gehörigen Punktkernen angeben. Um dies einzusehen, genügt es zu bemerken, daß in bezug auf die Spezies J die Spezies der durch die unendlichen Ternalbrüche $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{3^\nu}$ gegebenen Punktkerne des Einheitskontinuums die geforderte Eigenschaft besitzt, wenn $a_{k_1} = a_{k_1+1} = 1$, und sonst a_ν für jedes ν entweder gleich 0 oder gleich 2 zu wählen ist.

Wir wollen jetzt (für eine bestimmte, aber beliebig vorgegebene Maßbestimmung) eine (selbstverständlich nicht meßbare) Repräsentante e_1 von E konstruieren, zu welcher im Einheitskontinuum eine meßbare Spezies von nicht zu e_1 gehörigen Punktkernen definiert werden kann, welche *einen von Null positiv-verschiedenen*[19]) *Inhalt besitzt.* Zu diesem Zwecke verstehen wir unter einem π_ν $(\nu \geqq 2)$ eine endliche Reihe von Ziffern 0, 1 oder 2, welche der Reihe nach aus einer Reihe von zwei Ziffern, die nicht beide gleich 1 sind, einer Reihe von drei Ziffern, die nicht alle gleich 1 sind, ..., einer Reihe von $\nu - 1$ Ziffern, die nicht alle gleich 1 sind, und einer Reihe von ν Ziffern, die nicht alle gleich 1 sind, besteht; unter einem π_ω eine unbegrenzte Folge von Ziffern 0, 1 oder 2, welche der Reihe nach für jedes $n \geqq 2$ eine Reihe von n Ziffern, die nicht alle gleich 1 sind, enthält; unter einem ϱ_ω eine unbegrenzte Folge von Ziffern, welche alle gleich 0 oder gleich 2 sind; unter einem t_ν $(\nu \geqq 2)$ einen unendlichen Ternalbruch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, dessen Ziffernfolge der Reihe nach aus einem π_ν und einem ϱ_ω besteht; unter einem t_ω einen unendlichen Ternalbruch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, dessen Ziffernfolge ein π_ω darstellt; unter einem t_{k_1} einen unendlichen Ternalbruch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, dessen Ziffernfolge der Reihe nach für jedes $n \geqq 2$, das $\leqq k_1$ ist, eine Reihe von n Ziffern, die nicht alle gleich 1 sind, und für jedes n, das $> k_1$ ist, entweder die Ziffer 0 oder die Ziffer 2 enthält; unter T_ν bzw. T_ω bzw. T_{k_1} die durch die Spezies der t_ν bzw. der t_ω bzw. der

[18]) Vgl. Amsterdamer Verhandelingen (1. Sektion) **12**, Nr. 7, S. 8, 13, sowie die demnächst in diesen Annalen erscheinende ausführlichere Darstellung in einem Aufsatz der Serie „Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik". [[13]]

[19]) Aus der Darstellung des Textes geht übrigens hervor, daß für diesen Inhalt ein beliebiger zwischen 0 und 1 gelegener und sowohl von 0 wie von 1 positiv-verschiedener Wert vorgeschrieben werden kann.

t_{k_1} gegebene katalogisierte perfekte Punktkernspezies des Einheitskontinuums; unter U_ν bzw. U_ω bzw. U_{k_1} den durch T_ν bzw. T_ω bzw. T_{k_1} im Einheitskontinuum bestimmten Bereich; unter e_1 die Vereinigung von T_{k_1} und U_{k_1}. Die Spezies T_ω ist meßbar und besitzt einen von Null positiv-verschiedenen Inhalt α; ein beliebiges T_ν ist meßbar und vom Inhalte 0; ein beliebiges U_ν ist meßbar und vom Inhalte 1. Mithin ist auch die Punktkernspezies $P = \mathfrak{D}(T_\omega, U_2, U_3, \ldots)$ meßbar und besitzt den von Null positiv-verschiedenen Inhalt α. Die Punktkerne von P aber (welche im Falle, daß die Existenz von k_1 ad absurdum geführt wäre, alle zu T_{k_1}, im Falle, daß k_1 existierte, aber alle zu U_{k_1} gehören müßten) *gehören nicht zu* e_1.

6. Es sei F der geometrische Typus der Vereinigung K der Spezies K' der durch die unendlichen Ternalbrüche $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{3^\nu}$, wo unter den a_ν nur eine bestimmte endliche Anzahl, und der Spezies K'' der durch die unendlichen Ternalbrüche $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{3^\nu}$, wo unter den a_ν eine Fundamentalreihe von Ziffern 1 vorkommt, gegebenen Punktkerne des Einheitskontinuums. Alle Repräsentanten des Typus F stimmen mit dem Einheitskontinuum überein, ohne jedoch mit dem Einheitskontinuum kongruent zu sein, während ihre Verflechtung mit dem Einheitskontinuum sogar absurd ist. Weiter besitzt für eine beliebige Maßbestimmung jede meßbare Repräsentante von F den Inhalt 1.

Zu einer beliebigen Repräsentante f von F läßt sich im Einheitskontinuum eine katalogisierte perfekte Spezies von nicht zu f gehörigen Punktkernen angeben. Um dies einzusehen, genügt es zu bemerken, daß in bezug auf die Spezies K die Spezies der durch die unendlichen Ternalbrüche $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{3^\nu}$ gegebenen Punktkerne des Einheitskontinuums die geforderte Eigenschaft besitzt, wenn a_ν für jedes gerade $\nu > k_1$ gleich 1, sonst entweder gleich 0 oder gleich 2 zu wählen ist.

Wir wollen jetzt (für eine bestimmte, aber beliebig vorgegebene Maßbestimmung) eine (selbstverständlich nicht meßbare) Repräsentante f_1 von F konstruieren, zu welcher im Einheitskontinuum eine meßbare Spezies *vom Inhalte* 1 von nicht zu f_1 gehörigen Punktkernen definiert werden kann. Zu diesem Zwecke verstehen wir unter einem σ_ν $(\nu \geqq 1)$ eine endliche Reihe von Ziffern 0, 1 oder 2, welche der Reihe nach aus einer Reihe von zwei Ziffern, die nicht beide gleich 1 sind, einer Reihe von drei Ziffern, die nicht alle gleich 1 sind, ..., einer Reihe von ν Ziffern, die nicht alle gleich 1 sind, und einer Reihe von $\nu + 1$ Ziffern 1 besteht; unter einem σ ein beliebiges σ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$; unter einem σ' eine endliche Reihe von Ziffern, welche der Reihe nach aus einer beliebigen endlichen (eventuell verschwindenden) Reihe von Ziffern 0 oder 2 und einer Ziffer 1 besteht; unter einem $\tau_{\mu\nu}$ (μ und ν eventuell verschwindende natürliche Zahlen) eine unbegrenzte Folge von Ziffern 0, 1 oder 2, welche der Reihe nach aus μ Ziffernreihen σ', ν Ziffernreihen σ und einer unbegrenzten Ziffernfolge π_ω besteht; unter einem $\tau'_{\mu 0}$ (μ eine eventuell verschwindende natürliche Zahl) eine unbegrenzte Folge von Ziffern 0, 1 oder 2, welche der Reihe nach aus μ Ziffernreihen σ' und einer unbegrenzten Ziffernfolge ϱ_ω besteht; unter einem τ_0 ein beliebiges $\tau_{0\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$); unter einem τ_μ (μ eine nicht verschwindende natürliche Zahl) einerseits ein beliebiges $\tau'_{\nu 0}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1$), andererseits ein beliebiges $\tau_{\mu\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$); unter einem τ_{k_1} einerseits ein beliebiges $\tau'_{\nu 0}$ (ν eine eventuell verschwindende natürliche Zahl $< k_1$), andererseits ein beliebiges $\tau_{k_1\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots.$); unter einem s_μ bzw. einem s_{k_1} einen unendlichen Ternalbruch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, dessen Ziffernfolge ein τ_μ bzw. ein τ_{k_1} darstellt; unter K'_μ bzw. K'_{k_1} die durch die Spezies der s_μ bzw. durch die Spezies der s_{k_1} gegebene konsolidierte äußere Grenzspezies[20]) von Punktkernen des Einheitskontinuums; unter K''_μ bzw. K''_{k_1} die durch K'_μ bzw. K'_{k_1} bestimmte innere Grenzspezies[20]) von Punktkernen des Einheitskontinuums; unter f_1 die Vereinigung von K'_{k_1} und K''_{k_1}. Alsdann ist sowohl K'' wie ein beliebiges K'_μ meßbar und besitzt den Inhalt 1. Mithin ist auch die Punktkernspezies $Q = \mathfrak{D}(K'', K'_0, K'_1, K'_2, \ldots)$ meßbar und besitzt den Inhalt 1. Die Punktkerne von Q aber (welche im Falle, daß die Existenz von k_1 ad absurdum geführt wäre, alle zu K''_{k_1}, im Falle, daß k_1 existierte, aber alle zu K'_{k_1} gehören müßten) gehören nicht zu f_1.

7. Es sei F_0 der geometrische Typus der Vereinigung K_0 der obigen Spezies K' und ihrer Komplementärspezies in bezug auf das Einheitskontinuum K'''. Alle Repräsentanten des Typus F_0 stimmen mit dem Einheitskontinuum überein und sind mit dem Einheitskontinuum kongruent, während ihre Verflechtung mit dem Einheitskontinuum absurd ist. Weiter besitzt für eine beliebige Maßbestimmung jede meßbare Repräsentante von F_0 den Inhalt 1. Wir wollen aber wiederum (für eine bestimmte, aber beliebig vorgegebene Maßbestimmung) eine (selbstverständlich nicht meßbare) Repräsentante f_{01} von F_0 konstruieren, zu welcher im Einheitskontinuum eine meßbare Spezies vom Inhalte 1 von nicht zu f_{01} gehörigen Punktkernen definiert werden kann. Zu diesem Zwecke verstehen wir

[20]) Vgl. Amsterdamer Verhandelingen (1. Sektion) **12**, Nr. 7, S. 22, 23, sowie die demnächst in diesen Annalen erscheinende ausführlichere Darstellung in einem Aufsatz der Serie „Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik". [[14]]

unter K_{k_1}''' die Komplementärspezies in bezug auf das Einheitskontinuum der obigen Spezies K_{k_1}'; unter f_{01} die Vereinigung von K_{k_1}' und K_{k_1}'''. Alsdann gehören die Punktkerne der obigen Spezies Q (welche im Falle, daß die Existenz von k_1 ad absurdum geführt wäre, alle zu K_{k_1}''', im Falle, daß k_1 existierte, aber alle zu K_{k_1}' gehören müßten) nicht zu f_{01}.

§ 6.

Aus den Eigenschaften der im § 5 behandelten Beispiele entnehmen wir:

1. *Eine Verschmelzungseigenschaft für sich allein liefert kein brauchbares Kriterium für den pseudovollen Definitionsbereich.* Denn schon der auf die Zusammenfallung unmittelbar folgende Verschmelzungsgrad, nämlich die Verflechtung mit dem Einheitskontinuum reicht für ein derartiges Kriterium nicht aus. Wie das im § 5 behandelte Beispiel A beweist, garantiert ja die Verflechtung mit dem Einheitskontinuum nicht einmal die Existenz eines einzigen Punktes des Definitionsbereichs.

Andererseits ist die Verflechtung mit dem Einheitskontinuum für eine Vereinigung zweier elementefremder und je ein Element enthaltender Teilspezies des Einheitskontinuums niemals erfüllt, so daß sie auch nicht als *notwendiger* Bestandteil eines Kriteriums für den pseudovollen Definitionsbereich verlangt werden kann. Dagegen wird in einem passenden Kriterium für den pseudovollen Definitionsbereich die beschränktere Verschmelzungseigenschaft der Kongruenz mit dem Einheitskontinuum als Bestandteil enthalten sein müssen, weil ja ein Definitionsbereich naturgemäßerweise erst dann als pseudovoll gelten kann, nachdem die Möglichkeit der Angabe eines aus demselben herausragenden[21]) Punktkernes des Einheitskontinuums ad absurdum geführt worden ist.

2. *Eine Inhaltseigenschaft für sich allein liefert kein brauchbares Kriterium für den pseudovollen Definitionsbereich.* Für diesen Zweck kämen nämlich kaum andere als die beiden folgenden Inhaltseigenschaften von Definitionsbereichen in Betracht:

a) Der Definitionsbereich ist für eine passende Maßbestimmung meßbar mit dem Inhalte 1, und behält den Inhalt 1 für jede Maßbestimmung, für welche er meßbar ist.

b) Der Definitionsbereich ist für jede Maßbestimmung meßbar mit dem Inhalte 1.

Wie die im § 5 behandelten Beispiele B_1 und B_2 beweisen, garantiert aber für einen Definitionsbereich sogar die stärkere Eigenschaft b) nicht die Übereinstimmung mit dem Einheitskontinuum.

[[15]] [21]) Math. Annalen **93**, S. 246.

[[404]]

Um ein brauchbares Kriterium für den pseudovollen Definitionsbereich zu erhalten, sind wir somit auf die Kombination der Kongruenz mit dem Einheitskontinuum mit einer Inhaltseigenschaft, sei es die obige Eigenschaft a) oder die obige Eigenschaft b), angewiesen.

Dabei wird aber als maßgebende Inhaltseigenschaft die obige Eigenschaft b) deshalb der obigen Eigenschaft a) vorzuziehen sein, weil es nach dem im § 5 behandelten Beispiele F_0 mit dem Einheitskontinuum kongruente und die obige Eigenschaft a) besitzende Definitionsbereiche gibt, von denen bei passender Maßbestimmung jede meßbare Teilspezies den Inhalt Null besitzt.

Somit dürfte es sich empfehlen, *als pseudovolle Definitionsbereiche diejenigen und nur diejenigen Teilspezies des Einheitskontinuums zuzulassen, welche erstens mit dem Einheitskontinuum kongruent sind, zweitens für jede Maßbestimmung des Einheitskontinuums meßbar sind und den Inhalt* 1 *besitzen.* [[16]]

(Eingegangen am 28. 4. 1926.)

1927 C

Virtuelle Ordnung und unerweiterbare Ordnung.

Von *L. E. J. Brouwer* in Amsterdam.

Zweck der vorliegenden Note ist die virtuelle Ordnung (d. h. die für das Kontinuum bestehende Ordnungsart [1])) mittels einer Unerweiterbarkeitseigenschaft zu charakterisieren.

⟦1⟧ Eine Spezies P heißt *teilweise geordnet projiziert*, wenn für die Elemente einer Teilspezies der Spezies der Elementepaare (a, b) von P entweder die durch

„$a \doteq b$“ oder „*a projektionsgleich b*“ oder „$b \doteq a$“ oder „*b projektionsgleich a*“

ausgedrückte *symmetrische Relation der geordneten Projektion*, oder die durch

„$a < b$“ oder „*a vor b*“ oder „*a links von b*“ oder „$b > a$“ oder „*b nach a*“ oder „*b rechts von a*“

ausgedrückte *asymmetrische Relation der geordneten Projektion* definiert ist, während für diese Relationen, wenn noch die Identität zweier Elemente p und q von P durch die Formel „$p = q$“ zum Ausdruck gebracht wird, folgende „*Axiome der geordneten Projektion*“ erfüllt sind:

1. *Aus* $r = s$ *folgt* $r \doteq s$.
2. *Aus* $r \doteq s$ *und* $s \doteq t$ *folgt* $r \doteq t$.
3. *Aus* $r \doteq u, s \doteq v$ *und* $r < s$ *folgt* $u < v$.
4. *Aus* $r < s$ *und* $s < t$ *folgt* $r < t$.
5. *Die Beziehungen* $r \doteq s$, $r < s$ *und* $r > s$ *schließen einander aus.*

Eine teilweise geordnet projizierte Spezies, für welche die Relation $r \doteq s$ die Relation $r = s$ nach sich zieht, heißt *teilweise geordnet.*

Eine teilweise geordnet projizierte Spezies heißt *virtuell geordnet projiziert*, wenn außer den obigen Axiomen 1—5 noch folgende „*Ergänzungsaxiome der geordneten Projektion*“ erfüllt sind:

6. *Aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen* $r < s$ *und* $r > s$ *folgt* $r \doteq s$.

7. *Aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen* $r > s$ *und* $r \doteq s$ *folgt* $r < s$.

⟦2⟧ [1]) Vgl. Mathem. Annnalen 95, S. 453, 467.

Eine virtuell geordnet projizierte Spezies, für welche die Relation $r \doteq s$ die Relation $r = s$ nach sich zieht, heißt *virtuell geordnet* [2]).

Auf Grund der Relationen der geordneten Projektion einer virtuell geordnet projizierten Spezies P erscheint die *Projektionsspezies* von P, d. h. die Spezies der Spezies projektionsgleicher Elemente von P als virtuell geordnete Spezies.

Von einer teilweise geordnet projizierten Spezies P werden wir sagen, daß sie *unerweiterbar geordnet projiziert* ist, wenn jede Relation $p \doteq q$ oder $p < q$ zwischen zwei Elementen von P, welche sich den bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P widerspruchsfrei hinzufügen läßt, zu den bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P gehört.

Ist eine teilweise geordnet projizierte Spezies sowohl unerweiterbar geordnet projiziert wie teilweise geordnet, dann nennen wir sie *unerweiterbar geordnet.*

Satz 1. *Für eine unerweiterbar geordnet projizierte Spezies P gilt das Ergänzungsaxiom* 6.

Zum Beweise dieses Theorems genügt es, aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen $r < s$ und $r > s$ zwischen den Elementen r und s von P die Eigenschaft herzuleiten, daß die Relation $r \doteq s$ sich den bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P widerspruchsfrei hinzufügen läßt. Nehmen wir also die Ungereimtheit der Beziehungen $r < s$ und $r > s$ an, und bezeichnen wir mit α die Spezies der bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P, mit X die Spezies derjenigen Elemente x von P, für welche nach α entweder $x \doteq r$ oder $x \doteq s$ gilt, mit Y die Spezies derjenigen Elemente y von P, für welche nach α entweder $y < r$ oder $y < s$ gilt, mit Z die Spezies derjenigen Elemente z von P, für welche nach α entweder $z > r$ oder $z > s$ gilt, mit β die Spezies der Relationen $x_\sigma \doteq x_\tau$, $y_\sigma < x_\tau$, $x_\sigma < z_\tau$ und $y_\sigma < z_\tau$, mit γ die Vereinigung von α und β. Alsdann ersehen wir: a) je zwei der Spezies X, Y und Z sind elementefremd; b) aus den Relationen von γ können mittels der Axiome 2, 3 und 4 immer nur wiederum zu γ gehörige Relationen hergeleitet werden, so daß a fortiori aus der Vereinigung von α und der Relation $r \doteq s$ mittels der Axiome 2, 3 und 4 nur zu γ gehörige Relationen hergeleitet werden können; c) (wegen der Ungereimtheit der Beziehungen $r < s$ und $r > s$ in α) ein Element von α und ein Element von β können zusammen nicht gegen Axiom 5 verstoßen, so daß je zwei beliebige Elemente von γ ebensowenig gegen Axiom 5 verstoßen können, m. a. W. das Relationensystem γ ist widerspruchsfrei; und die Relation $r \doteq s$ kann dem Relationensystem α widerspruchsfrei hinzugefügt werden. c. q. f. d.

Satz 2. *Für eine unerweiterbar geordnet projizierte Spezies gilt das Ergänzungsaxiom* 7.

Zum Beweise dieses Theorems genügt es, aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen $r \doteq s$ und $r > s$ zwischen den Elementen r und s von P die Eigenschaft herzuleiten, daß die Relation $r < s$ sich den bestehenden Relationen

[2]) Diese Definition stimmt mit der Mathem. Annalen 95, S. 453 gegebenen inhaltlich überein. [[3]]

der geordneten Projektion von P widerspruchsfrei hinzufügen läßt. Nehmen wir also die Ungereimtheit der Beziehungen $r \mathrel{\overline{\perp}} s$ und $r > s$ an, und bezeichnen wir mit α die Spezies der bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P, mit Y die Spezies derjenigen Elemente y von P, für welche nach α entweder $y \mathrel{\overline{\perp}} r$ oder $y < r$ gilt, mit Z die Spezies derjenigen Elemente z von P, für welche nach α entweder $z \mathrel{\overline{\perp}} s$ oder $z > s$ gilt, mit β die Spezies der Relationen $y_\sigma < z_\tau$, mit γ die Vereinigung von α und β. Alsdann ersehen wir: a) es ist ungereimt, daß in α eine Relation $y_\sigma \mathrel{\overline{\perp}} z_\tau$ oder eine Relation $y_\sigma > z_\tau$ vorkommt; b) aus den Relationen von γ können mittels der Axiome 2, 3 und 4 immer nur wiederum zu γ gehörige Relationen hergeleitet werden, so daß a fortiori aus der Vereinigung von α und der Relation $r < s$ mittels der Axiome 2, 3 und 4 nur zu γ gehörige Relationen hergeleitet werden können; c) ein Element von α und ein Element von β können zusammen nicht gegen Axiom 5 verstoßen, so daß je zwei beliebige Elemente von γ ebensowenig gegen Axiom 5 verstoßen können, m. a. W. das Relationensystem γ ist widerspruchsfrei, und die Relation $r < s$ kann dem Relationensystem α widerspruchsfrei hinzugefügt werden. c. q. f. d.

Satz 3. *Eine virtuell geordnet projizierte Spezies P ist auch unerweiterbar*
⟦4⟧ *geordnet projiziert.*

Nehmen wir nämlich an, daß dem System α der bestehenden Relationen der geordneten Projektion von P die Relation $r \mathrel{\overline{\perp}} s$ (bzw. die Relation $r < s$) widerspruchsfrei hinzugefügt werden kann. Alsdann sind im System α sicher die beiden Relationen $r < s$ und $r > s$ (bzw. die beiden Relationen $r > s$ und $r \mathrel{\overline{\perp}} s$) ungereimt. Mithin ist, weil für die Relationen der geordneten Projektion von P das Ergänzungsaxiom 6 (bzw. das Ergänzungsaxiom 7) gilt, im System α die Relation $r \mathrel{\overline{\perp}} s$ (bzw. die Relation $r < s$) enthalten. c. q. f. d.

Die Sätze 1, 2 und 3 können wir wie folgt zusammenfassen:

Theorem 1. *Die Begriffe der virtuell geordneten Projektion und der unerweiterbar geordneten Projektion sind äquivalent.*

Aus Theorem 1 folgt unmittelbar:

Theorem 2. *Die Begriffe der virtuellen Ordnung und der unerweiterbaren Ordnung sind äquivalent.*

Mathematics. — *Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus* [1]). 1928 A
By Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of December 17, 1927).

LITERATUR. ⟦1⟧

HILBERT.

Mathematische Probleme, Vortrag, gehalten auf dem Intern. Mathem.-Kongress zu Paris 1900 (nach dem Abdruck im Archiv d. Math. u. Phys. (3) 1 (1901) hier zitiert als F 1).

Ueber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, Verhandlungen des III. Intern. Mathem.-Kongr. Heidelberg 1904, Leipzig 1905 (hier zitiert als F 2).

Axiomatisches Denken, Math. Annalen 78 (1918) (hier zitiert als F 3).

Neubegründung der Mathematik, Hamburger math. Seminarabhandlungen 1 (1922) (hier zitiert als F 4).

Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Annalen 88 (1922) (hier zitiert als F 5).

Ueber das Unendliche, Math. Annalen 95 (1926) (hier zitiert als F 6).

BROUWER.

Over de grondslagen der wiskunde, Amsterdam-Leipzig 1907 (hier zitiert als I 1).

De onbetrouwbaarheid der logische principes, Tijdschrift voor Wijsbegeerte 2 (1908) (hier zitiert als I 2).

Intuitionism and Formalism, Amer. Bull. 20 (1913) (hier zitiert als I 3).

Besprechung des Buches von SCHOENFLIES: *Die Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen,* Jahresber. d. D. M. V. 23 (1914) (hier zitiert als I 4).

Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde, N. archief v. wisk. (2) 12 (1918) (hier zitiert als I 5).

Intuitionistische Mengenlehre, Jahresber. d. D. M. V. 28 (1920) (hier zitiert als I 6).

Ueber die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie, Journ. f. Math. 154 (1924) (hier zitiert als I 7).

Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, Jahresber. d. D. M. V. 33 (1925) (hier zitiert als I 8).

Ueber Definitionsbereiche von Funktionen, Math. Annalen 97 (1927) (hier zitiert als I 9).

---

[1]) In ungefähr gleichlautender Form am 16. 2. 1928 der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

§ 1.

Die Richtigkeitsdifferenzen zwischen der formalistischen Neubegründung und dem intuitionistischen Neubau der Mathematik werden beseitigt sein, und die Wahl zwischen beiden Beschäftigungen sich auf eine Geschmacksangelegenheit reduzieren, sobald die folgenden in erster Linie auf den Formalismus bezüglichen, aber in der intuitionistischen Literatur zuerst formulierten Einsichten allgemein durchgedrungen sein werden. Dieses Durchdringen ist deshalb nur eine Zeitfrage, weil es sich um reine Besinnungsergebnisse handelt, die kein diskutables Element enthalten und zu denen jederman der sie einmal verstanden hat, sich bekennen muss. Von den vier Einsichten ist bisher für zwei dieses Verständnis und dieses Bekenntnis in der formalistischen Literatur erreicht. Das Eintreten der gleichen Sachlage für die beiden übrigen wird das Ende des Grundlagenstreites in der Mathematik bedeuten.

Erste Einsicht. *Die Einteilung der formalistischen Bemühungen in einen Aufbau des „mathematischen Formelbestandes" (formalistischen Bildes der Mathematik) und eine intuitive (inhaltliche) Theorie der Gesetze dieses Aufbaues, sowie die Erkenntnis, dass für die letztere Theorie die intuitionistische Mathematik der Menge der natürlichen Zahlen unentbehrlich ist.*

Zweite Einsicht. *Die Verwerfung der gedankenlosen Anwendung des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, sowie die Erkenntnis, erstens dass die Erforschung des Berechtigungsgrundes und des Gültigkeitsbereichs des genannten Satzes einen wesentlichen Gegenstand der mathematischen Grundlagenforschung ausmacht, zweitens dass dieser Gültigkeitsbereich in der intuitiven (inhaltlichen) Mathematik nur die endlichen Systeme umfasst.*

Dritte Einsicht. *Die Identifizierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit dem Prinzip von der Lösbarkeit jedes mathematischen Problems.*

Vierte Einsicht. *Die Erkenntnis dass die (inhaltliche) Rechtfertigung der formalistischen Mathematik durch den Beweis ihrer Widerspruchslosigkeit einen circulus vitiosus enthält, weil diese Rechtfertigung auf der (inhaltlichen) Richtigkeit der Aussage, dass aus der Widerspruchslosigkeit eines Satzes die Richtigkeit dieses Satzes folge, d. h. auf der*
[[2]] *(inhaltlichen) Richtigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beruht.*

1. Die erste Einsicht fehlt noch in F 2 (vgl. insbesondere den mit derselben in Widerspruch stehenden Absatz V auf S. 184—185). Nachdem sie durch POINCARÉ stark vorbereitet worden war, tritt sie zum ersten Mal in der Literatur auf in I 1, wo S. 173—174 die genannten Teile der formalistischen Mathematik als *mathematische Sprache* und *Mathematik 2. Ordnung* unterschieden und der intuitive Charakter des letzteren Teiles betont wird[2]). Mit der Bezeichnung der Mathematik

[[3]] 2) Eine mündliche Erörterung der ersten Einsicht Herrn HILBERT gegenüber hat im Herbst 1909 in mehreren Unterhaltungen stattgefunden.

2. Ordnung als *Metamathematik* ist sie in F 4 (vgl. insbesondere S. 165 u. 174) in der formalistischen Literatur durchgebrochen. Der Anspruch der formalistischen Schule, mit dieser dem Intuitionismus entnommenen Einsicht den Intuitionismus ad absurdum zu führen (vgl. Math. Zeitschr. 26, S. 3), ist wohl nicht ernst zu nehmen. [[4]]

2. Die gedankenlose Anwendung des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten findet sich noch in F 2 und F 3 (vgl. z. B. F 3, S. 413, Z. 11—4 v. u., und insbesondere F 2, S. 182, Z. 16—19 v. o., S. 182, Z. 2 v. u. —S. 183, Z. 2 v. o., S. 184, Z. 21—13 v. u., wo jedesmal der Satz vom ausgeschlossenen Dritten als mit dem Satz vom Widerspruch im wesentlichen gleichbedeutend angesehen wird). Zum ersten Male findet sich die zweite Einsicht in der Literatur in I 2, und sodann mehr oder weniger ausführlich in jeder der Veröffentlichungen I 3—8. Abgesehen von der mit ihr aufs engste verbundenen Erkenntnis der intuitionistischen Widerspruchslosigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, bricht sie in der formalistischen Literatur durch in F 5 [3]), wo einerseits die beschränkte inhaltliche Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten anerkannt (vgl. insbesondere S. 155—156), andererseits die widerspruchslose Kombination einer logischen Formulierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit anderen Axiomen im Rahmen der formalistischen Mathematik als Aufgabe gestellt wird. Besonders eloquent wird dann auf die beschränkte inhaltliche Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten hingewiesen in F 6, S. 173—174, wo aber die Erweiterung seiner Anzweiflung auf die übrigen Aristotelischen Gesetze über das Ziel hinausschiesst.

3. Während der Zeit der gedankenlosen Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der formalistischen Literatur wird das Prinzip von der Lösbarkeit jedes mathematischen Problems zunächst in F 1, S. 52 als Axiom bzw. Ueberzeugung, sodann in F 3, S. 412—413 in zwei verschiedenen Formen (in welchen statt von „Lösbarkeit" der Reihe nach von „prinzipieller Lösbarkeit" und von „Entscheidbarkeit durch eine endliche Anzahl von Operationen" gesprochen wird) als Gegenstand noch zu erledigender Probleme hingestellt. Aber auch nach der Erörterung der dritten Einsicht in I 2, S. 156, I 4, S. *80*, I 6, S. 203—204, und nach dem Durchbruch der zweiten Einsicht in der formalistischen Literatur wird in F 6, S. 180, wo das Problem der Widerspruchsfreiheit des Axioms von der Lösbarkeit eines beliebigen mathematischen Problems als Beispiel einer „in den mathematischen Denkbereich fallenden Frage grundsätzlicher Art, an die man sich früher nicht heranmachen konnte" hingestellt wird, diese Frage als unabhängig von der Sicherung der (die Widerspruchsfreiheit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit umfassenden) Grundlagen der mathematischen Wissenschaft noch offenstehend vorgeführt.

---

[3]) Nachdem schon in F 4, S. 160 Aufmerksamkeit auf den Satz vom ausgeschlossenen Dritten bekundet wird.

4. Die vierte Einsicht wird zum Ausdruck gebracht in I 9, S. 64. In der formalistischen Literatur findet sich von ihr bisher keine Spur, wohl aber manche ihr widersprechende Aeusserung, z.B. in F 1, S. 55—56 und vor allem in F 6, wo S. 162—163 noch ausgerufen wird: „Nein, wenn über den Nachweis der Widerspruchsfreiheit hinaus noch die Frage der Berechtigung zu einer Massnahme einen Sinn haben soll, so ist es doch nur die, ob die Massnahme von einem entsprechenden Erfolge begleitet wird" [4]).

Nach dem Vorstehenden hat der Formalismus vom Intuitionismus nur Wohltaten empfangen und weitere Wohltaten zu erwarten. Dementsprechend sollte die formalistische Schule dem Intuitionismus einige Anerkennung zollen, statt gegen denselben in höhnischem Ton zu polemisieren und dabei nicht einmal die richtige Erwähnung der Autorschaft einzuhalten. Ueberdies sollte die formalistische Schule bedenken, dass im Rahmen des Formalismus von der eigentlichen Mathematik bisher noch immer *nichts* gesichert ist (weil ja der metamathematische Widerspruchsfreiheitsbeweis des Axiomensystems nach wie vor aussteht), wogegen der Intuitionismus auf der Grundlage seiner konstruktiven Mengendefinition und seiner Haupteigenschaft der finiten Mengen [5]) schon einige Lehrgebäude der eigentlichen Mathematik in unerschütterlicher Sicherheit neu errichtet hat. Wenn also die formalistische Schule nach ihrer Aeusserung in F 6, S. 180 beim Intuitionismus Bescheidenheit bemerkt hat, so sollte sie darin Anlass finden, in bezug auf diese Tugend dem Intuitionismus nicht nachzustehen.

§ 2.

In I 7, S. 3 wurde bemerkt, dass bei den Bestrebungen zur Durchführung des Widerspruchsfreiheitsbeweises der formalistischen Metamathematik die intuitionistische Widerspruchslosigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten als ermutigender Umstand gelten kann.

Wenn die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für endlichviele mathematische Eigenschaften bzw. für eine beliebige Spezies von mathematischen Eigenschaften [6]) als *mehrfacher Satz vom ausgeschlossenen Dritten erster* bzw. *zweiter Art* bezeichnet wird, dann ist einerseits klar, dass die Widerspruchslosigkeit des einfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten keineswegs unmittelbar diejenige des mehrfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten nach sich zieht, andererseits,

[4]) Uebrigens liegt bei derartigen Aeusserungen genau genommen doch wieder eine gedankenlose Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, mithin eine Verdunkelung der zweiten Einsicht vor.

⟦5⟧ [5]) Vgl. F 9, S. 66 (Theorem 2).

[6]) D.h. die Existenzaussage eines Simultangesetzes, das für sie alle die Richtigkeit oder Absurdität entscheidet.

⟦412⟧

dass die im vorigen Absatze in Erinnerung gebrachte Bemerkung erst dann ihre volle Tragweite erlangt, wenn nicht nur für den einfachen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, sondern auch für den mehrfachen Satz vom ausgeschlossenen Dritten erster Art, die Widerspruchslosigkeit feststeht. In der Tat wird im Folgenden der Beweis der letzteren Widerspruchslosigkeit erbracht. Des weiteren wird sich ergeben, dass der (für die formalistischen Hoffnungen belanglose) mehrfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten zweiter Art keine Widerspruchslosigkeit mehr besitzt.

Die Widerspruchsfreiheit des mehrfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten erster Art beweisen wir mittels vollständiger Induktion. Es sei n eine natürliche Zahl, es sei die Widerspruchsfreiheit der kombinierten Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für n beliebige mathematische Eigenschaften bewiesen, es seien $n + 1$ mathematische Eigenschaften $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ vorgegeben, und es sei einen Augenblick angenommen, dass die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ zu einem Widerspruch führte. Das würde heissen, dass jede der 2^{n+1} Kombinationen von $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ je mit dem Richtigkeits- oder mit dem Absurditätsprädikat versehen, zu einem Widerspruch führte.

Wir behaupten, dass unter dieser Annahme der einfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten für a_{n+1} notwendig absurd sein muss. Denn wäre a_{n+1} richtig bzw. absurd, so wäre auf Grund der Widerspruchsfreiheit der kombinierten Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für n beliebige mathematische Eigenschaften die Kombination der Richtigkeit bzw. Absurdität von a_{n+1} mit der kombinierten Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für $a_1, a_2, \ldots, a_n$ widerspruchsfrei, entgegen der Annahme des vorigen Absatzes. Die Annahme des vorigen Absatzes hat sich also als unstatthaft erwiesen, und die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für $n + 1$ beliebige mathematische Eigenschaften hat sich als widerspruchsfrei herausgestellt.

Gegenbeispiele der Widerspruchsfreiheit des mehrfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten zweiter Art liefert der aus der Haupteigenschaft der finiten Mengen folgende Satz, dass bei Zerlegung des Einheitskontinuums in zwei Teilspezies eine dieser Teilspezies mit dem Einheitskontinuum identisch und die andere leer ist. Aus diesem Satze folgt nämlich, dass [[6]]
die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für eine beliebige Eigenschaft in bezug auf *alle* Punktkerne des Einheitskontinuums dann und nur dann widerspruchsfrei ist, wenn die Eigenschaft entweder für alle Punktkerne des Einheitskontinuums richtig oder für alle Punktkerne des Einheitskontinuums absurd ist. Insbesondere sind die beiden folgenden Aussagen kontradiktorisch:

1. *Alle Punktkerne des Einheitskontinuums sind entweder rational oder negativ-irrational.*

2. *Für alle Punktkerne des Einheitskontinuums ist die Rationalitätsfrage entweder entscheidbar oder unentscheidbar.*

Formulieren wir in Analogie mit dem Obigen folgende drei Fassungen des Prinzips der Reziprozität der Komplementärspezies:

1. *Jedes Element der Komplementärspezies der Komplementärspezies von R gehört zu R* (einfaches Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies).

2. *Jede endliche Spezies von Elementen der Komplementärspezies der Komplementärspezies von R gehört zu R* (mehrfaches Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies erster Art).

3. *Jede Spezies von Elementen der Komplementärspezies der Komplementärspezies von R gehört zu R* (mehrfaches Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies zweiter Art).

Alsdann besteht auch hier die Widerspruchsfreiheit nur für 1. und 2.,
[[7]] und nicht für 3. Ein Gegenbeispiel liefert die Spezies *G* derjenigen Punktkerne des Einheitskontinuums *C*, für welche die Rationalitätsfrage entscheidbar ist. Denn die Komplementärspezies der Komplementärspezies in *C* von *G* ist mit *C* identisch (weil nämlich die Komplementärspezies in *C* von *G* leer ist), während wir oben gesehen haben, dass *G* unmöglich mit *C* identisch sein kann.

Mathematics. — *Beweis dass jede Menge in einer individualisierten Menge enthalten ist* [1]. By Prof. L. E. J. BROUWER. 1928 B

(Communicated at the meeting of December 17, 1927).

Sei M eine beliebig vorgegebene Menge. Wir zählen zunächst die Menge der ersten Wahlen von M durch eine Fundamentalreihe ab, zählen sodann die Menge der zweiten Wahlen von M als Produkt zweier Fundamentalreihen (mittels des Diagonalverfahrens) wiederum durch eine Fundamentalreihe ab, zählen darauf die Menge der dritten Wahlen von M als Produkt der letzteren Fundamentalreihe mit einer neuen Fundamentalreihe (mittels des Diagonalverfahrens) gleichfalls durch eine Fundamentalreihe ab, usw. Alsdann bekommt jede Wahl eine neue Nummer, und wenn wir alle hierbei nach bestimmter erster, zweiter, ... bis einschliesslich n-ter Wahl für die $(n+1)$-te Wahl nicht vorkommenden Nummern als gehemmte Nummern betrachten, bekommen wir eine mit M identische „monotone" Menge N, d.h. eine mit M identische Menge N, in welcher *nach* einer ungehemmten n-ten Nummer a nur Nummern $\geqslant a$ als $(n+1)$-te Nummer ungehemmt sein können, und in welcher für beliebiges n keine zwei ungehemmte n-te Wahlen mit gleichen Nummern vorkommen. [[2]]

Nun nehmen wir *in der Menge N* ein Fundamentalreihe von Aenderungen a_1, a_2, ... vor, wobei für jedes beliebige n die Erzeugnisse der 1-sten, 2-ten, ... bis einschliesslich $(n-1)$-ten Wahl nicht von a_n beeinflusst werden. Und zwar ändern wir für a_1 zunächst in der Menge N die Reihe der ersten Wahlen derweise, dass jede gehemmte Wahl gehemmt bleibt, während eine ungehemmte Wahl dann und nur dann ungehemmt bleibt, wenn ihr in der Fundamentalreihe keine andere Wahl vorangeht, welche das gleiche Zeichen erzeugt; sodann erklären wir *nach* einer beliebigen ungehemmt *gebliebenen* ersten Wahl σ diejenigen und nur diejenigen zweiten Wahlen ungehemmt, welche zuvor nach einer das gleiche Zeichen wie σ erzeugenden ersten Wahl ungehemmt waren, und die ganze Mengenfortsetzung dieser ungehemmten zweiten Wahlen wird bei diesem „Transport" ungeändert gelassen. Hierdurch bekommen wir eine mit N identische monotone Menge N_1, in welcher gleiche Elemente immer nur aus gleichen ersten Wahlen hervorgehen.

Die Aenderung a_2 wirkt in solcher Weise auf N_1, dass für eine beliebige ungehemmte erste Wahl σ von N_1 zunächst für die auf σ folgenden zweiten

[1]) Für die Definition der Menge, der individualisierten Menge und der finiten Menge vgl. Math. Annalen **93**, S. 244—245. Im Folgenden werden wir sowohl eine beliebige Zeichenreihe wie *nichts*, kurz als „Zeichen" bezeichnen. [[1]]

Wahlen die gleiche Aenderung ausgeführt wird, welche oben bei a_1 mit der Reihe der ersten Wahlen vorgenommen wurde, sodann *nach* einer beliebigen auf σ folgenden, ungehemmt *gebliebenen* zweiten Wahl τ diejenigen und nur diejenigen dritten Wahlen ungehemmt erklärt werden, welche in N_1 nach einer das gleiche Zeichen wie τ erzeugenden, auf σ folgenden zweiten Wahl ungehemmt waren, und die ganze Mengenfortsetzung dieser ungehemmten dritten Wahlen bei diesem „Transport" ungeändert gelassen wird. Hierdurch bekommen wir eine mit N und N_1 identische monotone Menge N_2, in welcher gleiche Elemente immer nur aus gleichen ersten und zweiten Wahlen hervorgehen.

Die Aenderung a_3 wirkt in solcher Weise auf N_2, dass für beliebiges σ und τ mit den auf σ und τ folgenden dritten Wahlen und ihren Mengenfortsetzungen die gleiche Aenderung ausgeführt wird, welche oben zunächst bei a_1 mit der Reihe der ersten Wahlen und ihren Mengenfortsetzungen und sodann bei a_2 mit den auf σ folgenden zweiten Wahlen und deren Mengenfortsetzungen vorgenommen wurde.

In dieser Weise bestimmen wir der Reihe nach $N_1, N_2, N_3, \ldots$, wobei jedesmal N_ν aus $N_{\nu-1}$ hervorgeht mittels Hemmung eines Teiles der vorher ungehemmten Folgen von ν Wahlen und dementsprechender Umordnung der (alle ungehemmt bleibenden) ungehemmten Folgen von $\nu + 1$ Wahlen. Hierbei bemerken wir, dass einer ungehemmten Folge von $\nu + 1$ Wahlen mit Indizen $\leqslant m$ in $N_{\nu+1}$ eindeutig eine die gleichen Zeichen erzeugende und gleiche Indizes besitzende ungehemmte Folge von $\nu + 1$ Wahlen in N_ν und der letzteren der Reihe nach in $N_{\nu-1}, N_{\nu-2}, \ldots, N_1, N$ eindeutig je eine die gleichen Zeichen erzeugende ungehemmte Folge von $\nu + 1$ Wahlen mit Indizen $\leqslant m$ entspricht. Mithin brauchen wir, um von Indizes $\leqslant m$ besitzenden Folgen von $\nu + 1$ Wahlen in $N_{\nu+1}$ die Gehemmtheit bzw. die erzeugten Zeichen festzustellen, der Reihe nach in $N, N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ ebenfalls nur Folgen mit Indizen $\leqslant m$ in Betracht zu ziehen, so dass die betreffende Feststellung einen endlichen d.h. ausführbaren Prozess darstellt.

Wenn wir nun die Menge P dadurch definieren, dass sie für jedes ν in der Wirkung der Folgen von 1, 2, 3, ..., ν Wahlen mit N_ν übereinstimmt, dann ist die Menge P individualisiert and enthält N, also M.

Wenn wir sagen, dass zwei Mengenelemente *differieren*, wenn für passendes n die Erzeugnisse ihrer ersten n Wahlen verschieden sind, und dass zwei Mengen *übereinstimmen*, wenn keine von beiden ein von allen Elementen der anderen differierendes Element enthalten kann, so folgert man im Falle einer *finiten* Menge M mittels der Haupteigenschaft der finiten Mengen [2]) leicht, dass die zugehörige Menge P mit M übereinstimmt. *Mithin ist jede finite Menge in einer mit ihr übereinstimmenden individualisierten Menge enthalten.*

⟦3⟧ [2]) Vgl. Math. Annalen **97**, S. 66 (Theorem 2).

⟦416⟧

Mathematik, Wissenschaft und Sprache. 1929

Von **L. E. J. Brouwer** in Amsterdam.

Vortrag, gehalten in Wien am 10. III. 1928 über Einladung des Komitees zur Veranstaltung von Gastvorträgen ausländischer Gelehrter der exakten Wissenschaften. ⟦1⟧

I. ⟦2⟧

Mathematik, Wissenschaft und Sprache bilden die Hauptfunktionen der Aktivität der Menschheit, mittels deren sie die Natur beherrscht und in ihrer Mitte die Ordnung aufrecht erhält. Diese Funktionen finden ihren Ursprung in drei Wirkungsformen des Willens zum Leben des einzelnen Menschen: 1. die mathematische Betrachtung, 2. die mathematische Abstraktion und 3. die Willensauferlegung durch Laute. ⟦3⟧

1. Die *mathematische Betrachtung* kommt als Willensakt im Dienste des Selbsterhaltungstriebes des einzelnen Menschen in zwei Phasen zustande, die der *zeitlichen Einstellung* und die der *kausalen Einstellung*. Erstere ist nichts anderes als das intellektuelle Urphänomen der Auseinanderfallung eines Lebensmomentes in zwei qualitativ verschiedene Dinge, von denen man das eine als dem anderen weichend und trotzdem als durch den Erinnerungsakt behauptet empfindet. Dabei wird gleichzeitig das gespaltene Lebensmoment vom Ich getrennt und nach einer als Anschauungswelt zu bezeichnenden Welt für sich verlegt. Die durch die zeitliche Einstellung zustande gekommene zeitliche Zweiheit oder zweigliedrige zeitliche Erscheinungsfolge läßt sich dann ihrerseits wieder als eines der Glieder einer neuen Zweiheit auffassen, womit die zeitliche Dreiheit geschaffen ist, usw. In dieser Weise entsteht mittels Selbstentfaltung des intellektuellen Urphänomens die *zeitliche Erscheinungsfolge beliebiger Vielfachheit*. Nunmehr besteht die *kausale Einstellung* im Willensakt der „Identifizierung" verschiedener sich über Vergangenheit und Zukunft erstreckender zeitlicher Erscheinungsfolgen. Dabei entsteht ein als *kausale Folge* zu bezeichnendes gemeinsames Substrat dieser identifizierten Folgen. Als besonderer Fall der kausalen Einstellung tritt auf die gedankliche Bildung von *Objekten*, d. h. von beharrenden (einfachen oder zusammengesetzten) Dingen der Anschauungswelt, wodurch gleichzeitig die Anschauungswelt selbst stabilisiert wird. Wie gesagt, sind die beiden Stufen der mathematischen Be- ⟦4⟧
trachtung keineswegs passive Einstellungen, sondern im Gegenteil

Willensakte: es kann jedermann die innere Erfahrung machen, daß man nach Willkür entweder sich ohne zeitliche Einstellung und ohne Trennung zwischen Ich und Anschauungswelt verträumen, oder die letztere Trennung aus eigener Kraft vollziehen und in der Anschauungswelt die Kondensation von Einzeldingen hervorrufen kann. Und ebenso willkürlich ist die sich nie unumgänglich aufzwingende Gleichsetzung verschiedener zeitlicher Folgen.

Die einzige Rechtfertigung der mathematischen Betrachtung ist gelegen in der „Zweckmäßigkeit" der aus ihr hervorgehenden „*mathematischen Handlung*", worunter wir folgendes verstehen. Die kausale Einstellung setzt den Menschen instand, von einer Erscheinungsfolge eine spätere, instinktiv erwünschte, aber nicht durch einen direkten Impuls herbeizuführende, als *Zweck* zu bezeichnende Erscheinung, *indirekt* durch kühle Berechnung zu erzwingen, indem man aus der Folge eine frühere, vielleicht an sich nichts begehrenswertes besitzende, als *Mittel* zu bezeichnende Erscheinung hervor-
[[5]] ruft, die dann die erwünschte Erscheinung als *Folge* nach sich zieht.

Selbstverständlich besitzt eine kausale Folge keine weitere *Existenz* außer als Korrelat einer mathematische Handlungen hervorrufenden Einstellung des menschlichen Willens und kann von der Existenz eines kausalen Zusammenhanges der Welt unabhängig vom Menschen keine Rede sein. Im Gegenteil, der sogenannte kausale Zusammenhang der Welt ist eine nach außen wirkende Gedankenkraft im Dienste einer dunklen Willensfunktion des Menschen, der sich dadurch die Welt mehr oder weniger wehrlos unterwirft, in analoger Weise wie die Schlange ihre Beute wehrlos macht durch ihren hypnotisierenden Blick und der Tintenfisch durch Bespritzung mit seinem Sekret.

Die Konsequenz der kausalen Einstellung bringt weiter mit sich, daß der Mensch schon auf niedrigen Kulturstufen zur Stabilisierung seines kausalen Einflußgebietes um sich herum eine ihm untergebene *Sphäre der Ordnung* zu schaffen sucht, in welcher er erstens die ihm dienstbaren kausalen Folgen *isoliert*, d. h. vor störenden Nebenerscheinungen schützt, und zweitens neue kausale Folgen herbeiführt, sowohl durch die materielle Konstruktion von neuen beharrenden Objekten und Instrumenten, wie durch die mehr oder weniger organisierte Unterjochung des Willens seiner
[[6]] Mitmenschen unter den eigenen Willen.

2. Der volle Ausbau des Getriebes der mathematischen Handlungen wird aber erst auf höheren Kulturstufen ermöglicht, und zwar durch die *mathematische Abstraktion*, mittels deren man die Zweiheit ihres dinglichen Inhaltes beraubt und nur als leere Form, als gemeinsames Substrat aller Zweiheiten übrig behält. Es ist dieses gemeinsame Substrat aller Zweiheiten, das die *Urintuition der Mathematik* bildet, deren Selbstentfaltung u. a. das Unendliche als gedankliche Realität einführt und zwar in hier nicht näher zu

erörternder Weise zunächst die Gesamtheit der natürlichen Zahlen, sodann diejenige der reellen Zahlen und schließlich die ganze reine Mathematik liefert.

Die Wirkung der mathematischen Abstraktion beruht darauf, daß viele kausale Folgen erheblich leichter zu beherrschen sind, wenn man sie auf Teilsysteme derartiger reinmathematischer Systeme projiziert, d. h. ihre inhaltlosen Abstraktionen als Teilsysteme in derartige ausgedehntere reinmathematische Systeme einbettet. Hierdurch werden nämlich auch die innerhalb des ausgedehnteren Systems bestehenden Beziehungen zur Übersicht über das beschränktere System verwendbar, was für die letztere Übersicht manchmal eine durchgreifende Vereinfachung mit sich bringt. In dieser Weise kommen die wissenschaftlichen Theorien zustande, in denen neben den Elementen der kausalen Folgen das bei der Übersicht eine zentralisierende Rolle spielende erweiterte reinmathematische System als Hypothese auftritt. Speziell als exakt- [[7]]
wissenschaftliche Theorien werden gewisse wissenschaftliche Theorien bezeichnet, die sich erstens auf ganz besonders stabile (sei es ausschließlich als Naturgesetze beobachtete, sei es als technische Tatsachen künstlich hervorgerufene) kausale Folgen beziehen, bei denen zweitens durch die Hypothesen eine große Vereinfachung erzielt wurde und bei denen drittens die kausalen Folgen speziellen Werten von zahlenmäßigen Parametern entsprechen, welche mit ihrem vollen Wertegebiet dem überlagerten mathematischen System angehören. Insbesondere bei den exaktwissenschaftlichen Theorien ereignet sich das Phänomen des heuristischen Charakters wissenschaftlicher Hypothesen, das darin besteht, daß zu ursprünglich als hypothetisch eingefügten Folgen hinterher, im überlagernden reinmathematischen System die gleiche Stelle einnehmende, wirkliche kausale Folgen der Anschauungswelt entdeckt werden.

3. Die zunächst im Dienste des Willens des einzelnen Menschen fungierende mathematische Betrachtung bzw. mathematische Handlung kann nun genau wie jede zunächst autonome aggressive oder defensive Tätigkeit als Arbeit in den Dienst eines befehlenden Willens, sei es des Einzelwillens eines anderen Menschen, sei es des Parallelwillens einer Menschengruppe oder der gesamten Menschheit, gestellt werden. Dies geschieht entweder durch als Suggestion zu bezeichnende direkte Angst- oder Schreckensanjagung, Lockung, Phantasieerregung oder animale Beherrschungskraft, oder indirekt mittels Vernunftdressur, d. h. derartige Beeinflussung der Erfahrung des dienstbar zu machenden Individuums, daß bei ihm eine, Hoffnung auf Lust oder Furcht vor Unlust als den Arbeitswillen bestimmenden Affekt auslösende, mathematische Betrachtung hervorgerufen wird. [[8]]

Unter den allen Menschen vom Parallelwillen der gesamten Menschheit auferlegten mathematischen Betrachtungen ist vor allem zu nennen die Voraussetzung der hypothetischen „objektiven Raumzeitwelt“ als gemeinsame Trägerin aller zeitlichen Erscheinungsfolgen aller Individuen; weiter die exakten und die technischen Wissenschaften, insofern sie nicht in der Form von Fabrikgeheimnissen speziellen Interessen dienen.

Als von einer beschränkteren (z. B. staatlich oder beruflich zusammengehaltenen) Menschengruppe ihren Angehörigen auferlegte mathematische Betrachtung ist in erster Linie zu erwähnen die Anerkennung und Einhaltung der Organisation der Gruppe, d. h. des Stromnetzes der Willensübertragung, mittels deren innerhalb der Gruppe die Aufzwingung der einzelnen mathematischen Betrachtungen und Handlungen als Arbeit stattfindet. Diese Organisation der einzelnen Menschengruppen hat deshalb einen viel weniger stabilen Charakter als die exakten und die technischen Wissenschaften, weil sie erstens nie alle von ihr zu berücksichtigenden äußeren materiellen Umstände beherrscht und demzufolge, um zweckmäßig zu bleiben, sich fortwährend dem Wechsel der äußeren materiellen Umstände anpassen muß, und weil zweitens ihre Effektivität nicht nur von ihrer organisatorischen Zweckmäßigkeit, sondern auch von der Treue und von der Zufriedenheit[1]) der ihr unterstellten Individuen abhängt, welche sich immer nur unvollkommen herbeiführen und aufrecht erhalten lassen. Denn die Treue wird vor allem an den höheren Stellen durch die Kollision der persönlichen mit den Gruppeninteressen gefährdet und die Zufriedenheit ist vor allem an den niedrigeren Stellen dadurch eine mangelhafte, daß die niedriger gestellten im allgemeinen zwar einsehen, daß die für die Angehörigen der Gruppe bestehenden gemeinsamen Wünsche und Nöte gewisse organisatorische Einrichtungen erfordern, nicht aber daß gerade die obwaltende Organisation die einzig richtige ist, und daß ihnen selbst darin die richtige Stellung zugeteilt wurde.

Um nun Treue und Zufriedenheit in den organisierten Menschengruppen, wenn auch unvollkommen, so doch leidlich zu erhalten, würden die in die Organisation aufgenommenen Mittel der Vernunftdressur bei weitem nicht ausreichen; jede Organisation ist vielmehr genötigt, überdies die Propaganda zu betreiben von moralischen Theorien, d. h. von mathematischen Betrachtungen, welche die Notwendigkeit der bestehenden Organisation außer auf egoistisch zu erfassende gemeinsame Zwecke und Nöte, überdies auf moralische, d. h. sich der egoistischen Betrachtung entziehende, Werte der Lebenshaltung zurückführen. Unmittelbar sich darbietende Beispiele sind die von der Gemeinschaft geschützten und propagierten moralischen Werte der religiösen Gebote sowie der Begriffe Vaterland, Eigentum und Familie.

Die Propaganda der moralischen Werte ist, weil sie fast keine Vernunftdressur benutzen kann, vor allem auf Suggestion,

[1]) Die Unzufriedenheit der einzelnen Individuen wirkt deshalb zersetzend auf die Gruppenorganisation, weil sie die Bildung von Teilgemeinschaften zeitigt, welche auf die Umformung der Organisation der Hauptgemeinschaft abzielende mathematische Betrachtungen anstellen.

[[420]]

insbesondere Phantasieerregung angewiesen. Übrigens beruht die Machtstellung der moralischen Werte nicht ausschließlich auf der organisierten Propaganda der entsprechenden Menschengruppe, sondern auch auf der stillen Wirkung derjenigen mathematischen Betrachtungen der einzelnen Individuen, in welche die moralischen Werte als Ablehnungen egoistischer Triebe anderer eingehen.

In den organisierten Menschengruppen kommt auf primitiven Kulturstufen und in den primitiven Beziehungen die Willensübertragung durch eine einfache Gebärde zustande und als solche ist insbesondere der Schrei effektiv. In den zur Organisation einer höheren Menschengemeinschaft gehörigen Verhältnissen dagegen sind die aufzuerlegenden Arbeiten zu verschiedenartig und zu kompliziert, um durch einfache Schreie veranlaßt werden zu können. Um die regelmäßige Veranlassung dieser Arbeiten durch bittende oder befehlende Laute zu ermöglichen, muß vielmehr die Gesamtheit der Verordnungen, Objekte und Theorien, welche bei den von den Dienstbaren verlangten mathematischen Handlungen eine Rolle spielen, selber einer mathematischen Betrachtung unterzogen werden. Den Elementen des zur aus dieser mathematischen Betrachtung erwachsenen wissenschaftlichen Theorie gehörigen reinmathematischen Systems werden *sprachliche Elementarsignale* zugeordnet, mit denen nach derselben wissenschaftlichen Theorie entnommenen *grammatikalischen Regeln* die organisierte *Sprache* operiert, welche die übergroße Mehrzahl der in den Kulturgemeinschaften nötigen Willensübertragungen zu bewerkstelligen erlaubt. Die Sprache ist also durchaus eine Funktion der Aktivität des sozialen Menschen. Wenn auch der einzelne Mensch in der Einsamkeit die Sprache zur Gedächtnisunterstützung braucht, so ist dies nur dem Umstande zuzuschreiben, daß er dabei die Wissenschaften und die Organisation der Gemeinschaft zu berücksichtigen hat. Und wenn auch tatlose transzendente Vorgänge von der Sprache begleitet werden, so ist dies darauf zurückzuführen, daß die gesamte menschliche Aktivität dem transzendenten Influx des freien Willens unterworfen ist. ⟦9⟧

II. ⟦10⟧

Nun gibt es aber für Willensübertragung, insbesondere für durch die Sprache vermittelte Willensübertragung, weder Exaktheit, noch Sicherheit. Und diese Sachlage bleibt ungeschmälert bestehen, wenn die Willensübertragung sich auf die Konstruktion reinmathematischer Systeme bezieht. *Es gibt also auch für die reine Mathematik keine sichere Sprache*, d. h. keine Sprache, welche in der Unterhaltung Mißverständnisse ausschließt und bei der Gedächtnisunterstützung vor Fehlern (d. h. vor Verwechslungen verschiedener mathematischer Entitäten) schützt. Diesem Umstande ist nicht dadurch abzuhelfen, daß man, wie es die *formalistische Schule* macht, die mathematische Sprache (d. h. das zur Hervorrufung reinmathematischer Konstruktionen bei anderen Menschen dienende Zeichensystem) selber einer mathematischen Betrachtung unterzieht, ihr durch Umarbeitung die Genauigkeit und Stabilität eines materiellen Instrumentes oder eines Phänomens der exakten Wissenschaft verleiht und sich dabei in einer Sprache zweiter Ordnung oder Übersprache über sie verständigt. Denn erstens kann beim Gebrauche der mathematischen Sprache diese Übersprache zwar mit großer Wahrscheinlichkeit (weil sie sich auf eine übersichtliche endliche Menge von beharrenden Objekten und auf die daraus abstrahierte reine Mathematik eines endlichen Systems bezieht), aber dem Wesen der Sprache entsprechend, doch nicht mit absoluter Sicherheit vor Mißverständnissen und Fehlern schützen; zweitens würde, auch wenn letzteres der Fall wäre, damit die Möglichkeit von Mißverständnissen hinsichtlich der durch eine derartige exakte mathematische Sprache angedeuteten reinmathematischen Konstruktionen keineswegs beseitigt sein.

Die Bestrebungen der formalistischen Schule, deren Ursprung nach dem obigen auf den falschen Glauben an eine magische, wenigstens an eine über ihren Charakter als Willensübertragungsmittel hinausgehende Tragweite der Sprache zurückzuführen ist, lassen sich in diesem Lichte erklären als natürliche Konsequenz eines viel älteren, primäreren, folgenschwereren und tiefer eingewurzelten Irrtums, nämlich des leichtsinnigen Vertrauens auf die *klassische Logik*. Dieses Vertrauen ist wie folgt entstanden: Schon im Altertum verfügte man über eine sehr vollkommene (d. h. Mißverständnisse praktisch ausschließende) Sprache der mathematischen Betrachtung von endlichen Gruppen von je als *einheitlich* und *beharrend* aufgefaßten Dingen der objektiven Raumzeitwelt. Für diese Sprache bestehen gewisse Formen des Überganges von zutreffenden (d. h. tatsächliche mathematische Betrachtungen andeutenden) Aussagen auf andere zutreffende Aussagen, welche als Gesetze der *Identität*, des *Widerspruchs*, des *ausgeschlossenen Dritten* und des *Syllogismus* bezeichnet und unter dem Namen *logischer Prinzipien* zusammengefaßt wurden. Wenn man diese Prinzipien rein sprachlich anwandte, d. h. mit ihrer Hilfe sprachliche Aussagen aus anderen sprachlichen Aussagen herleitete, ohne an die von diesen Aussagen angedeuteten mathematischen Betrachtungen zu denken, so erwies sich, daß sich die *Prinzipien bewährten*, d. h. von jeder in dieser Weise erhaltenen Aussage ließ sich hinterher konstatieren, daß sie bei jedem sprachlich erzogenen Menschen eine tatsächliche mathematische Betrachtung auslösen konnte, welche sich für alle sprachlich erzogenen Menschen in der objektiven Raumzeitwelt praktisch als „identisch“ herausstellte.

Nun bewährten sich aber die logischen Prinzipien ebenfalls, wenn man sie ganz allgemein auf die Sprache der Wissenschaft oder auch der Begebenheiten des sonstigen praktischen Lebens kontrollierbar anwandte, wenigstens solange man dabei nur solche Ereignisse behandelte, welche von Naturgesetzen beherrscht wurden, auf deren Unerschütterlichkeit man zu vertrauen gelernt hatte. Demzufolge kam man dazu, den mittels der logischen Prinzipien hergeleiteten Aussagen auch dort zu trauen, wo sie keiner direkten Kontrolle

[422]

zugänglich waren. Insbesondere wurde auch dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten dieses Vertrauen entgegengebracht und dies sogar in der erweiterten Form, nach welcher ein früheres Ereignis als stattgefunden angenommen wird, nicht nur auf Grund der Absurdität, sondern auch auf Grund der praktischen Unmöglichkeit, für eine feststehende Tatsache eine andere Erklärung zu finden. Auf dieses Vertrauen stützen sich nicht nur theoretische Wissenschaften wie die Paläontologie und die Kosmogonie, sondern auch staatliche Einrichtungen wie die Strafprozeßordnung. Allerdings kam es vor, daß man in Angelegenheiten der Anschauungswelt mittels logischer Überlegungen zu falschen Ergebnissen gelangte, aber eine derartige Erfahrung hat immer nur eine geeignete Umformung der zugrunde gelegten Tatsachen bzw. Naturgesetze, nie eine Kündigung des Vertrauens auf die logischen Prinzipien gezeitigt.

Nun ist aber die Tatsache der praktischen Zuverlässigkeit der logischen Prinzipien, d. h. der Aussagenverknüpfungsgesetze der Sprache der Mathematik des Endlichen, in Angelegenheiten der Anschauungswelt nur eine Folge der allgemeineren Tatsache, daß die Menschheit die große Majorität der der Beobachtung zugänglichen Objekte und Mechanismen der Anschauungswelt in bezug auf ausgedehnte Komplexe von Tatsachen und Ereignissen erfolgreich beherrscht, indem sie das System der Zustände dieser Objekte und Mechanismen in der Raumzeitwelt als Teil eines endlichen diskreten, mit endlichvielen Verknüpfungsbeziehungen zwischen den Elementen versehenen Systems betrachtet und behandelt. M. a. W. die praktische Zuverlässigkeit der logischen Prinzipien beruht darauf, daß ein großer Teil der Anschauungswelt in bezug auf ihre endliche Organisation viel mehr Treue und Zufriedenheit zeigt als die Menschheit selbst. Daß man von altersher vor dieser nüchternen Interpretation blind war, wurde dadurch verursacht, daß man den ausschließlichen Charakter der Worte als Willensübertragungsmittel nicht erkannte und dieselben infolge eines unbesonnenen Aberglaubens als Andeutungsmittel fetischartiger „Begriffe“ betrachtete. Diese „Begriffe“ sowie die zwischen ihnen bestehenden Verknüpfungen sollten unabhängig von der kausalen Einstellung des Menschen eine Existenz besitzen, und die logischen Prinzipien sollten die Begriffe und ihre Verknüpfungen beherrschende aprioristische Gesetze darstellen. Dementsprechend herrschte die Meinung, daß Begriffsverknüpfungen, welche aus unleugbaren Axiomen (d. h. aus Begriffsverknüpfungen, welche Konstatierungen unleugbarer Tatsachen oder Naturgesetze entsprechen) mit Hilfe der logischen Prinzipien, eventuell mittels Adabsurdumführung ihres Gegenteiles, hergeleitet waren, im Falle daß sie selber wiederum kontrollierbare Aussagen über die Anschauungswelt lieferten, diese Kontrolle jederzeit siegreich bestehen könnten, im entgegengesetzten Falle aber mit gleicher Zuverlässigkeit als „ideale Wahrheiten“ zu betrachten wären. Derartige „ideale Wahrheiten“ sind denn auch Jahrhunderte lang mit zuversichtlichem Eifer von den Philosophen hergeleitet worden. Wenn die als unbehagliche Nebenerscheinung dann und wann auftretenden Widersprüche Zweifel an der Richtigkeit dieser Entwicklungen entstehen ließen, so war dieser Zweifel nie gegen die Zuverlässigkeit der logischen Prinzipien, sondern immer nur gegen die Unleugbarkeit der Axiome, d. h. der den Entwicklungen zugrunde gelegten Begriffsverknüpfungen, gerichtet. Und manches Axiom hat man, eben auf Grund der bei den aus demselben folgenden idealen Wahrheiten auftretenden Widersprüche, verwerfen oder modifizieren müssen.

In Nachahmung der Philosophen haben schließlich auch die Mathematiker beim Studium der reinen Mathematik der unendlichen Systeme die logischen Prinzipien der Sprache der Endlichkeitsmathematik entnommen und skrupellos angewandt. In dieser Weise wurden auch für die Mathematik der unendlichen Systeme bzw. der in der Mengenlehre auftretenden, mittels des Komprehensionsaxioms geschaffenen, Mengen Aussagen „idealer Wahrheiten" hergeleitet, welche von den Mathematikern für mehr als leere Worte gehalten wurden. Bis sich auch hier, namentlich nach Einführung der Mengenlehre, Widersprüche auftaten, und zwar solche, die sich nicht in einfacher Weise durch eine geeignete Umformung der Axiome beseitigen ließen. Diesen (in der Mathematik noch viel verblüffender als in der Philosophie wirkenden) Widersprüchen ist man zunächst mit den oben erwähnten formalistischen Bestrebungen zu Leibe gegangen. Und zwar werden hierbei unter Aufrechterhaltung des Glaubens an einen von der Willensübertragung unabhängigen Sinn der Sprache, die axiomatischen Grundverknüpfungen der mathematischen Begriffe und die zwischen den verschiedenen Verknüpfungen mathematischer Begriffe bestehenden Formen des Überganges (insbesondere sofern sie die Schaffung von Mengen und die Zulassung von Elementen zu den Mengen betreffen) einer gründlichen Analyse und Revision unterzogen, in welche selbstverständlich auch die sprachliche Wirkung der logischen Prinzipien mit hineinbezogen wird. Der *Sinn* der mathematischen Begriffe und Begriffsverknüpfungen wird dabei nicht näher erörtert und das Endziel der Bestrebungen (dem man allerdings noch nicht nahe gekommen ist) besteht in einer *widerspruchsfreien Neugestaltung der mathematischen Sprache*, die sich überdies bis auf geringe, die früheren Widersprüche umfassende, Amputationen über das ganze Lehrgebäude der bisherigen Mathematik erstrecken soll.

III.

Demgegenüber bringt der *Intuitionismus* die außersprachliche Existenz der reinen Mathematik zum Bewußtsein und untersucht, um auf dieser Grundlage die Richtigkeit der bisherigen Mathematik zu prüfen, zunächst, inwiefern die logischen Prinzipien, die beim Aufbau dieser Mathematik eine so große Rolle gespielt haben, auch in der Unendlichkeitsmathematik als praktisch zuverlässige Übergangsmittel zwischen reinmathematischen Konstruktionen fungieren können. Diese Untersuchung ergibt für die Prinzipien der Identität, des Widerspruchs und des Syllogismus ein positives, für das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten dagegen ein negatives Resultat, d. h. es erweist sich, daß den Aussagen des letzteren Prinzips und den auf demselben beruhenden Schlußfolgerungen im allgemeinen keine mathematische Realität entspricht.

Um dies an einigen Beispielen zu erläutern, bezeichnen wir als fliehende Eigenschaft eine Eigenschaft, von der für jede bestimmte natürliche Zahl entweder die Existenz oder die Absurdität hergeleitet werden kann, während man weder eine natürliche Zahl, welche die Eigenschaft besitzt, bestimmen, noch die Absurdität der Eigenschaft für alle natürlichen Zahlen beweisen kann. Unter der Lösungszahl λ_f einer fliehenden Eigenschaft f wollen wir die (hypothetische) kleinste natürliche Zahl, welche die Eigenschaft besitzt, verstehen, unter einer Oberzahl bzw. Unterzahl von f eine natürliche Zahl, welche nicht kleiner bzw. kleiner als die Lösungszahl ist. Man sieht unmittelbar ein, daß für eine beliebige fliehende Eigenschaft jede natürliche Zahl entweder als Oberzahl oder als Unterzahl zu erkennen ist, wobei im ersteren Falle die fliehende Eigenschaft gleichzeitig ihren Charakter als solche verliert. Wir nennen die fliehende Eigenschaft f paritätsfrei, wenn man ihre Absurdität weder für die positiven noch [[11]]
für die negativen natürlichen Zahlen beweisen kann. Als die zur paritätsfreien fliehenden Eigenschaft f gehörige duale Pendelzahl p_f bezeichnen wir die als Limes der konvergenten Folge $a_1, a_2, \ldots$ bestimmte reelle Zahl, wo a_ν für eine beliebige Unterzahl ν von f gleich $\left(-\frac{1}{2}\right)^\nu$, dagegen für eine beliebige Oberzahl ν von f gleich $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\lambda_f}$ ist. Diese duale Pendelzahl ist weder [[12]]
gleich Null noch von Null verschieden, im Gegensatz zum Prinzip des ausgeschlossenen Dritten. Verstehen wir unter einer nichtpositiven reellen Zahl eine reelle Zahl, die unmöglich positiv sein kann, dann ist die duale Pendelzahl weder positiv noch nichtpositiv, im Gegensatz zum Prinzip des ausgeschlossenen Dritten. Nennen wir weiter die positiven und die nichtpositiven Zahlen beide mit Null vergleichbar und die reellen Zahlen, die unmöglich mit Null vergleichbar sein können, mit Null unvergleichbar, dann ist die duale Pendelzahl weder mit Null vergleichbar noch mit Null unvergleichbar, im Gegensatz zum Prinzip des ausgeschlossenen Dritten. Und nennen wir eine reelle Zahl g rational, wenn sie entweder gleich Null ist oder zwei solche positive oder negative ganze Zahlen p und q bestimmt werden können, daß $g = \frac{p}{q}$, und irrational, wenn die Annahme der Rationalität von g ad absurdum geführt werden kann, dann ist die obige duale Pendelzahl weder rational noch irrational, im Gegensatz zum Prinzip des ausgeschlossenen Dritten.

Bezeichnen wir als die zur paritätsfreien fliehenden Eigenschaft f gehörige duale Näherungszahl n_f die als Limes der konvergenten Folge $b_1, b_2, \ldots$ bestimmte reelle Zahl, wo b_ν für eine beliebige Unterzahl ν von f gleich $\left(\frac{1}{2}\right)^\nu$, dagegen für eine beliebige Oberzahl ν von f gleich $\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_f}$ ist, und bringen wir in der mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem versehenen Euklidschen Ebene eine gerade Linie l durch die Punkte $(1, p_f)$ und $(-1, n_f)$, dann sind die X-Achse und l erstens nicht parallel, während doch ihre Parallelität nicht absurd ist; zweitens fallen sie nicht zusammen, während doch ihr Zusammenfallen nicht absurd ist; drittens schneiden sie sich nicht, während doch ihr Sichschneiden nicht absurd ist.

Auch sind die X-Achse und l weder parallel, noch fallen sie zusammen, noch auch schneiden sie sich, so daß der auf dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten beruhende Satz, daß zwei Gerade der Euklidschen Ebene entweder parallel sind oder zusammenfallen oder aber sich schneiden, sich als hinfällig erweist.

Sollte der paritätsfreie Charakter von f verloren gehen, dann würde entweder für die Schneidung oder für die Parallelität die Gültigkeit des Prinzipes vom ausgeschlossenen Dritten zurückkehren. Aber erst wenn der Charakter von f als fliehende Eigenschaft überhaupt verloren geht, tritt das Prinzip für alle drei Eigenschaften der Parallelität, Zusammenfallung nnd Schneidung wieder in Kraft.

Betrachten wir das in der mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem versehenen Euklidschen Ebene gelegene Einheitsquadrat q mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Bezeichnen wir die von q bestimmte Quadratfläche mit Q und den Punkt (p_f, p_f) mit P. Alsdann liegt P nicht auf q, während doch die Inzidenz von P mit q nicht absurd ist; weiter gehört P nicht zu Q, während doch die Zugehörigkeit von P zu Q nicht absurd ist. Schließlich gehört P weder zu q noch zum Innengebiete von q noch zum Anßengebiete von q, so daß der klassische, auf dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten beruhende Jordansche Kurvensatz, der besagt, daß eine einfache geschlossene Kurve die Ebene in der Weise in zwei Gebiete zerlegt, daß jeder Punkt der Ebene entweder zur Knrve oder zu einem von diesen Gebieten gehört, sich als hinfällig erweist.
[[13]]

Betrachten wir die unendliche Reihe mit positiven Gliedern $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$, wo die b_ν die oben angegebene Bedeutung haben. Diese Reihe konvergiert nicht, während doch ihre Konvergenz nicht absurd ist; ebenso divergiert sie nicht, während doch ihre Divergenz nicht absurd ist. Gleichzeitig erweist sich der auf dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten beruhende Satz, daß jede unendliche Reihe mit positiven Gliedern entweder konvergiert oder divergiert, als hinfällig. Auf diesem Satze aber, oder auf einem im wesentlichen

[[426]]

äquivalenten, beruht eines der wichtigsten Konvergenzkriterien aus der Theorie der unendlichen Reihen, das *Kummersche* Konvergenzkriterium. Und tatsächlich zeigen Gegenbeispiele, daß dieses Kriterium sich der intuitionistischen Kritik gegenüber nicht aufrecht erhalten läßt. ⟦14⟧

Betrachten wir die algebraische Gleichung $x^3 - 3x + 2b^3 = 0$, wo $b = 1 + p_f$. Die Diskriminante dieser Gleichung ist gleich $-108\ (1 - b^6)$, also weder gleich Null noch von Null verschieden. Auf diese algebraische Gleichung ist also der zweite *Gausssche* Beweis der Wurzelexistenz nicht anwendbar. Sämtliche übrige klassische Beweise der Wurzelexistenz werden übrigens im Lichte der intuitionistischen Kritik ebenfalls hinfällig. Aber die Wurzelexistenz selber ist durch neue intuitionistische Beweise gesichert worden. ⟦15⟧

Die vorstehenden Beispiele werden verständlich machen, daß der Intuitionismus für die Mathematik weittragende Konsequenzen mit sich bringt. In der Tat müssen, wenn die intuitionistischen Einsichten sich durchsetzen, beträchtliche Teile des bisherigen mathematischen Lehrgebäudes zusammenbrechen und neue mit völlig neuem Stilgepräge errichtet werden. Und bei den Teilen, die bleiben, ist vielfach ein durchgreifender Umbau erforderlich.

Von weiteren Exkursen im Oberbau der Mathematik wollen wir aber hier Abstand nehmen und nur noch ein paar Bemerkungen grundsätzlicher Art machen. Allererst diese, daß mit dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten der indirekte Beweis, d. h. die Herleitung einer Eigenschaft durch reductio ad absurdum ihres Gegenteiles in dieser allgemeinen Form hinfällig wird. Denn die obige Pendelzahl p_f ist nicht rational, trotzdem ihre Irrationalität absurd ist, und nicht mit Null vergleichbar, trotzdem ihre Unvergleichbarkeit mit Null absurd ist. Interessant ist indessen, daß für *negative Eigenschaften* (d. h. Eigenschaften, die selber eine Absurdität zum Ausdruck bringen) *die Methode des indirekten Beweises ungeschmälert in Kraft bleibt*. Denn es gilt in der intuitionistischen Mathematik der Satz, daß *Absurdität der Absurdität der Absurdität äquivalent ist mit Absurdität*, so daß eine beliebige nichtverschwindende endliche Sequenz von Absurditätsprädikaten „Absurdität der Absurdität der . . . der Absurdität“, welche in der bisherigen Mathematik entweder die Richtigkeit oder die Absurdität aussagt, in der intuitionistischen Mathematik entweder mit der Absurdität oder mit der Absurdität der Absurdität äquivalent ist.

Schließlich bemerken wir noch, daß das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten in der intuitionistischen Mathematik, obwohl *nicht richtig*, so doch, wenn man es ausschließlich für *endliche Spezies* von Eigenschaften gleichzeitig voraussetzt, *widerspruchsfrei* ist, was in erster Linie erklärt, daß die Irrtümer der bisherigen Mathematik sich so lange behaupten konnten, und in zweiter Linie als ermutigender Umstand für die formalistischen Bestrebungen gelten kann. Denn auf der Basis der intuitionistischen Einsichten lassen sich außer den unabhängig vom Prinzip des ausgeschlossenen Dritten entwickelbaren *richtigen Theorien*, auch unter Heranziehung dieses Prinzipes mit der obigen Einschränkung, *nichtkontradiktorische* Theorien herleiten, mit denen sich von der bisherigen Mathematik ein viel größerer Teil als mit den richtigen Theorien umfassen läßt. Eine geeignete Mechanisierung der Sprache dieser intuitionistisch-nichtkontradiktorischen Mathematik müßte also gerade das liefern, was die formalistische Schule sich zum Ziel gesetzt hat.

Dagegen kann die gleichzeitige Aussage des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten für *beliebige Spezies* von Eigenschaften sehr wohl kontradiktorisch sein. So läßt sich von der folgenden Aussage die Kontradiktorität beweisen: Alle reellen Zahlen sind ent-
[[16]] weder rational oder irrational. Im Hinblick auf diese Tatsache wird beim Aufrichten des widerspruchslosen formalistischen Sprachgebäudes doch auf jeden Fall die größte Sorgfalt und Vorsicht erforderlich bleiben.

Die Struktur des Kontinuums.

1930 A

Von **L. E. J. Brouwer** in Amsterdam.

Vortrag, gehalten in Wien am 14. März 1928 über Einladung des Komitees zur Veranstaltung von Gastvorträgen ausländischer Gelehrter der exakten Wissenschaften.

I.

Obgleich man von altersher das arithmetische bzw. geometrische Kontinuum als etwas Gegebenes betrachtet hat, war man trotzdem weit davon entfernt, über den mikroskopischen Inhalt dieses Kontinuums im klaren und einig zu sein. So glaubte man bis vor wenigen Jahrhunderten nicht recht an das Bestehen von irrationalen Zahlen im Zahlenkontinuum und wurde erst im 19. Jahrhundert die Existenz der transzendenten Zahlen erhärtet. Diese Unsicherheit über den genauen Inhalt des Kontinuums verhinderte nicht, daß der gebildete Laie des 19. Jahrhunderts eine gewisse Ruhe fand in der Auffassung von Kant und Schopenhauer, nach welcher das Kontinuum (ebenso wie übrigens die ganze Mathematik) als reine Anschauung a priori, mithin als von der Erfahrung unabhängig, exakt und unzweideutig vorhanden betrachtet wird. Erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde diese Ruhe gestört durch drei Neuerungen der erkenntnistheoretischen Sachlage:

1. Es war die Einsicht durchgebrochen, daß der kontinuierliche Raum, in den man die Erscheinungen der objektiven Welt einbettete, nur aus praktischen Gründen der Einfachheit den euklidischen Gesetzen unterworfen worden war, und daß die von Lobatscheffsky und Bolyai entdeckte nichteuklidische Geometrie und die von Veronese eingeführte nichtarchimedische Geometrie ebenso folgerichtig zur Beschreibung der betreffenden Erscheinungen angewandt werden konnten wie die euklidische Geometrie. Die anfängliche ablehnende Haltung gegen diese Geometrien wurde durch die von Riemann, Beltrami, Cayley und Klein bzw. von Levi-Cività und Hahn herrührende Arithmetisierung derselben vollständig überwunden. Dabei ereignete sich die eigentümliche Sachlage, daß das nichtarchimedische Kontinuum, welches sich als den an das Kontinuum zu stellenden apriorischen Forderungen ebensogut wie das archimedische genügend erwiesen hatte, nur mit Hilfe des letzteren in plausibler Weise verwirklicht wurde, so daß die Anzweiflung der apriorischen Notwendigkeit des archimedischen Kontinuums gerade mit der apriorischen Konsistenz dieses Kontinuums begründet werden mußte.

2. In der inzwischen von Cantor entdeckten Mengenlehre trat das Kontinuum in einer auf logischen Operationen beruhenden, mithin von der durch reine Anschauung a priori gegebenen grundverschiedenen Form auf.

3. Die Erfolge der gerade durch die Entdeckung der nichteuklidischen und der nichtarchimedischen Geometrien angeregten axiomatischen Methode bei den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie führten vielfach zur Erwartung, daß auch bei der Analyse der Struktur des Kontinuums diese Methode erfolgreich sein könnte. Die Resultate der axiomatischen Untersuchungen auf dem Gebiete der Geometrie wurden nämlich in der Regel so formuliert, daß die Widerspruchslosigkeit der geometrischen Theorien sich auf diejenige der Theorie des Zahlenkontinuums zurückführen lasse[1]); womit die Herleitung der letzteren Widerspruchslosigkeit als dringende Aufgabe gestellt worden war.

Um bei dieser neuen Sachlage für die Einführung des Kontinuums (und der mathematischen Figuren überhaupt) die Sicherheit wiederzugewinnen, sind zunächst zwei Methoden angewandt worden:

1. Die formalistische (Dedekind, Peano, Russell, Zermelo, Hilbert): diese verzichtet vollkommen auf jegliche geometrische oder arithmetische Intuition und beschränkt ihren Untersuchungsgegenstand auf die mathematische Sprache, welche sie derweise zu reglementieren versucht, daß die sprachliche Figur des Widerspruchs ausgeschlossen wird. Sie sucht mithin als konsistente natürliche Zahlenreihe bzw. konsistentes Kontinuum eine sprachlich widerspruchsfreie Theorie, welche mit der Sprache der bis dahin als vernünftig geltenden Theorie der natürlichen Zahlenreihe bzw. des Kontinuums eine hinreichende Verwandtschaft aufweist. Dieses Hinreichen der Verwandtschaft ist selbstverständlich letzten Endes Geschmacksache.

2. Die altintuitionistische (Poincaré, Borel): diese spricht den drei erwähnten Neuerungen für die Lehre der natürlichen Zahlen jede Bedeutung ab und hält die Auffassung der Theorie der natürlichen Zahlen als Sammlung synthetischer Urteile a priori aufrecht. Überdies ist sie der Meinung, daß die Widerspruchsfreiheitsbeweise der Formalisten die Theorie der vollständigen Induktion und damit den Kern der Theorie der natürlichen Zahlen voraussetzen[2]). Für die Entwicklung der über die natürlichen Zahlen hinausgehenden Mathematik wird von der altintuitionistischen Schule wesentlich die klassische Logik benutzt; und zwar wird in erster Linie mittels des Komprehensionsaxioms das (archimedische) Kontinuum geschaffen als Spezies der Spezies „zusammengehöriger" Teilspezies der rationalen Zahlen, oder als Spezies der Spezies „zusammengehöriger" konvergenter Fundamentalreihen rationaler Zahlen, oder schließlich als Spezies der Dedekindschen Schnitte der rationalen Zahlen. Bei diesen (als miteinander äquivalent betrachteten) Erzeugungen des Kontinuums muß der Logik schon deshalb eine außermathematische (d. h. über das Konstruktive hinausgehende) schöpferische Kraft zugeschrieben werden, weil von den

⟦1⟧ [1]) Hierbei wurde allerdings stillschweigend vorausgesetzt, daß aus der Tatsache, daß die Existenz von A die Existenz von B nach sich zieht, folge, daß auch die Widerspruchsfreiheit von A die Widerspruchsfreiheit von B einschließt. Diese Voraussetzung ist vom intuitionistischen Standpunkt falsch.

[2]) Diese Einsicht ist übrigens in den letzten Jahren auch bei den Formalisten selbst durchgebrochen.

⟦430⟧

drei genannten, das Kontinuum darstellenden Spezies sich immer nur je eine „abzählbar-unfertige" Teilspezies durch mathematische Gedankenoperationen konstruktiv herstellen läßt; eine solche Teilspezies aber ist für alle diejenigen mathematischen Theorien unzulänglich, welche einen Inhaltsbegriff benutzen, denn die abzählbar-unfertigen Teilspezies des Kontinuums (bzw. n-dimensionalen Raumes) besitzen durchweg den linearen (bzw. n-dimensionalen) Inhalt Null.

Der Glaube an die theoretische Logik spielt also fast eine noch größere Rolle bei der altintuitionistischen als bei der formalistischen Methode, weil ja die letztere sämtliche logische Gesetze mit in den Kreis ihrer sprachlichen Untersuchungen hineinzieht, während die Altintuitionisten höchstens bei der Anwendung dieser (an sich als gegeben betrachteten) Gesetze eine gewisse Vorsicht (Mißtrauen gegen „nichtprädikative" Definitionen) beobachten.

Selbstverständlich wird bei der altintuitionistischen Methode auch in der Sprache der Theorie der natürlichen Zahlen formal die Logik verwendet; hier aber wird sie nur als das Gedächtnis unterstützendes Hilfsmittel beim außersprachlichen gliedweisen Zustandekommen einer komplizierteren inneren Anschauung bzw. eines komplizierteren synthetischen Urteils a priori aufgefaßt.

Gegen die obigen Einführungen des (archimedischen) Kontinuums richtet nun der Intuitionismus folgende Kritik:

1. Alle drei Definitionen sind deshalb unhaltbar, weil sie nicht überabzählbarviele, sondern nur abzählbarunfertigviele Elemente des Kontinuums liefern (die außermathematische schöpferische Kraft der Logik wird ja verworfen).

2. Die Definition des Kontinuums als Spezies der Spezies „zusammengehöriger" Teilspezies der rationalen Zahlen ist deshalb unhaltbar, weil mit dem Fortfall des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten die Existenz der „oberen Grenze" ebenfalls hinfällig wird. Sei z. B. λ_f die Lösungszahl einer fliehenden Eigenschaft f[3]) und betrachten wir die unendliche Summe $a_1 + a_2 + \ldots$ mit der Eigenschaft, daß $a_1 = 1$, $a_{\nu+1} = \frac{1}{2} a_\nu$, wenn $\nu \neq \lambda_f$, dagegen $a_{\nu+1} = 1$, wenn $\nu = \lambda_f$; betrachten wir weiter diejenigen rationalen Zahlen r, zu denen sich ein solches n bestimmen läßt, daß $r < a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Die Spezies dieser rationalen Zahlen besitzt offenbar keine „obere Grenze".

3. Daß die Definitionen mittels Dedekindscher Schnitte und mittels Spezies zusammengehöriger konvergenter Fundamentalreihen auf der intuitionistischen Grundlage nicht äquivalent sind, ersehen wir aus der dualen Pendelzahl p_f der paritätsfreien fliehenden Eigenschaft f[3]), welche wohl als Spezies zusammengehöriger konvergenter Funda-

[3]) Für diese in meinem zu derselben Reihe gehörigen Vortrag: „Mathematik, Wissenschaft und Sprache" eingeführte Bezeichnung vgl. Monatshefte f. [[2]]
Math. u. Phys. XXXVI, S. 161. Daselbst ist Z. 21—22 statt „weder für die positiven noch für die negativen" zu lesen: „weder für die geraden noch für die ungeraden". Überdies ist daselbst S. 154, Z. 9 v. u. das Wort „Mitmenschen" durch „Mitgeschöpfe" zu ersetzen.

mentalreihen von rationalen Zahlen, nicht aber als Dedekindscher Schnitt der rationalen Zahlen darstellbar ist.

In der intuitionistischen Theorie bildet die Spezies der Spezies zusammengehöriger konvergenter Fundamentalreihen rationaler Zahlen nur einen Teil des Kontinuums und wird als dem System der rationalen Zahlen (oder, was auf das gleiche hinauskommt, dem System der endlichen Dualbrüche bzw. Dezimalbrüche) überlagertes **reduziertes Kontinuum** bezeichnet. Fassen wir speziell das Einheitskontinuum ins Auge, so hat ein Element l des entsprechenden **reduzierten Einheitskontinuums** in bezug auf die durch eine Fundamentalreihe abgezählten unitär beschränkten (d. h. nichtnegativen und 1 nicht übersteigenden) rationalen Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ die Eigenschaft, daß für beliebiges n ein solcher Index $i_n \leq n$ besteht, daß für jedes $\nu \leq n$, mit ev. Ausnahme von i_n, entweder die Relation $l \geq r_\nu$ oder die Relation $l \leq r_\nu$ festgestellt werden kann, während i_{n+1} entweder gleich i_n oder gleich $n+1$ ist. Unter den genannten Elementen des reduzierten Einheitskontinuums sind dann die Dedekindschen Schnitte dadurch ausgezeichnet, daß der Ausnahmeindex i_n in Fortfall kommt.

Wir sagen auch, daß unter den Elementen l die Dedekindschen Schnitte dadurch ausgezeichnet sind, daß sie in bezug auf die unitär beschränkten rationalen Zahlen eine **Präzisionslage 1. Ordnung** besitzen, und können im Anschluß daran z. B. folgendermaßen weitere Präzisionslagen definieren: Es besteht für ein Element l der genannten Art in bezug auf die unitär beschränkten rationalen Zahlen die **Präzisionslage 2. Ordnung 1.** bzw. **2. Art**, wenn für jedes n entweder die Relation $l \geq r_n$ oder die Relation $l < r_n$ bzw. entweder die Relation $l \leq r_n$ oder die Relation $l > r_n$ besteht. Die Tragweite der Präzisionslage 2. Ordnung ersieht man am einfachsten, wenn man die Präzisionslagen anstatt in bezug auf die rationalen Zahlen, in bezug auf die endlichen Dezimalbrüche ins Auge faßt. Alsdann bedeutet nämlich die Präzisionslage 1. Ordnung, daß das betreffende Element l eine Dezimalbruchentwicklung zuläßt; bei dieser ist im Falle der Präzisionslage 2. Ordnung 1. Art die Existenz einer letzten von 9 verschiedenen Ziffer und im Falle der Präzisionslage 2. Ordnung 2. Art die Existenz einer letzten von 0 verschiedenen Ziffer ausgeschlossen, so daß in beiden Fällen eine **eindeutig festzulegende** Dezimalbruchentwicklung besteht. Als **Präzisionslage 3. Ordnung** des Elementes l in bezug auf die unitär beschränkten rationalen Zahlen können wir die Eigenschaft definieren, daß für jedes n eine der Relationen $l \overset{\circ}{>} r_n$, $l \overset{\circ}{<} r_n$ und $l = r_n$ besteht. Hierbei bedeutet $l \overset{\circ}{>} r_n$, daß ein solches r_m $(r_m > r_n)$ angegeben werden kann, daß $l > r_m$ ist. Die Präzisionslage 3. Ordnung in bezug auf die unitär beschränkten rationalen Zahlen besteht für diejenigen und nur für diejenigen Elemente l, welche sich in einen regelmäßigen (ev. abbrechenden) Kettenbruch entwickeln lassen (wobei

[[432]]

man nicht von vornherein zu wissen braucht, ob die Abbrechung tatsächlich stattfindet oder nicht).

Um in der intuitionistischen Theorie das den unitär beschränkten rationalen Zahlen (bzw. endlichen Dezimalbrüchen) überlagerte volle Einheitskontinuum zu erhalten, ist es notwendig, neben den „fertigen Elementen" des reduzierten Kontinuums „unfertige Elemente" einzuführen, indem wir neben den konvergenten Fundamentalreihen unitär beschränkter rationaler Zahlen auch (durch freie Wahl erzeugte) konvergente Folgen derartiger rationaler Zahlen zulassen. Um von diesem vollen Einheitskontinuum die fertige überabzählbare Vielfachheit zum Ausdruck zu bringen, extrahieren wir aus demselben zunächst eine geeignete repräsentierende Folgenspezies, d. h. eine solche Spezies von speziellen konvergenten Folgen, daß jede konvergente Folge unitär beschränkter rationaler Zahlen mit einer der repräsentierenden Spezies angehörenden Folge zusammengehörig ist, und sodann aus der letzteren eine geeignete örtlich individualisierte Teilspezies, d. h. eine derartige Teilspezies, daß nur gleiche ihrer Elemente zu gleichen Elementen des vollen Einheitskontinuums gehören. Dabei stellen wir jeden dieser beiden aufeinanderfolgenden Extrakte in derjenigen Form her, welche in der intuitionistischen Mathematik als primäre Schöpfung fertiger überabzählbarer Spezies auftritt, nämlich in der Form einer Menge, und zwar einer Menge einfachster Art, einer reinen finiten Menge, welche folgendermaßen definiert wird:

Eine reine n-finite Menge ist ein Gesetz, auf Grund dessen, wenn immer wieder eine der Nummern $1, 2, \ldots n$ gewählt wird, jede dieser Wahlen eine bestimmte Zeichenreihe erzeugt. Jede derweise von einer unbegrenzten Wahlfolge erzeugte Folge von Zeichenreihen (welche also im allgemeinen nicht fertig darstellbar ist) heißt ein Element der Menge.

Dieser Definition entsprechend erhalten wir eine repräsentierende Folgenspezies des Einheitskontinuums in der reinen 3-finiten Menge, auf Grund deren jede m-te Wahl einen derartigen unitär beschränkten endlichen Dualbruch $c_m = a_m \cdot 2^{-m-1}$ (a_m eine nichtnegative ganze rationale Zahl) erzeugt, daß $c_1 = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4}$ und weiter $c_m = c_{m-1} - 2^{-m-1}$, c_{m-1} oder $c_{m-1} + 2^{-m-1}$, je nachdem die Nummer 1, 2 oder 3 gewählt wird. Von den Elementen dieser Menge bilden diejenigen, für welche auf allen geraden Stufen die Nummer 2 gewählt wird, wiederum eine reine 3-finite Menge, diesmal aber eine örtlich individualisierte, welche also eine Teilspezies des vollen Einheitskontinuums mit dem Vielfachheitsgrade einer reinen 3-finiten Menge demonstriert. Erst dieser, dem Wesen der reinen n-finiten Menge ($n \geq 2$) anhaftende, kraft der Zulassung unfertiger Elemente „Ausdehnungscharakter" besitzende, Vielfachheitsgrad ermöglicht für Teilspezies des Kontinuums das Auftreten eines von Null verschiedenen Inhaltes.

Die Einführung der Mengenkonstruktion, auf welcher also die fertige überabzählbare Vielfachheit des Kontinuums beruht, bedarf nach stattgefundener Besinnung auf die mathematische Urintuition der Zweiheit[4]), welche dem gesamten Intuitionismus zugrundeliegt, keiner weiteren Besinnung, und impliziert auch keine petitio principii (so daß die anfangs erwähnte Betrachtung des Kontinuums als reine Anschauung a priori nach Kant und Schopenhauer sich im Lichte des Intuitionismus im wesentlichen behauptet). Denn in der Urintuition ist die Möglichkeit der Zwischenfügung zwischen 2 Elemente (nämlich die Betrachtung der Bindung als neues Element), mithin auch die Konstruktion im intuitiven Kontinuum von einer Menge von einander nicht berührenden geschlossenen Intervallen enthalten, welche so entsteht, daß der Reihe nach Intervalle mit den Indizes $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$, mit durch die natürliche Ordnung dieser Indizes bestimmten Ordnungsbeziehungen, angebracht werden. Wenn wir nun aber zunächst die Intervalle 0 und 1 und einen Pnnkt p dazwischen wählen, so können wir danach die Intervalle $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ in solcher Weise wählen, daß sie alle den Punkt p auslassen, und daß die Lage von p in bezug auf die Intervallmenge einem beliebig vorgegebenen, durch eine unbegrenzte Folge von freien Wahlen zwischen den Zahlen 0 und 1 erzeugten unendlichen Dualbruch entspricht. Umgekehrt existiert also im intuitiven Kontinuum, in welchem eine geordnete Intervallmenge M der obigen Art konstruiert ist, zu jedem durch eine unbegrenzte Folge von freien Wahlen zwischen den Zahlen 0 und 1 erzeugten unendlichen Dualbruch ein Punkt, dessen Lage in bezug auf M durch den betreffenden unendlichen Dualbruch eineindeutig charakterisiert ist. Diese Existenzbegründung der reinen 2-finiten Menge läßt sich auf beliebige n-finite Mengen, und auch auf (bier nicht in Betracht kommende) beliebige allgemeinere Mengen erweitern.

II.

Wir wollen jetzt untersuchen, inwiefern die bis vor kurzem allgemein angenommenen Grundeigenschaften des formalistisch-altintuitionistischen Kontinuums für das intuitionistische Kontinuum erhalten bleiben. Wir zählen zunächst die hier in Betracht kommenden Eigenschaften auf:

1. Die Diskretheit. Eine Spezies heißt diskret, wenn für je zwei ihrer Elemente entweder feststeht, daß sie gleich, oder daß sie verschieden sind.

2. Die Ordnung. Eine Spezies heißt geordnet, wenn für ihre Elementepaare (a, b) eine ordnende Relation $a < b$ (äquivalent mit $b > a$) derweise definiert ist, daß die Gleichheit von a und b mit der gleichzeitigen Absurdität von $a < b$ und $a > b$ äqui-

⟦3⟧ [4]) a. a. O., S. 154.

valent ist, daß $a<b$ und $a>b$ sich gegenseitig ausschließen, daß für $a \neq b$ entweder $a<b$ oder $a>b$ besteht, und daß erstens aus $a<b$ und $b<c$ stets $a<c$, zweitens aus $a<b$, $a=h$ und $b=k$ stets $h<k$ folgt.

3. Die Insichdichtheit. Der Begriff dieser Eigenschaft beruht auf der Definition des Grenzelementes. Das Element a einer geordneten Spezies S heißt Grenzelement der steigenden Fundamentalreihe $a_1, a_2, \ldots$ $(a_1 < a_2 \ldots . < a)$, wenn für jedes $b<a$ ein $a_n > b$ existiert. Analog werden die Grenzelemente fallender Fundamentalreihen definiert. Beide Arten von Grenzelementen werden als Hauptelemente bezeichnet. Eine geordnete Spezies, in welcher jedes Element Hauptelement ist, heißt in sich dicht.

4. Die Separabilität in sich. Eine geordnete Spezies S heißt separabel in sich, wenn man in ihr eine solche Fundamentalreihe F angeben kann, daß zwischen je zwei verschiedenen Elementen von S ein Element von F gelegen ist.

5. Der Zusammenhang. Um diesen für geordnete Spezies zu definieren, nennen wir zwei Teilspezies α und β der geordneten Spezies S ordnungsgemäß getrennt, wenn jedes Element von α jedem Element von β vorangeht. Die geordnete Spezies S heißt zusammenhängend, wenn bei jeder Teilung von S in zwei ordnungsgemäß getrennte Teilspezies α und β, entweder α ein letztes und β kein erstes, oder β ein erstes und α kein letztes Element besitzt.

Diese Eigenschaft des Zusammenhanges läßt sich nach der klassischen Theorie in die nachstehend unter 6. und 7. erwähnten Eigenschaften zerlegen:

6. Die Überalldichtheit. Eine geordnete Spezies heißt überall dicht, wenn zwischen je zwei verschiedenen Elementen a und b derselben ein Element c liegt, d. h. daß zu je zwei verschiedenen Elementen a und b derselben ein solches Element c existiert, daß entweder $a<c<b$ oder $a>c>b$ gilt.

7. Die Kompaktheit. Diese besagt für geordnete Spezies, daß zu jeder Intervallschachtelung, d. h. zu jeder unbegrenzten Folge von geschlossenen Intervallen $I_1, I_2, \ldots\ldots$, wo jedes $I_{\nu+1}$ eine Teilspezies von I_ν ist, ein allen I_ν gemeinsames Element existiert.

Diese sieben Grundeigenschaften werden wir der Reihe nach für das intuitionistische Kontinuum prüfen.

1. Daß das intuitionistische Kontinuum (und ebenso das reduzierte Kontinuum) nicht diskret ist, folgt z. B. daraus, daß die Zahl $\frac{1}{2} + p_f$, wo p_f die duale Pendelzahl[5]) der fliehenden Eigenschaft f vorstellt, weder gleich $\frac{1}{2}$, noch von $\frac{1}{2}$ verschieden ist.

2. Daß das Kontinuum durch die der Anschauung entnommene Reihenfolge ihrer Elemente nicht geordnet ist, erweist sich am

[5]) a. a. O., S. 161. [[4]]

[[435]]

Elemente p, für dessen bestimmende konvergente Folge c_1, c_2, ... c_1 im Nullpunkt und jedes $c_{\nu+1} = c_\nu$ gewählt wird, mit der einzigen Ausnahme, daß ich, sobald von einer bestimmten fliehenden Eigenschaft f mir eine Lösungszahl λ_f bekannt wird, das nächste c_ν gleich $-2^{-\nu-1}$ wähle, und daß ich, sobald mir ein Beweis der Absurdität dieser Lösungszahl bekannt wird, das nächste c_ν gleich $2^{-\nu-1}$ wähle. Dieses Element p ist von Null verschieden, ist aber trotzdem weder kleiner als Null noch größer als Null.

Mit dem obigen Gegenbeispiel ist allerdings nur gezeigt, daß die unscharf empfundene „natürliche Ordnung" des Kontinuums keine Ordnung des intuitionistischen Kontinuums abgibt. Man kann aber zeigen, daß auch eine anderweitige Ordnung des intuitionistischen Kontinuums, und sogar des reduzierten Kontinuums, hoffnungslos[6]) ist; ein Resultat, das in schroffem Gegensatz steht zu der noch vor kurzem allgemein verbreiteten Ansicht, daß das Kontinuum in verschiedenartigster Weise nicht nur geordnet, sondern sogar wohlgeordnet werden könne.

An die Stelle der Ordnung tritt für das intuitionistische Kontinuum die etwas schwächere Eigenschaft der **virtuellen Ordnung**, die folgendermaßen definiert wird: Eine Spezies S heißt virtuell geordnet, wenn die ordnende Relation $<$ nicht für die volle Spezies der Paare von verschiedenen Elementen von S, sondern nur für eine Teilspezies derselben festgelegt ist, und zwar mit der Maßgabe, daß folgende fünf Axiome erfüllt sind:

1. Die Beziehungen $r = s$, $r < s$, $r > s$ schließen einander aus.
2. Aus $r = u$, $s = v$, $r < s$ folgt $u < v$.
3. Aus $r < s$, $s < t$ folgt $r < t$.
4. Aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen $r > s$ und $r = s$ folgt $r < s$.
5. Aus der gleichzeitigen Ungereimtheit der Beziehungen $r > s$ und $r < s$ folgt $r = s$.

Diese Axiome garantieren die Existenz jeder solchen Relation $a = b$ oder $c < d$ zwischen Elementen von S, welche den bestehenden Relationen dieser Art widerspruchsfrei hinzugefügt werden kann,
[[5]] so daß eine virtuelle Ordnung sich als **unerweiterbar** erweist.

Eine derartige virtuelle Ordnung wird für das intuitionistische Kontinuum in weitgehender Übereinstimmung mit der naiven Anschauung folgendermaßen hergestellt: Seien π' und π'' zwei Elemente des Kontinuums. Wir schreiben $\pi' <_\circ \pi''$, wenn ein Endsegment einer Folge p' von π' nach der „natürlichen Ordnung" durch zwei verschiedene rationale Zahlen von einem Endsegment einer Folge p'' von π'' getrennt wird; $\pi' \leqq_\circ \pi''$, wenn $\pi' >_\circ \pi''$ unmöglich ist;

[6]) Für die Ordnung des vollen Kontinuums müßte man nämlich, kurz ausgedrückt, eine Methode zur Lösung sämtlicher mathematischer Probleme besitzen; für die Ordnung des reduzierten Kontinuums eine Methode zur Lösung sämtlicher mathematischer Probleme, welche einer bestimmten, sehr allgemeinen Kategorie (auf deren nähere Umschreibung wir hier nicht eingehen) angehören.

$\pi' < \pi''$, wenn $\pi' \leqq \pi''$ und überdies $\pi' \neq \pi''$. Für diese ordnende Relation sind in der Tat die fünf Axiome der virtuellen Ordnung erfüllt.

3. Die (auf virtuelle Ordnung erweiterte) Insichdichtheit im obigen Sinne besteht für das intuitionistische Kontinuum nicht, und zwar weil die obige Charakterisierung der Elemente desselben als Hauptelemente versagt. Denken wir nämlich eine Charakterisierung des Elementes $\frac{1}{2}$ als Hauptelement auf Grund einer konvergenten Folge $a_1 < a_2 \ldots < \frac{1}{2}$. Alsdann konstruieren wir in folgender Weise eine Folge d_1, d_2, ...: Wir bestimmen der Reihe nach $d_1 = a_1$, $d_2 = a_2$, ..., und setzen in dieser Weise $d_\nu = a_\nu$, so lange uns von einer bestimmten fliehenden Eigenschaft weder eine Lösungszahl, noch die Absurdität einer solchen bekannt geworden ist; wenn aber zwischen der Bestimmung von d_ν und $d_{\nu+1}$ eines dieser beiden Ereignisse eintritt, so setzen wir $d_\mu = d_\nu = a_\nu$ für $\mu > \nu$. Das zu dieser Folge d_1, d_2, ... gehörende Element des Kontinuums d ist $< \frac{1}{2}$; trotzdem kann kein solches a_ν angegeben werden, daß $a_\nu > d$ ist. Für das volle intuitionistische Kontinuum ist mithin die Insichdichtheit nach der obigen Definition mindestens hoffnungslos [im Sinne von Fußnote[6])]; für das reduzierte Kontinuum läßt sich das gleiche zeigen.

Um für das intuitionistische Kontinuum bzw. für das reduzierte Kontinuum die Eigenschaft der Insichdichtheit wiederherzustellen, unterziehen wir die Definition derselben einer logischen Umformung, d. h. wir geben derselben eine andere (mit der vorstehenden nach der klassischen Auffassung äquivalente, nach der intuitionistischen Auffassung jedoch nicht äquivalente) Form. Dazu haben wir zunächst für virtuell geordnete Spezies den Begriff des Intervalls zu erklären: Für zwei beliebige Elemente a und b der virtuell geordneten Spezies S bezeichnen wir als das geschlossene Intervall ab die Spezies derjenigen Elemente c von S, für welche weder die Beziehungen $c > a$ und $c > b$, noch die Beziehungen $c < a$ und $c < b$ zusammen bestehen können. Unter dem offenen Intervall ab verstehen wir die Spezies derjenigen Elemente c von S, welche zwischen a und b liegen, d. h. erstens sowohl von a wie von b verschieden sind, zweitens zum geschlossenen Intervall ab gehören. Dabei werden a und b als Endelemente sowohl des geschlossenen wie des offenen Intervalls ab bezeichnet. Dieses „Zwischen" ist im Falle, daß $a < b$ ist, offenbar mit dem klassischen „Zwischen" äquivalent. Wir bezeichnen nun ein Element e der virtuell geordneten Spezies S als Hauptelement, wenn es eine unbegrenzte Folge von verschiedenen geschlossenen Intervallen gibt, von denen jedes folgende im vorhergehenden enthalten ist, und welche alle das Element e enthalten, während jedes zu ihnen allen gehörige Element mit e identisch ist. Auf der Grundlage dieser Definition des

Hauptelementes ist dann auch das intuitionistische Kontinuum bzw. das reduzierte Kontinuum wieder in sich dicht.

4. Von der (auf virtuelle Ordnung erweiterten) Separabilität in sich stellt sich für das intuitionistische Kontinuum wie folgt die Unhaltbarkeit heraus: Es sei F die diskrete und geordnete Fundamentalreihe, auf welcher die Separabilität in sich des Kontinuums K beruhen soll. Es sei p_1 das erste Element von F. Wir dürfen annehmen, daß $p_1 > 2^{-n}$ für eine passende natürliche Zahl n. Es sei p_2 das erste in F auf p_1 folgende Element von F, das zwischen p_1 und dem Nullpunkt gelegen ist, p_3 das erste in F auf p_2 folgende Element von F, das zwischen p_1 und p_2 gelegen ist, p_4 das erste in F auf p_3 folgende Element von F, das zwischen p_1 und p_3 gelegen ist usw. Wir konstruieren in folgender Weise eine konvergente Folge m_1, m_2, ... von Elementen von F: Wir setzen $m_\nu = p_\nu$, so lange uns von einer bestimmten fliehenden Eigenschaft weder eine Lösungszahl noch die Absurdität einer solchen bekannt geworden ist; wird aber zwischen der Bestimmung von m_k und m_{k+1} eine Lösungszahl gefunden oder die Absurdität einer solchen bewiesen, so setzen wir $m_\nu = p_k$ für $\nu > k$. Das zu dieser konvergenten Folge gehörende Element p von K ist verschieden von p_1; trotzdem kann kein zwischen p und p_1 gelegenes Element von K angegeben werden. Für das volle intuitionistische Kontinuum ist mithin die Separabilität in sich nach der obigen Definition mindestens hoffnungslos [im Sinne von Fußnote [6])]; für das reduzierte Kontinuum läßt sich das gleiche zeigen.

Auch die Eigenschaft der Separabilität in sich läßt sich für das intuitionistische Kontinuum durch eine logische Umformung der Definition wiederherstellen. Dazu nennen wir zwei verschiedene Elemente a und b einer virtuell geordneten Spezies scharf verschieden und das Intervall ab ausgedehnt, wenn die Komplementärspezies $k\,(ab)$ des offenen Intervalls ab in eine Teilspezies $k_1\,(ab)$, deren Elemente sowohl $\leq a$ wie $\leq b$ sind, und eine Teilspezies $k_2\,(ab)$, deren Elemente sowohl $\geq a$ wie $\geq b$ sind, zerlegt (im unten unter 5. erklärten Sinne) ist[7]), und fordern für die Separabilität in sich der virtuell geordneten Spezies S nur, daß in S eine solche diskrete und geordnete Fundamentalreihe F besteht, daß zwischen je zwei scharf verschiedenen Elementen von S ein Element von F gelegen ist.

5. Um das intuitionistische Kontinuum auf die Eigenschaft des Zusammenhanges zu prüfen, müssen wir zunächst den Begriff der „Teilung" näher betrachten. Dieser Begriff ist nämlich im Intuitionismus einer Präzisierung bedürftig, für welche insbesondere die Begriffe der Zusammensetzung und der Zerlegung sich darbieten. Wir sagen, daß die Spezies P sich aus ihren elementefremden Teilspezies Q und R zusammensetzt, wenn die Existenz eines von $\mathfrak{S}\,(Q, R)$ verschiedenen Elementes von P ad absurdum geführt werden kann. Weiter sagen wir, daß die Spezies P in ihre elementefremden Teilspezies Q und R zerlegt ist, wenn $P = \mathfrak{S}\,(Q, R)$

[7]) Alsdann ist sicher entweder $a < b$ oder $b < a$.

[[438]]

gilt. Wir wollen nun von scharfzusammenhängend bzw. von schwachzusammenhängend sprechen, wenn der zugrunde liegende Teilungsbegriff zum Zusammensetzungs- bzw. zum Zerlegungsbegriff präzisiert ist. Alsdann ist im vollen intuitionistischen Kontinuum der schwache Zusammenhang inhaltslos auf Grund des Satzes von der Unzerlegbarkeit des Kontinuums, welcher besagt, daß bei einer beliebigen Zerlegung des Kontinuums in eine diskrete Spezies von Teilspezies eine dieser Spezies mit dem Kontinuum identisch ist. Der scharfe Zusammenhang dagegen ist im vollen intuitionistischen Kontinuum falsch, wie aus folgendem Gegenbeispiel hervorgeht: Wir betrachten die Fundamentalreihe $a_1, a_2, \ldots$, wo, wenn λ_f die Lösungszahl einer bestimmten fliehenden Eigenschaft f bedeutet, $a_\nu = 1-2^{-\nu}$ für $\nu < \lambda_f$ und $a_\nu = 2-2^{-\nu}$ für $\nu \geq \lambda_f$. Unter K_1 verstehen wir die Spezies derjenigen Elemente e von K, zu denen ein solches ν existiert, daß $a_\nu > e$ und unter K_2 die Spezies derjenigen Elemente e von K, für welche kein solches ν existieren kann, daß $a_\nu > e$. Diese Spezies K_1 und K_2 sind ordnungsgemäß getrennt, und K setzt sich aus K_1 und K_2 zusammen; trotzdem besitzt weder K_1 ein letztes, noch K_2 ein erstes Element.

Daß für das reduzierte Kontinuum der schwache Zusammenhang nicht gleichzeitig einen Inhalt besitzen und zutreffen kann, sehen wir so ein: es sei e das letzte Element der „vorderen" Teilspezies α, wobei wir annehmen dürfen, daß $e \geq \frac{1}{4}$ und $e \leq \frac{3}{4}$ ist. Alsdann muß einerseits jedes Element $b > e$ des reduzierten Kontinuums zu β gehören, andererseits ist $b' > e$ für jedes Element b' von β. Die Teilspezies β ist mithin mit der Teilspezies der Elemente $> e$, die Teilspezies α mit der Teilspezies der Elemente $\leq e$ identisch, so daß jedes Element des reduzierten Kontinuums entweder $\leq e$ oder $> e$ sein müßte, was nicht der Fall ist. Die Falschheit des starken Zusammenhanges folgt für das reduzierte Kontinuum aus dem gleichen Beispiel wie für das volle Kontinuum.

Um für das intuitionistische Kontinuum die Eigenschaft des Zusammenhanges mittels logischer Umformung der Definition wiederherzustellen, sagen wir, daß die virtuell geordnete Spezies S in die ordnungsgemäß getrennte Teilspezies α und β, aus denen sie sich zusammensetzt, erschöpfend geteilt ist, wenn für zwei beliebige scharf verschiedene Elemente a und b $(a < b)$ entweder alle Elemente $\leq a$ zu α oder alle Elemente $\geq b$ zu β gehören, und nennen die virtuell geordnete Spezies S frei bzw. gebunden zusammenhängend, wenn bei jeder erschöpfenden Teilung von S bzw. bei jeder durch ein Gesetz bestimmten erschöpfenden Teilung von S in zwei ordnungsgemäß getrennte Teilspezies α und β ein solches Element e von S besteht, daß jedes Element $< e$ zu α und jedes Element $> e$ zu β gehört. Alsdann ist das volle intuitionistische Kontinuum frei und das reduzierte Kontinuum gebunden zusammenhängend.

6. Von einer Überalldichtheit nach der obigen Definition kann beim intuitionistischen Kontinuum bzw. beim reduzierten

Kontinuum schon deshalb nicht die Rede sein, weil diese Eigenschaft allererst fordert, daß für je zwei verschiedene Elemente a und b entweder die Relation $a < b$ oder die Relation $a > b$ besteht; d. h. die Ordnung der betreffenden Spezies voraussetzt. Wenn wir aber das Wort „zwischen“ für virtuell geordnete Spezies im oben unter 3. erklärten Sinne auffassen, dann läßt sich zwischen je zwei verschiedenen Elementen des vollen Kontinuums K ein weiteres Element von K bestimmen, so daß in dieser Weise die Eigenschaft der Überalldichtheit für das volle Kontinuum wiederhergestellt ist. Für das reduzierte Kontinuum wird das gleiche in gleicher Weise erreicht.

7. Daß weder für das intuitionistische Kontinuum noch für das reduzierte Kontinuum (auf virtuelle Ordnung erweiterte) Kompaktheit im obigen Sinne besteht, ersehen wir aus folgendem Beispiel: Es sei λ_f die Lösungszahl der paritätsfreien fliehenden Eigenschaft f, und es sei $I_\nu = (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ für $\nu < \lambda_f$, $I_\nu = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ für $\nu \geq \lambda_f$ und λ_f ungerade, $I_\nu = (+\frac{1}{4}, +\frac{1}{2})$ für $\nu \geq \lambda_f$ und λ_f gerade. Alsdann besitzt die Intervallschachtelung $I_1, I_2, \ldots$ kein allen I_ν gemeinsames Element.

Um mittels logischer Umformung der Definition für das intuitionistische Kontinuum bzw. für das reduzierte Kontinuum die Eigenschaft der Kompaktheit wiederherzustellen, verstehen wir unter einer prädestinierten Intervallschachtelung eine Fundamentalreihe von geschlossenen Intervallen $I_1, I_2, \ldots$, wo jedes $I_{\nu+1}$ eine Teilspezies von I_ν ist, nennen eine Intervallschachtelung $I_1, I_2, \ldots$ hohl, wenn zu jedem Element π der betreffenden virtuell geordneten Spezies ein solches ν_π bestimmt ist, daß π nicht zu I_{ν_π} gehören kann, und definieren die freie bzw. gebundene Kompaktheit als die Unmöglichkeit der Existenz einer hohlen Intervallschachtelung bzw. einer hohlen prädestinierten Intervallschachtelung. Alsdann ist das volle intuitionistische Kontinuum frei und das reduzierte Kontinuum gebunden kompakt.

Zu einer anderen geeigneten logischen Umformung der Definition gelangen wir, indem wir eine Intervallschachtelung $I_1, I_2, \ldots$ unbeschränkt kontrahierend nennen, wenn zu jedem ausgedehnten Intervall I ein solches ν bestimmt ist, daß I_ν unmöglich
[[6]] eine Teilspezies von I sein kann, und eine virtuell geordnete Spezies S als frei bzw. gebunden kompakt bezeichnen, wenn zu jeder unbegrenzt kontrahierenden Intervallschachtelung bzw. zu jeder unbegrenzt kontrahierenden prädestinierten Intervallschachtelung $I_1, I_2, \ldots$ ein allen I_ν gemeinsames Element von S existiert. Auch in diesem Sinne ist das volle intuitionistische Kontinuum frei und das reduzierte Kontinuum gebunden kompakt.

A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre. (Wissenschaft und Hypothese XXXI.) Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner. $\mathcal{RM}$ 8.—. 1930 B

Das Buch gibt den durch zahlreiche Zusätze und reichliche Literaturangaben ergänzten Inhalt wieder von zehn im Sommer 1925 in Kiel gehaltenen Vorträgen. Der Hauptteil ist den eigenen Untersuchungen des Verf. gewidmet, welche auf die Beseitigung der der Zermeloschen Axiomatik infolge der Benutzung des verschwommenen Begriffs der „definiten Eigenschaft" anhaftenden Mängel gerichtet sind und zu diesem Zwecke eine aus Spezies und Funktionen bestehende Welt, ausgehend von einem primären Bereich, schrittweise erweitern, indem auf die jedesmal schon bestehende Welt abwechselnd die Funktionsdefinition und die speziesschaffenden Axiome angewandt werden. Ausführlich wird erörtert, daß durch diese Zermelo-Fraenkelsche Axiomatik die bekannten Antinomien der klassischen Mengenlehre vermieden werden, gegen die Möglichkeit des Auftauchens neuer Antinomien dagegen nicht die geringste Garantie geleistet wird. Aus dem Aufbau der Spezieslehre nach den genannten Prinzipien gelangen insbesondere die Theorien der Äquivalenz, der Ordnung und der Endlichkeit zur Behandlung. Betrachtungen über die Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit des Axiomensystems werden angegliedert, wobei hauptsächlich demonstriert wird, daß auf diesem Gebiete zwar Ausblicke eröffnet und Methoden und Desiderata formuliert, Resultate dagegen so gut wie keine erzielt worden sind.

Des weiteren bringt das Buch erstens eine Übersicht der Richard-Poincaré-Russellschen Versuche, mittels Verwerfung der nichtprädikativen Begriffsbildungen die Antinomien zu tilgen, zweitens einen Bericht über den Intuitionismus. Am letzteren ist vor allem auszusetzen, daß die Unterscheidung zwischen *altem Intuitionismus* (der das Überabzählbare, insbesondere das Kontinuum, mittels des Komprehensionsaxioms einführt und die herkömmliche Mathematik anerkennt, nur in befriedigender Weise zu rechtfertigen versucht) und *neuem Intuitionismus* (der das Überabzählbare in der erzeugenden Kraft der Menge besitzt, die herkömmliche Mathematik verwirft, und seine Hauptaufgabe im Neubau der Mathematik unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten erblickt), von der S. 34—35 richtig ausgegangen wird, bei den weiteren Erörterungen wieder zerfließt, so daß, wenn vom Intuitionismus im allgemeinen gesprochen wird, bald ausschließlich der alte, bald (und dies häufiger) ausschließlich der neue Intuitionismus gemeint sein kann.

Unter den zu beanstandenden Äußerungen des Buches heben wir folgende hervor:

(S. 44) daß der Mengenbegriff von Brouwer eingeengt worden sei auf *entscheidungsdefinite* Gesamtheiten, für die die Frage, ob es darin Elemente von vorgegebener Eigenschaft gibt, stets, und zwar auf konstruktivem Wege, entscheidbar sei;

(S. 58) daß die Intuitionisten mittels einer ganz engen Mengendefinition kurzerhand einen großen Teil der Analysis vom mathematischen Gesamtkörper amputieren;

(S. 86) daß auch vom intuitionistischen Standpunkt der Beweis eines mathematischen Satzes unter Mitbenutzung des Auswahlaxioms eine Bekräftigung sei von der Aussichtslosigkeit jedes Versuchs, das Gegenteil des betreffenden Satzes zu beweisen;

(S. 152) daß die Postulate Euclids vielfach wegen ihrer „Evidenz" keines Widerspruchslosigkeitsbeweises bedürfen;

(S. 154) daß von allen, die von einer bestimmten mathematischen Frage den Sinn bejahen, nur übereinstimmende Antworten auf diese Frage zu erwarten seien;

(S. 156) daß dem Gelingen eines Widerspruchsfreiheitsbeweises vermutlich auch von den Intuitionisten ein bedeutsamer Erkenntniswert zuzusprechen wäre;

(S. 161) daß es, ausgehend von den natürlichen Zahlen als etwas Gegebenem, ein Unternehmen von wahrhaft gigantischer mathematischer und philosophischer Bedeutung wäre, von jenem Ausgangspunkt aus das Kontinuum als widerspruchsfrei zu erweisen.

Laren (Nordholland). L. E. J. Brouwer.

3. The intuitionistic reconstruction of mathematics ⟦1⟧

Premising that rational reflection leads to the conclusion that the exactness of mathematics, in the sense that mistakes and misunderstanding are excluded, cannot be secured by linguistic means, the question arises whether it can be secured by other means. The answer is that the languageless constructions which arise from the self-unfolding of the basic intuition, are exact and true, by virtue of their very presence in the memory, but that the human faculty of memory which must survey these constructions, is by its nature limited and liable to error, even when it seeks the support of linguistic signs. Thus for a human mind equipped with an unlimited memory, pure mathematics, practised in solitude and without using linguistic signs, would be exact, but the exactness would be lost in mathematical communication *between* human beings with an unlimited memory, because they would still be thrown upon language as their means of understanding.

Let us further ask the question in the following form: Will hypothetical human beings with an unlimited memory, who use words only as invariant signs for definite elements and for definite relations between elements of pure mathematical systems which they have constructed, have room in their verbal reasonings for the logical principles as rules for tacking together mathematical affirmations? Or, what comes to the same: Will human beings with an unlimited memory, while surveying the strings of their affirmations in a language which they use for an abbreviated registration of their constructions, come across the linguistic images of the logical principles in all their mathematical transformations? A conscientious rational reflection leads to the result that this may be expected for the principles of identity, of contradiction and of the syllogism, but for the principium tertii exclusi only in so far as it is restricted to affirmations about parts of a definite, *finite* mathematical system, given once and for all whilst a more extensive use of this principle would not occur, because in general its application to purely mathematical affirmations would produce word complexes devoid of mathematical sense and hence devoid of any sense whatever.

It follows that the language of daily intercourse between people with a limited memory, being necessarily imperfect, limited and of insecure effect, even if it is organised with the utmost practically attainable refinement and precision, will only be suitable for its task of mnemotechnic, economy of thought and understanding in mathematical research and in mathematical intercommunication, if any application of the principium tertii exclusi which is not restricted to a well defined finite system, is avoided.

This insight, directive for the so-called intuitionist study of mathematics, has failed in classical mathematics, in consequence of the historical development of the authority ascribed to logic. Hence in the course of centuries not only a number of theorems which since have been disproved by intuitionism, were believed in classical mathematics to be true, but several pretendedly mathematical theories, to which intuitionism must deny any mathematical significance, were elaborated on this basis. In general intuitionism brings about a complete recasting of mathematics, with the result, to our regret, that in many places its supple and elegant character is lost, and it has to assume much harsher, more tortuous and more complicated forms. Alas, the spheres of truth are less transparent than those of illusion.

In order to illustrate the reconstruction of mathematics by some simple examples, we consider in the first place the so-called fundamental theorem of algebra, which asserts that every algebraic equation has at least one root. In every classical proof of this theorem the principium tertii exclusi was used. For instance, one of the best known proofs derives a contradiction from the hypothesis that a polynomial function of a complex variable would have a bounded range in the complex plane. Another classical proof is based on the presupposition that the discriminant of an equation is either zero or greater in absolute value than a rational number apart from zero. Up to about ten years ago every current proof was subject to an analogous criticism. Therefore the fundamental theorem of algebra had to be considered in intuitionistic mathematics as a wordcomplex devoid of sense until an algorithm was constructed by which, at least for an extensive set of algebraic equations, a root can be calculated from the coefficients.

In order to construct some further examples, we introduce the intuitionistic notions of a *fleeing property* and of the *oscillating number of a fleeing property*. A fleeing property is a property which can be proved for any given natural number either to hold or to be contradictory, whilst neither a number with that property is known, nor a proof that it is contradictory for every natural number. By the *critical number* k_υ of a fleeing property υ we mean the (hypothetical) smallest natural number for which the fleeing property holds, by an *up-number*, resp. a *down-number* of υ a natural number that is not smaller, resp. smaller than the critical number. It goes without saying that υ loses the character of a fleeing property as soon as an up-number for υ is found. The fleeing property is called *two-sided* if it can be proved contradictory neither for every even number, nor for every odd number. By the *oscillatory binary shrinking number* s_υ of the two-sided fleeing property υ we mean the limit of the fundamental sequence $a_1, a_2, \ldots$, where $a_\nu = (-2)^{-\nu}$ if ν is a down-number and $a_\nu = (-2)^{-k_\upsilon}$ if ν is an up-number
⟦2⟧ of υ. This limit is neither positive nor negative nor equal to zero, it is neither equal to zero nor different from zero and neither rational nor irrational; nevertheless it is a real number and therefore it clearly illustrates the invalidity of the principium tertii exclusi. If we further define the *binary approximation number* n_υ of υ as the limit of the fundamental sequence $b_1, b_2, \ldots$, where $b_\nu = 2^{-\nu}$ if ν is a

down-number and $b_\nu = 2^{-k_\nu}$ if ν is an up-number of v, then we are able to throw ⟦3⟧
light upon the following four properties which are elementary as well as classical.
1. For two straight lines in the projective plane at least one common point can be found.
2. If a continuous function is negative for $x = a$ and positive for $x = b > a$, then a value of x between a and b can be found for which the function is equal to zero.
3. If a continuous function with a continuous derivative is equal to zero for $x = a$ and for $x = b > a$, then a value of x between a and b can be found for which the derivative of the function is equal to zero.
4. Given two positions of a solid in Euclidean space that can move around a fixed point, at least one line through the fixed point can be found which has the same situation in both positions.

To refute the first theorem, we draw in the Euclidean plane, furnished with an orthogonal coordinate system, a straight line l through the points $(1, s_v)$ and $(-1, n_v)$. For this line l a point of intersection with the axis of X can be found neither in the finite, nor in the infinite.

To refute the second theorem we consider the function of x which for the values -2, -1, 1, 2 of x takes successively the values 1, n_v, s_v, -1 and which is linear between any two consecutive of these values. No value of x for which this function is zero, can be found.

To refute the third theorem, we consider the definite integral, starting from $x = -3$, of the function of x which for the values -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 of x takes successively the values 1, n_v, s_v, -1, $-n_v$, $-s_v$, 1 and which is linear between any two consecutive of these values. This gives a continuous function with ⟦4⟧
a continuous derivative, equal to zero for $x = -3$ and for $x = 3$, whilst no intermediate point for which the derivative is equal to zero can be found.

In order to refute the fourth theorem we define as follows in Euclidean space, furnished with an orthogonal coordinate system, a fundamental sequence $r_1, r_2, \ldots$ of rotations of a solid body movable around the origin as a fixed point, all starting from the same initial position s_0. The rotation $r_{3\nu}$ is effected around the axis of X through an angle $a_{3\nu}$, the rotation $r_{3\nu+1}$ around the axis of Y through an angle $a_{3\nu+1}$, the rotation $r_{3\nu+2}$ around the axis Z through an angle $a_{3\nu+2}$, where the a_ρ
have the same meaning as above in the definition of the oscillatory binary shrink- ⟦5⟧
ing number of a fleeing property. Let s_ρ be the position that results from s_0 by the rotation r_ρ, and let s be the limit position of $s_1, s_2, \ldots$. Then we cannot find a line through the origin which has the same situation in s_0 and in s.

The fragments of these theorems that remain valid intuitionistically are the following:
1. If l_1 and l_2 are lines in the metrical projective plane, then it is possible to find for every positive ε a point p_1 on l_1 and a point p_2 on l_2 such that the distance between p_1 and p_2 is less than ε.
2. If a continuous function is negative for $x = a$ and positive for $x = b > a$, then

it is possible to find for every positive ε a value of x between a and b, for which the function has an absolute value $< \varepsilon$.

3. If a continuous function with a continuous derivative is zero for $x = a$ and for $x = b > a$, then it is possible to find for every positive ε a value of x between a and b, for which the derivative has an absolute value $< \varepsilon$.

4. Given two positions of a solid in Euclidean space, that can move around a fixed point, it is possible to find for every positive ε a straight line through the fixed point, such that the angle between its situations in the two given positions is less than ε.

Plenty of analogous examples can be constructed in almost every part of mathematics. Nevertheless these do not suffice to reduce classical mathematics to silence, because it is supported by the circumstance that the principium tertii exclusi, though not valid, is also non-contradictory as long as it is only applied to finite sets of properties. Thus intuitionism is deprived, in its contest against the errors of classical mathematics, of the readiest means of repressing errors of thought, namely reductio ad absurdum, and it is thrown upon admonition to reasonable reflection only.

SIGNIFIC DIALOGUES 1937

by L. E. J. Brouwer, Fred. van Eeden, Jac. van Ginneken S.J. and G. Mannoury
(FRAGMENTS)

SIGNIFIC STUDY OF LANGUAGE AND PHILOSOPHY

Basic program of the 'Signific Circle' founded at Bussum on May 21, 1922 [[1]]

The meaning of a linguistic act for the speaker and for the hearer can but partly be determined from the words or symbols which are employed in it, and it can only approximately be expressed in other words. However there is a great difference in the extent to which such acts can be dissected into and approximated by words. In the language of science (in particular that of mathematics) and (albeit to a less extent) in that of technics a fairly great stability in the meaning of words and linguistic acts can be attained by means of example and stepwise definition, whilst in primitive, passionate or poetical language, and even in that of daily intercourse, it is out of the question to give proper definitions; on the contrary, here the mostly very intricate complexes of conscious or semiconscious mental elements, tied more or less strongly to words as their images, are different for every case. It must however be remarked that neither the former, more intellectually tinged, mental elements, nor the opposite, which are more penetrated with emotional and volitional motives, are completely absent in any linguistic act.

This distinction is the origin of several variegations of reflection upon language, of which the formalistic-logical and the immediately-intuitive forms can be considered to a certain extent as extremes, and which together and in their mutual connections constitute the subject of signific study of language.

The undersigned are in agreement that this study might be undertaken more systematically than up to now, that ample space ought to be allotted therein to experimental and statistic methods, next to the introspective investigation of subconscious elements (which are often clearly intellectual in character), that this study can further the usefulness of language as a means of understanding and of ordering our thoughts, and that it can, though only indirectly, aid an efficient extension of the tools of the language. But they also realize that significs comprises more than just criticism of language or even synthesis of language, that it must aim at a deeper insight into the connection between words and what is in the mind. In other words, that a signific philosophy is conceivable which is able largely to influence the social and spiritual condition of mankind in future eras, in the sense that it will feel and act more in harmony than at present.

With respect to the methods by which these more far-reaching purposes can be attained, and with respect to the connection to be laid between that signific philosophy and the existing opinions in the social, philosophical and religious sphere, their views diverge, and they intend to develop their viewpoints, each according to his own conviction. However, in their opinion, this divergence, however deep it may be, does not interfere with cooperation on the basis which has been described above, and this conviction has been strengthened by their experience in numerous preliminary discussions; this divergence even has an advantage, which must not be underestimated, for such investigations, because the distinctions to be studied will apply most strongly precisely to groups consisting of persons of different mental disposition.

L. E. J. Brouwer
Fred. van Eeden
Jac. van Ginneken S.J.
G. Mannoury

SEPARATE STATEMENTS BY THE CIRCLE's MEMBERS

For the undersigned significs consists not so much in criticism of language as:
1°. in tracing emotional elements by analysing the causation and the effect of words. By this analysis the emotions which are connected with human understanding can be brought better under control by the conscience.
2°. in creating a new vocabulary which admits also the spiritual tendencies in human life to considerate interchange of views and hence to social organisation.

For the realisation of the former part of the program co-operation is indispensable, for countless complexes of emotions can only be analysed by the catalyzing force of philosophical discussions between persons of different mental attitude.

For a long time I have believed that also with respect to the creative activity mentioned under 2° co-operation, here among like-minded people, would be highly important, but I have come more and more to the conviction that this higher task of significs can only be accomplished by extreme mental concentration of the individual.

L. E. J. Brouwer

⟦There follow statements by Frederik van Eeden, Jac. van Ginneken S.J. and G. Mannoury.⟧

DISCUSSION ON THE PREMISSES OF A GROUP

BROUWER
I consider a systematic investigation into the premisses which are at the basis of mental understanding between the members of a social or religious group more

important than the direct study and analysis of the existing language. In my opinion the experiment can play an important part in this investigation, but first of all it must be clear what is to be investigated, and therefore there is no harm in discussing this point. I see two kinds of premisses (which facilitate mutual understanding *within* the group, but hamper it *between* groups): partly they consist in certain judgements that are endorsed or accepted by every member of the group (in most cases tacitly) and partly they consist only in the paths of associations, which are analogously (of course not identically) interlaced for different members of the same group. One might speak of nets of associations which confer their particular character to the different special languages of groups and races, whilst however the structure of these nets is never mentioned. I feel this for instance quite clearly when I think of the difference between Eastern and Western languages and when I try to understand why it is so difficult for the average Oriental and the average modern European to convey their thoughts to each other, no matter how well they know each other's language-in-the-narrow-sense.
⟦There follow interventions by Van Eeden and Mannoury⟧

BROUWER

....

I feel that we ought first to inquire into the 'Voraussetzungen' ⟦premisses⟧ which underlie the so-called professional (technical as well as scientific) languages; this research can prepare the way for the so much more subtle research with respect to social or racial groups. I would like to take as an example the commercial sciences, such as they are nowadays understood and taught in the schools. When the boys have lessons in commercial arithmetic and learn about drafts and insurances, then of course there is no mention of the production process that underlies all these transactions, but nevertheless the production process is accepted as a whole by the simple fact that it is considered worth while to discuss its details.

And accepting it does not mean preferring it (I speak only about elementary commercial instruction), for the latter would involve a certain amount of mental comparison, which has not taken place, but it means dutifully accepting it as the only production system to be considered. Now personally I do not consider it of much importance whether words are used or not in accepting such a common point of departure. In the case that I took as an example such general words are in use, though they are seldom mentioned in the school. I mean mainly the word capitalism. The birth of such a general term, denoting an already assumed system of judgments, has consequences in two senses: constructive and destructive. In the first place constructive, for because people become aware of the common fundamental notion they will more easily keep hold of this notion and develop it, but in the second instance destructive, just as any attempt to clarify a notion will at the same time illuminate its weaknesses. One might even ask oneself if systematization of collective aims is not an initial symptom of the decadence of these aims. Here I think for instance of the general notion 'science' that systematizes what might be called 'technics', to wit: those actions which aim at providing the daily needs of life. 'Science' has subjected these actions and the corresponding aims to the regulation necessitated by their frequency, and has thereby induced people to do research which at first sight has no connection at all with the daily needs of life, but which nevertheless, as a whole, promise a more effective and more complete appeasement of these needs. In this way even the average non-scientific man is persuaded 'for the sake of science' to put up with certain sacrifices (in money or in the form of subordination to ideas which are propagated in the name of science), expecting vaguely that all this will bring society on a 'higher' level where also the narrow-minded will live better and more easily than to-day. So far, what we might call becoming aware of science, is constructive. But at the same time this awareness leads to a questioning of the origin and the limitations of this 'science', and I am sure that a 'bankruptcy of science' would never have been mentioned if that awareness had not preceded it. In fact every word starts an action – this holds for individual words as well as for words used by groups – but this action cannot always be gathered from the word alone, and certainly not if one considers it only prospectively and neglects to pay conscious attention to its retrospective character. ⟦Here follows a discussion between Mannoury, Brouwer and Van Eeden.⟧

DISCUSSION ON THE FORMALISTIC METHOD IN SIGNIFICS

⟦The discussion is opened by statements of Mannoury, Van Eeden and Van Ginneken.⟧

BROUWER

....

True mathematics never lacks significance, because it is never without a social cause. Man came to think mathematically because only by applying this method of thinking was he able to prevail in the struggle for life which became more and more complicated and difficult. And in its turn this method of thinking gave rise to the need for a corresponding language which carries a will-impulse not word for word but only after longer and more complicated periods.

MANNOURY
Yet mathematics is cultivated to a large extent as 'l'art pour l'art' and then the formal structure does grow quite independent of social aims?

BROUWER
I am not so sure of that. When mathematical calculations are made simply by

way of a game or a recreation, or as long as they serve only as a subject of instruction, it is difficult to point out a *direct* connection with social causes. But this does not prove that such a connection does not exist at all. For that matter I have not meant to say that any isolated mathematical formula represents a 'jump from the end to the means' but only that mathematical thought, or rather mathematical sentiment, is a sort of network connecting the data which are necessary or valuable for our life: I imagine the will-impulses which are excited directly ('unvermittelt') and about which I spoke just now, as golden buttons scattered here and there over that network which connects them and mutually relates them.
⟦Interventions by Van Ginneken, Brouwer and Van Eeden⟧

VAN EEDEN
It can very well be imagined that a mathematician who, to speak with Mannoury, practices 'l'art pour l'art', can attain by his calculations and refined analysis a deepening of spiritual life which people of a different disposition pursue by art or by contemplation.

BROUWER
I can share that feeling, but then it holds only for the intuitive, i.e. living mathematics, not for the formal language which accompanies mathematics as the weather-map accompanies the atmospheric processes. Still I feel that also a formula, and perhaps even a calculating-rule, as long as it is manipulated, really has an asserting character in many more cases than would follow from Mannoury's ideas, and I think even that the formula borrows its only importance from that asserting character. I like to illustrate this by the book-keeping of a bank: For the clerks who enter the items in the books, these items have no sense or importance whatever; they do their job to gain a living, but the fact that the board of the bank pays them for book-keeping is accounted for by the interests that are served by the transactions. The banker sends an important telegram: this is living, asserting language; the codewords in which it is written form what I call a sequence of entities which represents another sequence of perceptions and unattained aims, in other words they are as many links between the ultimate aims and the nearest means. If now the content of that telegram is reproduced in the bookkeeping, it does not lose that character, but it becomes only more difficult to perceive the connection between means and aims: the sequence of entities is transformed. For the bookkeeper this connection is then dissolved into a general feeling that he has conscientiously performed his duty, a feeling that is positively akin to the sentiment that constitutes for the mathematician the notion of 'truth'. For it is also in this respect that I differ fundamentally from Mannoury's conception, that mathematics, when it is made less formal, will pay for it by a loss of 'exactness', i.e. of mathematical 'truth'. For me 'truth' is a general emotional phenomenon, which by way of 'Begleiterscheinung' ⟦accompanying phenomenon⟧ can be coupled

or not with the formalistic study of mathematics. And therefore I do not recognise as true, hence as mathematics, everything that can be written down in symbols according to certain rules, and conversely I can conceive mathematical truth which can *never* be fixed down in any system of formulas. Again just as in the administration of the bank: On the one hand it is quite possible to falsify the books though scrupulously heeding all the rules of the art of book-keeping, on the other hand it is impossible to enter into the books all the considerations of the banker and all the other factors that influence the financial power of the bank.

⟦Short intervention of Mannoury⟧

But even when the formal system coincides with intuitive mathematics, or expressed more adequately, when they are parallel, then *exactness* lies in the intuition, never in the formula. When I am travelling, I must rely upon the exactness of the time-table, and this does not mean that it has been derived from one basic formula according to certain previously fixed rules, but that it contains no misprints, in other words that it completely satisfies its composer by rendering his intentions. And this feeling of complete satisfaction is fundamentally identical to what I call the 'sentiment of mathematical truth', which I consider the only criterion of true mathematics.

⟦The discussion continues.⟧

DISCUSSION ON THE SOCIAL IMPORTANCE OF SIGNIFICS

BROUWER

A system of language that would be purified of rhetoric, subjective, demagogic and in general of deceptively emotional admixtures would be of general human importance mainly because it would make possible a more adequate formulation of social purposes and thereby set bounds to the fatal influence which the personal motives and aims of eloquent politicians have upon the destiny of nations and of individuals. In order to actualize such a system of language more is needed than purely scientific analysis and critical study of language, namely in the first place the choice and creation of words for basic immaterial notions, which can serve as elements for the construction of a more indicative language, suitable to express general mental values and human emotions of fraternity and solidarity. It will be impossible to choose or to create these words merely by a systematic method, but it will require the individual devotion of persons with a disposition to pure sentiment and pure volition, guided by the desire of understanding which results from the demand of social reform.

⟦The discussion continues.⟧

Mathematics. — *Zum Triangulationsproblem* [1]). By Prof. L. E. J. BROUWER. 1939

(Communicated at the meeting of September 30, 1939).

§ 1.

Unter einer *geschlossenen p-dimensionalen Umgebungsmannigfaltigkeit* R_p verstehen wir eine katalogisiertkompakte Spezies, welche folgende Eigenschaften besitzt: ⟦1⟧

1. R_p enthält eine endliche Anzahl s von katalogisierten kompakten Teilspezies $H^1, \ldots, H^s$, wobei jedes H^ν topologisches Bild des Cartesischen Einheitskubus ist, d.h. durch p Koordinaten $x_1^\nu, \ldots, x_p^\nu (0 \leqslant x_\varrho^\nu \leqslant 1)$ eineindeutig und stetig beschrieben werden kann. Die Grenze von H^ν, d.h. die Spezies derjenigen Punktkerne von H^ν, die ein $x_\mu^\nu = 0$ oder ein $x_\mu^\nu = 1$ besitzen, bezeichnen wir mit L^ν. Das Innere von H^ν, d.h. die Spezies derjenigen Punktkerne von H^ν, für welche $0 <\circ x_\varrho^\nu <\circ 1$ $(1 \leqslant \varrho \leqslant p)$, bezeichnen wir mit K^ν.

2. Jedes K^ν ist offen in R_p.

3. R_p ist identisch mit $\mathfrak{S}(K^1, K^2, \ldots, K^s)$.

Alsdann kann eine solche positive Zahl $\eta \circ\!> 0$ angegeben werden, dass, wenn wir die Spezies derjenigen Punktkerne von H^ν, für welche $(s+3)\eta <\circ x_\varrho^\nu <\circ 1-(s+3)\eta$ $(1 \leqslant \varrho \leqslant p)$ mit ${}_sK^\nu$ bezeichnen, R_p ebenfalls mit $\mathfrak{S}({}_sK^1, \ldots, {}_sK^s)$ identisch ist.

Die Spezies derjenigen Punktkerne von H^ν, für welche $(g+3)\eta <\circ$ $<\circ x_\varrho^\nu <\circ 1-(g+3)\eta$ $(1 \leqslant \varrho \leqslant p; 0 \leqslant g \leqslant s)$, bezeichnen wir mit ${}_gH^\nu$. ⟦2⟧

Die Spezies derjenigen Punktkerne von H^ν, für welche $(3-g)\eta <\circ$ $<\circ x_\varrho^\nu <\circ 1-(3-g)\eta$ $(1 \leqslant \varrho \leqslant p; 0 \leqslant g \leqslant 2)$ bezeichnen wir mit ${}^gH^\nu$.

Die Grenze von ${}_gH^\nu$ bzw. ${}^gH^\nu$ bezeichnen wir mit ${}_gL^\nu$ bzw. ${}^gL^\nu$. Das Innere von ${}_gH^\nu$ bzw. ${}^gH^\nu$ bezeichnen wir mit ${}_gK^\nu$ bzw. ${}^gK^\nu$.

Wir nennen R_p *differenzierbar zusammenhängend*, wenn für be-

---

[1]) Der Inhalt dieses Aufsatzes wurde vom Verf. in der 158. Jahresversammlung der Wiskundig Genootschap zu Amsterdam am 24. April 1937 vorgetragen. Wegen des fragmentarischen Charakters des Resultates sowie der intuitionistisch nicht ganz vollendeten Darstellungsform wurde von einer Veröffentlichung des Vortrags damals einstweilen Abstand genommen und zur erneuten Inangriffnahme des Gegenstandes hat der Verf. seitdem keine Gelegenheit gehabt. Weil aber des Verf. Mitarbeiter Herr Dr. FREUDENTHAL, der dem erwähnten Vortrage s.Z. beiwohnte, kürzlich den Wunsch geäussert hat, an denselben anzukuüpfen, so hat der Verf. geglaubt, sich zur vorliegenden Veröffentlichung, die er sonst als verfrüht betrachten würde, entschliessen zu müssen.

liebig gewählte μ und ν in jedem gemeinsamen Punkte von K^{μ} und K^{ν} die Koordinaten $x_1^{\mu}, \ldots, x_p^{\mu}$ und die Koordinaten $x_1^{\nu}, \ldots, x_p^{\nu}$ nacheinander beschränkt und gleichmässig stetig differenzierbar sind.

Die im folgenden zu betrachtenden R_p werden als differenzierbar zusammenhängend vorausgesetzt.

§ 2.

⟦3⟧ Unter der *m-teiligen Parallelzerlegung* eines gemessenen p-dimensionalen Fragmentes F verstehen wir die simpliziale Zerlegung von F, welche entsteht, wenn wir in jedem repräsentierenden Simplex S von F jede Höhenlinie in m gleiche Segmente zerlegen, in den Teilpunktkernen ebene $(p-1)$-dimensionale Räume senkrecht anbringen, und in den in dieser Weise entstehenden konvexen Teilpolyedern von S der Reihe nach die zweidimensionalen, die dreidimensionalen, usw. Seiten der jeweilig vorliegenden Teilung ihrer Grenzen entsprechend zentral-sektoral zerlegen.

Unter einem *simplizialen Gitter* $\gamma(F)$ verstehen wir eine eineindeutige Abbildung der Spezies der Grundpunktkerne eines gemessenen p-dimensionalen Fragmentes F auf R_p. Die $\gamma(F)$ darstellenden Grundpunktkerne von R_p werden kurz die *Grundpunktkerne von* $\gamma(F)$ genannt.

Ein in H^r liegendes simpliziales Gitter $\gamma(F)$ heisst *faltenlos in* H^r, wenn es in H^r als zugehöriges simpliziales Bild $\beta^r(F)$ von F ein ein-p-dimensionales Fragment, also ein topologisches Bild von F darstellendes Netzfragment erzeugt.

Ein simpliziales Gitter $\gamma(F)$ heisst *faltenlos*, wenn jeder beliebige ganz in einem einzigen H^r gelegene, einem Teilfragment D von F entsprechende Teil $\gamma(D)$ von $\gamma(F)$, in diesem H^r als zugehöriges simpliziales Bild $\beta^r(D)$ von D ein ein p-dimensionales Fragment, also ein topologisches Bild von D darstellendes Netzfragment erzeugt.

Ein simpliziales Gitter $\gamma(F)$ heisst *durchsichtig*, wenn für jedes r jedes beliebige Netzfragment $\beta^r(D)$ in H^r der im vorigen Absatz eingeführten Art die Eigenschaft besitzt, dass, wenn in H^r $p+1$ ebene $(p-1)$-dimensionale Räume unter den $(p-1)$-dimensionalen Grundseiten von $\beta^r(D)$ und den $(p-1)$-dimensionalen Seiten von H^r beliebig gewählt werden, jeder derselben in einer Entfernung $\circ\!> 0$ vom Schnittpunkte der p übrigen gelegen ist.

Wenn in $\gamma(F)$ die Bilder der Eckpunktkerne des Grundsimplexes E von F in H^r liegen, so bezeichnen wir die Breite von $\beta^r(E)$ nach H^r mit $m\{\beta^r(E)\}$. Wenn $m\{\gamma(F)\}$ eine solche positive Zahl ist, dass $m\{\beta^r(E)\} \leqq m\{\gamma(F)\}$ für jedes E von F und für jedes bei diesem E in Frage kommende r, so nennen wir $m\{\gamma(F)\}$ eine *Maschenmajorante* von $\gamma(F)$.

Ein simpliziales Gitter mit einer Maschenmajorante $<\!\circ\, \frac{1}{2}\eta$ nennen wir *normal*.

Wenn in $\gamma(F)$ die Bilder sämtlicher Eckpunktkerne des Grundsimplexes

⟦454⟧

E von F in H^r liegen, so bezeichnen wir den Quotient des Inhaltes von $\beta^r(E)$ nach H^r und der p-ten Potenz der Breite von $\beta^r(E)$ nach H^r mit $M\{\beta^r(E)\}$. Wenn $M\{\gamma(F)\}$ eine solche positive Zahl > 0 ist, dass $M\{\beta^r(E)\} \geqq M\{\gamma(F)\}$ für jedes E von F und für jedes bei diesem E in Frage kommende r, so nennen wir $M\{\gamma(F)\}$ eine *Massivitätsminorante* von $\gamma(F)$.

§ 3.

Die s regionalen Koordinaten nach der d-ten ($1 \leqq d \leqq s$) Norm der Punktkerne eines einem normalen simplizialen Gitter $\gamma(F)$ zugrunde liegenden gemessenen p-dimensionalen Fragmentes F.

Unter ${}_df_d$ verstehen wir die stetige Ortsfunktion in R_p, welche in ${}^2H^d$ gleich der nach H^d gemessenen Entfernung von ${}^2L^d$ ist und ausserhalb von ${}^2H^d$ verschwindet.

Unter ${}_df_\nu$ $(\nu \neq d)$ verstehen wir die stetige Ortsfunktion in R_p, welche ausserhalb von ${}^2H^\nu$ verschwindet und in ${}^2H^\nu$ gleich der nach H^ν gemessenen Entfernung von ${}^2L^\nu$ ist, für gewisse ν, für welche ${}^1H^d$ in H^ν eindringt, und zwar für alle ν, für welche ${}^1H^d$ in ${}^2H^\nu$ eindringt, multipliziert mit der nach H^ν gemessenen Entfernung von $\mathfrak{T}({}^1H^d, H^\nu)$.

Sei B ein Grundpunktkern von F, dem in $\gamma(F)$ der Punkt T entspricht, so setzen wir die mit ${}_d\varrho_r(B)$ zu bezeichnende *r-te regionale Koordinate von B nach der d-ten Norm* gleich $\dfrac{{}_df_r(T)}{\sum\limits_\nu {}_df_\nu(T)}$.

Seien $E_1, \ldots, E_{p+1}$ die Eckpunktkerne eines Grundsimplexes E von F, A ein willkürlicher Punktkern von E mit den Normalkoordinaten $c_1, \ldots c_{p+1}$, so setzen wir die mit ${}_d\varrho_r(A)$ zu bezeichnende *r-te regionale Koordinate von A nach der d-ten Norm* gleich $\sum\limits_\nu c_\nu \,.\, {}_d\varrho_r(E_\nu)$.

§ 4.

Die Anfüllung nach der d-ten Norm des normalen simplizialen Gitters $\gamma(F)$.

Seien $E_1, \ldots, E_{p+1}$ die Eckpunktkerne eines Grundsimplexes E von F, deren Bilder $\gamma(E_1), \ldots, \gamma(E_{p+1})$ alle in H^g gelegen sind. Sei A ein in E die Normalkoordinaten $c_1, \ldots, c_{p+1}$ besitzender Punktkern von E. Wir bezeichnen mit A^g den Punktkern von H^g, der im Simplex von H^g der Eckpunktkerne $\gamma(E_1), \ldots, \gamma(E_{p+1})$ nach H^g die barycentrischen Koordinaten $c_1, \ldots, c_{p+1}$ besitzt. Wenn alle A^ν in H^t liegen, bezeichnen wir mit ${}_dA_1^t$ denjenigen Punktkern von H^t, der, wenn jedem A^ν ein Gewicht ${}_d\varrho_\nu(A)$ zugesprochen wird, als Schwerpunktkern der A^ν nach H^t auftritt. Wenn für festes $n \geqq 1$ alle ${}_dA_n^\nu$ in H^t liegen, bezeichnen wir mit ${}_dA_{n+1}^t$ denjenigen Punktkern von H^t, der, wenn jedem ${}_dA_n^\nu$ ein

Gewicht ${}_d\varrho_\nu(A)$ zugesprochen wird, als Schwerpunktkern der ${}_dA_n^\nu$ nach H^t auftritt.

Wenn die zu den verschiedenen Punktkernen A gehörenden unbegrenzten Folgen von Punktkerngruppen $\{A^\nu\}$, $\{{}_dA_1^\nu\}$, $\{{}_dA_2^\nu\}, \ldots$ gleichmässig positiv konvergieren gegen Punktkerne ${}_dA$ (was, wenn eine hinreichend kleine Maschenmajorante von $\gamma(F)$ besteht, der Fall sein wird), heisst $\gamma(F)$ *nach der d-ten Norm anfüllbar.* Ein nach allen Normen anfüllbares $\gamma(F)$ werden wir kurz *anfüllbar* nennen.

Wenn für ein nach der d-ten Norm anfüllbares $\gamma(F)$ die Spezies der Punktkerne ${}_dA$ in R_p ein F topologisch abbildendes p-dimensionales Fragment ${}_dF\,[\gamma(F)]$ darstellt, heisst $\gamma(F)$ *nach der d-ten Norm topologisch anfüllbar* und ${}_dF\,[\gamma(F)]$ die *topologische Anfüllung nach der d-ten Norm* von $\gamma(F)$. Ein nach allen Normen topologisch anfüllbares $\gamma(F)$ werden wir kurz *topologisch anfüllbar* nennen.

Wenn zu einem nach der d-ten Norm topologisch anfüllbaren bzw. zu einem topologisch anfüllbaren $\gamma(F)$ eine solche positive Zahl $e \circ\!> 0$ angegeben werden kann, dass, bei beliebigen Verrückungen $< e$ in R_p der Grundpunktkerne von $\gamma(F)$, die topologische Anfüllbarkeit nach der d-ten Norm bzw. die topologische Anfüllbarkeit von $\gamma(F)$ erhalten bleibt, so heisst $\gamma(F)$ *nach der d-ten Norm stabil topologisch anfüllbar* bzw. heisst $\gamma(F)$ *stabil topologisch anfüllbar.*

Zu jeder positiven Zahl $M \circ\!> 0$ lässt sich eine solche positive Zahl $m \circ\!> 0$ bestimmen, dass jedes faltenlose, normale simpliziale Gitter in R_p bzw. jedes in H^r faltenlose, normale simpliziale Gitter in H^r mit einer Massivitätsminorante M und einer Maschenmajorante m stabil topologisch anfüllbar ist.

§ 5.

Die *m-teilige Fortsetzung nach der d-ten Norm* ${}_d\gamma(F^{(m)})$ eines nach der d-ten Norm stabil topologisch anfüllbaren $\gamma(F)$ wird erhalten, wenn wir die Spezies der Grundpunktkerne der m-teiligen Parallelzerlegung $F^{(m)}$ von F nach ${}_dF\,[\gamma(F)]$ in R_p abbilden.

Wenn für ein stabil topologisch anfüllbares $\gamma(F)$ eine solche natürliche Zahl b und eine solche positive Zahl $e \circ\!> 0$ bestehen, dass, auch nach beliebigen Verrückungen $< e$ in R_p der Grundpunktkerne von $\gamma(F)$, ${}_d\gamma(F^{(m)})$ für jedes d und für jedes $m > b$ wiederum stabil topologisch anfüllbar ist, so heisst $\gamma(F)$ *im zweiten Grade stabil topologisch anfüllbar.*

Wenn für ein stabil topologisch anfüllbares $\gamma(F)$ eine solche natürliche Zahl b und eine solche positive Zahl $e \circ\!> 0$ bestehen, dass, auch nach beliebigen Verrückungen $< e$ in R_p der Grundpunktkerne von $\gamma(F)$, ${}_d\gamma(F^{(m)})$ für jedes d und für jedes $m > b$ im k-ten Grade stabil topologisch anfüllbar ist, so heisst $\gamma(F)$ *im $(k+1)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbar.*

Für gegebenes k kann zu jeder positiven Zahl $M \circ\!> 0$ eine solche positive Zahl $m \circ\!> 0$ bestimmt werden, dass jedes faltenlose, normale simpliziale Gitter in R_p bzw. jedes in H^r faltenlose, normale simpliziale Gitter in H^r mit einer Massivitätsminorante M und einer Maschenmajorante m im k-ten Grade stabil topologisch anfüllbar ist.

Wir werden sagen, dass das stabil topologisch anfüllbare simpliziale Gitter $\gamma(F)$ die in R_p gelegene katalogisierte kompakte Punktkernspezies C *stabil überdeckt*, wenn ein solches $e \circ\!> 0$ besteht, dass, auch nach beliebigen Verrückungen $< e$ in R_p der Grundpunktkerne von $\gamma(F)$, die Spezies C für jedes d in ${}_{d}F\,[\gamma(F)]$ enthalten ist.

§ 6.

Sei ${}^{n}\gamma\,({}^{n}F)$ ein durchsichtiges, normales, im $(s-n+1)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbares, $\mathfrak{S}\,({}_{n}H^{1}, \ldots, {}_{n}H^{n})$ stabil überdeckendes simpliziales Gitter. Das aus den Grundsimplexen von ${}^{n}F$, von deren Eckpunktkernen wenigstens einer in einem in ${}^{0}H^{n+1}$ liegenden Grundpunktkern von ${}^{n}\gamma\,({}^{n}F)$ abgebildet wird, bestehende Teilfragment von ${}^{n}F$ bezeichnen wir mit ${}^{n}F_0$. Alsdann sind sämtliche Grundseiten des p-dimensionalen Fragmentes ${}_{n+1}F\,[{}^{n}\gamma\,({}^{n}F_0)]$ nach H^{n+1} eben. Wir betrachten die nach H^{n+1} ebenen $(p-1)$-dimensionalen Räume, die an der Begrenzung entweder von ${}^{0}H^{n+1}$ oder von einem Grundsimplex von ${}_{n+1}F\,[{}^{n}\gamma\,({}^{n}F_0)]$ teilnehmen, und dehnen diese $(p-1)$-dimensionalen Räume über die Spezies G^{n+1} der zu $\mathfrak{S}\,\{{}_{n+1}F\,[{}^{n}\gamma\,({}^{n}F_0)],\, {}^{0}H^{n+1}\}$ gehörigen Punktkerne von H^{n+1} aus. In dieser Weise bekommen wir eine Zerlegung von G^{n+1} in nach H^{n+1} ebene konvexe Polyeder. Von diesen Polyedern zerlegen wir der Reihe nach die zweidimensionalen, die dreidimensionalen, usw. Seiten nach H^{n+1} der jeweilig vorliegenden Teilung ihrer Grenzen entsprechend zentral-sektoral, wodurch in H^{n+1} ein mit G^{n+1} zusammenfallendes Netzfragment Z^{n+1} entsteht.

Wir werden das aus den zu ${}^{n}F_0$ gehörenden oder an ${}^{n}F_0$ grenzenden bzw. aus den weder zu ${}^{n}F_0$ gehörenden noch an ${}^{n}F_0$ grenzenden Grundsimplexen von ${}^{n}F$ bestehende Teilfragment von ${}^{n}F$ mit ${}^{n}F_1$ bzw. ${}^{n}F_2$ und die Spezies der zu $\mathfrak{S}\,\{{}_{n+1}F\,[{}^{n}\gamma\,({}^{n}F_1)],\, {}^{0}H^{n+1}\}$ gehörigen Punktkerne von H^{n+1} mit J^{n+1} bezeichnen. Alsdann sind auch von ${}_{n+1}F\,[{}^{n}\gamma\,({}^{n}F_1)]$ sämtliche Grundseiten nach H^{n+1} eben, und lässt sich mittels durch das Netzfragment Z^{n+1} vorgeschriebener zentral-sektoraler Teilung nach H^{n+1} der nicht zu ${}_{n+1}F\,[{}^{n}\gamma\,({}^{n}F_0)]$ gehörenden Grundsimplexe von ${}_{n+1}F\,[{}^{n}\gamma({}^{n}F_1)]$ eine Erweiterung von Z^{n+1} zu einem sich über J^{n+1} erstreckenden, *keine Zerlegung von Grundseiten von* ${}_{n+1}F\,[{}^{n}\gamma\,({}^{n}F_2)]$ *bedingenden* Netzfragment X^{n+1} in H^{n+1} herstellen.

Alsdann bilden X^{n+1} und ${}_{n+1}F\,[{}^{n}\gamma\,({}^{n}F_2)]$ zusammen die topologische Anfüllung nach der $(n+1)$-ten Norm ${}_{n+1}F\,[{}^{n+1}\gamma^{0}\,({}^{n+1}_{\;\;0}F)]$ eines nach der $(n+1)$-ten Norm topologisch anfüllbaren simplizialen Gitters ${}^{n+1}\gamma^{0}\,({}^{n+1}_{\;\;0}F)$.

Dieses simpliziale Gitter ${}^{n+1}\gamma^0\,({}^{n+1}_{0}F)$ vereinigt ein aus den Grundpunktkernen von X^{n+1} bestehendes, in H^{n+1} faltenloses, normales simpliziales Gitter ${}^{n+1}\gamma^0\,({}^{n+1}_{0}F_1)$ und das, des weiteren mit ${}^{n+1}\gamma^0\,({}^{n+1}_{0}F_2)$ zu bezeichnende, normale, durchsichtige, im $(s-n+1)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbare simpliziale Gitter ${}^{n}\gamma\,({}^{n}F_2)$.

Wir wählen nun m so gross, dass *erstens* $\mathfrak{S}\,({}_{n+1}H^1, \ldots, {}_{n+1}H^n)$ von ${}^{n+1}_{n+1}\gamma^0\,({}^{n+1}_{0}F^{(m)})$ und ${}_{n+1}H^{n+1}$ von ${}^{n+1}_{n+1}\gamma^0\,({}^{n+1}_{0}F^{(m)}_1)$ stabil überdeckt wird, *zweitens* sowohl ${}^{n+1}_{n+1}\gamma^0\,({}^{n+1}_{0}F^{(m)}_1)$ wie ${}^{n+1}_{n+1}\gamma^0\,({}^{n+1}_{0}F^{(m)}_2)$ im $(s-n)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbar sind. Alsdann haben wir in ${}^{n+1}_{n+1}\gamma^0\,({}^{n+1}_{0}F^{(m)})$ ein normales, im $(s-n)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbares, $\mathfrak{S}\,({}_{n+1}H^1, \ldots, {}_{n+1}H^{n+1})$ stabil überdeckendes simpliziales Gitter, das mittels passender Verrückung der Grundpunktkerne in ein *durchsichtiges*, normales, im $(s-n)$-ten Grade stabil topologisch anfüllbares, $\mathfrak{S}\,({}_{n+1}H^1, \ldots, {}_{n+1}H^{n+1})$ stabil überdeckendes simpliziales Gitter ${}^{n+1}\gamma\,({}^{n+1}F)$ übergeführt werden kann.

Der vorstehende Uebergang von ${}^{n}\gamma\,({}^{n}F)$ auf ${}^{n+1}\gamma\,({}^{n+1}F)$ erzeugt aus einem in keiner weiteren Erklärung bedürftigen Weise herzustellenden ${}^{1}\gamma\,({}^{1}F)$ schliesslich ein ${}^{s}\gamma\,({}^{s}F)$, d.h. eine *Triangulation von* R_p.

Mathematics. — *Zum freien Werden von Mengen und Funktionen.* Von Prof. L. E. J. BROUWER. 1942 A

(Communicated at the meeting of March 28, 1942.)

Der auf S. 137 der trefflichen Einleitung in die Philosophie der Mathematik von Dr. E. W. BETH [1]) enthaltene Hinweis auf die vor einigen Jahren von FREUDENTHAL und HEYTING in Compositio Mathematica [2]) über die intuitionistische Deutung logischer Formeln geführte Diskussion veranlasst mich zur Veröffentlichung der nachstehenden deutschen Uebersetzung eines Fragmentes meines am 30. März 1936 an Herrn HEYTING gerichteten Briefes (dem Absatz 4. der zitierten Heytingschen Erörterung schon Rechnung trägt):

„Eine *beliebige* stetige Funktion kann einen *Punktkern* eines *topologischen Raumes* (wie ich in meinem Aufsatz *„Intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriffes"* beschrieben habe [3])) stetiger Funktionen darstellen. Die durch ein *Gesetz* bestimmten Funktionen sind in diesem topologischen Raume die „scharfen" Punktkerne, genau so wie die Zahlen $\frac{1}{2}$, π, e usw. als „scharfe", d. h. durch ein Gesetz bestimmte, Punktkerne des Zahlenkontinuums erscheinen. Einen sehr einfachen topologischen Raum stetiger Funktionen des Einheitsintervalles bilden z.B. die Funktionen $y = \Sigma \pm \frac{x^n}{n!}$, wo der Reihe nach für jede natürliche Zahl n das entsprechende Vorzeichen frei gewählt wird.

In meinen Schriften tritt das obenstehende vielleicht nicht deutlich hervor (bei der *ersten* Einführung des intuitionistischen Funktionsbegriffes beschränkte ich mich ja auf durch ein Gesetz bestimmte Funktionen [4])); jedenfalls habe ich in meinen Vorlesungen und Vorträgen seit geraumer Zeit betont, dass eine *beliebige* stetige Funktion genau so „im freien Werden" entsteht wie ein *beliebiger* Punkt des Kontinuums [5])." ⟦3⟧

Anschliessend mache ich folgende Bemerkungen zu den meinen Abhandlungen zur Begründung der intuitionistischen Mathematik zugrunde liegenden Definitionen [6]):

1. Zur Erklärung einer Menge M gehört nach der Mengendefinition [7]) eine Fundamentalreihe $\alpha(M)$ von Zeichenreihen, welche der Fundamentalreihe der in einer bestimm-

---

[1]) Dr. E. W. BETH, *Inleiding tot de wijsbegeerte der wiskunde*, Nijmegen-Utrecht, Dekker & Van de Vegt, 1940.

[2]) Bd. 4, S. 112—118 (1936).

[3]) Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. XXIX (1926), S. 855. Gemeint werden die dortigen katalogisiert-kompakten Spezies (*der vorliegenden Uebersetzung beigegebene Fussnote*). ⟦1⟧

[4]) Vgl. *Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, Verhandelingen Kon. Akad. v. Wetensch., I. Sektion, Bd. XIII, No. 2 (1923); *Ueber die Zulassung unendlicher Werte für den Funktionsbegriff*, Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. XXVII (1924), S. 248; *Ueber Definitionsbereiche von Funktionen*, Mathem. Annalen, Bd. 97, S. 60—75 (1926) (*der vorliegenden Uebersetzung beigegebene Fussnote*). ⟦2⟧

[5]) Allerdings braucht man zur Repräsentierung der *Gesamtheit* der vollen Funktionen des Einheitskontinuums eine non-finite Menge, während man für die Repräsentierung der *Gesamtheit* der Punktkerne des Einheitskontinuums mit einer finiten Menge auskommt (*der vorliegenden Uebersetzung beigegebene Fussnote*).

[6]) Mathem. Annalen, Bd. 93, S. 244 sqq. (1925). ⟦4⟧

[7]) Mathem. Annalen, Bd. 93, S. 244, 245.

ten Weise abgezählten endlichen Wahlfolgen eineindeutig zugeordnet ist, und zwar ist nach der Mengendefinition dieses $\alpha(M)$ für M von vornherein festgelegt. Man könnte nun die Frage aufwerfen, ob nicht auch die Betrachtung „schwebender Mengen" M_σ, für welche die entsprechenden $\alpha(M_\sigma)$ sich im „freien Werden" befinden, mathematische Fruchtbarkeit besässe. In den Fällen, für welche diese Frage bejahend zu beantworten wäre, werden sich meiner Ueberzeugung nach die betreffenden M_σ immer als mathematische Entitäten oder Spezies herausstellen. Ein einfacher derartiger Fall tritt z.B. ein für diejenigen M_σ, deren $\alpha(M_\sigma)$ die Elemente einer gegebenen Menge M darstellen. Diese M_σ sind Teilspezies einer aus M herleitbaren Menge M_1, mit welcher ihre Vereinigung identisch ist.

2. Die etwas kurz gehaltene Fussnote zur Definition des Mengelelementes [8]) dürfte in der folgenden ausführlicheren Fassung an Deutlichkeit gewinnen:

Die Fortsetzbarkeitsfreiheit einer von einer unbegrenzten Wahlfolge erzeugten, ein Element der Menge darstellenden Folge von Zeichenreihen kan übrigens nach jeder Wahl beliebig (z.B. bis zur völligen Bestimmtheit, oder auch einem Mengengesetze entsprechend) verengert werden, und zwar stellt die Beliebigkeit dieser den einzelnen Wahlen unter Erhaltung der Fortsetzbarkeitsmöglichkeit zuzuordnenden Verengerungszusätze einen wesentlichen Charakter des freien Werdens des Mengenelementes dar. Jedem einzelnen Verengerungszusatz kann wieder ein die Beliebigkeit der weiteren Verengerungszusätze
[[5]] einschränkender Verengerungszusatz zweiter Ordnung beigegeben werden, usw.

3. Die Definition der individualisierten Menge [9]) soll selbstverständlich erst nach der Definition der Verschiedenheit von Mengenelementen ihren Platz erhalten.

4. Die Definition der Halbidentität [10]), in welche sich a.a.O. ein sinnstörender Druckfehler eingeschlichen hat, soll so gelesen werden, dass eine mit der Spezies N kongruente Teilspezies M von N mit N halbidentisch genannt wird.

[[4]] [8]) Mathem. Annalen, Bd. 93, S. 245, Fussnote [3]).

[9]) Mathem. Annalen, Bd. 93, S. 245, Z. 13 v.o.

[10]) Mathem. Annalen, Bd. 93, S. 246, Z. 8 v.u.

[[460]]

Mathematics — *Die repräsentierende Menge der stetigen Funktionen des Einheitskontinuums.* Von Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of April 25, 1942.)

Wenn eine unbegrenzte Folge von Operationen F_ν ausgeführt wird, deren jede darin besteht, dass jedem Punktkerne des Einheitskontinuums ein λ-Intervall [1]) zugeordnet wird, und zwar in solcher Weise, dass für jeden Punktkern das von $F_{\nu+1}$ erzeugte Intervall jedesmal im von F_ν erzeugten Intervall im engern Sinne enthalten ist, so soll diese Operationsfolge eine *volle Freifunktion des Einheitskontinuums* heissen. Offenbar ordnet sie jedem Punktkern des Einheitskontinuums einen Punktkern des Linearkontinuums zu. Demgemäss bilden die früher eingeführten *vollen Funktionen des Einheitskontinuums* [2]) einen Spezialfall der vollen Freifunktionen des Einheitskontinuums. Der früher für die vollen Funktionen geführte Beweis der gleichmässigen Stetigkeit [3]) lässt sich aber ungeändert für die vollen Freifunktionen übernehmen.

Wenn für gegebenes m und n jedem $\varkappa^{(m)}$-Intervall [1]) K des Einheitskontinuums ein $\lambda^{(\nu)}$-Intervall [1]) (ν variabel mit dem Minimum n) $\varphi(K)$ so zugeordnet ist, dass aneinander grenzenden K entweder identische oder ein gemeinsames Segment besitzende $\varphi(K)$ entsprechen, so nennen wir diese Zuordnung ein *$m\,n$-Treppenpolygon.* Als Spezialfall definieren wir einen *$m\,n$-Treppenblock,* indem wir weiter fordern dass jedes $\nu = n$ ist.

Für $m_2 > m_1$ und $n_2 > n_1$ soll das $m_2\,n_2$-Treppenpolygon T_2 im $m_1\,n_1$-Treppenpolygon T_1 *eingelagert* heissen, wenn für ein beliebiges $\varkappa$-Intervall K_1 von T_1 und ein beliebiges $\varkappa$-Intervall K_2 von T_2 die Beziehung $K_2 \subset K_1$ nach sich zieht, dass $\varphi_2(K_2)$ einen echten Teil von $\varphi_1(K_1)$ bildet.

Unter einer *Treppenfunktion* (bzw. *Blockfunktion*) verstehen wir eine unbegrenzte Folge von Treppenpolygonen (bzw. Treppenblöcken), deren jedes in dem ihm vorangehenden eingelagert ist. Offenbar ordnet eine Treppenfunktion (bzw. Blockfunktion) jedem Punktkern des Einheitskontinuums einen Punktkern des Linearkontinuums zu.

Wir nennen eine volle Freifunktion des Einheitskontinuums und eine Treppenfunktion oder Blockfunktion einander *gleich* und sagen, dass sie einander *repräsentieren,* wenn sie jedem Punktkern des Einheitskontinuums denselben Punktkern des Linearkontinuums zuordnen.

Man beweist unschwer, dass *erstens* jede Treppenfunktion bzw. Blockfunktion einer vollen Freifunktion des Einheitskontinuums gleich ist, *zweitens* jede volle Freifunktion des Einheitskontinuums sich durch eine Treppenfunktion und sogar durch eine Blockfunktion repräsentieren lässt.

Nun sind aber die Spezies aller Treppenblöcke (ebenso wie die Spezies aller Treppenpolygone) und die Spezies der Treppenblöcke, welche in einem gegebenen Treppenblock eingelagert werden können (ebenso wie die Spezies der Treppenpolygone, welche in einem gegebenen Treppenpolygon eingelagert werden können) abzählbar unendlich. Nach dem vorhergehenden folgt hieraus unmittelbar, dass *die Spezies der vollen Freifunktionen des Einheitskontinuums sich durch eine non-finite Menge repräsentieren lässt,* nämlich durch die Menge welche entsteht, wenn zunächst ein beliebiger Treppenblock T_1 gewählt wird, und sodann der Reihe nach für jede natürliche Zahl ν ein beliebiger in T_ν eingelagerter Treppenblock $T_{\nu+1}$.

1) Mathem. Annalen, Bd. **93**, S. 253 (1925); Bd. **97**, S. 60 (1926). [[1]]
2) Mathem. Annalen, Bd. **97**, S. 62 (1926).
3) Mathem. Annalen, Bd. **97**, S. 66, 67 (1926).

1942 C **Mathematics.** — *Beweis dass der Begriff der Menge höherer Ordnung nicht als Grundbegriff der intuitionistischen Mathematik in Betracht kommt.* Von Prof. L. E. J. BROUWER.

(Communicated at the meeting of September 26, 1942.)

In meiner Note: „*Zum freien Werden von Mengen und Funktionen*" [1]) wurde das Verfahren M_σ betrachtet, durch welches der Fundamentalreihe F' der in einer beliebig ein für allemal bestimmten Weise abgezählten endlichen Wahlfolgen von Nummern eineindeutig und ähnlich ein beliebiges Element σ der Menge [2]) M zugeordnet wird. Wir wollen dieses Verfahren M_σ als *Menge zweiter Ordnung* und die solchermassen den unbegrenzten Wahlfolgen von Nummern zugeordneten Folgen von Zeichenreihen als
[[2]] *die Elemente der Menge zweiter Ordnung* M_σ bezeichnen.

Die in meiner zitierten Note ausgesprochene Behauptung, dass M_σ eine Teilspezies einer aus M herleitbaren Menge M_1 darstellt, und dass die Vereinigung aller von M erzeugten M_σ mit diesem M_1 identisch ist, soll im Folgenden bewiesen werden. Wir befassen uns zunächst mit der Konstruktion der Menge M_1.

Sei $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_m$ eine endliche Wahlfolge von Nummern. Die Rangnummer derselben in der Fundamentalreihe F' bezeichnen wir mit $\varrho(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_m)$ und das Maximum der Nummern $\varrho\,(\alpha_1)$, $\varrho\,(\alpha_1\, \alpha_2)$, $\dots$ $\varrho\,(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_m)$ mit $\zeta\,(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_m)$.

Die Kombination einer beliebigen Nummer α_1 mit $\varrho\,(\alpha_1)$ beliebigen Nummern β_1, β_2, $\dots$ $\beta_{\varrho(\alpha_1)}$ nennen wir eine K-Kombination. Die K-Kombinationen zählen wir durch eine Fundamentalreihe F ab. Diejenige K-Kombination, welche in F die Rangnummer ν_1 erhält, bezeichnen wir mit K_{ν_1}.

Für gegebenes ν_1, mithin ebenfalls gegebenes α_1, und beliebiges α_2 nennen wir im Falle $\zeta\,(\alpha_1\, \alpha_2) = \zeta\,(\alpha_1)$ die Nummer α_2 und im Falle $\zeta\,(\alpha_1\, \alpha_2) > \zeta\,(\alpha_1)$ die Kombination von α_2 mit $\zeta\,(\alpha_1\, \alpha_2) - \zeta(\alpha_1)$ beliebigen Nummern $\beta_{\zeta(\alpha_1)+1}, \dots \beta_{\zeta(\alpha_1 \alpha_2)}$ eine K_{ν_1}-Kombination. Für jedes ν_1 zählen wir die K_{ν_1}-Kombinationen durch eine Fundamentalreihe F_{ν_1} ab. Diejenige K_{ν_1}-Kombination, welche in F_{ν_1} die Rangnummer ν_2 erhält, bezeichnen wir mit $K_{\nu_1 \nu_2}$.

Für gegebene ν_1 und ν_2, mithin ebenfalls gegebene α_1 und α_2, und beliebiges α_3 nennen wir im Falle $\zeta\,(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3) = \zeta\,(\alpha_1\, \alpha_2)$ die Nummer α_3

[[1]] 1) Proc. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **45**, 322 (1942).

2) Der Einfachheit halber beschränken wir uns in dieser Note auf solche Mengen, in deren Erzeugungsprozess weder Hemmung noch Beendigung auftritt. Diese Beschränkung ist unwesentlich.

und im Falle $\zeta\ (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) > \zeta\ (\alpha_1\ \alpha_2)$ die Kombination von α_3 mit $\zeta\ (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\ -\ \zeta\ (\alpha_1\ \alpha_2)$ beliebigen Nummern $\beta_{\zeta(\alpha_1\alpha_2)+1}, \dots \beta_{\zeta(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}$ eine $K_{\nu_1\nu_2}$-Kombination. Für jedes Nummernpaar ν_1, ν_2 zählen wir die $K_{\nu_1\nu_2}$-Kombinationen durch eine Fundamentalreihe $F_{\nu_1\nu_2}$ ab. Diejenige $K_{\nu_1\nu_2}$-Kombination, welche in $F_{\nu_1\nu_2}$ die Rangnummer ν_3 erhält, bezeichnen wir mit $K_{\nu_1\nu_2\nu_3}$.

In dieser Weise fortfahrend, definieren wir für jede natürliche Zahl s die $K_{\nu_1\nu_2\dots\nu_s}$. Dabei tragen wir Sorge, von vornherein ein Gesetz zu bestimmen, durch welches sämtliche jedesmal die $K_{\nu_1\nu_2\dots\nu_s}$ abzählende Fundamentalreihen $F_{\nu_1\nu_2\dots\nu_s}$ ein für allemal festgelegt werden.

Die Konstruktion von M_1 wird nunmehr vollzogen, indem wir jedesmal der endlichen Wahlfolge $\nu_1\,\nu_2 \dots \nu_s$ diejenige Zeichenreihe zuordnen, welche für die entsprechenden Nummern $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$, $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{\varrho(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s)}$ [[3]]
in M der endlichen Wahlfolge $\beta_1\ \beta_2 \dots \beta_{\varrho(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s)}$ zugeordnet ist.

Sei σ das von der unendlichen Wahlfolge $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3 \dots$ erzeugte Element von M. *Alsdann ist die Menge zweiter Ordnung M_σ mit einer Teilspezies ${}_\sigma M_1$ von M_1 identisch.* Dieses ${}_\sigma M_1$ entsteht, wenn in M_1 für jedes s nur solche ν_s gewählt werden dürfen, denen $K_{\nu_1\nu_2\dots\nu_{s-1}}$-Kombinationen entsprechen, in welchen jedes β_τ dem den gleichen Index tragenden γ_τ gleich ist.

Sei umgekehrt e ein beliebiges Element von M_1. Alsdann bestimmt die e in M_1 erzeugende unbegrenzte Wahlfolge $\nu_1\,\nu_2\,\nu_3 \dots$ nach der obigen Definition der ν_s gleichzeitig eine unbegrenzte Nummernfolge $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3 \dots$, welche ihrerseits in M das Element $\sigma(e)$ erzeugt. Das zugehörige $M_{\sigma(e)}$ enthält e als Element. *Mithin ist M_1 mit der Vereinigung aller von M erzeugten M_σ identisch.*

Aus dem vorstehenden geht hervor, dass der Begriff der Menge zweiter Ordnung nicht als Grundbegriff der intuitionistischen Mathematik in Betracht kommt.

Um den Begriff der *Menge höherer Ordnung* zu definieren, nehmen wir an dass der Begriff der *Menge n-ter Ordnung* bereits definiert sei und betrachten das Verfahren $(M^{(n)})_\sigma$, durch welches der Fundamentalreihe F' der in einer beliebig ein für allemal bestimmten Weise abgezählten endlichen Wahlfolgen von Nummern eineindeutig und ähnlich ein Element σ der Menge n-ter Ordnung $M^{(n)}$ zugeordnet wird. Dieses Verfahren $(M^{(n)})_\sigma$ bezeichnen wir als *Menge $(n+1)$-ter Ordnung* und die solchermassen den unbegrenzten Wahlfolgen von Nummern zugeordneten Folgen von Zeichenreihen als *die Elemente der Menge $(n+1)$-ter Ordnung* $(M^{(n)})_\sigma$.

Nun ist aber eine Menge zweiter Ordnung M_σ eine Teilspezies einer aus der M_σ zugrunde liegenden Menge M herleitbaren Menge M_1, d.h. ein beliebiges Element π von M_σ ist gleichzeitig Element von M_1. Hieraus folgt, dass die Menge dritter Ordnung $(M_\sigma)_\pi$ mit der Menge zweiter Ordnung $(M_1)_\pi$, d.h. eine beliebige Menge dritter Ordnung mit einer Menge zweiter Ordnung identisch ist. Und hieraus folgt weiter, dass auch für beliebiges n eine beliebige Menge n-ter Ordnung mit einer Menge zweiter Ordnung identisch ist.

Mithin stellt sich heraus, dass auch der Begriff der Menge höherer Ordnung, im Gegensatz zum Begriff der Spezies höherer Ordnung, nicht als Grundbegriff der intuitionistischen Mathematik in Betracht kommt.

Synopsis of the signific movement in the Netherlands. Prospects of the signific movement. 1946 A

By L. E. J. Brouwer (University of Amsterdam)

The first coming together of people concerned with significs in Holland occurred during the first worldwar in 1915, under the startling impression of the false slogans with which this war was waged; against which there seemed to exist no other remedy but general philosophical reflexion, which as a matter of course had to be initiated in an neutral country. With that object a committee was formed. During its deliberations differences as to the plan of action became accentuated, in the end leading to a schism. The majority founded the International School for Philosophy in Amersfoort, which since then has occupied an important place in the spiritual life of Holland. The minority thought that durable humanizing of mankind could only be attained if in the first place, besides material, also *spiritual forces and values* *) could be introduced into mutual understanding in an indicative and objective mode, notwithstanding their poetical and emotional origin. Thus these forces and values would be able to fight against the abuse, so often seen in larger communities not bound together by ties of friendship, of using words vaguely suggesting spiritual tendencies for fallacious justification of infidelity, oppression and torment.

The foresaid minority hoped to obtain results in the desired direction by the foundation of an *International Academy for Practical Philosophy and Sociology*. In a prospectus the following task was assigned to this Academy: ⟦1⟧

"1. To coin words of spiritual value for the languages of western nations and thus make those spiritual values enter into their mutual understanding (what could be called a "déclaration des valeurs spirituelles de la vie humaine").

2. To detect and combat such elements in the present system of law and in the productive activity growing under its protection, as chiefly repress or dim spiritual tendencies, and to propose appropriate limitations for the sphere of influence of law and technics.

3. To point out and brand those words of the principal languages, which falsely suggest spiritual tendencies for ideas ultimately originating in the desire for material safety and comfort, and in so doing to purify and to correct the aims of democracy towards a universal commonwealth with exclusively administrative function."

In the prospectus this task is further explained in the following way:

*) As an example of denoting a spiritual force, I might call the relative clearness with which the reality of a fellow-creature is felt by the subject as indissolubly interwoven with its own reality, the *degree of egoicity of that fellow-creature in relation to the subject.*

"The undersigned are well aware of the fact, that such a task as assigned by them to the International Academy for Practical Philosophy and Sociology, has been taken up several times by philosophers individually. However they are convinced that precisely in consequence of the individual character of the work of those philosophers their words could be efficient only for memorizing the expressed thoughts in the minds of the writer and his isolated readers, but never could find a place in the mutual understanding of the multitude and therefore had only a slight social influence.

They hold the opinion that when the same task could be undertaken in common by a group of independent thinkers with subtle and pure human feeling, their thoughts *formed in the mutual understanding of their circle*, would necessarily find a corresponding language, *allowing them to enter into the mutual understanding of the multitude.*

Finally, as regards the realization of the proposals of the Academy, it must be kept in mind, that a thought, in its quality of embryonic deed, has a far greater possibility of development when it is the common intimate conviction of a group of human beings, than in the case of its belonging to one individual only, however courageous that individual may be and however numerous the company of halfunderstanding followers who surround him."

So far the prospectus. One of its signers was the poet and thinker Dr. Frederik van Eeden who already before 1900 inaugurated Dutch significs by his wonderful essay *Redekunstige grondslag van verstandhouding (Logical basis of mutual understanding).* The other signers were Henri Borel, man of letters and sinologist, H. P. J. Bloemers, social worker (later on burgomaster of Groningen and Arnhem), and myself.

[2] Soon after our group was joined by G. Mannoury and L. S. Ornstein, both university professors, and by J. I. de Haan, poet and doctor of law. The group of seven thus formed, erected an *"International Institute for Philosophy"*, having as its aim "revision of the values of the elements of life of individual and community" and trying to attain this aim by

"a. establishing and supporting an International Academy for Practical Philosophy and Sociology;
b. establishing and supporting a school for the propagation of the concepts and relations of concepts as introduced by the Academy;
c. other means."

For the financial provision a separate society was erected.

[3] The primordial task of the Academy was intended to be the composing of a new vocabulary on the basis of a distinction between the following five levels of language with respect to the different relative importance of the contents of the single words on one hand and their logical connections on the other hand:

a. *Basic language*, in which the connection of the words exerts little or no influence and each word (or each group of words) speaks straight to the imagination. A dynamical relation to the eventual hearer is not presupposed, and if it exists, it can be one of friendship as well as of hostility. To this level belong the primordial language of the child, the language of vehement or profound emotions, also hypothetical primitive languages.

b. *Emotive language*, in which word connections (especially contrasting ones) are clearly perceptible, without however preponderating or having become rigid. The words and word groups evoke emotions in the hearer both in themselves and by association with other words. Speaker and hearer mutually recognize their right of existence, consequently solipsism is excluded and friendship and hostility get articulate forms. To this level of language largely belong popular and poetical languages of modern western society, also eastern image-language.

c. *Utility language*, in which the connections of words are essential, so that the words hardly ever have an independent effect. A measure of agreement is presupposed well-nigh excluding all fundamental contrariness of will. A strong limitation of the possibility of misunderstanding is obtained by admitting to the intercourse only words and wordgroups referring to generally acknowledged human needs. To this level belongs most of western written language, and in particular the language of commerce and traffic.

d. *Scientific language*, in which the word connections, at least for the greater part, have the stronger rigidity of being based on explicit agreement or prescription. Only such terms are admitted, as depend on the hypothesis of an objective phenomenal world (common to all individuals). The margin of misunderstanding has become very narrow. This level contains the language of laws and regulations, of financial relations, and of most of technology and science.

e. *Language of symbols*, founded *exclusively* on preconceived rules of combination and succession concerning the symbols used (axioms, postulates, proposizioni primitivi). Not an objective phenomenal world, but intellectual categories common to all individuals are presupposed, so that misunderstanding is excluded almost completely. To this level belong mathematical logic and that part of mathematics, which has been brought or can be brought into a pasigraphic form. Every direct "significance" of the words has vanished, as an effect on the hearer can only be aimed at by inserting the symbols into scientific or into utility language.

As to the vocabulary it was understood that in the composition of each level of language the words of the preceding levels but no others would be known, except for the free use of existing languages in the elucidating and describing text. Of course in the lexicon most part of the existing as well as many new words would occur, thus the work of the Academy would be descriptive as well as creative. It was expected that by the activity of the Academy many human needs, of which the wording till then had been excluded from the prevailing word connections, would come to be carefully considered, and that the discrimination between the emotional and the indicative value of words would prove to be a mighty help for unravelling inveterate misunderstandings existing in almost every domain of human mental activity.

As members of the Academy the following thinkers were proposed:
1. Paul Carus, editor of "The Open Court", La Salle, Ill., U.S.A., on account of his emphasizing the necessity of combining the exact method of western science with the contemplative attitude of eastern philosophy.
2. Eugen Ehrlich, Professor in Czernowitz, because of his clear insight into the distorting influence of language on the practice of justice.
3. Gustav Landauer in Hermsdorf near Berlin, who as was evident from his writings, had previously tried to create an Institution analogous to our Academy as a starting place for social reforms.
4. Fritz Mauthner in Meersburg am Bodensee, on account of his book entitled "Kritik der Sprache", clearly expressing the disturbing influence of word associations on intuition and introspection.
5. Giuseppe Peano, professor in Turin, the creator of mathematical token language (pasigraphy), which had proved not only to be a very useful means for the investigation of the rôle of language in mathematics, but to be susceptible of generalizations to other domains of signific research as well.
6. Rabindranath Tagore, since his rhythm was in tune with the ultimate aim of the Academy, and because we hoped that from his works the Academy could borrow words and expressions serving its purpose.

Soon after it became evident that even for the constituent assembly of the Academy financial resources failed.

The only thing left was the continuing of the personal intercourse of the founders, which led to the forming on May 21th 1922 of a signific circle, consisting of Van Eeden, Mannoury, Brouwer and the linguist Dr. Jac. van Ginneken S.J. (later on professor in Nijmegen).

The signific circle proclaimed in its declaration of principles a.o. that significs contain more than criticism of language, also more than synthesis of language, and that in opening a deeper insight into the connections between words and the needs and tendencies of the soul, it may affect in a wholesome way the future social and mental conditions of man. In addition to this each of the four members formulated a personal opinion.

Mannoury thought signific philosophy had to draw attention to the outstanding tendencies of this time, which on one side showed a mighty development of natural science and on the other side a powerful revival of social feeling; signific philosophy had to aim at balancing these two tendencies. To this end it would have to discover and show the flaws and faults of the indicative language of natural science as well as of the emotional language of social feeling and bring those languages into interaction with each other. But Mannoury did not think that significs could fill up the gaps, only mental needs having word-creating power.

Van Ginneken sought the cause of misunderstanding more in a sociological than in a psychological direction. He imputed misunderstanding not so much to the defectiveness of language as to the heterogeneous components of groups of persons using the same language. So in his opinion the best remedy for misunderstanding would be a deeper unity of such groups, and this deeper unity could be better furthered by prophetic and apostolic language than by signific means.

Van Eeden considered significs as a mental hygiene on which depends all welfare and prosperity of human society. In his opinion this hygiene did not require the creation of a new and pure language — which would prove an impossible task — but the general acknowledgment and attentive consideration of the imperfection and inaccuracy of intercourse.

Brouwer still maintained the standpoint which considered the creation of a new stock of words bringing verbal intercourse and in consequence social organization within reach of the spiritual tendencies of life as the primary task of significs. But he expressed his gradually increasing doubt as to the effectiveness of cooperation to attain this aim. He had come to the conclusion more and more that Buber was right in his denial of the creative power of collective work in this domain.

The signific circle for several years came regularly together and
the discussions held were highly suggestive and instructive to its mem-
bers. Mannoury kept an accurate account; a small part was printed
later on. But Van Eeden had aged very much, Van Ginneken some- ⟦4⟧
times seemed disillusioned or hurt and finally retired from the circle,
and as to myself my leisure had diminished to a minimum and my
belief in the great importance for society of collective signific studies
had vanished almost completely. So the signific circle expired. To us all
it left a profound memory of mutual "egoicity" and delight in each
other.

In the meantime in 1923 there had been emitted by the same circle a circular lacking every tendency to social reform and requesting cooperation for a revision of the nomenclature, especially in the peripheric domains, of the following branches of science: Linguistics, psychology, theology, logic, sociology, jurisprudence, ethnology, mathematics, physics, chemistry and biology. This new orientation proved to have more attractive power than the previous one. For signific work epistemologically tinged Mannoury assembled round himself in the course of time Westendorp Boerma, Clay, Van Dantzig, Fischer Martinek, Godefroy, De Hartog, Hartzfeld, Heyting, Jordan, Kruseman, Meyer, Neurath, Van Os, Raven, Stokvis and Vuysje, and especially since Godefroy and Vuysje took the administration of the research in hand, a powerful stream seems to have begun its course. To Godefroy and Vuysje we also owe that a congress of significs has been able to take place for the second time.

But now the same sensations which in 1915 unloosened the signific movement, have returned even in a more vehement form. The second worldwar was more devastating than the first, and the abuse of false slogans for the satisfying of dark instincts was more appalling and fatal than ever. More than ever the world worries about its organization, and more than ever all men capable of independent and unprejudiced thinking are bound to investigate the primordial desiderata that organization of human society has to fulfil, the conditions allowing this fulfilment, and the fallacious slogans apt to disturb them.

To me it seems that first of all the dismemberment of the earth into different domains with separate centres of military power will have to be abolished, and that for the further organization of human society serving self-realization of the individual, the following desiderata will prevail: public safety, public welfare, mental freedom and as much freedom of action as possible for the individual.

For all these desiderata I consider the following conditions to be essential: *1.* the utmost moderation of the domination of the state over the individual and the utmost reduction of the possibility of domination of the individuals over each other (domination exerted either directly or through the medium of the state); *2.* the existence of a relatively harmless and innocuous mode of diverting ineradicable dark and frivolous instincts such as lust of power, sadism, and gambling.

A condition for public welfare in particular is the existence of a spur to incite voluntary and strenuous participation in the process of production and distribution.

Now the functions of a stimulus to work on one hand and of a means of diverting dark and frivolous instincts on the other hand can be performed simultaneously by the institution of ***private property protected by the state,*** in particular by enabling people to earn private property by labour and to take part in unbloody tournaments with private property at stake. But to fulfil this task, private property (which may be combined with a far reaching socialization of means of production and heavy taxes for public welfare) must be free to be bartered and as an intermediary for this barter a homogeneous and inalterable precious standard material which is easily dividable and transportable, and over which the proprietor can dispose anywhere and at any time, must be available.

During the 19th century the latter conditions were highly satisfied by the free circulation of gold, which probably was essential for the exceptional rise of mental and material prosperity during that century. So today the *liberation of gold* seems to me a cry full of sense. I even fear that between a world worshipping the golden calf as an evil-absorbing idol and a world of constraint and terror, the tertium is, if not exclusum, at least penitus abditum.

But be it as it may, it is my opinion that in a happy humanity in any case state intervention will have to be prudently handled and the state will have to use a language strictly indicative. If it deviates from this duty and admits into its language vaguely spiritually tinged terms such as *principles, attitude, character moulding, firmness of character, resoluteness, leader qualities, heroism* (for continuation of the list see Göbbels), then inquisition, denunciation and man hunting will still have their chance, man will oppress man and man will mistrust man.

The fight against the abuse of hysterical devices, the fight for unmasking them in private and for removing them from public life will in future remain a preponderant part of the business of significs.

1946 B

Address delivered on September 16th, 1946, at the University of Amsterdam by Professor L. E. J. Brouwer on the conferment upon Professor G. Mannoury of the honorary degree of Doctor of Science

(English version *))

Gladly I accept the task with which the Rector Magnificus of the University entrusted me.

By virtue of the authority vested in us by Law
By resolution of Rector and Senate of the University
I hereby confer on you

GERRIT MANNOURY

the degree of doctor of Science and grant to you all rights which by Law of Custom are inherent in the Doctorate of Science. In evidence whereof the certificate signed by the Rector and Secretary and confirmed by the Grand Seal of the University, will be handed to you.

Having thus fulfilled the task imposed upon me, I have the privilege of being the first to welcome you as a Doctor and congratulate you on the honour bestowed upon you, and of giving an exposition of the motives which have led to the Senate's resolution.

According to your doctor's diploma the achievements to which you owe your doctorate lie not only in the domain of exact science, but in those of epistemology and of science of mutual understanding as well. And correctly so. For after having won your spurs in the realm of mathematics, you have sought the realization of your life, no longer mainly within the fortresses of abstract science, but in the vast turmoil of the living masses, furthering the enlightenment of human thought in the service of the struggle for a more decent society.

These activities already cast their shadows before them in your

*) For the Dutch original see Jaarboek der Universiteit van Amsterdam (Year-book of the University of Amsterdam) 1946—1947, II. For the English version of Professor Mannoury's reply see Synthese V, p. 514.

mathematical publications. In some of the elements disclosed by your profound dissection of existing mathematical concepts and theories, habits of thought were laid bare, whose domain of applicability either did not cover the case under consideration, or proved . to be more extensive than had previously been surmised. The discovery that such habits of thought can often be traced back to habits of language showed you the importance of systematizing and symbolizing mathematical language and made you join the school of Giuseppe Peano, who had initiated this systematization and symbolization. It was your work in the Social-Democratic Study Club, still in the period of your mathematical productivity, that revealed to you that analysis of language is indispensable not only to mathematical thinking, but even more to political judgement and political co-operation. From that time your socialist vocation, combined with your urge for scientific analysis, led to a long series of publications dealing with the most varied subjects and of speeches to the most diverse audiences. In this activity, extending over scores of years and still going on, two tendencies of a linguistic character can be observed, firstly: a progressive refinement of discrimination of the meaning of words when used in different contexts; secondly: inexorable exposure of imposing fetish-words arousing expectations or conveying promises or threats capable of driving well-meaning but unstable characters into the service of evil. Your mode of expression there is genially matter-of-fact or playfully paradoxical, if scientific or technical questions are concerned, but exhortative, earnest and powerful, if humaneness or socialism are involved.

Naturally this pioneer's work in the field of significs is fragmentary, but probably it will have great consequences. Actually it has already had great consequences, through sweeping away problems which proved empty and through the new turn which steadily and inconspicuously it has given to philosophical thinking, within and beyond our frontiers. Although, just as in the case of Multatuli, the [[1]]
public only becomes aware of this influence gradually, some of the distinctions introduced by you or under your guidance have already become common property: the distinction between *emotive* and *indicative language,* between *I-language, he-language* and *it-language,* and between various *stages of language,* according to the share that on the one hand the words themselves, on the other hand the word-connections have in the language-function.

Your work will certainly be crowned by your Manual of Analytical Significs in four volumes of which the first two, dealing with historical and psychological analysis of concepts and ontogenesis and phylogenesis of the apparatus of mutual understanding, have been finished. It is to [[2]]
be hoped that also the last two volumes, treating of synthetic and mass

significs, will be brought to a successful end and that the book will have the vast influence we expect of it: — an expectation, which we foster in spite of *your* opinion repeatedly expressed, that significs, as such, have no other task than the fight against the hampering influence exercised on the natural development of things by abuse of language and confusion of thought, and that an impelling and directing pressure on the volition of individuals and community can only be exerted by the example of initiators and by the language of poets and prophets.

Be that as it may, not only have your life and work had a liberating and enlightening influence on philosophical thinking in general, but also on individual thinking, through the medium of your speeches and writings, and especially of your teaching. Numerous pupils owe you gratitude for a psycho-analytical treatment of the first order, restoring their courage and self-reliance and opening to some of them the gates to independent scientific research. May it be considered a token of homage from your joint pupils, if, in this connection, I tell something of my own experiences.

As happens so often, I began my academic studies as it were, with a leap in the dark. After two or three years, however full of admiration for my teachers, I still could see the figure of the mathematician only as a servant of natural science or as a collector of truths: — truths fascinating by their immovability, but horrifying by their lifelessness, like stones from barren mountains of disconsolate infinity. And as far as I could see there was room in the mathematical field for talent and devotion, but not for vocation and inspiration. Filled with impatient desire for insight into the essence of the branch of work of my choice, and wanting to decide whether to stay or go, I began to attend the meetings of the Amsterdam Mathematical Society. There I saw a man apparently not much older than myself, who after lectures of the most diverse character debated with unselfconscious mastery and well-nigh playful repartee, sometimes elucidating the subject concerned in such a special way of his own that straight away I was captivated. I had the sensation that, for his mathematical thinking, this man had access to sources still concealed to me or had a deeper consciousness of the significance of mathematical thought than the majority of mathematicians. At first I only met him casually, but I at least knew his tuneful name, which guided me to some papers he had recently published in the Nieuw Archief voor Wiskunde, entitled "Lois cyclomati-
⟦3⟧ ques", "Sphères de seconde espèce" and "Surfaces-images". They had the same easy and sparkling style which was characteristic of his speech, and, when I had succeeded, not without difficulty, in understanding them, an unknown mood of joyful satisfaction possessed me,

⟦474⟧

gradually passing into the realization that mathematics had acquired a new character for me. For the undertone of Mannoury's argument had not whispered: "Behold, some new acquisitions for our museum of immovable truths", but something like this: "Look what I have built for you out of the structural elements of our thinking. — These are the harmonies I desired to realize. Surely they merit that desire? — This is the scheme of construction which guided me. — Behold the harmonies, neither desired nor surmised, which after the completion surprised and delighted me. — Behold the visions which the completed edifice suggests to us, whose realization may perhaps be attained by you or me one day."

No wonder, that when not long after these revelations from fairyland you were admitted to teach at the University of Amsterdam, I was amongst your first hearers and took in eagerly your demonstrations of the relativity of such principles and such habits of thought as impede the access to the life-springs of religion, humaneness and socialism. We soon got on more familiar terms with each other, and from then on we no more let each other go. From a pupil I gradually became your dialectic partner. Controversies divided us, were argued by us, both privately and before the forum of the scientific community, and our views got deepened and reconciled. Differences in the atmosphere of utility-language *) we never had; your sense of relativity, strongly interfering elsewhere, left you a paladin of integrity and a complete accountant in daily professional life. But differences of opinion, originating from our different natures, have continued to arise and their centre of gravity seems to have gradually moved from the origin and the essence of mathematical certainty to the origin and the essence of evil. Of evil, hidden in all of us, but towards which your attitude cannot but differ from that of others, because with you it was more deeply stowed away than with others. This accounts for your serenity of temper, which is like Mozart's music, a serenity that can hate nothing but hatred. This also accounts for your unfailing sense of right, the authority of which, in our faculty, was unchallenged for twenty years and brought such a large number of ticklish questions to solution there.

In the above synopsis of your work I pointed out the modest part you attach to the task of the significist as such and the much greater actual influence you attribute to the example of initiators and to the language of poets and prophets. Well, your life has been an example and in your writings there are passages whose electrifying power approaches the prophetic. I wish to quote one of those passages, the

*) For the meaning of this term see Synthese V, p. 194.

choice of which was suggested to me by the youngest member of our faculty, likewise your pupil, and I should like to end on this note.

"Cause and effect play their eternal antiphony. Do not let us forget this with regard to ourselves, to o u r *word, to* o u r *example. Let us be conscious of being effect and be modest. But let us be conscious as well of being cause and be unwavering."*

GUIDELINES OF INTUITIONISTIC MATHEMATICS 1947

Since its origin the intuitionistic orientation of thought has primarily strived for a new practice of creative mathematical work and secondarily searched for a formulation, as adequate as possible, of the guidelines for this practice.

It seems that the former aim has now been fairly well attained. Probably it is more completely attainable than the latter, because with respect to the intuitionistic way of thinking the mathematical language can play no other part than that of an instrument for keeping in memory mathematical constructions or for suggesting them to other people; in spite of its efficiency it can never completely safeguard us against misunderstanding.

Having premised this, I may be allowed to give below the formulation of the guidelines which for the moment seems to me the most adequate. In some respects it differs from earlier formulations.

Intuitionistic mathematics is a mental construction, essentially independent of language. It comes into being by self-unfolding of the basic intuition of mathematics, which consists in the abstraction of two-ity. This self-unfolding allows us
in the first instance to survey in one act not only a finite sequence of mathematical ⟦1⟧
systems, but also an infinitely proceeding sequence, *defined by a law*, of mathematical systems previously defined by induction. But in the second instance it
allows us as well to create a sequence of mathematical systems which infinitely ⟦1⟧
proceeds *in complete freedom or is subject to restrictions which may be varied in the*
course of the progress of the sequence. Finally, at every stage of the construction ⟦2⟧
of mathematics, properties which can be supposed to hold for previously obtained mathematical concepts, may be introduced as new mathematical concepts called *species.* Previously obtained mathematical concepts for which such a property holds, will then be qualified as *members* of the corresponding species.

The species which above others fertilizes intuitionistic mathematics is the *spread* (*Menge*); the definition of this notion and of that of the elements of a spread has
been given among other places in (1919D). Because mathematics is independent ⟦3⟧
of language, the word *symbol* (*Zeichen*) and in particular the words *complex of digits* (*Ziffernkomplex*) must be understood in this definition in the sense of *mental symbols*, consisting in previously obtained mathematical concepts.

1948 A

ESSENTIALLY NEGATIVE PROPERTIES

In order to estimate the significance of affirmative or negationless mathematics, the development of which is sometimes advocated, [1]) it may be useful to publish a simple and clear example, which I gave now and then in courses and lectures since 1927, and in which a simply negative property (i.e. the absurdity of a constructive property) is realized in such a way that no hope of transforming it into a constructive property can be justified. It consists of two real numbers which are different though neither can be proved to be greater or smaller than the other, let alone that they can be proved to be apart from each other.

⟦1⟧ Let α be a mathematical assertion that *cannot be tested*, i.e. for which no method is known to prove either its absurdity or the absurdity of its absurdity. [2])

⟦2⟧ Then the creating subject can, in connection with the assertion α, create an infinitely proceeding sequence of rational numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ according to the following direction: As long as, in the course of choosing the a_n, the creating subject has experienced neither the truth, nor the absurdity of α, every a_n is chosen equal to 0. However, as soon as between the choice of a_{r-1} and that of a_r the creating subject has obtained a proof of the truth of α, a_r as well as $a_{r+\nu}$ for every natural number ν is chosen equal to 2^{-r}. And as soon as between the choice of a_{s-1} and that of a_s the creating subject has experienced the absurdity of α, a_s as well as $a_{s+\nu}$ for every natural number ν is chosen equal to -2^{-s}.

This infinitely proceeding sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is positively convergent, so it defines a real number ρ.

⟦3⟧ If for this real number ρ the relation $\rho > 0$ were to hold, then $\rho < 0$ would be impossible, so it would be certain that α could never be proved to be absurd, so the absurdity of the absurdity of α would be known, so α would be tested, which it is not. *Thus the relation $\rho > 0$ does not hold.*

Further, if for the real number ρ the relation $\rho < 0$ were to hold, then $\rho > 0$ would be impossible, so it would be certain that α could never be proved to be true, so the absurdity of α would be known, so again α would be tested, which it is not. *Thus neither does the relation $\rho < 0$ hold.*

Finally let us suppose that the relation $\rho = 0$ holds. In this case neither $\rho < 0$ nor $\rho > 0$ could ever be proved, so neither the absurdity nor the truth of α could ever be proved, so the absurdity as well as the absurdity of the absurdity of α

[1]) See: G. F. C. Griss (1944), (1946), ⟦(1949), (1950), (1950 A), (1951), (1955)⟧; D. van Dantzig (1947).

[2]) For instance the assertion that there exists a quadruple of natural numbers $n > 2$, a, b and c, for which the relation $a^n + b^n = c^n$ holds, or that in the decimal expansion of π there occur ten successive digits forming a sequence 0123456789.

would be known. This is a contradiction, *so the relation $\rho = 0$ is absurd*, in other words *the real numbers ρ and* 0 *are different*.

Consequently for the real numbers ρ and 0 the simply negative property $\rho \neq 0$ holds, whilst neither of the properties $\rho > 0$ or $\rho < 0$ is present, let alone one of the constructive properties $\rho \gtrdot 0$ or $\rho \lessdot 0$. Thus for real numbers the relation $\neq$ is an essentially negative relation.

Analogously, if at the end of the third section above, -2^{-s} is replaced by 2^{-s}, then for the real numbers ρ and 0 the simply negative property $\rho > 0$ holds, while the constructive property $\rho \gtrdot 0$ does not hold. Thus the relation $>$ of virtual order is also an essentially negative relation.

L. E. J. BROUWER (Blaricum)

1948 C

CONSCIOUSNESS, PHILOSOPHY, AND MATHEMATICS

First of all an account should be rendered of the phases consciousness has to pass through in its transition from its deepest home to the exterior world in which we cooperate and seek mutual understanding. This account does not imply mutual understanding and in some way may remain a soliloquy. The same can be said of some other parts of this lecture too.

Consciousness in its deepest home seems to oscillate slowly, will-lessly, and reversibly between stillness and sensation. And it seems that only the status of sensation allows the initial phenomenon of the said transition. This initial phenomenon is a *move of time*. By a move of time a present sensation gives way to another present sensation in such a way that consciousness retains the former one as a past sensation, and moreover, through this distinction between present and past, recedes from both and from stillness, and becomes *mind*.

As mind it takes the function of a subject experiencing the present as well as the past sensation as object. And by reiteration of this two-ity-phenomenon, the object can extend to a world of sensations of motley plurality.

In measure of the irreversibility with which the subject has receded from an element of the object, this element loses its egoicity, i.e. gets estranged from the subject, and in measure of this estrangement, mind becomes disposed to desire and apprehension, and consequently to positive or negative conative activity with respect to the element in question.

In the world of sensation experienced by mind, the free-will-phenomenon of *causal attention* occurs. It performs identifications of different sensations and of different complexes of sensations, and in this way, in a dawning atmosphere of forethought, creates *iterative complexes of sensations*. An iterative complex of sensations, whose elements have an invariable order of succession in time, whilst if one of its elements occurs, all following elements are expected to occur likewise, in the right order of succession, is called a *causal sequence*.

On the other hand there are iterative complexes of sensations whose elements are permutable in point of time. Some of them are completely estranged from the subject. They are called *things*. For instance *individuals*, i.e. human bodies, the home body of the subject included, are things. Things may be, or may not be, indissolubly connected with egoic sensations. The whole of egoic sensations indissolubly connected with an individual, is called the *soul* of the corresponding human being. The soul connected with the subject-individual is rather latent, but manifest in sensations of vocation and of inspiration.

The whole of things is called the *exterior world of the subject.* Causal sequences, each of whose elements contains a thing, are called *exterior causal sequences.*

Causal attention allows the development of the conative activity of the subject from spontaneous effort to forethinking enterprise by means of the free-will-phenomenon of *cunning act.* The cunning act consists in this, that in a causal seequence of eventualities, a later element not conatively attainable in a spontaneous way but nevertheless *desired* (the *aim*), is realized *indirectly* by bringing about an in itself perhaps non-desirable but conatively attainable earlier element of the sequence (the *means*), and in its wake obtaining the desired element as its *consequence.* A causal sequence employed in this way is called a *useful* causal sequence. As a matter of course aim as well as means may be of a negative (averting) character. Mood and temper directing cunning acts are essentially different from spontaneous desire and apprehension.

Since (positive and negative) conative activity is mainly directed towards things, individuals included, the cunning act chiefly operates with exterior causal sequences.

By means of its cunning acts, the subject creates a *causal sphere of influence* which on the one hand it *protects* by an activity of *destroying* things endangering useful causal sequences, and which on the other hand it *extends* by an activity of *constructing* things capable of new useful causal sequences.

As a matter of course sources of disappointment with cunning acts are numerous. In the first place direct fulfilment of (positive or negative) desire through spontaneous activity is never equalled by its appeasement in a circuitous way. Furthermore causal attention meets with a certain resistance from the part of the object, so that over and over again confidence in causal sequences meets with unexpected and inexplicable deceptions, notwithstanding all effort at protection. Moreover all causal sequences are affected with inaccuracies, so that a concatenation of causal sequences need not necessarily constitute another causal sequence.

However, in spite of these disappointments, mind, once having taken to causal attention, remains in a lasting *causal tension,* impelling alternately to *causal thinking,* i.e. attention toward discovering causal sequences and possibilities of creating or protecting causal sequences, and to *causal acting,* i.e. acting, generally cunning acting, in consequence of causal thinking.

In this connection there is a phenomenon of *play,* occurring when conative activity or causal thinking or acting is performed *playfully,* i.e. without inducement of either desire or apprehension or vocation or inspiration or compulsion.

Causal attention repeatedly leads to identification of sensation complexes originating from causal acts of the subject, with sensation complexes experienced in causal connection with other individuals. On account of this identification the latter sensation complexes are called *acts of those other individuals*. Moreover causal acts of the subject and such of numerous other individuals influence each other in a high degree; many causal acts of many individuals even seem only to have possibility and sense as items of organized cooperation of smaller or larger groups of individuals; the share of the subject in that cooperation seems to be of no other nature than that of the individuals of the object.

Systems of causal thinking underlying such cooperative causal acts, are far more complicated than those inducing individual causal acts. Prominent amongst the former is *scientific thinking*, which in an economical and efficient way catalogues extensive groups of cooperative causal sequences. And this scientific thinking, in particular when concerned with technique, is based on *mathematics*.

Mathematics comes into being, when the two-ity created by a move of time is divested of all quality by the subject, and when the remaining empty form of the common substratum of all two-ities, as basic intuition of mathematics, is left to an unlimited unfolding, creating new mathematical entities in the shape of *predeterminately or more or less freely proceeding infinite sequences* of mathematical entities previously acquired, and in the shape of *mathematical species* i.e. properties supposable for mathematical entities previously acquired and satisfying the condition that if they are realized for a certain mathematical entity, they are also realized for all mathematical entities which have been defined equal to it.

The significance of mathematics with regard to scientific thinking mainly consists in this that a group of observed causal sequences can often be manipulated more easily by extending its of-quality-divested mathematical substratum to a *hypothesis*, i.e. a more comprehensive and more surveyable mathematical system. Causal sequences represented in abstraction in the hypothesis, but so far neither observed nor found observable, often find their realization later on.

The organization of a group of individuals into a cooperation consists in a wire-netting of will-transmission. At primitive stages of civilization and in primitive man-to-man relations this transmission of will from individual to individual is brought about by simple gestures or primitive animal sounds. But in more developed organization of the groups concerned the acts to be imposed become too much differentiated and too complicated to be indicated exclusively in such a simple way. In order to be able under these circumstances still to direct the trade by means of requesting or commanding (auditive or visual) signals, the totality of laws, decrees, objects and theories concerned with the acts enjoined upon the organized individuals, is subjected to a causal attention, the *linguistic causal attention*, and the elements of the mathematical system resulting from this causal attention, are indicated by *linguistic basic signs.* From these basic signs, by means of grammatical rules taken from the said mathematical system, the organized languages allowing the extremely differentiated and complicated will-transmissions required by civilization have been constructed. And these languages not only *consolidate* the wire-netting of will-transmission, but also suggest its continual *extension.* Of course, much of the stability and exactness which according to grammar and lexicon a language seems to possess is lost in practical life, because the totality of cooperations requires far more basic notions than language has to offer basic words and word connections. On the other hand stability and exactness of language is not necessary in practical life, because in every organization routine engenders a sort of collective will, making good understanders to whom a word suffices.

In the preceding, account has been rendered of three successive phases of the exodus of consciousness from its deepest home. Of these phases the *naive* one was opened with the creation of the world of sensations, the *isolated causal* one with the setting in of causal activity, and the *social* one with being involved in cooperation with other individuals. Regression from the third to the second phase appears to be frequent and easy, but from either of these regression to the naive phase seems hard to realize, more easily a temporary refluence to the deepest home leaving aside naivety, through the free-will-phenomenon of detachment-concentration. The question arises, whether and where, on and after this exodus of consciousness, *beauty, mutual understanding, wisdom* and *truth* can be found.

In causal thinking and acting *beauty* will hardly be found. Things as such are not beautiful, nor is their domination by shrewdness. Therefore satisfaction at efficacy of causal acts or systems of causal acts or at discoveries of new causal sequences is no sensation of beauty.

But in the first phase of the exodus there is beauty in the joyful miracle of the self-revelation of consciousness, as apparent in egoic elements of the object found in forms and forces of nature, in particular in human figures and human destinies, human splendour and human misery.

And in the second and third phase there is beauty in remembrance of the miracle of bygone naivety, remembrance evoked either by reverie through a haze of wistfulness and nostalgia, or by (self-created or encountered) works of art, or by certain kinds of science. Such science evoking beauty reveals or playfully mathematizes naively perceptible forms and laws of nature, after having approached them with attentive reverence, and with a minimum of tools. And such science evoking beauty, through its very reverence, rejects expansion of human domination over nature.

Furthermore in the second and the third phase there is *constructional* *beauty*, which sometimes appears when the activity of constructing things is exerted playfully, and, thus getting a higher degree of freedom of unfolding, creates things evoking sensations of power, balance, harmony, and acquiescence with the exterior world.

But the fullest constructional beauty is the *introspective beauty of mathematics*, where instead of elements of playful causal acting, the basic intuition of mathematics is left to free unfolding. This unfolding is not bound to the exterior world, and thereby to finiteness and responsibility; consequently its introspective harmonies can attain any degree of richness and clearness.

In every cooperation in which acts of the subject are concerned, to causal attention it seems that in the system of cooperative causal acts concerned the share of the subject, considered as share of the subject individual, is of no other nature relative to things than that of the object individuals concerned in the cooperation. And this finds expression in the language of the cooperation concerned. Again, to causal attention it seems that also the non-cooperative actions of the subject, considered as actions of the subject individual, firstly are of no other nature relative to things than those of the object individuals concerned in the cooperation, and secondly neither very much differ in nature relative to things from those of a great deal of object individuals not concerned in the coopeeration. And this finds expression in the language of the cooperation concerned in such a way that the part assigned to the subject individual in this language is analogous to those assigned to object individuals, whereas the subject itself is ignored in it. In this way civilized languages, mostly being cooperative languages, suggest a sameness for such totally different phenomena as acts of the subject and acts of object individuals are.

And this suggestion is intensified by the misleading terms civilized languages use to characterize the behaviour of individuals in general. It is not unreasonable to derive this behaviour from "reason". But unreasonable to derive it from "mind". For by the choice of this term the subject in its scientific thinking is induced to place in each individual a mind with free-will dependent on this individual, thus elevating itself to a mind of second order experiencing incognizable alien consciousnesses as sensations. Quod non est. And which moreover would have the consequence that the mind of second order would causally think about the pluralified mind of first order, then cooperatively study the science of the pluralified mind, and in consequence of this study assign a mind of second order with sensation of alien consciousnesses to other individuals, thus once more elevating itself, this time to a mind of third order. And so on. Usque ad infinitum. And this nonsense would still go further. In the group of individuals $I_1, I_2, \ldots I_n$, besides the primary minds of first order $M_1, M_2, \ldots M_n$, being sensations of the subject mind of second order, for every k and l which are natural numbers $\leq n$, the mind M_{kl} occurs, i.e. the sensation experienced by I_k as a mind of second order from I_l. Likewise, besides the primary minds of second order M_{kl}, being sensations of the subject mind of third order, for every ϱ, σ and τ which are natural numbers $\leq n$, the mind $M_{\varrho\sigma\tau}$ occurs, i.e. the sensation experienced by I_ϱ as a mind of third order from $M_{\sigma\tau}$. And so on. Usque ad infinitum. Moreover, with respect to behaviour, the variation from individual to individual, only in degree, not in essence, differs from the variation from individual to animal, so that as a consequence of the plurality of mind, a mind would have to be assigned to animals as well.

Since there is no plurality of mind, so much the less is there a science of the plural mind. Only a psychology of man *ánd* animal, which as an extension of physiology, studies automatic living organisms, without mind and without free-will. To these the subject individual belongs as well, notwithstanding its special role as bearer of joy and pain, and of phenomena accompanying emotions, thoughts and acts of the subject. For in spite of its dominating position the subject has a domain of describability which, compared to that of the object, is a Città del Vaticano.

In default of a plurality of mind, *there is no exchange of thought either.* Thoughts are inseparably bound up with the subject. So-called communicating-of-thoughts to somebody, means influencing his actions. Agreeing with somebody, means being contented with his cooperative acts or having entered into an alliance. Dispelling misunderstanding, means repairing the wire-netting of will-transmission of some cooperation. By so-called exchange of thought with another being the subject only touches the outer wall of an automaton. This can hardly be called mutual understanding. Only through the sensation of the other's soul sometimes a deeper approach is experienced. And when wisdom revealed by the beauty of this sensation, finds expression in the antiphony of words exchanged, then there may be mutual understanding.

Apart from the soul every exposé on the sense and essence of life is a soliloquy, and every discussion about the pluralified mind is a game of dialectics in the arena of the collective hypothesis of a collective super-subject experiencing an objective world which exists independently of the supposed human subjects that appear and disappear in it, which remains when all supposed human subjects have vanished, and would be, even if there had never been human subjects called into existence.

Searching for *wisdom*, we may find it in knowing that causal thinking and acting is non-beautiful and hard to justify, and that in the long run it brings disappointment. And in knowing that the exterior world with its innumerable individuals and with its hypertrophied cooperation is wedded to mind, its disharmonies reflecting mind's free-will-guilt.

As a consequence of this knowing the exterior world and one's own position in it are accepted as they are, so that towards the exterior world generally only acts as reversible as possible aiming at maintenance, but no acts let alone causal acts aiming at change, are undertaken of one's free will. Repair of disadjustments, averting of danger and relief of need, all this negative intervening in human society is justified in itself and sometimes prescribed. But positive activity to change the structure of human society governed by so many unknown forces, will always be checked by the self-admonition: "not to improve her work has Providence placed thee in this world", and only vocation and inspiration tested in detachment-concentration will be stronger than this admonition.

For the actual expansion of the already hypertrophied world cooperation (which in its trivial final aims of mass-comfort and mass-security has not got much justification) responsibility will be declined. Therefore leading positions in this cooperation will not be aspired to.

Neither can responsibility be assumed for curtailment of freedom, one's own or other people's. Therefore one will only reluctantly join a clique or union, these generally impairing liberty of action and spontaneity in conduct of life.

Power over fellow-creatures will be avoided. Firstly because one would get mixed up with limitations of other people's liberty of action. And secondly because those fellow-creatures are part of the reflex image held out to mind from its deepest home, therefore have to be respected, and must not be judged, let alone condemned, despised or rejected, even if they are enemies to be fought against.

Eastern devotion has perhaps better expressed this wisdom than any western man could have done. For instance in the following passages of the Bhagavad-Gita [1]) which even in translation have conserved their electrifying power:

"A man should not hate any living creature. Let him be friendly and compassionate to all. He must free himself from the delusion of I and mine. He must accept pleasure and pain with an equal tranquillity. He must be forgiving, ever-contented, self-controlled, united constantly. His resolve must be unshakable."

"He neither molests his fellow-men, nor allows himself to become disturbed by the world. He is no longer swayed by joy and envy, anxiety and fear."

"He is pure and independent of the body's desire. He is able to deal with the unexpected: prepared for everything, unperturbed by anything. He is neither vain nor anxious about the results of his actions."

"He does not desire to rejoice in what is pleasant. He does not dread what is unpleasant, or grieve over it. He remains unmoved by good or evil fortune."

---

[1]) Quoted from the English version by Swami Prabhavananda and Christopher Isherwood, London, Phoenix House, 1947.

"His attitude is the same toward friend and foe. He is indifferent to honour and insult, heat and cold, pleasure and pain. He is free from attachment. He values praise and blame equally. He can control his speech. He is content with whatever he gets. His home is everywhere and nowhere."

The categorical imperative prescribing the aforesaid attitude towards life has its counterpart in a sceptical prognosis that mankind, possessed by the delusion of causality, will slide away in a deteriorative process of overpopulation, industrialization, serfdom, and devastation of nature, and that when hereby first its spiritual and then its physiological conditions of life will have been destroyed, it will come to its end like a colony of bacteria in the earth crust having fulfilled its task.

All this though timeless art and perennial philosophy continually suggest that the unknown forces governing the destiny of individual and community, are not subject to causality; that in particular the ways of fate cannot be paved with causality, and that security is as unattainable as it is unworthy; that intensification of organization increases vulnerability, that new vulnerability asks for protection through new organization, and that thus for organization which is believed in, there is no end of growth; finally that if the delusion of causality could be thrown off, nature, gradually resuming her rights, would be (except for her bondage to destiny) generous and forgiving to a mankind decausalized and subsiding to more modest and more harmonious proportions.

Of course art and philosophy continually illustrating such wisdom cannot participate in cooperation, and should not communicate with cooperation, in particular should not communicate with the state. Supported by the state, they will lose their independence and degenerate.

The recognition of a cooperative world captured in the delusion of causality as a reflex of mind's guilt, does not imply eternal bondage to that world. Consequently, the way along which the deepest home was left, seeming to be blocked for final return, there may be wisdom in a patient tending towards reversible liberation from participation in cooperative trade and from intercourse presupposing plurality of mind. It seems that this mere tendency favours evaporation of desire and fear, so that gradually non-cooperative activity is allayed, cooperative causal acts are automatized, the world of things faints away, the joy of beauty pales, egoic elements no longer bind attention, and the home body grows more and more frugalized. What remains of non-cooperative conative activity, seizes every opportunity for a further disengaging from cooperative trade and further anachoresis of the home body. There is no hesitation to leave what is beloved, for neither beauty nor egoic alliance needs causal proximity. Though there is sadness when in a receding distance naivety vanishes for ever. But perhaps at the end of the journey the deepest home vaguely beckons.

From the above report, especially from the rejection of the hypothesis of plurality of mind, follows that *truth* is only in *reality* i.e. in the present and past experiences of consciousness. Amongst these are things, qualities of things, emotions, rules (state rules, cooperation rules, game rules) and deeds (material deeds, deeds of thought, mathematical deeds). But expected experiences, and experiences attributed to others are true only as anticipations and hypotheses; in their contents there is no truth.

Truths often are conveyed by words or word complexes, generally borrowed from cooperation languages, in such a way that for the subject together with a certain word or word complex always a definite truth is evoked, and that object individuals behave accordingly. Further there is a system of general rules called *logic* enabling the subject to deduce from systems of word complexes conveying truths, other word complexes generally conveying truths as well. Causal behaviour of the subject (isolated as well as cooperative) is affected by logic. And again object individuals behave accordingly. This does not mean that the additional word complexes in question convey truths *before* these truths have been experienced, nor that these truths *always can* be experienced. In oher words, logic is not a reliable instrument to discover truths and cannot deduce truths which would not be accessible in another way as well.

The above point of view that there are no non-experienced truths and that logic is not an absolutely reliable instrument to discover truths, has found acceptance with regard to mathematics much later than with regard to practical life and to science. Mathematics rigorously treated from this point of view, and deducing theorems exclusively by means of introspective construction, is called intuitionistic mathematics. In many respects it deviates from classical mathematics. In the first place because classical mathematics uses logic to generate theorems, believes in the existence of unknown truths, and in particular applies the *principle of the excluded third* expressing that every mathematical assertion (i.e. every assignment of a mathematical property to a mathematical entity) either is a truth or cannot be a truth. In the second place because classical mathematics confines itself to *predeterminate* infinite sequences for which from the beginning the n^{th} element is fixed for each n. Owing to this confinement classical mathematics, to define real numbers, has only predeterminate convergent infinite sequences of rational numbers at its disposal. Out of real numbers defined in this way, only subspecies of "ever unfinished denumerable" species of real numbers can be composed by means of introspective construction. Such ever unfinished denumerable species all being of measure zero, classical mathematics, to create the continuum out of points, needs some logical process starting from one or more axioms. Consequently we may say that classical analysis, however appropriate it be for technique and science, has less mathematical truth than intuitionistic analysis performing the said composition of the continuum by considering the species of freely proceeding convergent infinite sequences of rational numbers, without having recourse to language or logic.

As a matter of course also the languages of the two mathematical schools diverge. And even in those mathematical theories which are covered by a neutral language, i.e. by a language understandable on both sides, either school operates with mathematical entities not recognized by the other one: there are intuitionist structures which cannot be fitted into any classical logical frame, and there are classical arguments not applying to any introspective image. Likewise, in the theories mentioned, mathematical entities recognized by both parties on each side are found satisfying theorems which for the other school are either false, or senseless, or even in a way contradictory. In particular, theorems holding in intuitionism, but not in classical mathematics, often originate from the circumstance that for mathematical entities belonging to a certain species, the possession of a certain property imposes a special character on their way of development from the basic intuition, and that from this special character of their way of development from the basic intuition, properties ensue which for classical mathematics are false. A striking example is the intuitionist theorem that a full function of the unity continuum, i.e. a function assigning a real number to every non-negative real number not exceeding unity, is necessarily uniformly continuous.

To elucidate the consequences of the rejection of the principle of the [[1]]
excluded third as an instrument to discover truths, we shall put the wording of this principle into the following slightly modified, intuitionistically more adequate form, called the *simple principle of the excluded third:*

Every assignment τ of a property to a mathematical entity can be j u d g e d, i.e. either proved or reduced to absurdity.

Then for a single such assertion τ the enunciation of this principle is non-contradictory in intuitionistic as well as in classical mathematics. For, if it were contradictory, then the absurdity of τ would be true and absurd at the same time, which is impossible. Moreover, as can easily be proved, for a *finite* number of such assertions τ the simultaneous enunciation of the principle is non-contradictory likewise. However, for the simultaneous enunciation of the principle for all elements of an *arbitrary* species of such assertions τ this non-contradictority cannot be maintained.

E.g. from the supposition, for a definite real number c_1, that the assertion: c_1 *is rational*, has been proved to be either true or contradictory, no contradiction can be deduced. Furthermore, $c_1, c_2, \ldots c_m$ being real numbers, neither the simultaneous supposition, for each of the values $1, 2, \ldots m$ of ν, that the assertion: c_ν *is rational*, has been proved to be either true or contradictory, can lead to a contradiction. However, the simultaneous supposition for *all* real numbers c that the assertion: c *is rational*, has been proved to be either true or contradictory, does lead to a contradiction. [[2]]

Consequently if we formulate the *complete principle of the excluded third* as follows:

If a, b and c are species of mathematical entities, if further both a and b form part of c, and if b consists of those elements of c which cannot belong to a, then c is identical with the union of a and b,

the latter principle is contradictory.

A corollary of the *simple* principle of the excluded third says that *if for an assignment τ of a property to a mathematical entity the non-contradictority, i.e. the absurdity of the absurdity, has been established, the truth of τ can be demonstrated likewise.*

The analogous corollary of the *complete* principle of the excluded third

[[3]] is the *principle of reciprocity of complementarity,* running as follows:

If a, b and c are species of mathematical entities, if further a and b form part of c, and if b consists of the elements of c which cannot belong to a, then a consists of the elements of c which cannot belong to b.

Another corollary of the *simple* principle of the excluded third is the *simple principle of testability* saying that *every assignment τ of a property to a mathematical entity can be* t e s t e d, *i.e. proved to be either non-contradictory or absurd.*

The analogous corollary of the *complete* principle of the excluded third is the following *complete principle of testability:*

If a, b, d and c are species of mathematical entities, if each of the species a, b, and d forms part of c, if b consists of the elements of c which cannot belong to a, and d of the elements of c which cannot belong to b, then c is identical with the union of b and d.

For intuitionism the principle of the excluded third and its corollaries are assertions σ about assertions τ, and these assertions σ only then are "realized", i.e. only then convey truths, if these truths have been experienced.

Each assertion τ of the possibility of a construction of bounded finite character in a finite mathematical system furnishes a case of realization of the principle of the excluded third. For every such construction can be attempted only in a finite number of particular ways, and each attempt proves successful or abortive in a finite number of steps.

If the assertion of an absurdity is called a *negative assertion,* then each negative assertion furnishes a case of realization of the principle of reciprocity of complementarity. For, let α be a negative assertion, indicating the absurdity of the assertion β. As, on the one hand, the implication of the truth of an assertion a by the truth of an assertion b implies the implication of the absurdity of b by the absurdity of a, whilst, on the other hand, the truth of β implies the absurdity of the absurdity of β, we conclude that the absurdity of the absurdity of the absurdity of β, i.e. the non-contradictority of α, implies the absurdity of β, i.e. implies α.

In consequence of this realization of the principle of reciprocity of complementarity the principles of testability and of the excluded third are equivalent in the domain of negative assertions. For, if for α the principle of testability holds, this means that either the absurdity of the absurdity of β or the non-contradictority of the absurdity of β, i.e., by the preceding paragraph, that either the absurdity of the absurdity of β or the absurdity of β, i.e. either the absurdity of α or α can be proved, so that α satisfies the principle of the excluded third.

To give some examples refuting the principle of the excluded third and its corollaries, we introduce the notion of a *drift*. By a drift we understand the union γ of a convergent fundamental sequence of real numbers $c_1(\gamma)$, $c_2(\gamma)$, ..., called the *counting-numbers* of the drift, and the limiting-number $c(\gamma)$ of this sequence, called the *kernel* of the drift, all counting-numbers lying apart [1]) from each other and from the kernel. If $c_\nu(\gamma) <\!\circ\, c(\gamma)$ for each ν, the drift will be called *left-winged.* If $c_\nu(\gamma) \circ\!> c(\gamma)$ for each ν, the drift will be called *right-winged.* If the fundamental sequence $c_1(\gamma)$, $c_2(\gamma)$, ... is the union of a fundamental sequence of *left counting-numbers* $l_1(\gamma)$, $l_2(\gamma)$, ... such that $l_\nu(\gamma) <\!\circ\, c(\gamma)$ for each ν, and a fundamental sequence of *right counting-numbers* $d_1(\gamma)$, $d_2(\gamma)$, ... such that $d_\nu(\gamma) \circ\!> c(\gamma)$ for each ν, the drift will be called *two-winged.*

Let α be a mathematical assertion so far neither tested nor recognized as testable. Then in connection with this assertion α and with a drift γ the creating subject can generate an infinitely proceeding sequence $R(\gamma, \alpha)$ of real numbers $c_1(\gamma, \alpha)$, $c_2(\gamma, \alpha)$, ... according to the following direction: As long as during the choice of the $c_n(\gamma, \alpha)$ the creating subject has experienced neither the truth, nor the absurdity of α, each $c_n(\gamma, \alpha)$ is chosen equal to $c(\gamma)$. But as soon as between the choice of $c_{r-1}(\gamma, \alpha)$ and that of $c_r(\gamma, \alpha)$ the creating subject has experienced either the truth or the absurdity of α, $c_r(\gamma, \alpha)$, and likewise $c_{r+\nu}(\gamma, \alpha)$ for each natural number ν, is chosen equal to $c_r(\gamma)$. This sequence $R(\gamma, \alpha)$ converges to a real number $D(\gamma, \alpha)$ which will be called a *direct checking-number of γ through α.*

Again, in connection with α and with a two-winged drift γ the creating subject can generate an infinitely proceeding sequence $S(\gamma, \alpha)$ of real numbers $\omega_1(\gamma, \alpha)$, $\omega_2(\gamma, \alpha)$, ... according to the following direction: As long as during the choice of the $\omega_n(\gamma, \alpha)$ the creating subject has

[1]) If for two real numbers a and b defined by convergent infinite sequences of rational numbers $a_1, a_2, \ldots$ and $b_1, b_2, \ldots$ respectively, two such natural numbers m and n can be calculated that $b_\nu - a_\nu > 2^{-n}$ for $\nu \geq m$, we write $b \circ\!> a$ and $a <\!\circ\, b$, and a and b are said to lie *apart* from each other. If $a = b$ is absurd, we write $a \neq b$. If $a <\!\circ\, b$ is absurd, we write $a \geq b$. If both $a = b$ and $a <\!\circ\, b$ are absurd, we write $a > b$. The absurdities of $a <\!\circ\, b$ and $a < b$ prove to be mutually equivalent, and the absurdity of $a \geq b$ proves to be equivalent to $a < b$.

experienced neither the truth, nor the absurdity of α, each $\omega_n(\gamma, \alpha)$ is chosen equal to $c(\gamma)$. But as soon as between the choice of $\omega_{r-1}(\gamma, \alpha)$ and that of $\omega_r(\gamma, \alpha)$ the creating subject has experienced the truth of α, $\omega_r(\gamma, \alpha)$, and likewise $\omega_{r+\nu}(\gamma, \alpha)$ for each natural number ν, is chosen equal to $d_r(\gamma)$. And as soon as between the choice of $\omega_{s-1}(\gamma, \alpha)$ and that of $\omega_s(\gamma, \alpha)$ the creating subject has experienced the absurdity of α, $\omega_s(\gamma, \alpha)$, and likewise $\omega_{s+\nu}(\gamma, \alpha)$ for each natural number ν, is chosen equal to $l_s(\gamma)$. This sequence $S(\gamma, \alpha)$ converges to a real number $E(\gamma, \alpha)$ which will be called an *oscillatory checking-number of* γ *through* α.

Let γ be a right-winged drift whose counting-numbers are rational. Then the assertion of the rationality of $D(\gamma, \alpha)$ is testable, but not judgeable, and its non-contradictority is not equivalent to its truth. Furhermore we have $D(\gamma, \alpha) > c(\gamma)$, but not $D(\gamma, \alpha) \circ\!\!> c(\gamma)$.

Let γ be a two-winged drift whose right counting-numbers are rational, and whose left counting-numbers are irrational. Then the assertion of the rationality of $E(\gamma, \alpha)$ is neither judgeable, nor is it testable, nor is its non-contradictority equivalent to its truth. Furthermore $E(\gamma, \alpha)$ is neither $\geq c(\gamma)$, nor $\leq c(\gamma)$.

The long belief in the universal validity of the principle of the excluded third in mathematics is considered by intuitionism as a phenomenon of history of civilization of the same kind as the old-time belief in the rationality of π or in the rotation of the firmament on an axis passing through the earth. And intuitionism tries to explain the long persistence of this dogma by two facts: firstly the obvious non-contradictority of the principle for an arbitrary single assertion; secondly the practical validity of the whole of classical logic for an extensive group of *simple every day phenomena*. The latter fact apparently made such a strong impression that the play of thought that classical logic originally was, became a deep-rooted habit of thought which was considered not only as useful but even as aprioristic.

Obviously the field of validity of the principle of the excluded third is identical with the intersection of the fields of validity of the principle of testability and the principle of reciprocity of complementarity. Furthermore the former field of validity is a *proper* subfield of each of the latter ones, as is shown by the following examples:

Let A be the species of the direct checking-numbers of drifts with rational counting-numbers, B the species of the irrational real numbers, C the union of A and B. Then all assertions of rationality of an element of C satisfy the principle of testability, whilst there are assertions of rationality of an element of C not satisfying the principle of the excluded third. Again, all assertions of equality of two real numbers satisfy the principle of reciprocity of complementarity, whereas there are assertions of equality of two real numbers not satisfying the principle of the excluded third.

In the domain of mathematical assertions the property of absurdity, just as the property of truth, is a *universally additive property*, that is to say, if it holds for each element α of a species of assertions, it also holds for the assertion which is the union of the assertions α. *This property of universal additivity does not obtain for the property of non-contradictority.* However, non-contradictority does possess the weaker property of *finite additivity*, that is to say, if the assertions ϱ and σ are non-contradictory, the assertion τ which is the union of ϱ and σ, is also non-contradictory. For, let us start for a moment from the supposition ω that τ is contradictory. Then the truth of ϱ would entail the contradictority of σ, which would clash with the data, so that the truth of ϱ is absurd, i.e. ϱ is absurd. This consequence of the supposition ω clashing with the data, the supposition ω is contradictory, i.e. τ is non-contradictory.

Application of this theorem to the special non-contradictory assertions that are the enunciations of the principle of the excluded third for a single assertion, establishes the above-mentioned non-contradictority of the simultaneous enunciation of this principle for a finite number of assertions.

Within some species of mathematical entities the absurdities of two non-equivalent [1]) assertions may be equivalent. E.g. each of the following three pairs of non-equivalent assertions relative to a real number a: [[4]]

$$\begin{array}{ll} \text{I 1. } a = a; & \text{I 2. either } a \leq 0 \text{ or } a \geq 0 \\ \text{II 1. } a \geq 0; & \text{II 2. either } a = 0 \text{ or } a \circ\!> 0 \\ \text{III 1. } a > 0; & \text{III 2. } a \circ\!> 0 \end{array}$$

furnishes a pair of equivalent absurdities.

It occurs that within some species of mathematical entities some absurdities of constructive properties can be given a constructive form. E.g. for a natural number a the absurdity of the existence of two natural numbers different from a and from 1 and having a as their product, is equivalent to the existence, whenever a is divided by a natural number different from a and from 1, of a remainder. Likewise, for two real numbers a and b the relation $a \geq b$ introduced above as an absurdity of a constructive property can be formulated constructively as follows: Let $a_1, a_2, \ldots$ and $b_1, b_2, \ldots$ be convergent infinite sequences of rational numbers defining a and b respectively. Then, for any natural number n, a natural number m can be calculated such that $a_\nu - b_\nu \circ\!> -2^{-n}$ for $\nu \geq m$.

On the other hand there seems to be little hope for reducing irrationality of a real number a, or one of the relations $a \neq b$ and $a > b$ for real numbers a and b, to a constructive property, if we remark that a direct checking-

[1]) By non-equivalence we understand absurdity of equivalence, just as by non-contradictority we understand absurdity of contradictority.

number of a drift whose kernel is rational and whose counting-numbers are irrational, is irrational without lying apart from the species of rational numbers; further that a direct checking-number of an arbitrary drift differs from the kernel of the drift without lying apart from it, and that a direct checking-number of a right-winged drift lies to the right of the
[[5]] kernel of the drift without lying apart from it.

It occurs that within some species of mathematical entities some non-contradictorities of constructive properties ζ can be given either a constructive form (possibly, but not necessarily, in consequence of reciprocity of complementarity holding for ζ) or the form of an absurdity of a constructive property. E.g. for real numbers a and b the non-contradictority of $a = b$ is equivalent to $a = b$, and the non-contradictority of: *either* $a = b$ *or* $a \circ\!\!> b$, is equivalent to $a \geqq b$; further the non-contradictority of $a \circ\!\!> b$ is equivalent to the absurdity of $a \leqq b$ as well as to the absurdity of: *either* $a = b$ or $a <\!\!\circ\, b$.

On the other hand, if we think of the property of non-contradictority of rationality existing for all direct checking-numbers of drifts whose counting-numbers are rational, there seems to be little hope for reducing non-contradictority of rationality of a real number to a constructive property or to an absurdity of a constructive property.

If we understand by the *simple absurdity* of the property η the absurdity of η, and by the $(n + 1)$*-fold absurdity* of η the absurdity of the n-fold absurdity of η, than a theorem established above expresses that *threefold absurdity is equivalent to simple absurdity.* And a corollary of this theorem is that *n-fold absurdity is equivalent to simple or to double absurdity*
[[6]] *according as n is odd or even.*

I should like to terminate here. I hope I have made clear that intuitionism on the one hand subtilizes logic, on the other hand denounces logic as a source of truth. Further that intuitionistic mathematics is inner architecture, and that research in foundations of mathematics is inner inquiry with revealing and liberating consequences, also in non-mathematical domains of thought.

[[494]]

THE NON-EQUIVALENCE OF THE CONSTRUCTIVE AND THE NEGATIVE ORDER RELATION ON THE CONTINUUM

1949 A

In an earlier paper [1]) it has been explained that it is improbable that the constructive order relation $\gtrdot$ and negative order relation $>$ on the continuum will ⟦1⟧ ever be shown to be equivalent. Below it will be proved that this equivalence is even contradictory.

For this purpose we recall to memory the definition, which we gave in an earlier paper [2]) of a *drift* as the union γ of a convergent fundamental sequence of real numbers $c_1(\gamma), c_2(\gamma), \ldots$, called the *counting-numbers* of the drift, and the limiting number $c(\gamma)$ of this sequence, called the *kernel* of the drift, all counting-numbers lying apart from each other and from the kernel. If $c_\nu(\gamma) \lessdot c(\gamma)$ for each ν, the drift will be called *left-winged*. If $c_\nu(\gamma) \gtrdot c(\gamma)$ for each ν, the drift will be called *right-winged*. If the fundamental sequence $c_1(\gamma), c_2(\gamma), \ldots$, is the union of a fundamental sequence of *left counting-numbers* $l_1(\gamma), l_2(\gamma), \ldots$, such that $l_\nu(\gamma) \lessdot c(\gamma)$ for each ν, and a fundamental sequence of *right counting-numbers* $d_1(\gamma), d_2(\gamma), \ldots$, such that $d_\nu(\gamma) \gtrdot c(\gamma)$ for each ν, the drift will be called *two-winged*.

Let α be a mathematical assertion. Then in connection with this assertion α and with a drift γ the creating subject can generate an infinitely proceeding sequence $R(\gamma, \alpha)$ of real numbers $c_1(\gamma, \alpha), c_2(\gamma, \alpha), \ldots$ according to the following direction: ⟦2⟧ As long as during the choice of the $c_n(\gamma, \alpha)$ the creating subject has not experienced the truth (has experienced neither the truth nor the absurdity) of α, he chooses every $c_n(\gamma, \alpha)$ equal to $c(\gamma)$. But as soon as for $r = 1$ before the choice of $c_r(\gamma, \alpha)$ or for $r > 1$ between the choice of $c_{r-1}(\gamma, \alpha)$ and that of $c_r(\gamma, \alpha)$ the creating subject has experienced the truth (either the truth or the absurdity) of α, $c_r(\gamma, \alpha)$ and likewise $c_{r+\nu}(\gamma, \alpha)$ for each natural number ν, is chosen equal to $c_r(\gamma)$. This sequence $Q(\gamma, \alpha)(R(\gamma, \alpha))$ converges positively to a real number $C(\gamma, \alpha)(D(\gamma, \alpha))$ which will be called a *conditional checking-number* (a *direct checking-number*) of *γ through α*. [3])

Likewise the creating subject can generate in connection with α and with a two-winged drift γ an infinitely proceeding sequence $S(\gamma, \alpha)$ of real numbers $\omega_1(\gamma, \alpha), \omega_2(\gamma, \alpha), \ldots$ according to the following direction: As long as during the choice of the $\omega_n(\gamma, \alpha)$ the creating subject has experienced neither the truth nor the absurdity of α, he chooses every $\omega_n(\gamma, \alpha)$ equal to $c(\gamma)$. But as soon as for

[1]) (1948 A)

[2]) (1948 B) ⟦This paper is not included in this edition. It is contained in (1948 C) ⟦p. 489–494⟧.⟧

[3]) In the case that α has not yet been tested the notion of a *direct checking-number of γ through α* was already introduced in the paper mentioned in footnote [2]).

$r = 1$ before the choice of $\omega_r(\gamma, \alpha)$ or for $r > 1$ between the choice of $\omega_{r-1}(\gamma, \alpha)$ and that of $\omega_r(\gamma, \alpha)$ the creating subject has experienced the *truth* of α, he chooses $\omega_r(\gamma, \alpha)$ and likewise for each natural number ν, $\omega_{r+\nu}(\gamma, \alpha)$ equal to $d_r(\gamma)$. And as soon as for $s = 1$ before the choice of $\omega_s(\gamma, \alpha)$ or for $s > 1$ between the choice of $\omega_{s-1}(\gamma, \alpha)$ and that of $\omega_s(\gamma, \alpha)$ the creating subject has experienced the *absurdity* of α, he chooses $\omega_s(\gamma, \alpha)$ and likewise for each natural number ν, $\omega_{s+\nu}(\gamma, \alpha)$ equal to $l_s(\gamma, \alpha)$. This sequence $S(\gamma, \alpha)$ converges positively to a real number $E(\gamma, \alpha)$ which will be called a *two-sided checking-number* of γ through α.

We now consider for each natural number ν the k_ν-intervals $k'_\nu, k''_\nu, \ldots, k_\nu^{(s_\nu)}$, i.e.
⟦3⟧ the $\lambda^{(4\nu+1)}$-intervals ordered from left to right, which have a λ-interval in common with the *unit-continuum* (i.e. the species of the real numbers $\geqq 0$ and $\leqq 1$). Then the *unit-continuum coincides with the pointfan J*, i.e. the species of the infinitely proceeding sequences $k_1^{(\mu_1)}, k_2^{(\mu_2)}, k_3^{(\mu_3)}, \ldots$, which are *telescopic*, i.e. such that each of its intervals is strictly contained in the interior of the preceding interval. Let f be any point of J, let us denote by α_f the assertion that f is rational and let us consider the species ρ of the sequences $R(\gamma, \alpha_f)$ and the species δ of the corresponding direct checking-numbers $D(\gamma, \alpha_f)$, where γ is the drift with kernel 0 and counting-numbers 2^{-n} $(n = 1, 2, \ldots)$, while f varies freely within J, subject only to the condition that the nth member $k_n^{(\mu_n)}$ of f is always chosen after $c_n(\gamma, \alpha_f)$ but before $c_{n+1}(\gamma, \alpha_f)$.

Now suppose that at some time the order relations $\gtrdot$ and $>$ were proved to be equivalent; then it would be proved in particular that every element e of δ is $\gtrdot 0$; hence there would be associated to each element e of δ a natural number $n(e)$ such that $e \gtrdot 2^{-n(e)}$. It follows that there would be associated to each element p of ρ a natural number $n(p)$ such that $f(p)$ would be either proved to be rational or to be irrational by the choice of the $n(p)$th member of the element $f(p)$ of J which determines p. In this way there would be associated to each element f of
⟦4⟧ J a natural number $n(f)$ such that at the choice of the $n(f)$th member of f it can be proved either that f is rational or that f is irrational. Because J has a fan structure, it would be possible to find a maximum m of $n(f)$, f ranging over J [4]). This means that every element of J could be proved either to be rational or to be irrational at the choice of $k_m^{(\mu_m)}$; obviously this is contradictory for all those elements of J which at the choice of $k_m^{(\mu_m)}$ still enjoy their full freedom of continuation, including the freedom of subsequent restrictions to this freedom.

It can be shown also for several other equivalences which are affirmed in classical mathematics, by examining them through suitable species of checking-numbers of drifts, that they are not only not true, but even contradictory.

[4]) See (1927 B) p. 66 ⟦p. 396⟧, Theorem 2.

In an earlier paper [1]) it has been proved that the equivalence of the relations '> 0' and '$\gtrdot 0$' is contradictory [2]). Hence it follows further that the equivalence of the relations '$\geqq 0$' and 'either $= 0$ or $\gtrdot 0$' is contradictory, for the latter equivalence would entail the former.

Let us consider the *intersection theorem of Euclidean plane geometry* which affirms that a common point can be found for any two lines a end l in the Euclidean plane which can neither coincide nor be parallel. Let us choose a rectangular coordinate system with a as the axis of X. As a consequence of the intersection theorem we find that for every line through $P(0, 1)$, such that the tangent ρ_l of its angle with the axis of X satisfies $-1 \leqq \rho_l < 0$, a point S of intersection with the axis of X can be found, and therefore a natural number $n(l)$ such that $x_s < 2^{n(l)}$, hence $\rho_l < -2^{-n(l)}$, from which it follows that $\rho_l \lessdot 0$. Thus the intersection theorem entails the equivalence of the relations '< 0, and '$\lessdot 0$', which is contradictory, consequently the *intersection theorem of plane Euclidean geometry is also contradictory*.

However, this proof for the *contradictority of Euclidean plane geometry*, operating only far away in the distance, is hardly satisfactory, whilst it does not even affect the *intersection theorem of projective plane geometry*, which affirms that a common point can be found for any two lines in the projective plane which cannot coincide. ⟦1⟧

Let us consider again [1]) the pointfan J which coincides with the unit continuum. Let f be any point of J and let us denote by α_f the assertion that f is rational. Let us further consider the species σ of the sequences $S(\gamma, \alpha_f)$ and the species η of the corresponding two-sided checking-numbers $E(\gamma, \alpha_f)$, where γ always denotes the two-winged drift with kernel 0 and counting-numbers $(-1)^n 2^{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, whilst f varies freely within J, subject only to the condition that the nth member $k_n^{(\mu_n)}$ of f is always created after $c_n(\gamma, \alpha_f)$ but before $c_{n+1}(\gamma, \alpha_f)$. ⟦2⟧

If at any time the relations '$\neq 0$' and 'either < 0 or > 0' were proved equivalent, then it would be proved in particular for every element e of η that:

either $e < 0$; in this case $e \gtrdot 0$ would be impossible, hence it would be impossible that f were rational;

or $e > 0$; in this case $e \lessdot 0$ would be impossible, hence it would be non-contradictory that f were rational.

[1]) (1949 A). ⟦See note ⟦4⟧ to that paper.⟧

[2]) The result formulated in that paper was the non-equivalence of $>$ and $\gtrdot$, but the proof leads to the stronger result that '> 0' and '$\gtrdot 0$' are not equivalent.

⟦3⟧ Consequently the unit continuum would be *split up* into two species of point kernels in each of which a point could be indicated, but this is impossible [3]). This proves that the equivalence of the relations '$\neq 0$' and 'either < 0 or > 0' on the continuum is absurd.

It follows at the same time that the equivalence of the relations '$a = a$' and 'either $a \leqq 0$ or $a \geqq 0$' on the continuum is contradictory, for this equivalence would entail the former.

Let us consider a Euclidean plane with a rectangular coordinate system. Let a be the axis of X, m the line $x = 1$, α an arbitrary real number $\neq 0$, β the absolute value of α, P the point $(-1, 2\beta)$, Q the point $(1, \alpha)$, l the line PQ, γ a real number apart from $\frac{1}{3}$ and from 3. Then the line connecting P with the point $(\gamma, 0)$ intersects m in the point $(1, 2\beta\frac{\gamma-1}{\gamma+1})$, which can only coincide with Q if either $2\beta\frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \beta$ or $2\beta\frac{\gamma-1}{\gamma+1} = -\beta$, i.e. if either $\beta(\gamma-3) = 0$ or $\beta(3\gamma-1) = 0$, but none of these equalities holds, hence it is impossible that l intersects a in the point $(\gamma, 0)$.

It follows that, if a point of intersection of l and a could be found, it would be either the point $(\frac{1}{3}, 0)$ or the point $(3, 0)$. In the former case $\alpha < 0$, in the latter $\alpha > 0$.

Consequently, if the intersection theorem of projective plane geometry were to hold, in which case a common point of a and l could be found for every $\alpha \neq 0$, then the relations '$\neq 0$' and 'either < 0 or > 0' on the continuum would be equivalent. Hence, because of the contradictority of this equivalence, it follows that *the intersection theorem of projective plane geometry is contradictory*. This settles the contradictority of Euclidean as well as projective plane geometry.

It may be expected that by means of species of checking-numbers in connection with α_f, resulting from the free variation of f, it will also be possible to prove the contradictority of other theories of classical mathematics, which have already been
⟦4⟧ proved to be not true.

[3]) See (1927 B), p. 66 ⟦p. 396⟧, footnote 10.

LOGIQUE MATHÉMATIQUE. — *Remarques sur la notion d'ordre.*

Note de M. L.-E.-J. **Brouwer**, présentée par M. Émile Borel.

Une espèce S d'entités mathématiques est dite *partiellement ordonnée,* si d'après certains critères γ il existe pour certaines paires d'éléments de S, composées chacune d'un premier élément X et d'un second élément Y, des *relations d'ordre* $X \doteq Y$ (X et Y sont *du même rang*), $X < Y$ (X est *inférieur* à Y) ou $X > Y$ (X est *supérieur* à Y), remplissant, a, b, c, r, s désignant des éléments arbitraires de S, les conditions suivantes:

1. $a \doteq a$;
2. $a \doteq b$ entraine $b \doteq a$;
3. l'union de $a \doteq b$ et $b \doteq c$ entraîne $a \doteq c$;
4. $a < b$ et $b > a$ s'impliquent mutuellement;
5. l'union de $a \doteq r$, $b \doteq s$ et $a < b$ entraîne $r < s$;
6. l'union de $a < b$ et $b < c$ entraîne $a < c$;
7. $a < b$ exclut $a > b$ (donc d'après ce qui précède $a \doteq b$ exclut $a < b$).

Deux éléments a et b d'une espèce partiellement ordonnée seront dits *de rangs différents,* si la relation $a \doteq b$ s'est trouvée contradictoire.

Si dans une espèce partiellement ordonnée deux éléments arbitraires a et b sont ou bien du même rang ou bien de rangs différents, l'espèce sera dite *discrètement* ordonnée.

Si dans une espèce partiellement ordonnée on a pour deux éléments arbitraires a et b de rangs différents ou bien $a < b$ ou bien $a > b$, l'espèce sera dite *quasicomplètement* ordonnée.

Un ordre partiel qui est en même temps discret et quasi complet, sera dit *complet.*

Un ordre partiel sera dit *naturel,* si ses critères γ constituent une extension de ceux de quelque ordre simple et intuitif complet.

Une relation u, qui est une relation $p \doteq q$, $p < q$ ou $p > q$, qu'on imagine pour deux éléments p et q de l'espèce partiellement ordonnée S, sera dite *compatible avec l'ordre partiel de* S, si pour l'espèce de relations qui est l'union de la relation u et des relations d'ordre découlant des critères γ, la non-contradiction du système de conditions 1, 2, ..., 7 reste en vigueur. L'ordre partiel π de S sera dit *saturé,* s'il se trouve établi que chaque relation d'ordre compatible avec π découle elle-même des critères γ, donc fait partie de π.

Il a été démontré que l'ordre saturé est équivalent à l'ordre *virtuel,* [[1]] c'est-à-dire à l'ordre partiel qui, en dehors des conditions 1, 2, ..., 7, satisfait aux conditions supplémentaires suivantes:

8. L'absurdité simultanée de $a \doteq b$ et $a < b$ entraîne $a > b$.
9. L'absurdité simultanée de $a < b$ et $a > b$ entraîne $a \doteq b$.

On constate immédiatement que pour chaque relation d'ordre qu'on imagine pour deux éléments de l'espèce virtuellement ordonnée S la non-contradiction est équivalente à l'existence et que pour chaque paire d'éléments de cette espèce S la participation à l'ordre virtuel est non-contradictoire.

L'ordre virtuel trouve sa réalisation la plus importante dans l'ordre partiel naturel du continu intuitionniste.

Évidemment l'ordre complet implique l'ordre virtuel. Par contre l'*ordre virtuel n'implique ni l'ordre complet, ni même l'ordre quasi complet.* Pour les ordres partiels naturels cette non-implication est mise en évidence par l'exemple d'une propriété essentiellement négative que j'ai communiqué à l'Académie
⟦2⟧ des Sciences d'Amsterdam dans sa séance du 25 septembre 1948.

En revanche, pour les ordres partiels naturels, l'ordre quasi complet n'implique pas non plus l'ordre virtuel. En effet, appelons deux entités mathématiques *différentes* si leur égalité est absurde, et disons de deux espèces d'entités mathématiques a et b que a est *contenue* dans b si chaque élément de a est égal à un élément de b, que a et b sont *identiques* si elles sont contenues l'une dans l'autre, et que a *sort* de b si a contient un élément différent de chaque élément de b. Basons ensuite l'*ordre partiel naturel* π_1 *d'une espèce arbitraire* E *d'espèces d'entités mathématiques* sur la convention que pour deux éléments a et b de E on mettra $a \doteq b$ si a et b sont identiques, et $a < b$ si a est contenu dans b tandis que b sort de a.

Considérons en particulier l'ordre partiel π_1 de l'espèce R contenant comme éléments les espèces a_ω et a_r, définies comme il suit: a_ω se compose de la suite infinie de nombres rationnels $0, 1, 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots$, tandis que a_r contient comme éléments ceux de a_ω, et en plus un nombre réel r satisfaisant à la condition que, sans qu'il soit contenu dans a_ω, son appartenance à a_ω est non-contradictoire.
⟦3⟧ L'intuitionisme dispose de divers moyens de construire de tels nombres. Alors la différence de rang par rapport à π_1 des deux éléments de R étant contradictoire, la seule paire d'éléments contenue dans R n'est pas touchée par la condition de l'ordre quasi complet, qui par conséquent se trouve bien réalisé. D'autre part, la condition 9 de l'ordre virtuel n'est pas remplie, les relations $a_r < a_\omega$ et $a_r > a_\omega$ étant toutes les deux contradictoires sans qu'il s'ensuive la relation $a_r \doteq a_\omega$. Il s'ensuit que, pour l'espèce R, l'ordre partiel π_1 n'est pas virtuel.

Hors du domaine des ordres partiels naturels, la mise en évidence de l'indépendance mutuelle de l'ordre quasi complet et de l'ordre virtuel se fait d'une manière plus simple. En effet, considérons une espèce S se composant de deux entités mathématiques a et b seulement. Soit α une assertion mathématique *non-éprouvable,* c'est-à-dire que jusqu'ici on ne connaît pas d'algorithme à déduire soit la non-contradictorité soit l'absurdité de α. Définissons un ordre partiel de S en choisissant comme critères respectifs des relations $a > b$, $a < b$ et $a \doteq b$ l'établissement de la non-contradiction, de l'absurdité et de l'ensemble de la non-contradiction et de l'absurdité de α. Cet ordre partiel est virtuel, sans être quasi complet. D'autre part, si les trois critères en question sont successivement remplacés par l'établissement de l'ensemble de la vérité et de l'absurdité de α, de l'absurdité de α et de la vérité de α, on obtient un ordre quasi complet, qui n'est pas virtuel.

LOGIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la possibilité d'ordonner le continu.* 1950 B

Note de M. **L.-E.-J. Brouwer**, présentée par M. Émile Borel.

Dans une communication antérieure [1] j'ai mis en lumière que l'ordre naturel du continu intuitionniste n'est pas quasi complet, c'est-à-dire ne comporte pas une relation d'ordre pour chaque paire de nombres réels différents. La question se pose de savoir s'il y a moyen d'ordonner quasi complètement le continu intuitionniste d'une autre manière, en conservant, bien entendu, l'égalité comme condition d'égalité de rang. La réponse est négative, comme l'établit le raisonnement suivant :

Supposons pour le continu intuitionniste l'existence de quelque ordre quasi complet π. *Dans ce qui suit les signes $<$ et $>$ se rapporteront à l'ordre* π. Soient p_1 et u_1 deux nombres réels dont la *distance naturelle* (c'est-à-dire la valeur absolue de leur différence arithmétique) a surpasse 2^{-n} pour un certain nombre naturel n. Soit $p_1 < u_1$ et soit w_1 le nombre réel qui est la *moyenne naturelle* de p_1 et de u_1. Nous aurons alors ou bien $w_1 < p_1 < u_1$ ou bien $p_1 < u_1 < w_1$ ou bien $p_1 < w_1 < u_1$. Dans le premier cas nous mettrons $p_2 = w_1$ et $u_2 = u_1$, dans le second et dans le troisième cas $p_2 = p_1$ et $u_2 = w_1$. Ainsi dans tous les cas la distance naturelle de p_2 à u_2 sera de $2^{-1}a$, tandis que $p_2 < u_2$. De même, pour un nombre naturel quelconque ρ, soient p_ρ et u_ρ deux nombres réels à distance naturelle $2^{-\rho+1}a$ et tels que $p_\rho < u_\rho$. Alors, Soit w_ρ la moyenne naturelle de p_ρ et de u_ρ. Nous mettrons $p_{\rho+1} = w_\rho$ et $u_{\rho+1} = u_\rho$, si $w_\rho < p_\rho < u_\rho$, et $p_{\rho+1} = p_\rho$ et $u_{\rho+1} = w_\rho$, si $p_\rho < u_\rho < w_\rho$ ou $p_\rho < w_\rho < u_\rho$. Ainsi dans tous les cas la distance naturelle de $p_{\rho+1}$ à $u_{\rho+1}$ sera de $2^{-\rho}a$, tandis que $p_{\rho+1} < u_{\rho+1}$. Ce procédé nous fournit une suite fondamentale de paires de nombres réels (p_ν, u_ν) où pour chaque ν nous avons $p_\nu < u_\nu$, tandis que la distance naturelle de p_ν à u_ν est de $2^{-\nu+1}a$ et que chaque *intervalle naturel* $(p_{\nu+1}, u_{\nu+1})$ est contenu dans l'intervalle naturel (p_ν, u_ν). Par conséquent la suite converge vers un seul nombre réel q.

Soit α une assertion mathématique *non éprouvable*. Considérons une suite [[2]]
infinie (h_1, k_1), (h_2, k_2), ... de paires de nombres réels, avançant selon les instructions suivantes :

Tant que, pendant la création successive des (h_n, k_n), ni l'absurdité, ni la non-contradiction de α n'auront été établies, h_n sera choisi égal à p_n et k_n égal

---

[1] *Comptes rendus*, **230**, 1950, p. 263. [[1]]

à u_n. Mais, dès que la vérité de α se sera révélée entre le choix d'un certain (h_{r-1}, k_{r-1}) et celui de (h_r, k_r), chaque $h_\nu\,(\nu \geqq r)$ sera choisi égal à p_r et chaque $k_\nu\,(\nu \geqq r)$ égal à u_r. Et dès que l'absurdité de α aura été découverte entre le choix d'un certain (h_{s-1}, k_{s-1}) et celui de (h_s, k_s), chaque $h_\nu\,(\nu \geqq s)$ sera choisi égal à u_s et chaque $k_\nu\,(\nu \geqq s)$ égal à p_s. En tout cas la suite infinie (h_1, k_1), (h_2, k_2), ... convergera vers une paire de nombres réels (h, k).

Supposons un moment h et k égaux. Alors les relations $h < k$ et $h > k$ seraient toutes les deux impossibles. Donc l'égalité de (h, k) à quelque (p_r, u_r) et l'égalité de (h, k) à quelque (u_s, p_s) seraient toutes les deux impossibles et l'assertion α serait en même temps absurde et non contradictoire. Par conséquent notre supposition a été réfutée, nous avons établi que h et k sont différents et l'ordre quasi complet π devra comporter une relation d'ordre pour la paire (h, k).

Or, cette relation d'ordre sera

ou bien $h < k$, d'où l'impossibilité de $h > k$, entraînant successivement l'impossibilité de l'égalité de (h, k) à quelque (u_s, p_s) et la non-contradiction de α, donc l'éprouvabilité de α,

ou bien $h > k$, d'où l'impossibilité de $h < k$, entraînant successivement l'impossibilité de l'égalité de (h, k) à quelque (p_r, u_r) et l'absurdité de α, donc encore l'éprouvabilité de α.

Nous nous sommes heurté à une contradiction. Cette contradiction établit que, tant qu'il y aura des assertions non éprouvables, le continu intuitionniste n'admettra pas d'ordre quasi complet.

Pour l'ordre quasi complet du continu réduit, c'est-à-dire de l'espèce des nombres réels prédéterminés, il existe une impossibilité analogue, logiquement conditionnelle, mais pratiquement absolue, seulement plus longue à formuler que dans le cas du continu intuitionniste.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **230**, p. 349-350, séance du 23 janvier 1950.)

Discours final de M. BROUWER 1950 C

Le programme du colloque me conférant l'honneur de prononcer quelques paroles à titre de conclusion, je voudrais vous proposer de considérer un instant dans son essence l'ensemble des mathématiques et de la logique, les deux sciences si intimement liées qui nous ont occupés. Pour cela, descendons au plus profond de notre conscience et constatons qu'à l'origine il n'y a là qu'un monde-rêve et que dans ce monde-rêve un monde pragmatique ne prend naissance qu'au moyen du *phénomène de discernement*, créant *l'homme pensant* et du *phénomène d'astuce*, créant *l'homme agissant*, l'ensemble de ces deux phénomènes engendrant le monde extérieur et les objets. Ensuite, appelant « *jeu* » toute activité exercée pour elle-même et non suscitée par la crainte, la contrainte, le désir ou la vocation, relevons l'existence du *jeu logique*, qui dans le discernement remplace les objets perçus par des objets fictifs et purement indicatifs, et du *jeu mathématique*, qui dans le discernement fait abstraction complète des objets. Remarquons que ces deux jeux partent l'un et l'autre d'un *phénomène premier de bi-unicité* capable d'une pluralisation spontanée et infinie qui crée dans les champs de l'esprit une végétation illimitée et exubérante, sensiblement plus riche dans le cas mathématique que dans le cas logique, par suite de l'affranchissement total du lest des objets, dont jouissent les mathématiques.

Les deux jeux, en vertu de leur origine, s'influencent mutuellement. De par leur nature, ils ne devraient pas s'immiscer dans la vie sociale. Celle-ci les ayant néanmoins réclamés, ils subissent l'influence des sciences pragmatiques tout en coopérant, contre leur nature, aux transformations de la vie sociale qu'on appelle le progrès. Heureusement, leurs plus beaux développements n'auront probablement jamais aucun rapport avec les questions techniques, économiques ou politiques.

Nous tous qui avons assisté aux entretiens qui viennent de s'achever, avons pu entendre et voir que la logique cultivée pour elle-même soulève aujourd'hui des problèmes captivants et fait aujourd'hui des découvertes aussi ingénieuses que surprenantes. Un tableau s'est déroulé qui contribuera à imposer silence à ceux qui aujourd'hui encore voudraient nier le droit à l'existence du jeu de la logique pure.

Souhaitons donc que notre colloque ait inauguré une longue série de reprises et soyons reconnaissants à ceux qui en ont pris l'initiative et l'ont si brillamment organisé, en particulier à M. le Doyen de la Faculté des Sciences et à M. le Professeur DESTOUCHES, à l'U.N.E.S.C.O. qui nous a prêté son précieux soutien, à nos rapporteurs, qui ont jeté tant de lumière et ont ouvert de si vastes perspectives, et finalement à tous ceux qui ont pris part à nos discussions si animées et si instructives.

1951

ON ORDER IN THE CONTINUUM, AND THE RELATION OF TRUTH TO NON-CONTRADICTORITY

BY

L. E. J. BROUWER

(Communicated at the meeting of November 24, 1951)

§ 1.

The virtual order of the continuum was introduced by means of the following definitions [1]):

1. If a is a rational number, and b a real number defined by the convergent infinite sequence of rational numbers $b_1, b_2, \ldots$, we say that b is *measurably greater* than a and a *measurably smaller* than b (expressed by $b \circ\!> a$ and $a <\!\circ\, b$), if for two suitable natural numbers m and p the inequality $b_\nu - a > 2^{-p}$ holds for each $\nu > m$.

2. If a and b are real numbers, we say that b is *measurably greater* than a, and a *measurably smaller* than b (expressed by $b \circ\!> a$ and $a <\!\circ\, b$), if for some suitable natural number n the inequality $b - a > 2^{-n}$ holds.

3. Indicating for two real numbers a and b the absurdity of $a <\!\circ\, b$ by $a \circ\!\geq b$ and $b \leq\!\circ\, a$, we say that b is *greater* than a and a *smaller* than b (expressed by $b > a$ and $a < b$), if $a \neq b$ as well as $a \leq\!\circ\, b$.

On the basis of these definitions it was easily proved that the absurdity of $a < b$ (expressed by $a \geq b$ and $b \leq a$) is equivalent to $a \circ\!\geq b$.

§ 2.

The basic relation $<$ of the virtual order of the continuum, defined in the above way, is equivalent to the non-contradictority of the basic relation $<\!\circ$ of the measurable natural order.

For, on the one hand the non-contradictority of $a <\!\circ\, b$ implies the absurdity of $a = b$ as well as of $a \circ\!> b$, and on the other hand (on account of the absurdity of simultaneous validity of $a \neq b$, $a \circ\!\geq b$ and $a \leq\!\circ\, b$) the conjunction of $a \neq b$ and $a \leq\!\circ\, b$ implies the non-contradictority of $a <\!\circ\, b$.

The same result follows by remarking that the assertion $a < b$, stating as it does the absurdity of the alternative "either $a = b$ or $a \circ\!> b$", is a *negative* assertion; consequently it is equivalent to its non-contradictority [2]), i.e. to the absurdity of $a \geq b$, i.e. to the absurdity of $a \circ\!\geq b$, i.e.

[[1]] [1]) Cf. e.g. Math. Annalen **95**, 467.

[[2]] [2]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **51**, 1240 (1948). Obviously the converse of the theorem is true, for any assertion equivalent to its non-contradictority can be put into a negative form.

to the non-contradictority of $a \circ\!\!> b$. So that indeed the basic relation of the virtual order of the continuum might equally well have been defined as the non-contradictority of the basic relation of the measurable natural order.

§ 3.

If, within an arbitrary species of mathematical entities, we define a *non-negative assertion* as an assertion for which, with regard to the elements of that species, the principle of reciprocity of complementarity is contradictory, then *each non-negative assertion, together with the assertion of its non-contradictority, yields a pair of non-equivalent assertions having equivalent absurdities* [3]).

This theorem covers the four examples, previously given [4]), of pairs of non-equivalent assertions, about real numbers, with equivalent absurdities, namely:

I 1.	$a = a$	I 2.	either $a \leq 0$ or $a \geq 0$
II 1.	$a \neq 0$	II 2.	either $a < 0$ or $a > 0$
III 1.	$a \geq 0$	III 2.	either $a = 0$ or $a \circ\!\!> 0$
IV 1.	$a > 0$	IV 2.	$a \circ\!\!> 0$.

For, in each pair the second member is non-negative, and its non-contradictority is represented by the first member.

§ 4.

Each of the above non-negative assertions demonstrates the theorem of *contradictority of the principle of reciprocity of complementarity* (involving that of *contradictority of the equivalence of truth and non-contradictority in mathematics*) whose force considerably exceeds that of the theorem of contradictority of the complete principle of the excluded third (involving that of contradictority of the solubility of all mathematical problems) which was deduced previously [5]).

---

[3]) The converse is *not* true, as is shown within the species of real numbers by the pair of assertions "either $a = 0$ or $a > 0$" and "either $a = 0$ or $a \circ\!\!> 0$".

[4]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **51**, 1242 (1948) and **52**, 316 (1949). ⟦3⟧

[5]) Cf. e.g. Sitz. ber. Preuss. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. 1928, 48–52. ⟦4⟧

1952 A

An intuitionist correction of the fixed-point* theorem on the sphere

By L. E. J. Brouwer, For.Mem.R.S.

(*Received* 31 *December* 1951)

⟦2⟧ This is a specimen of intuitionist recasting of topology, and in particular an illustration of the consequences of the invalidity of the Bolzano-Weierstrass theorem in intuitionism, for the validity of the Bolzano-Weierstrass theorem would make the classical and intuitionist forms of fixed-point theorems equivalent.

That the fixed-point theorem on the sphere in its classical form does not hold intuitionistically is shown by the following example:

⟦3⟧ Let f be a fleeing property, κ_f its critical number, and let f be *three-sided*, which means that neither of $\kappa_f \equiv 0$, nor $\kappa_f \equiv 1$, nor $\kappa_f \equiv 2$ (mod 3) has the absurdity been demonstrated. In ordinary space, with a rectangular system of axes, let $r_1, r_2, \ldots$ be a fundamental sequence of rotations about the origin, each r_n turning through an angle $(-2)^{-n}$ if n is a down-number and an angle $(-2)^{-\kappa_f}$ if n is an up-number of f; and, for $n \leqslant \kappa_f$, let the rotation take place about the axis of x, y or z, according as $n \equiv 0$, $n \equiv 1$ or $n \equiv 2$ (mod 3), while for n an up-number the rotation is about the same axis as for $n = \kappa_f$. If, by r_ν, an initial position s_0 of a sphere K, having its centre at the origin, passes into the position s_ν, then $s_1, s_2, \ldots$ converge to some position s. It *may be* that s_0 and s are the same; it *may also be* that s_0 and s are different, and that only the points on the axis of x (or y, or z) are in the same place for s_0 and s. But there is no way of *determining* a point on the surface S of K *which is in exactly the same place for* s_0 *and* s.

An intuitionist theorem by which the fixed-point theorem on the sphere can be replaced is formulated as follows:

Let τ be a topological transformation of the surface S of a sphere K into itself conserving the indicatrix, and ϵ a real number $\circ\!> 0$. Then we can determine a point of S whose geodetic displacement by τ is $\leqslant \epsilon$.

We shall call the point A' into which a point A of S is carried by τ, the *image* of A by τ, and the point A'' which is carried by τ into A, the *counter-image* of A by τ. It is understood that A' and A'' *can be calculated* for each A. The locus α' of the images and the locus α'' of the counter-images of the points of a locus α will be called the image and the counter-image of α.

Let us choose an arbitrary point P on S. Then *either* the geodetic distance of P from its image P' or from its counter-image P'' is $\leqslant \epsilon$, in which case we have attained our object; *or* both these geodetic distances are $\geqslant \frac{3}{4}\epsilon$, which is thus the only case left to be considered.

⟦1⟧ * In this paper 'point' means 'point core' in the intuitionist sense.

Let g be a circle on S having P as its centre and bounding a circular region G containing P which lies at a distance $\geqslant \frac{1}{2}\epsilon$ from its image G' and its counter-image G'' (this will be so if g is small enough). Let ρ be the stereographic projection of S from P on R, the tangent plane to S at O, the antipodal point of P. Let ρ transform τ into σ, P' into B', P'' into B'', g into h, g' into h', g'' into h''. Then h will contain h' and h'' in its interior.

Let Q be a square in R having O as its centre and containing h in its interior (and thus also h' and h''). Let s be the perimeter of Q.

Let E be a division of Q into congruent, homothetic squares q_ν. Let us choose E dense enough to enable us to indicate a square ψ composed of squares q_ν lying in the interior of h'' and containing B'' in its interior at a distance $\circ\!> 0$ from its perimeter k.

Let us understand by the *displacement vector* of a point T of R the directed line segment from T to its image T' by σ. If we confine ourselves to the part R'' of R composed of the squares q_ν belonging to Q but not to ψ, the displacement vector is bounded. Let us determine a $\vartheta \circ\!> 0$ such that if the displacement vector of a point C of R'' is of length $< \vartheta$, this guarantees that the point A of S, of which C is the stereographic projection, is at a geodetic distance $< \epsilon$ from its image in S by τ.

Let a variable point H of a closed Jordan curve j lying in R''.describe a simple circuit ω of j. Then simultaneously the displacement vector of H will describe a total angle of say $2n(j, \sigma)\,\pi$. This number $n(j, \sigma)$ we shall call the *index* of j for σ, taking it positive or negative according as the total angle in question is described in the same sense as ω or in the opposite one. We easily see that $n(s, \sigma) = +1$ and $n(k, \sigma) = -1$.

We now make a division D of R'' into congruent squares $c_1, c_2, \dots$ homothetic to Q and of size so small that the vector variation of the displacement vector is $< \frac{1}{2}\vartheta$ in each c_ν.

Let us suppose for a moment that the displacement vector is $> \frac{3}{4}\vartheta$ at each angular point of D. Then it must be $> \frac{1}{4}\vartheta$ in the whole domain R'', so that each perimeter p_ν of a c_ν must be of index 0. (For otherwise p_ν would contain pairs of points with displacement vectors opposite and of length $> \frac{1}{4}\vartheta$, thus having a vector difference $> \frac{1}{2}\vartheta$.) But, on the other hand, we have

$$n(s, \sigma) = n(k, \sigma) + \sum_\nu n(p_\nu, \sigma),$$

which leads to $1 = -1 + 0$.

From this absurdity it follows that we can indicate an angular point I of D having a displacement vector $\leqslant \frac{3}{4}\vartheta$. But then the point F of S, of which I is the stereographic projection, has a geodetic distance $< \epsilon$ from its image in S by τ; thus our theorem has been proved. [[4]]

1952 B

HISTORICAL BACKGROUND, PRINCIPLES AND METHODS OF INTUITIONISM*

L. E. J. Brouwer
University of Amsterdam

THE historical development of the mental mechanism of mathematical thought is naturally closely connected with the modifications which, in the course of history, have come about in the prevailing philosophical ideas *firstly* concerning the origin of mathematical certainty, *secondly* concerning the delimitation of the object of mathematical science. And that the mental mechanism of mathematical thought during so many centuries has undergone so little fundamental change is due to the circumstance that, in spite of all revolutions undergone by philosophy in general, the belief in the existence of properties of time and space, immutable and independent of language and experience, remained well-nigh intact until far into the nineteenth century. Exact knowledge of these properties was called mathematics, and was generally pursued in the following way: for some familiar regularities of (outer or inner) experience which, with any attainable degree of approximation, *seemed invariable*,
⟦1⟧ *complete invariability was postulated.* These regularities were called *axioms* and were put into language. Thereupon extensive systems of properties were developed from the linguistic substratum of the axioms by means of *reasoning* guided by experience but linguistically following and using the principles of *classical logic.*

We will call the standpoint governing this mode of thinking and working the *observational standpoint*, and the long period characterized by this standpoint the *observational period.*

During the observational period mathematics was considered functionally, if not existentially, dependent on logic, and logic itself was considered autonomous.

For space the observational standpoint became untenable when, in the course of the 19th and the beginning of the 20th century, as a consequence of a series of discoveries with which the names of Lobatchefsky, Bolyai, Riemann, Cayley, Klein, Hilbert, Einstein, Levi-Civita and Hahn are associated, mathematics was gradually transformed into a mere science of numbers. Simultaneously, besides observational space, a great number of other spaces, sometimes exclusively originating from logical speculations, with properties distinct from the traditional but no less beautiful, gradually found an arithmetical representation. Consequently the science of classical (Euclidean) three-dimensional space had to continue its existence as a chapter without priority, on the one hand, of (exact) science of numbers, on the other hand, as applied mathematics, of (naturally only approximative) descriptive natural science.

Encouraged by the important part which, in this process of extending the domain of conceivable geometry, had been played by the *logico-linguistic method*, which, without any guidance by experience, operated on words by means of logical rules, the ***Old Formalist school*** (Dedekind, Cantor, Peano, ⟦2⟧
Hilbert, Russell, Zermelo, Couturat) finally, for the purpose of a rigorous treatment of mathematics *and logic* (though not for the purpose of choosing the subjects of investigation of these sciences) rejected any element extraneous to language and logic. ⟦3⟧
Thus logic and mathematics were divested by this school both of their essential difference in character and of their autonomy. However, the hope originally fostered by the Old Formalists that mathematical science erected according to their principles would be crowned one day with a proof of noncontradictority, was never fulfilled, and, nowadays, in view of the results of certain investigations of the last few decades, has, I think, been relinquished. ⟦4⟧

* Paper read to Section A of the South African Association for the Advancement of Science, Cape Town, July, 1952.

Of a totally different orientation was the *Pre-intuitionist school,* led mainly by
[[5]] Poincaré, Borel and Lebesgue. These thinkers seem to have maintained a modified observational standpoint for the introduction of natural numbers, of the principle of complete induction, and of all mathematical entities and theories springing from this source without the intervention of axioms of existence, hence for what might be called the 'separable' parts of arithmetic and algebra. For these parts of mathematics, even for such theorems as were deduced by means of classical logic, they postulated an existence and exactness independent of language and logic, and regarded their noncontradictority as certain, even without logical proof. For the continuum however, they seem not to have sought an origin extraneous to language and logic. On some occasions they seem to have contented themselves with an ever-
[[6]] unfinished and ever-denumerable system of 'real numbers,' generated by an ever-unfinished and ever-denumerable system of laws defining convergent infinite sequences of rational numbers. In doing so they seem to have overlooked that such an ever-unfinished and ever-denumerable system of 'real numbers' is incapable of fulfilling the mathematical functions of the continuum, for the simple reason that it *cannot have a measure positively differing from zero.* On other occasions they seem to have introduced the continuum by having recourse to some logical axiom of existence lacking sensory as well as epistemological evidence,
[[7]] such as the 'axiom of ordinal connectedness,' or the 'axiom of completeness.' But in both cases, in their further development of mathematics, they unreservedly continued to apply classical logic, including the principle of the excluded third. They did so regardless of the fact that the noncontradictority of systems thus constructed had become very doubtful after the discovery of the logico-mathematical antinomies.

Thus, in point of fact, Pre-intuitionism re-established on the one hand the essential difference in character between logic and mathematics, and on the other hand the autonomy of logic and of a part of mathematics. On these two autonomous domains of thought the rest of mathematics remained dependent.

When the Old Formalist standpoint had been badly shaken, mainly by Pre-intuitionist criticism, Hilbert founded the *New Formalist school,* which postulated existence and exactness independent of language—it is true not for mathematics proper, but
for *meta-mathematics* or *mathematics of the* [[8]]
second order, i.e. the scientific consideration of the symbols occurring in purified mathematical language, and of the rules of manipulation of these symbols. Thus New Formalism, in contrast with Old Formalism, consciously and *in confesso,* made use of the intuition of natural numbers and of complete induction. It is true that autonomy was postulated here for a much smaller part of mathematics than in the case of Pre-intuitionism.

But no attention was paid by New Formalism to the circumstance that, between the perfection of mathematical language and the perfection of mathematics proper, no clear connection can be seen.

The situation left by Formalism and Pre-intuitionism can be summarized as follows: for the elementary theory of natural numbers, the principle of complete induction, and more or less considerable parts of algebra and theory of numbers, exact existence, absolute reliability, and noncontradictority were universally acknowledged, independently of language and without proof. There was little concern over the existence of the continuum. Introduction of a set of predeterminate real numbers with a positive measure was attempted by logico-linguistic means, but a proof of the noncontradictory existence of such a set was lacking. For the whole of mathematics the rules of classical logic were accepted as reliable aids in the search for exact truths.

In this situation intuitionism intervened with two acts, of which the first seems necessarily to lead to destructive and sterilizing consequences; then, however, the second yields ample possibilities for recovery and new developments. To begin with, the

FIRST ACT OF INTUITIONISM

completely separates mathematics from mathematical language, in particular from *the phenomena of language which are described by theoretical logic, and recognizes that intuitionist mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time, i.e. of the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the empty form of the common substratum of all two-ities. It is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics.*

How much of 'separable' mathematics can be rebuilt in a slightly modified form, by unlimited self-unfolding of the basic
⟦9⟧ intuition, is introspectively realized.

In the edifice of mathematical thought thus erected, language plays no other part than that of an efficient, but never infallible or exact, technique for memorizing mathematical constructions, and for suggesting them to others; so that mathematical language by itself can never create new mathematical systems. But on account of the highly logical character of usual mathematical language the following question naturally presents itself:

Suppose that an intuitionist mathematical construction has been carefully described by means of words, and then, the introspective character of the mathematical construction being ignored for a moment, its linguistic description is considered by itself and submitted to a linguistic application of a principle of classical logic. Is it then always possible to perform a languageless mathematical construction finding its expression in the logico linguistic figure in question?

After a careful examination one answers this question in the *affirmative* (if one allows for the inevitable inadequacy of language as a mode of description) as far as the principles of contradiction and syllogism are concerned; but in the *negative* (except in special cases) with regard to the principle of the excluded third, so that the latter principle, as an instrument for discovering new mathematical truths, must be rejected.

Indeed, if each linguistic application of the principle of the excluded third in a mathematical argument were to accompany some actual intuitionist-mathematical construction, this would mean that each intuitionist-mathematical assertion (i.e. each assignment of a property to an intuitionist-mathematical entity) can be *judged*, i.e. can either be proved or be reduced to absurdity.

Now every construction of a bounded finite character in a finite mathematical system can be attempted only in a finite number of ways, and each attempt can either be carried through to completion, or be continued until further progress is impossible. It follows that every assertion of possibility of a construction of a bounded finite character in a finite mathematical system can be judged. So, in this exceptional case, application of the principle of the excluded third is permissible.

In order to show that this is not so for infinite systems, we shall call a hypothetical property f of natural numbers a *fleeing property*, if it satisfies the following conditions:

1. for each natural number it can be decided either that it possesses the property f, or that it cannot possibly possess the property f;

2. no method is known for calculating a natural number possessing the property f;

3. the assumption of existence of a natural number possessing the property f is not known to lead to an absurdity.

In particular, a fleeing property is called *opaque*, if the assumption of existence of a natural number possessing f is not known to be non-contradictory either.

Obvious examples of fleeing properties can easily be given.

Now should we assert of a fleeing property f, on the grounds of the principle of the excluded third, that a natural number possessing the property f either exists or cannot exist, then this assertion, precisely because of the nature of fleeing properties, would be an utter falsehood; which shows conclusively that, in the language of intuitionist mathematics, blind applications of the said principle are not permissible.

From the intuitionist standpoint the dogma of the universal validity of the principle of the excluded third in mathematics can only be considered as a phenomenon of history of civilization, of the same order as the former belief in the rationality of π or in the rotation of the firmament about the earth. That the dogma was nevertheless able to retain its currency for so long, may perhaps be explained by the following two circumstances: firstly that (as is easily recognized) within a given domain of mathematical entities previously obtained, for a single assertion the principle is non-contradictory; secondly that the principle stands the test of application to an extensive group of everyday phenomena of the exterior world.

We have seen in the preceding how the first act of intuitionism affected classical mathematics in two ways: in the first place, owing to the disappearance of the logical basis for the continuum, so large a part becomes illusory that essentially only the separable parts of algebra and theory of numbers remain; in the second place even in this remaining portion, several chapters based on the principle of the excluded third have to be rejected. Under these circumstances one might fear that intuitionist mathematics must necessarily be poor and anaemic, and in particular would
[[10]] have no place for analysis. But this fear would have presupposed that infinite sequences generated by the intuitionist self-unfolding of the basic intuition would have to be fundamental sequences, i.e. predeterminate infinite sequences which, like classical ones, proceed in such a way that, from the beginning, the mth term is fixed for each m. Such, however, is not the case; on the contrary, a much wider field of development which includes analysis, and in several places far exceeds the frontiers of classical mathematics, is opened by the

SECOND ACT OF INTUITIONISM

which recognizes the possibility of generating new mathematical entities:

firstly in the form of infinitely proceeding sequences p_1, p_2, . . ., whose terms are chosen more or less freely from mathematical entities previously acquired; in such a way that the freedom of choice existing perhaps for the first element p_1 may be subjected to a lasting restriction at some following p_ν, and again and again to sharper lasting restrictions or even abolition at further subsequent p_ν's, while all these restricting interventions, as well as the choices of the p_ν's themselves, at any stage may be made to depend on possible future mathematical experiences of the creating subject;*

secondly in the form of mathematical species, i.e. properties supposable for mathematical entities previously acquired, and satisfying the condition that, if they hold for a certain mathematical entity, they also hold for all mathematical entities which have been defined to be equal to it, relations of equality having to be symmetric, reflexive and transitive; mathematical entities previously acquired for which the property holds are called elements of the species.

With regard to this definition of species we have to remark firstly that, during the development of intuitionist mathematics, some species will have to be considered as being re-defined time and again in the same [[11]]
way, secondly that a species can very well be an element of another species, but never an element of itself.

Two mathematical entities are called *different*, if their equality has been proved to be absurd.

Two infinitely proceeding sequences of mathematical entities a_1, a_2, . . ., and b_1, b_2, . . . are called *equal* or *identical*, if $a_\nu = b_\nu$ for each ν, and *distinct*, if a natural number s can be indicated such that a_s and b_s are different.

The second act of intuitionism creates the possibility of introducing the *intuitionist continuum* as the species of the *more or less freely proceeding* convergent infinite sequences of rational numbers,† and more

* In former publications I have sometimes admitted restrictions of freedom with regard also to future restrictions of freedom. However this admission is not justified by close introspection and moreover would endanger the simplicity and rigour of further developments. [[12]]

† As the common notion of a rational number and the common notion of a convergent infinite sequence are both imbued with images of measure, the method followed in the text for the introduction of the continuum might suggest that the intuitionist continuum depends on the concept of measure. This, however, is by no means the case. The intuitionist closed continuum can be spread over an arbitrary fundamental sequence which has been completely ordered as an everywhere dense species with a first and a last element, and has been provided with a definition of convergence based exclusively on the relations constituting its everywhere dense order. The metrical method of introducing the continuum which is given in the text was chosen to abbreviate the approach to some applications of the fan theorem.

generally the *intuitionist n-dimensional Cartesian space* as the species of the *more or less freely proceeding* convergent infinite sequences of the 'n-dimensional rational grid,' which expression may be considered self-explanatory. These species will prove to be susceptible of a standard representation making them considerably more surveyable and manageable than the classical species of the predeterminate real numbers and of the predeterminate real points of Cartesian n-dimensional spaces.

The development of this standard representation must be preceded by the introduction of some new concepts.

By a *node of order n* we understand a sequence of n natural numbers ($n \geq 1$), called the *indices* of the node.

A node p' of order $n + m$, ($m \geq 1$), will be called an *mth descendant* of a node p of order n, and p will be called the *mth ascendant of* p', if p is an initial segment of p'. For $m = 1$, p' is also called an *immediate descendant* of p, and p the *immediate ascendant* of p'.

A *finite sequence of nodes* consisting of a node p_1 of order 1, an immediate descendant p_2 of p_1, an immediate descendant p_3 of p_2, . . ., up to an immediate descendant p_n of p_{n-1}, will be called a *rod of order n.*

An *infinite* (not necessarily predeterminate) *sequence of nodes* consisting of a node p_1 of order 1, an immediate descendant p_2 of p_1, an immediate descendant p_3 of p_2, and so on *ad infinitum*, will be called an *arrow.*

Naturally an arrow may grow in complete freedom, i.e. in the passage from p_ν to $p_{\nu+1}$, the choice of a new index for $p_{\nu+1}$ to be joined to those of p_ν may be completely free for each ν, for as long as the creating subject may desire. On the other hand this freedom in the generation of the arrow may at any stage be completely abolished, at the beginning or at any p_ν, by means of a law fixing all further nodes in advance. From this moment the arrow concerned will be called a *sharp arrow.* Furthermore, the freedom in the generation of the arrow, without being completely abolished, may, at any p_ν, undergo some restriction, and this restriction may be intensified at further p_ν's. Finally all these interventions, by virtue of the second act of intuitionism, may, at any stage, be made to depend on possible future mathematical experiences of the creating subject.

We will consider a species of nodes σ to which a law $W(\sigma)$ assigns the following nodes : of order 1 the natural numbers which do not exceed a certain definite natural number m_o, and of each order $n + 1$ the immediate descendants of each node p of order n belonging to σ whose $(n + 1)$th index, joined to those of p, does not exceed a certain definite natural number m_p. Then this law $W(\sigma)$ at the same time defines the species $w(\sigma)$ of the arrows consisting exclusively of nodes of σ. This species of arrows $w(\sigma)$ is called a *fan*, and the law $W(\sigma)$ is called a *fan key.*

For fans can be proved the [[13]]

FAN THEOREM : *If to each arrow α of a fan F has been assigned a natural number $\mu(\alpha)$, then a natural number s can be indicated such that, for any α, $\mu(\alpha)$ is completely determined by the sth node of α.* It follows that, moreover, for $\mu(\alpha)$ a finite maximum can be indicated.

Passing now to the development of the standard representation of the intuitionist continuum and the intuitionist n-dimensional Cartesian space, we will treat explicity only the case of the intuitionist two-dimensional space, also called the *intuitionist plane.* The same reasoning, with little modification, applies to other values of n.

Calling the two-dimensional rational grid simply the 'rational grid,' we shall understand by a *limiting point* an element of the intuitionist plane, i.e. a (not necessarily predeterminate) convergent infinite sequence of elements of the rational grid. A predeterminate limiting point will also be called a *sharp limiting point.* Again, regarding as self-explanatory the meaning of *coincidence* of two limiting points, we shall call the species of the limiting points coinciding with a given limiting point a *limiting point core*, and a limiting point core containing a sharp limiting point, a *sharp limiting point core.*

Denoting by a and n arbitrary integers, we will consider the species of the finite binary fractions $a \,.\, 2^{-n}$ in their natural order, and we will call a pair of these fractions a *grid interval.* In particular the grid intervals consisting, for a certain n and a certain a, of $a \,.\, 2^{-(n+1)}$ and $(a+2)\,.\,2^{-(n+1)}$, will be called $\lambda^{(n)}$*-grid intervals.* They will be $\kappa^{(n)}$*-grid intervals* if a is even. All $\lambda^{(n)}$-grid intervals, for all n, will be λ*-grid intervals,* and all $\kappa^{(n)}$-grid intervals, for all n, will be κ*-grid intervals.* By a *grid square* we shall understand an ordered pair (i.e. a pair consisting of a 'first element' and a 'second element') of grid intervals, by a $\lambda^{(n)}$*-grid square* a similar pair of $\lambda^{(n)}$-grid intervals, by a $\kappa^{(n)}$*-grid square* a similar pair of $\kappa^{(n)}$-grid intervals. All $\lambda^{(n)}$-grid squares, for all n, are λ*-grid squares,* and all $\kappa^{(n)}$-grid squares, for all n, are κ*-grid squares.* With regard to the mutual position of two λ-grid squares a and b, the meaning of the following expressions may be supposed self-explanatory: *a lies inside b, a lies outside b, a touches b internally, a touches b externally.* Furthermore we shall say that a and b *overlap* if a λ-square lying inside both can be indicated; that *a lies within b* if a lies inside b, and does not touch b; and that a and b *lie apart* if they lie outside each other and do not touch each other.

The union g of a fundamental sequence $\kappa_1(g)$, $\kappa_2(g)$, . . . of κ-grid squares lying outside each other will be called a *grid area,* if for each $\kappa_\nu(g)$ we can indicate a finite number of elements $\kappa_{\nu 1}(g)$, $\kappa_{\nu 2}(g)$, . . ., $\kappa_{\nu m_\nu}(g)$ of the same fundamental sequence lying outside each other, and together *enclosing* $\kappa_\nu(g)$, i.e. all touching $\kappa_\nu(g)$ externally in such a way that no place is left for any further κ-grid square touching $\kappa_\nu(g)$ externally, and lying outside $\kappa_{\nu 1}(g)$, . . ., $\kappa_{\nu m_\nu}(g)$.

The union of an arbitrary finite number of κ-grid squares lying outside each other will be called a *grid portion.* With regard to the mutual position of two λ-grid squares or grid portions a and b, the meaning of the following expressions may be considered self-explanatory: *a lies inside b, a lies outisde b, a and b touch each other externally, a and b lie apart, a and b overlap,* while a will be said to lie *within* b, if it lies inside b, and cannot possibly touch any κ-grid square lying outside b. A λ-grid square or grid portion a will be said to *lie inside* or *within the grid area g* if for an s suitably chosen it lies inside the union of $\kappa_1(g)$, $\kappa_2(g)$, . . ., $\kappa_{s-1}(g)$, $\kappa_s(g)$. The grid area g will be said to *lie within the* λ*-grid square, grid portion* or *grid area b* if $\kappa_\nu(g)$ lies within b for each ν.

What is meant by the *measure of a* λ*-grid square* and, in this connection, by *measurability of a grid area,* and by the *measure of a measurable grid area,* may be considered self-explanatory. [14]

A (not necessarily predeterminate) infinite sequence of λ-grid squares k_1, k_2, . . ., such that $k_{\nu+1}$ lies within k_ν for each ν, will be called a *binary point* or simply a *point.*

Two binary points k'_1, k'_2, . . . and k''_1, k''_2, . . . will be said to *coincide* if it is certain that k_μ' and k''_ν overlap for each μ and each ν. Obviously coincidence is a transitive relation. The species of the binary points coinciding with a given binary point will be called a *binary point core* or simply a *point core.*

A *limiting point* will be said to *lie inside the* λ*-grid square* or *grid portion b* if it coincides with a limiting point r_1, r_2, . . . possessing a tail segment inside b; it will be said to *lie within the* λ*-grid square* or *grid portion b* if it lies inside a λ-grid square lying within b.

A *point* k_1, k_2, . . . will be said to *lie inside the* λ*-grid square* or *grid portion b* if k_ν and b overlap for each ν; it will be said to *lie within the* λ*-grid square* or *grid portion b* if it lies inside a λ-grid square lying within b.

A point or limiting point will be said to *lie inside* or *within the grid area g* or to *be surrounded by the grid area g* if it lies inside a grid portion lying within g.

By a $k^{(\nu)}$ ($\nu > 0$) we shall understand a $\lambda^{(4\nu+1)}$-grid square, and by a *standard point* a point k_1, k_2, . . . for which each k_ν is a $k^{(\nu)}$. It can be proved that every limiting point p *coincides* with a standard point q, i.e. to each limiting point p can be assigned a standard point q, in such a way that within each $k^{(\nu)}$ of q lies a tail segment of p. Furthermore, coinciding limiting points coincide with coinciding standard points.

If by the 'unity grid square' L we understand the $\kappa^{(0)}$-grid square consisting of two equal $\kappa^{(0)}$-grid intervals (0, 1), it can be proved in particular that each limiting point p lying inside L coincides with a standard point q lying inside L. The species of the unitary limiting points, i.e. the limiting points lying inside L, will be called the *unitary intuitionist plane* or simply the *unitary plane*, and the species of the unitary standard points, i.e. the standard points lying inside L, will be called the *unitary standard plane.*

By *counting* the finite species of the k' overlapping L, and for each $k^{(\nu)}$ overlapping L *counting* the finite species of the $k^{(\nu+1)}$ lying inside this $k^{(\nu)}$, and overlapping L, we bring about a (1, 1) correspondence between the unitary standard plane and a fan w. This correspondence has far-reaching consequences.

If, for example, we attempt to surround the unitary plane with a grid area ψ, we shall in particular have to surround the unitary standard plane with ψ. So, by virtue of the fan theorem, a natural number m can be indicated such that all unitary standard points corresponding to arrows of w containing the same rod K of order m, must lie inside one and the same grid portion $\rho(K)$ lying within ψ. Now indicating by G the species of the unitary standard points containing K, by H the $k^{(m)}$ corresponding to K, and by H' the grid portion consisting of all $\kappa^{(4m+5)}$- grid squares lying inside L and within H (so covering a grid square concentric and homothetic with H and with side length $\frac{7}{8}$ of the side of H), we remark that if there existed a λ-square lying inside H' and outside $\rho(K)$, a square of a point of G, so a point of G, could be indicated lying outside $\rho(K)$. Consequently no λ-square lying inside H' can lie outside $\rho(K)$, i.e. H' must lie inside $\rho(K)$, hence within ψ. This being the case, independently of the choice of K from the rods of w of order m, finally also L proves to lie within ψ. It follows that *a measurable grid area surrounding all unitary limiting points of the intuitionist plane must have a measure* ≥ 1.

[[15]] How different the plight of the classical Cartesian plane appears if we suppose a procedure which, after the choice of a fixed natural number n, at the end of the mth century from today, will surround the species of all predetermined limiting points defined until then, with a measurable grid area g_m whose measure does not exceed 2^{-n-m}. Then the union of g_1, g_2, g_3, . . . would in the course of centuries constitute a grid area g whose measure would never exceed 2^{-n}, and which would in due time surround all present and future limiting points of the classical Cartesian plane. Hence, as n could be chosen arbitrarily large, there can be no question of any positive measure for the classical Cartesian plane.

Defining limiting numbers, numbers, standard numbers, limiting number cores and number cores analogously with limiting points, points, standard points, limiting point cores and point cores respectively, and considering the notion of a '*distance*' of two limiting number cores self-explanatory, we finally will prove, by means of the fan theorem, that *each full unitary function of the unitary continuum* (i.e. each assignment of a unitary limiting number core $f(z)$ to *each* unitary limiting number core z) *is uniformly continuous.* [[16]]

For, such a full function implies an assignment of a unitary standard number $\varphi(x)$ to *each* unitary standard number x, in such a way that, to coinciding x, coinciding $\varphi(x)$ are assigned. It is with regard to this assignment $\varphi(x)$ that we make the following successive statements:

first, to *each* natural number p_1, a natural number p_2 can be assigned, such that each two standard numbers coinciding with standard numbers whose arrows contain the same rod of order p_2, have a distance smaller than 2^{-p_1};

second (by virtue of the fan theorem), to each natural number p_2 a natural number p_3 can be assigned such that the first p_2 squares of $\varphi(x)$ are everywhere completely defined by the first p_3 squares of x, so that to all standard numbers x whose arrows contain the same rod of order p_3, are assigned the same $k^{(p_2)}$ of $\varphi(x)$, and to all standard numbers x coinciding with standard numbers whose arrows contain the same rod of order p_3, are assigned standard numbers $\varphi(x)$ coinciding with standard numbers whose arrows contain the same rod of order p_2;

[[514]]

third to each natural number p_3 a natural number p_4 can be assigned, such that two arbitrary standard numbers x with a distance $< 2^{-p_4}$ have overlapping $k^{(p_3+1)}$'s, so that both these standard numbers lie within one and the same $k^{(p\ )}$, hence coincide with two standard numbers x whose arrows contain the same rod of order p_3.

Consequently to each natural number p_1 has been assigned a natural number p_4 such that to each two standard numbers x with a distance $< 2^{-p_4}$ have been assigned standard numbers $\varphi(x)$ with a distance $< 2^{-p_1}$, so that also to each two limiting number cores z with a distance $< 2^{-p_4}$ have been assigned limiting number cores $f(z)$ with a distance $< 2^{-p_1}$. *Precisely this is the meaning of saying that $f(z)$ is uniformly continuous.*

1952 C ON ACCUMULATION CORES OF INFINITE CORE SPECIES

In § 1 of my essay '*Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Zweiter Teil: Theorie der Punktmengen*' which appeared in 1919 [1]), I tried among other problems to circumscribe the fragments of the Bolzano–Weierstrass theorem and of Cantor's main theorem which can be preserved in intuitionistic mathematics. Reading over these developments to-day, one finds that they are obsolete and in need of radical recasting. We must acquiesce to the fact that intuitionistic ideas penetrate mathematics only slowly and that remnants of unclear classical ways of thinking are only gradually removed.

Here we shall recast the treatment of the Bolzano–Weierstrass theorem. We shall restrict ourselves to the number continuum, because the argument can be applied without essential change to n-dimensional spaces.

§ 1
Refutation of the Bolzano–Weierstrass theorem

By a *number* we shall mean a real number.

The species of the numbers which are equal to a given number will be called a
[[1]] *number core* or briefly a *core*.

A core p is called an *accumulation core* of the core species Q when for any a and b such that $a \lessdot p \lessdot b$ the open interval (a, b) contains an infinite subspecies of Q.

A core p is called a *limiting core* of the core species Q when for any a and b such that $a \lessdot p \lessdot b$ the open interval (a, b) contains an infinite subspecies of Q in which any two elements have a distance $\gtrdot 1$.

A core p is said to *lie open* with respect to the core species Q when for some a and b such that $a \lessdot p \lessdot b$ the open interval (a, b) cannot contain two cores of Q.

A mathematical species S is called *bounded in number* when for some natural number n there cannot exist a subspecies of S with cardinal number n.

A core species Q is called *unitarily bounded* when it contains only numbers which are $\geqq 0$ and $\leqq 1$.

Using these definitions the Bolzano–Weierstrass theorem can be formulated in both the following forms which are equivalent in classical mathematics:

A-form of the Bolzano–Weierstrass theorem: Every unitarily bounded infinite core species has an accumulation core.

B-form of the Bolzano–Weierstrass theorem: Every unitarily bounded core species without an accumulation core is bounded in number.

[1]) (1919 A)

The A-form is refuted by constructing, in connection with some fleeing property f, the infinite sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$, where, for a down-number ν of f, $a_\nu = \frac{1}{3}+2^{-\nu}$ and for an up-number ν of f, $a_\nu = \frac{1}{4}+2^{-\nu}$. ⟦2⟧

In order to refute the B-form we start with a mathematical assertion α that has not been recognised as testable. Then the creative subject can, in connection with α, generate an infinitely proceeding, positively convergent sequence ρ of rational numbers $b_1, b_2, b_3, \ldots$ according to the instruction: As long as during the choice of the b_n he has experienced neither the truth nor the absurdity of α, every b_n is chosen equal to 2^{-n}. But as soon as between the choice of b_{m-1} and that of b_m he has experienced either the truth or the absurdity of α, b_m and likewise $b_{m+\nu}$ for every natural number ν is chosen equal to 2^{-m}. Then the species σ of the cores which contain an element of ρ is not bounded in number, yet it is impossible that it produces an accumulation core. The latter is proved most easily by verifying successively that such an accumulation core firstly cannot be $\lessdot 0$, secondly cannot be $\gtrdot 0$ and thirdly cannot be $= 0$.

§ 2

A fragment of the A-form of the Bolzano–Weierstrass theorem that can be preserved in intuitionistic mathematics

Let Q be a unitarily bounded infinite core species, ε an arbitrarily small given number $\gtrdot 0$, *m an arbitrarily large given natural number. Then an interval $\leqq \varepsilon$ can be found that contains m elements of Q.*

For let n be a natural number such that $2^{-n} \leqq \varepsilon$ and let us understand by a $\lambda_u^{(n)}$-interval a $\lambda^{(n)}$-interval that is covered partly or entirely by the unit interval $(0, 1)$. Let M be the number of existing $\lambda_u^{(n)}$-intervals. Let R be a subspecies of Q, containing Mm elements. Then we can associate to every element of R a $\lambda_u^{(n)}$-interval such that its distance to the centre of that interval is less than $7 \cdot 2^{-n-4}$. After this we can find a $\lambda_u^{(n)}$-interval that is associated to at least m elements of R and which therefore contains at least m elements of R.

(Here, from the impossibility that every member of a finite species of natural numbers is $< m$, we draw the conclusion that at least one is $\geqq m$. For a finite species of real numbers the analogous impossibility would only guarantee that for an arbitrary real number $l \lessdot m$ at least one of them is $\geqq l$.)

§ 3

A fragment of the B-form of the Bolzano–Weierstrass theorem that can be preserved in intuitionistic mathematics

If a unitarily bounded core species Q has the property that every core lies open with respect to Q, then Q is bounded in number.

For then it is possible to associate to every unitary standard number π ⟦3⟧

$(k_u'(\pi), k_u''(\pi), \ldots)$ an interval, and consequently a λ_u-interval containing π, which cannot contain two cores belonging to Q; therefore there also exists a k_u-interval ${}_0k_u(\pi)$ which is a member of π and which cannot contain two cores belonging to Q. By the fan theorem a natural number m can be found such that ${}_0k_u(\pi)$ is the same for all the standard numbers which have a member $k_u^{(m)}(\pi)$ in common.

Let M be the number of existing $k_u^{(m)}$-intervals; then the number of occuring ${}_0k_u$-intervals is also M. And every unitary number, consequently every core in Q, lies inside one of these ${}_0k_u$-intervals. *If a core* belonging to Q lies inside a ${}_0k_u$-interval, it is *the only core of Q in that interval*. It follows that it is impossible that there exist $M+1$ different cores in Q.

FIXED CORES WHICH CANNOT BE FOUND, THOUGH THEY ARE CLAIMED TO EXIST BY CLASSICAL THEOREMS

1952 D

§ 1

In the past I have already called attention to transformations for which fixed cores (i.e. invariant point cores) claimed by some classical theorem cannot be constructed. ⟦1⟧ However, the possibility always remained open that it would be proved in the future that the transformation in question admits a larger species of fixed cores than was claimed by the corresponding theorem; in some cases it was even possible that the transformation would prove to be the identity. [1])

For the transformation defined below it is not only the case that the fixed core claimed by a classical theorem cannot be constructed, it is also certain that, if at any time it will be constructed, then it will be the only fixed core of the transformation.

§ 2

In a Euclidean plane with orthogonal Cartesian coordinates x and y we consider the square disc Q, being the species of point cores with coordinates $\geqq -1$ and $\leqq 1$, and the boundary s of Q, being the species of the points of Q for which $|x|$ and $|y|$ cannot be both < 1. Let M be a rational point core of Q which lies apart from s. Let P be any point core of Q and P_s a point core of s which lies collinear with P and M. Then, if we denote bg tg $\frac{y(P)-y(M)}{x(P)-x(M)}$ by $\varphi_M(P)$ and $\frac{MP}{MP_s}$ by $\rho_M(P)$, ρ_M is defined for every rational point core of Q and φ_M for every rational point core of Q except for M. Let us further denote by t_{Mn} the transformation

$$\begin{aligned} \rho'_M &= \rho_M \\ \varphi'_M &= \varphi_M + \underline{\text{bg tg}}\ 2^{-n} \end{aligned}$$

(where by $\underline{\text{bg tg}}$ is meant the smallest positive value of bg tg); then t_{Mn} is also defined for every rational point core except for M. Thereupon extended by continuity to Q, t_{Mn} is obtained as a one-to-one uniformly continous transformation of Q into itself.

We choose in Q two rational point cores A and B, apart from each other and from s, and a mathematical assertion α which has as yet not been recognised as testable. Then the creating subject can generate an infinitely proceeding sequence S of one-to-one uniformly continuous transformations $t_1, t_2, \dots$ of Q into itself

[1]) See for instance (1952 A).

according to the following direction: As long as, during the successive choices of the t_n, the creating subject has experienced neither the contradictority nor the non-contradictority of α, the identity is chosen for t_n. But as soon as between the choice of t_{r-1} and that of t_r the contradictority of α has become known to the creating subject, t_r and likewise $t_{r+\nu}$ for every natural number ν is chosen equal to t_{Ar}. And as soon as between the choice of t_{s-1} and that of t_s the non-contradictory of α has become known to the creating subject, t_s and likewise $t_{s+\nu}$ for every natural number ν is chosen equal to t_{Bs}.

The sequence S converges positively to a one-to-one uniformly continuous transformation t of Q into itself, for which firstly as yet no fixed core can be indicated, whilst secondly it is certain that it will never be possible to find two different fixed cores.

This certainty is reached by successively reducing to absurdity the simultaneous invariance of A and B, and the invariance of a point core which lies apart from A as well as from B. For this entails that a fixed core of t must necessarily either lie in A as the only fixed core, or in B as the only fixed core.

§ 3

The following fragment of the classical theorem, that every one-to-one uniformly continuous transformation of a square disc into itself necessarily has a fixed core, which theorem was refuted in § 2, can be proved intuitionistically (in analogy to other fixed-core theorems):

For any one-to-one uniformly continuous transformation τ of a Euclidean square disc into itself and any rational number $\varepsilon \gtrdot 0$ a point core can be found which has a distance $\leqq \varepsilon$ from its image.

We shall prove this theorem for the square disc Q considered in § 2. By the *displacement vector* of a point core P in Q we shall understand the directed linesegment joining P with its image P' by τ. Either we can find on s a point core with displacement vector $\leqq \varepsilon$ or everywhere on s the displacement vector is $\geqq \frac{3}{4}\varepsilon$. In the first case nothing remains to be proved; thus only the second case remains to be considered. By the *index* $i(k)$ of a polygon k we understand the number of times that the direction of the displacement vector rotates through 2π when P describes k in the sense in which at the same time the vector FP rotates through an angle 2π, where F is some point core inside k at a distance $\gtrdot 0$ from k.

As the displacement vector of a point P which describes s permanently makes an angle $\geqq \frac{1}{4}\pi$ with the direction OP, we have $i(s) = 1$.

We construct a division of Q into congruent squares, homothetical with Q, say $q_1, q_2, \ldots, q_f$, which are small enough so that in every q_ν the variation of the displacement vector is less than $\frac{1}{2}\varepsilon$. We denote the boundary of q_ν by s_ν.

Let us suppose for a moment that in every vertex core of every q_ν the displacement vector would be $\gtrdot \frac{3}{4}\varepsilon$, then everywhere in Q the displacement vector would be $\geqq \eta \gtrdot \frac{1}{4}\varepsilon$. Let us further suppose that for a certain s_{ν_1} the index were $\neq 0$, then on s_{ν_1} there would exist pairs of points with displacement vectors differing in direction as little as we wish from π; the difference of their displacement vectors would be $\gtrdot \frac{1}{2}\varepsilon$, which is impossible. Consequently we would find $i(s_\nu) = 0$ for every ν, which entails $i(s) = \sum_{\nu=1}^{f} i(s_\nu) = 0$, and this again is impossible.

Hereby our hypothesis that in every vertex core of every q_ν the displacement vector would be $\gtrdot \frac{3}{4}\varepsilon$, has been shown to be absurd. Therefore we can find at least one vertex core of a q_ν where the displacement vector is $\leqq \frac{7}{8}\varepsilon$. This completes the proof of the theorem. [2])

[2]) An analogous reasoning was given in the paper cited under [1]), where on p. 2, line 3 from the bottom, there must be read $\leqq \frac{7}{8}\vartheta$ instead of $\leqq \frac{3}{4}\vartheta$ (because the absurdity of the union of a finite species of assertions does not necessarily entail the absurdity of one of these assertions).

1954 A

POINTS AND SPACES

L. E. J. BROUWER

1. **The gradual disengagement of mathematics from logic.** Beginning with a historical review of the development of mathematical thought, we have
[1] to consider successively (cf. **10**, pp. 139–140):

(1) *The observational period.* For some familiar regularities of (outer or inner) experience of time and space, which, to any attainable degree of approximation, *seemed* invariable, absolute and sure invariability was postulated. These regularities were called *axioms* and were put into language. Thereupon extensive systems of properties were developed from the linguistic substratum of the axioms by means of *reasoning*, guided by experience but linguistically following and using the principles of classical logic. This logic was considered autonomous, and mathematics was considered more or less dependent on logic.

(2) *The revolution in science of space.* In the course of the 19th and the beginning of the 20th century, on the one hand geometry was gradually metamorphosed into a chapter of the science of numbers, and on the other hand Euclidean three-dimensional geometry lost its privileged character since a great number of other geometries originating from logical speculations, with properties distinct from the traditional but no less beautiful, found an arithmetical representation likewise.

(3) *The old formalist school.* Encouraged by the important part which had been played in the above metamorphosis of geometry by the *logico-linguistic method*, the old formalist school merged logic and mathematics into a single linguistic science, operating on meaningless words or symbols by means of logical rules, thus divesting logic and mathematics of their difference in character as well as of their autonomy.

(4) *The pre-intuitionist school*, by which autonomy and apriority were re-established for logic and established for the major part of "separable" mathematics. For the continuum however, this school on some occasions seems to have contented itself with an ever-unfinished and ever-denumerable set of real numbers which can never have a measure positively different from zero; on other occasions it seems to have stuffed the continuum with elements providing measure by means of some logical axiom. In both cases, in its further development of mathematics, it has unreservedly applied classical logic. So, logic and an introductory part of mathematics were autonomous here. The rest of mathematics was dependent on them.

(5) *The new formalist school*, by which autonomy and apriority were postulated for *mathematics of the second order*, i.e., for scientific consideration of the symbols

Received September 1, 1953. Lectures presented at the Seminar of the Canadian Mathematical Congress at Kingston, Ont., Aug. 10–31, 1953.

occurring in purified mathematical language, and of the rules of manipulating these symbols. This scientific consideration of language, later on called *metamathematics*, although using complete induction, apriorizes much less than pre-intuitionism. What it seems to have overlooked is that between perfection of mathematical language and perfection of mathematics proper, no clear connection can be seen.

(6) *The intervention of intuitionism* by two acts of which the first seems necessarily to lead to destructive and sterilizing consequences, whereas the second yields ample possibilities for recovery and new developments.

The first act of intuitionism completely separates mathematics from mathematical language, in particular from the phenomena of language which are described by theoretical logic. It recognizes that mathematics is a languageless activity of the mind having its origin in the basic phenomenon of the perception of a *move of time*, which is the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the common substratum of all two-ities, the mental creation of the *empty two-ity*. This empty two-ity and the two unities of which it is composed, constitute the *basic mathematical systems*. And the basic operation of mathematical construction is the *mental creation of the two-ity of two mathematical systems previously acquired*, and the consideration of this two-ity as a new mathematical system.

It is introspectively realized how this basic operation, continually displaying *unaltered* retention by memory, successively generates each natural number, the infinitely proceeding sequence of the natural numbers, arbitrary finite sequences and infinitely proceeding sequences of mathematical systems previously acquired, finally a continually extending stock of mathematical systems corresponding to "separable" systems of classical mathematics.

The second act of intuitionism recognizes the possibility of generating new mathematical entities:

First, in the form of infinitely proceeding sequences whose terms *are chosen more or less freely from mathematical entities previously acquired*; in such a way that the freedom existing perhaps at the first choice may be irrevocably subjected, again and again, to progressive restrictions at subsequent choices, while all these restricting interventions, as well as the choices themselves, may, at any stage, be made to depend on possible future mathematical experiences of the creating subject; ⟦2⟧

Secondly, in the form of mathematical *species*, i.e., *properties supposable for mathematical entities previously acquired*, and satisfying the condition that, if they hold for a certain mathematical entity, they also hold for all mathematical entities which have been defined to be *equal* to it, equality having to be symmetric, reflexive, and transitive, and the empty two-ity being forbidden to be ⟦3⟧ equalized to an empty unity. Mathematical entities for which the property in question holds, are called *elements* of the corresponding species.

In the edifice of mathematical thought based on the first and second act of intuitionism, language plays no other part than that of an efficient, but never infallible or exact, technique for memorizing mathematical constructions, and for suggesting them to others; so that the wording of a mathematical theorem has no sense unless it indicates the construction either of an actual mathematical entity or of an incompatibility (e.g., the identity of the empty two-ity with an empty unity) out of some constructional condition imposed on a hypothetical mathematical system. So that mathematical language, in particular logic, can never by itself create new mathematical entities, nor deduce a mathematical state of things.

However, notwithstanding this rejection of classical logic as an instrument to discover mathematical truths, intuitionist mathematics has its general introspective theory of mathematical assertions, a theory which with some right may be called *intuitionist mathematical logic*, and to which belongs a theory of the *principle of the excluded third.*

In intuitionism this principle is also called the *principle of judgeability*. It is either (in its *simple* form) an assertion A' about a single primary assertion A or (in its *extended* form) a species (A'_σ) of assertions about the elements of a species (A_σ) of primary assertions saying that each A_σ can be *judged*, i.e., can either be proved to be true or be proved to be contradictory.

This principle of judgeability entails the following two corollaries which are weaker:

(i) *The principle of testability*, being (in its extended form) a species (A''_σ) of assertions about the elements of the species (A_σ) saying that each A_σ can be *tested*, i.e., can either be proved to be non-contradictory or be proved to be contradictory.

(ii) *The principle of reciprocity of complementarity*, being (in its extended form) a species (A'''_σ) of assertions about the elements of the species (A_σ), saying that each A_σ, if proved to be non-contradictory, can also be proved to be true.

In intuitionism, of course, all three of these principles, being assertions about assertions, are only then "realized," i.e., only then convey truths, when these truths have been experienced. On this basis it can be proved that the extended principles are not only not true, but even contradictory. On the other hand, in their simple form, all three of the principles are, although not true, at
[[4]] least non-contradictory.

The assertion of an incompatibility is called a *negative* assertion. In the field of negative assertions, the principle of reciprocity of complementarity is realized, and the principles of judgeability and testability are equivalent (**9**, pp. 1245–
[[5]] 1246).

2. The refutation of the principle of the excluded third. The first act of intuitionism enables us to construct the linear rational grid. On the basis of this, by virtue of the second act of intuitionism, we introduce the linear continuum in the following way: By a *limiting number* we understand a (not necessarily predeterminate) convergent sequence of rational numbers. Then, regarding as self-explanatory the meaning of a *coincidence* of two limiting numbers, we call the species of limiting numbers coinciding with a given limiting number, a *limiting number core.* A predeterminate limiting number is also called a *sharp limiting number*, and a limiting number core containing a sharp limiting number is called a *sharp limiting number core.* The species of the limiting number cores is called the *linear continuum* or the *continuum.*

In order to furnish examples refuting the principle of the excluded third and its corollaries, we introduce the notion of a *drift* (cf. **9**, pp. 1246–1247). By a drift we understand the union γ of a convergent fundamental sequence of limiting number cores $c_1(\gamma)$, $c_2(\gamma)$, . . . called the *counting cores* of the drift, and the accumulation number core $c(\gamma)$ of this sequence, called the *kernel* of the drift, all counting cores lying apart from each other and from the kernel. (We say that a lies *apart* from b if there is some natural number n such that $|b - a| > 2^{-n}$.)

Let α be a mathematical assertion so far neither tested nor recognized as testable. Then, in connection with the assertion α and with a drift γ the creating subject can generate an infinitely proceeding sequence $R(\gamma, \alpha)$ of limiting number cores $c_1(\gamma, \alpha)$, $c_2(\gamma, \alpha)$, . . . according to the following direction: As long as during the choice of the $c_n(\gamma, \alpha)$ the creating subject has not experienced the truth of α [has neither experienced the truth nor the absurdity of α], each $c_n(\gamma, \alpha)$ is chosen equal to $c(\gamma)$. But as soon as between the choice of $c_{r-1}(\gamma, \alpha)$ and that of $c_r(\gamma, \alpha)$ the creating subject has experienced the truth of α [has either experienced the truth or the absurdity of α], $c_r(\gamma, \alpha)$, and likewise $c_{r+\nu}(\gamma, \alpha)$ for each natural number ν, is chosen equal to $c_r(\gamma)$. This sequence $R(\gamma, \alpha)$ converges to a limiting number core $C(\gamma, \alpha)$ [$D(\gamma, \alpha)$] which will be called a *conditional checking-core of γ through α* [*direct checking-core of γ through α*].

Let γ be a drift whose counting cores are rational and whose kernel is irrational. Then the assertion of the rationality of a $D(\gamma, \alpha)$ is not judgeable, but it *is* testable, because the assertion of irrationality of $D(\gamma, \alpha)$ would entail the simultaneous contradictority of the truth and the absurdity of α, which is an absurdity.

On the other hand, truth of α and rationality of $C(\gamma, \alpha)$ are equivalent. So the assertion of the rationality of $C(\gamma, \alpha)$ is neither judgeable nor testable. For, non-contradictority of rationality of $C(\gamma, \alpha)$ would entail non-contradictority of α, i.e. testability of α, which was presupposed not to exist. Furthermore, if some day α would prove to be non-contradictory without being true, rationality of $C(\gamma, \alpha)$ likewise would be non-contradictory without being true. So for rationality of $C(\gamma, \alpha)$, just as for α, non-contradictority would not be equivalent to truth.

Obviously the field of validity of the principle of the excluded third is identical with the intersection of the field of validity of the principle of testability and that of the principle of reciprocity of complementarity. Furthermore, the first field of validity is a *proper* subfield of each of the others, as is shown by the following examples:

Let A be the species of the direct checking-cores of drifts with rational counting cores, B the species of the irrational limiting number cores, C the union of A and B. Then all assertions of rationality of an element of C satisfy the principle of testability, while, as we have seen, there are assertions of rationality of an element of C not satisfying the principle of the excluded third.

Again, all assertions of equality of two limiting number cores satisfy the principle of reciprocity of complementarity, whereas there are assertions of equality of two limiting number cores not satisfying the principle of the excluded third.

In the domain of mathematical assertions the property of absurdity, like the property of truth, is a *universally additive property*, that is to say, if it holds for each element α of a species of assertions, it also holds for the assertion which is the union of the assertions α. *This property of universal additivity does not obtain for the property of non-contradictority.* However, non-contradictority *does* possess the weaker property of *finite additivity*, that is to say, if the assertions ρ and σ are non-contradictory, the assertion τ, which is the union of ρ and σ, is also non-contradictory.

Applying the latter theorem to the special non-contradictory assertions that are the enunciations of the principle of the excluded third for a single assertion, we see that a simultaneous enunciation of this principle for a finite number of
⟦6⟧ assertions is likewise non-contradictory.

As to the long belief in the universal validity of the principle of the excluded third in mathematics, intuitionism considers it as a phenomenon of the history of civilization of the same kind as the old-time belief in the rationality of π or in the rotation of the firmament on an axis passing through the earth. And intuitionism tries to explain the long persistence of this dogma by two facts: first, the obvious non-contradictority of the principle for an arbitrary single assertion; secondly, the practical validity of the whole of classical logic for an extensive group of simple every-day phenomena. The latter fact apparently made such a strong impression that the *play* of thought which classical logic originally was, became a deep-rooted *habit* of thought which was considered not only as useful but even as aprioristic.

The above rejection of the universal truth of the principle of the excluded third in mathematics will make it plausible that intuitionist arguing requires a preliminary formulation of several definitions which sometimes split atomic notions of classical mathematics.

Two mathematical entities will be called *different* if their equality proves to be absurd. The notation for equality and difference will be $=$ and $\neq$ respectively.

Two infinite sequences of mathematical entities $a_1, a_2, \ldots$ and $b_1, b_2, \ldots$ will be said to be *equal*, or *identical*, if $a_\nu = b_\nu$ for each ν, and *distinct*, if a natural number can be indicated (or calculated) such that a_n and b_n are different.

A species is called *discrete* if any two of its elements can be proved either to be equal or to be different.

If the species M possesses an element which cannot possibly belong to the species N, we shall say that M *deviates* from N.

The species M will be called a *subspecies* of the species N, and we shall write $M \subset N$ if every element of M can be proved to belong to N. If, in addition, N deviates from M, then M is called a *proper* subspecies of N. If each element of N either belongs to M or cannot possibly belong to M, then M is called a *removable* subspecies of N.

Two species are said to be *equal*, or *identical*, if for each element of either of them an element of the other, equal to it, can be indicated. They are called *different* if their equality is absurd, and *congruent* if neither can deviate from the other.

Let M be the linear continuum, A and B the species of the rational and the irrational limiting number cores respectively, then M and the union of A and B are *congruent and different at the same time*!

A species which cannot possess an element is said to be *empty*. Two different species whose intersection is empty are called *disjoint*.

If M and N are disjoint subspecies of the species P, and the union of M and N is congruent to P, we shall say that P is *composed* of M and N, and that M and N are *conjugate subspecies* of P. Thus, e.g., the species of exponents of Fermat's equation which render it solvable and unsolvable respectively, are conjugate subspecies of the species of the natural numbers.

For a given P, for any subspecies M, a subspecies N can be indicated such that M and N are conjugate subspecies of P. This N, in general, is not even uniquely determined by P and M. Thus, e.g., if P is the linear continuum, and M the species of the irrational limiting number cores, then for N we may choose the species of those limiting number cores whose rationality is non-contradictory as well as the species of the rational limiting number cores.

If H and K are disjoint subspecies of the species P, and the union of H and K is identical with P, so that H and K are conjugate removable subspecies of P, we shall say that P *splits* into H and K. Thus, e.g., the species of the prime numbers and of the composite numbers are *conjugate removable subspecies* of the species of the natural numbers.

For an arbitrary proper subspecies H of P one cannot, in general, indicate a K such that H and K are conjugate removable subspecies of P. There are even species (e.g., the linear continuum) which possess no removable proper subspecies at all.

If V and W are conjugate subspecies of P, and if in addition V consists of those elements of P which cannot belong to W, and W of those elements of P which cannot belong to V, we shall say that P is *directly composed* of V and W, and that V and W are *directly conjugate subspecies* of P. Thus, e.g., the species consisting of those elements of P for which a certain negative property is true and absurd respectively, are directly conjugate subspecies of P.

If between two species M and N a (not necessarily predeterminate) 1-1 correspondence can be created, i.e., if M can be mapped onto N in such a way

that equal and only equal elements of M have equal images in N, while each element of N is the image of some element of M, we shall say that M and N
[[7]] are *equipotential.*

A species which is equipotential to some natural number [to the infinite sequence of natural numbers] will be called *finite* [*denumerably infinite*].

A species which contains a denumerably infinite subspecies will be called *infinite.*

3. Spreads and fans. *Spreads* and *fans* are fundamental notions in intuitionism. Their introduction requires some further definitions.

By a *node of order n* we understand a sequence of n natural numbers ($n \geqslant 1$) called the *constituents* of the node.

A node p' of order $n + m$ ($m \geqslant 1$) will be called an mth *descendant* of the node p of order n, and p will be called the mth *ascendant* of p', if the sequence of constituents of p is an initial segment of the sequence of constituents of p'.

If $m = 1$, p' will also be called an *immediate descendant* of p and p the *immediate ascendant* of p′.

The species Q_p of the immediate descendants of the node p of order n considered in their natural order (i.e., ordered according to their last constituent) will be called a *row of nodes of order* $n + 1$ and the *ramifying row* of p, while p will be called the *dominant* of Q_p.

The species of the nodes of order 1 considered in their natural order will be called the *row of nodes of order* 1.

A finite sequence of nodes consisting of a node p_1 of order 1, an immediate descendant p_2 of p_1, an immediate descendant p_3 of $p_2, \ldots$, up to an immediate descendant p_n of p_{n-1}, will be called a *rod of order n.*

An infinite (not necessarily predeterminate) sequence of nodes consisting of a node p_1 or order 1, an immediate descendant p_2 or p_1, an immediate descendant p_3 of p_2, and so on *ad infinitum*, will be called an *arrow.*

Naturally an arrow may grow in complete freedom, i.e., in the passage from p_ν to $p_{\nu+1}$, the choice of a new constituent for $p_{\nu+1}$ to be joined to those of p_ν may be completely free for each ν, for as long as the creating subject may desire. On the other hand this freedom in the generation of the arrow may at any stage be completely abolished, at the beginning or at any p_ν, by means of a law fixing all further nodes in advance. From this moment the arrow concerned will be called a *sharp arrow.* Furthermore, the freedom in the generation of the arrow, without being completely abolished, may, at any p_ν, undergo some restriction, and this restriction may be intensified at further p_ν's. Finally, all these interventions, by virtue of the second act of intuitionism, may, at any stage, be made to depend on possible future mathematical experiences of the creating subject.

Let ρ be a *natural denumeration* of the species of the nodes, i.e., a denumeration $a_1, a_2, \ldots$ of the nodes such that each node comes before its descendants, and before the nodes which it precedes in its row of nodes. Then, without

[[528]]

knowledge of further details of this denumeration, as soon as in ρ for each a_ν a sequence

$$a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots,$$

with ever increasing indices, can be indicated as its ramifying row, the sequence of constituents of any given a_ν can be reconstructed.

An example of a natural denumeration of the species of the nodes can be given as follows: Let G_n be the species of the nodes of order $\leqslant n$ and constituents $\leqslant n$, $G_{n,\nu}$ the species of the nodes of G_n of order ν, and A_n $(n \geqslant 2)$ the species of the nodes of G_n not belonging to G_{n-1}. Each $G_{n,\nu}$ is counted in such a way that p precedes q if the first constituent in which they differ is smaller for p than for q. If we then make each $G_{n,\nu}$ precede $G_{n,\nu+1}$ we get a natural denumeration Δ_n of G_n. Finally, by successively counting G_1 after Δ_1, A_2 after Δ_2, A_3 after Δ_3, and so on, we arrive at a natural denumeration of the species of the nodes.

We proceed to consider a (not necessarily predeterminate) species of nodes K containing: [[8]]

(i) of the nodes of order 1, either all natural numbers or those and only those natural numbers which do not exceed a definite natural number m_0;

(ii) for each $n > 1$, of the nodes of order $n + 1$ which are immediate descendants of the node p of order n belonging to K, either all of them or those and only those whose $(n + 1)$st constituent joined to those of p does not exceed a definite natural number m_p. [[9]]

Such a species of nodes K will be called a *spread direction*, and the species $w(K)$ of the arrows which consist of nodes of K will be called a *spread*.

The spread direction for which from the above alternatives always the first is chosen is called the *universal spread direction*, and the corresponding spread is called the *universal spread*.

A spread direction for which from the above alternatives always the second is chosen is called a *fan direction*, and the corresponding spread is called a *fan*.

As each spread direction is a subspecies of the universal spread direction USD (just as each spread is a subspecies of the universal spread US), any natural denumeration (in the above sense) of USD generates a natural denumeration of each spread direction. Furthermore, if $a_1, a_2, \ldots$ is a natural denumeration of a spread direction K, and for each a_ν a finite or denumerably infinite sequence

$$a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots,$$

with ever increasing indices, can be indicated as its ramifying row, then for any given a_ν the sequence of its constituents in K can be reconstructed.

A node b of a spread direction K, together with its descendants in K, constitutes a removable subspecies $\pi_b(K)$ of K which will be called a *sector direction*, and the species $P_b(K)$ of the arrows composed of nodes of $\pi_b(K)$ will be called a *sector*. Both $\pi_b(K)$ and $P_b(K)$ will be said to be *dominated* by their "*top*" b. We shall speak of a *free sector* [*sector direction*], if b is of order 1, and of a *horned sector* [*sector direction*] of order n, if b is of order $n + 1$ $(n \geqslant 1)$. In the latter case the constituents of the immediate ascendant of b will be said to form the *horn* of the sector [sector direction].

A subspecies of the spread direction K will be called *thin* if none of its nodes is a descendant of any other of its nodes.

[[8]] If a (not necessarily predeterminate) subspecies of the spread direction K has the property that no arrow of K can avoid it, it will be called a *crude block* of K. A crude block of K which is thin and removable will be called a *proper block* or simply a *block* of K.

The nodes of K which are not descendants of the block $B(K)$ of K constitute a removable subspecies $\tau_B(K)$ of K which will be called a *free stump*, and which we shall say is *carried* by the block $B(K)$.

A node b belonging to $\tau_B(K)$, together with its descendants in $\tau_B(K)$, constitutes a removable subspecies ${}_b\sigma_B(K)$ of $\tau_B(K)$ which will be called a *pyramid*, and which we shall say is *dominated* by its "*top*" b. We shall speak of a *free pyramid* if b is of order 1, and of a *horned pyramid* of order n if b is of order $n + 1$ $(n \geqslant 1)$. In the latter case the sequence of constituents of the immediate ascendant of b will be said to constitute the *horn* of ${}_b\sigma_B(K)$.

If from the free pyramid ${}_b\sigma_B(K)$ [from the horned pyramid ${}_b\sigma_B(K)$ of order n] we take away the top b, the remainder ${}_b\rho_B(K)$ (also in the case of its reducing to "nothing," if b belongs to B), will be called a *horned stump* of order 1 [of order $n + 1$]. The constituents of the removed top b will be said to constitute the *horn* of ${}_b\rho_B(K)$.

If from all nodes of a horned stump ${}_b\rho_B(K)$ *the horn is taken away, the remainder will be a free stump* ${}_b\tau_B(K)$. This holds also in the case of b belonging to B, if "nothing" is added to the species of the free stumps. If ${}_b\rho_B(K)$ was of order n, we shall call ${}_b\tau_B(K)$ a *free substump of* $\tau_B(K)$ *of rank n, dominated by b.*

To explain the notion of *absorption of a row of free substumps of rank n by a free substump of rank* $n - 1$, let $b_1, b_2, \ldots$ be a row of nodes of order n, dominated by the node a, and for each ν let β_ν be the last constituent of b_ν. For each ν, to each node of ${}_{b_\nu}\tau_B(K)$ we add β_ν as a first constituent, and to the horned stump of order 1 thus acquired we add the node β_ν, thus arriving at a "row" of free pyramids $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ whose union is ${}_a\tau_B(K)$, *a free substump of* $\tau_B(K)$ *of rank* $n - 1$. This process of absorption can also be effected if some or all of the ${}_{b_\nu}\tau_B(K)$ reduce to nothing.

In an analogous way, by absorption of a finite sequence or a fundamental sequence of free stumps of spread directions K_ν a free stump of a new spread direction K comes into being.

4. Well-ordered blocks and stumps. At this point, before continuing the study of spreads and fans, we have to insert some considerations about *well-ordered species.*

A discrete species D is said to be *completely ordered* if for any two *different* elements of D, say a and b, one of the two mutually exclusive relations $a < b$ (equivalent to $b > a$) and $a > b$ (equivalent to $b < a$) is realized, in such a way that $a < b$, $a = r$ and $b = s$ implies $r < s$, and $a < b$ and $b < c$ implies $a < c$.

Let R be a fundamental sequence [an ordered finite species] of disjoint completely ordered species N_ν. We construct a complete order of the union M of the N_ν in the following way: Let e' belong to N' and e'' to N''. Then we put $e' < e''$ in M if either $N' < N''$ in R or $N' = N'' = \bar{N}$ and $e' < e''$ in $\bar{N}$. Denoting the species M ordered in this way by $\bar{M}$, we write

$$\bar{M} = N_1 + N_2 + \dots \quad [\bar{M} = N_1 + N_2 + \dots + N_m] \text{ or } \bar{M} = \sum_\nu N_\nu,$$

and we shall say that $\bar{M}$ is the *ordinal sum* of the N_ν. The generation of an ordinal sum will be called *ordinal addition*.

On the basis of this definition of ordinal addition we can generate a continually extending stock of well-ordered species according to the following rules:

(1) Each species containing one and only one element is a well-ordered species, and, as such, will be called a *basic species*.

(2) If, out of the available stock of well-ordered species previously acquired, a fundamental sequence of disjoint well-ordered species has been indicated, their addition will be called a *first generating operation*, and their ordinal sum will again be called a well-ordered species and, as such, will be added to the stock.

(3) If, out of the available stock of well-ordered species previously acquired, a non-vanishing ordered finite sequence of disjoint well-ordered species has been indicated, their addition will be called a *second generating operation*, and their ordinal sum will again be called a well-ordered species and, as such, will be added to the stock.

In the case that only the second, not the first, generating operation is effected, we speak of *bounded* well-ordered species.

Let F be a well-ordered species. All well-ordered species which, at some stage, have played a part during the construction of F will be called *constructional subspecies* of F. The constructional subspecies of F which have played a part in the final generating operation of F, will be denoted by F_ν (ν passing through the sequence of natural numbers or through an initial segment of it) and will be said to constitute the *row of constructional subspecies of order* 1 of F. The constructional subspecies of order 1 of F_ν, will be denoted by $F_{\nu,\nu}$ (ν varying as above) and will be said to constitute a *row of constructional subspecies of order* 2 of F. In general, the row of constructional subspecies of order 1 of $F_{\nu_1 \dots \nu_k}$ will be denoted by $F_{\nu_1 \dots \nu_k \nu}$ (ν varying as above) and will be said to constitute a *row of constructional subspecies of order* $k + 1$ of F. F itself will be considered as its own *constructional subspecies of order zero*.

In this way each basic species, that is, each element, of F, and each constructional subspecies of F, turns out to be a constructional subspecies of finite order (which order, however, for appropriately chosen constructional subspecies may increase indefinitely. This property is easily proved by the *inductive method*, i.e., by remarking that it holds if F is a basic species, and that when a generating operation is performed, it holds for the generated ordinal sum if it holds for the terms of the sum. By the same method we state that the species of sequences of indices of the constructional subspecies of a well-ordered species is a removable subspecies of USD, that every well-ordered species in whose construction the first generating operation has been effected at least once is denumerably infinite, and that every bounded well-ordered species is finite.

It is also by the inductive method that we shall prove the following theorem: *For each well-ordered species F there is a 1-1 correspondence between the species of its constructional subspecies of non-vanishing order and a free stump τ such that each sequence of indices of a constructional subspecies of F corresponds to an equal sequence of constituents of a node of τ, while a basic species of F corresponds to a node of the block carrying τ, and the union of an F_ν and its constructional subspecies corresponds to a free pyramid of τ.*

For, let

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1} 1},\ F_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1} 2},\ \ldots$$

be a row of constructional subspecies of order n of F, and for each ν, let

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1} \nu}$$

be provided with a 1-1 equality-mapping of the sequences of the indices following ν of its constructional subspecies onto a free stump $\tau_{B_\nu}(K_\nu)$ (containing as constituents of its nodes only indices of order $> n$ from F). Then the row

$$\tau_{B_1}(K_1),\ \tau_{B_2}(K_2),\ \ldots$$

can be considered as a row of free substumps of rank 1 of a free stump $\tau_B(K)$, by which it can be absorbed. Accomplishing this absorption, and assigning to each sequence of indices following ν_{n-1} of a constructional subspecies of $F_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}$ an equal sequence of constituents of a node of $\tau_B(K)$, we arrive at a 1-1 equality-mapping of the sequences of the indices following ν_{n-1} of the constructional subspecies of $F_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}$ onto $\tau_B(K)$. And if $F_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}$ is a basic species of F the mapping as required by the theorem exists as a mapping of nothing onto "nothing."

Blocks and free stumps which can play the part of a $B(K)$ and a $\tau_B(K)$ as required by the above theorem will be called *well-ordered blocks* and *well-ordered free stumps* respectively. The free pyramids which are contained in a well-ordered free stump will be called *well-ordered free pyramids.* Horned pyramids which after removal of their horns become well-ordered free pyramids will be called *well-ordered horned pyramids.*

Obviously *each free stump corresponding to a bounded well-ordered species is finite.*

The above assignment of a sequence of indices to each constructional subspecies of non-vanishing order of a well-ordered species F was performed in a downward direction, but the same result can be obtained as well by an *upward* construction consisting in a gradual dressing-up of F parallel to its generation, according to the following prescriptions:

(i) At each ordinal addition of an ordered sequence d of basic species, to each of these species is assigned, as its only index, the natural number indicating its place in d.

(ii) At each ordinal addition of an ordered sequence d of well-ordered species previously acquired, for each of these species (and for each of their constructional subspecies) the natural number indicating its place in d is added to its adhering sequence of indices previously acquired, as a first index.

If, in an analogous way, for a given spread direction K in which a thin subspecies $C(K)$ has been indicated, we succeed in arriving at the free stump $\tau_B(K)$ by allowing in K the following sorts of acts:

(i) the qualification of a node of $C(K)$ as dominating a free substump "nothing,"

(ii) the formation of a free substump of rank $n - 1$ by *absorbing a row of free substumps* of rank n,

then this gradual erection of the edifice of nodes of $\tau_B(K)$ (proving by the way that $C(K) = B$) is identical with the above upward construction of the edifice of sequences of indices of the constructional subspecies of a proper well-ordered species F, so that $\tau_B(K)$ is a *well-ordered* free stump and we may speak of a *well-ordered erection* of $\tau_B(K)$.

By extending a given free stump to its spread direction we see that a natural denumeration of the latter yields a natural denumeration of the former. So also the species of the sequences of indices of the constructional subspecies of a well-ordered species can be denumerated in a natural way.

We shall show by an example that not every block is a well-ordered block, and hence that not every free stump admits of a well-ordered erection.

Let K be a spread direction, and let β_ν be the species of the nodes of K of order ν. Let a v-union be a union of species β_ν with regard to which an infinite sequence of decisions $q_1, q_2, \ldots$ successively decides whether β_1 belongs to the union, whether β_2 belongs to the union, and so on, and let V be the species of the v-unions. Let α be a mathematical assertion so far neither tested nor recognized as testable, and let v_α be the element of V generated as follows: As long as in the course of the successive choices of the decisions q_ν the creating subject has neither experienced the truth nor the absurdity of α, each q_ν will be chosen to be negative; but as soon as between the choice of the decision q_{r-1} and that of the decision q_r the creating subject has experienced either the truth or the absurdity of α, q_r will be chosen to be affirmative and for each natural number ν, $q_{r+\nu}$ will again be chosen to be negative.

Obviously this v_α is a block of K of which we cannot say that it is a well-ordered block.

5. The fan theorem. If a (not necessarily predeterminate) subspecies $C(K)$ of the spread direction K has the property that every arrow of K *meets* $C(K)$, i.e., has a node in common with $C(K)$, this subspecies $C(K)$ will be called a *crude bar* of K. A crude bar of K which is thin will be called a ***proper bar*** or simply a ***bar*** of K. [[8]]

The definition of a crude bar means that for every arrow α of K the order

[[10]] $n(\alpha)$ of the postulated node of intersection with $C(K)$ must be computable, however complicated this calculation may be. For instance, the algorithm in question may indicate the calculation of a maximal order n_1 at which will appear a finite method of calculation of a further maximal order n_2 at which will appear a finite method of calculation of a further maximal order n_3 at which will appear a finite method of calculation of a further maximal order n_4 at which the postulated node of intersection must have been passed. And much higher degrees of complication are thinkable.

If $C(K)$ is a crude bar of K, then every node t of K has either been recognized as belonging to $C(K)$ or been provided with a constructive mathematical argument h_t proving that t is *barred* by $C(K)$, i.e., that every arrow passing through t has a node of intersection with $C(K)$.

For this mathematical argument h_t no other basis is available than the characterization of $C(K)$, and the species of constructional relations existing between the nodes of K. Now all these relations can be derived from the basic relations which for each node indicate its immediate predecessor in its row of nodes (or the non-existence of an immediate predecessor in its row of nodes), its immediate successor in its row of nodes (or the non-existence of an immediate successor in its row of nodes), its immediate ascendant (or the non-existence of an immediate ascendant), and the row of its immediate descendants. (Whether this system of basic relations is susceptible of further reductions, we shall leave undecided.) Consequently, if we split up the argument h_t into an argument k_t consisting exclusively of statements of atomic basic facts d and atomic immediately obvious inferences e, then, supposing $t = \nu_1 \ldots \nu_r$, the final inference of k_t must deduce the barred condition of t either from t being recognized as belonging to $C(K)$ or from the barred condition of $\nu_1 \ldots \nu_{r-1}$ (a so-called *ζ-inference*) or from the barred condition of $\nu_1 \ldots \nu_r\lambda$ for each λ (a so-called *$\digamma$-inference*). If, in particular, t is a node ν_1 of order 1, the final inference of k_t recognizing that t is barred, must either be the recognition of t as a node of $C(K)$ or the *$\digamma$-inference* deducing the barred condition of ν_1 from the barred condition of $\nu_1\lambda$ for each λ. So in the latter case the recognition of the barred condition of ν_1 has been *preceded* in k_t by the recognition of the barred condition of $\nu_1\lambda$ for each λ. From this follows that in k_t the recognition of the barred condition of $k_{\nu_1\nu_2}$ preceding that of k_{ν_1} must in its turn either be based on its belonging to $C(K)$ or have been preceded by the recognition of the barred condition of $k_{\nu_1\nu_2}\lambda$ for each λ, from which it has been deduced by a $\digamma$-inference; and so on.

Consequently, if t is a node of order 1, then in k_t appear

(1) a certain species of nodes N_t, including t and a certain thin subspecies $C_t(K)$ of $C(K)$,

(2) the species S_t of the statements of the barred condition of an element of N_t,

(3) a species I_t of $\digamma$-inferences connecting elements of S_t

such that each element of S_t is connected with the statement of the barred

[[534]]

condition of t by a finite sequence of elements of I_t, that each element of S_t, with the exception of the statements of the barred condition of an element of $C_t(K)$, has a row of predecessors in the argument with which it is connected by an element of I_t, and that each element of S_t, with the exception of the statement of the barred condition of t, has a successor in the argument with which it is connected by an element of I_t.

If we now take for t successively each node of order 1 of K, and consider the union k of the corresponding arguments k_t, then in k appear

(1) a certain species of nodes N, including all nodes of order 1 of K and a certain thin subspecies $C_0(K)$ of $C(K)$,

(2) the species S of the statements of the barred condition of an element of N,

(3) a species I of ρ-inferences connecting elements of S

such that each element of S is connected with the statement of the barred condition of a node of order 1 of K by a finite sequence of elements of I, that each element of S, with the exception of the statements of the barred condition of an element of $C_0(K)$, has a row of predecessors in the argument with which it is connected by an element of I, and that each element of S, with the exception of the statements of the barred condition of a node of order 1 of K, has a successor in the argument with which it is connected by an element of I.

In this way from the argument k we have extracted an argument k' which by performing acts of the two following sorts in K:

(i) taking an element of $C_0(K)$ as a basic pyramid consisting of barred nodes,

(ii) taking the union of a row of pyramids consisting of barred nodes previously acquired and the dominant of their row of tops, thus obtaining a new pyramid consisting of barred nodes,

has arrived at a row of free pyramids consisting of barred nodes whose row of tops is the row of nodes of order 1 of K.

This argument k' comes to the same as the argument k'' which by performing acts of the two following sorts in K:

(i) assigning to an element α of $C_0(K)$ a free substump "*nothing*" dominated by α,

(ii) having a row of free substumps consisting of barred nodes previously acquired, absorbed by a new free substump,

has arrived at a free stump of K consisting of barred nodes.

So, as was shown in §4, this argument k'' in its turn comes to the same as the *well-ordered erection of the species of nodes N as a well-ordered free stump of K, carried by the well-ordered block $C_0(K)$.*

With which we have deduced the

BAR THEOREM. *Every crude bar contains a well-ordered block.*[1]

[1]Cf. (**6**, pp. 63–65). The species μ_1 used there plays the role of the above species $C(K)$. The equivalence of the principles of the excluded third and of reciprocity of complementarity, mentioned there in a footnote by way of remark, subsequently has been recognized as non-existent. In fact, as was also shown in the present paper, the fields of validity of these two principles have turned out to be essentially different.

⟦11⟧ This theorem does *not* imply that every well-ordered block is a bar.

In the case that K is a fan direction, its well-ordered free stumps, on account of their correspondence to bounded well-ordered species, are all finite; so the above species of nodes N is finite, and there will be a finite maximum $O(N)$ for the order of its nodes. Furthermore *in this case the well-ordered block $C_0(K)$ is a bar.*

Now we easily prove the

FAN THEOREM. *Let K be a fan direction, and let us suppose that to each arrow α of K has been assigned a natural number $\mu(\alpha)$. Then a natural number s can be indicated such that, for any α, $\mu(\alpha)$ is determined at the sth node of α* (**6**, p. 66; **10**, p. 143).

For, since the natural number in question has to be known for each arrow of K at one of its nodes, the nodes yielding this knowledge constitute a species of nodes which each arrow of K is bound to meet, and which therefore is a crude bar $C(K)$ of K. Because this $C(K)$ contains a well-ordered block $C_0(K)$, and this well-ordered block $C_0(K)$ in the present case is finite and a bar of K, a maximum s can be indicated for the order of its nodes, so that each arrow α of K meets $C_0(K)$ not later than at its sth node. Hence, for each α, at its sth node, $\mu(\alpha)$ is determined.

6. The continuity theorem. The infinite sequence of natural numbers passes into a *located infinite sequence* $c_1, c_2, \ldots$ if for any two of its elements c_r and c_s a symmetric limiting number core function $\rho(c_r, c_s)$, called the *distance* of c_r and c_s, is indicated, which has the following properties:

(1) For $c_r = c_s$, $\rho(c_r, c_s) = 0$.

(2) For $c_r \neq c_s$, a natural number $f(c_r, c_s)$ can be indicated such that

$$\rho(c_r, c_s) > 2^{-f(c_r, c_s)}.$$

(3) $\rho(c_r, c_s) \leqslant \rho(c_r, c_t) + \rho(c_s, c_t)$.

(4) For each n a natural number $\mu(n)$ can be indicated such that, if we denote the union of $c_1, c_2, \ldots$ and $c_{\mu(n)}$ by ψ_n, then $\rho(c_\nu, \psi_n) \leqslant 4^{-n}$ for each ν.

We shall express the property (4) by saying that *the sequence $c_1, c_2, \ldots$ is approximated with any degree of accuracy by its successive initial segments.*

Let L be a located infinite sequence. An infinite sequence $a_1, a_2, \ldots$ of elements of L (among which equalities may occur) will be said to be *convergent* if for each n a natural number $\gamma(n)$ can be indicated such that

$$\rho(a_{\gamma(n)}, a_\nu) < 2^{-n}$$

for any $\nu > \gamma(n)$. A convergent infinite sequence of elements of L will also be called a *limiting element* of L. Regarding as self-explanatory the meaning of *coincidence of two limiting elements*, we shall call the species of the limiting elements of L coinciding with a given limiting element of L, a *point core of L*. The species RL of the point cores of L will be called a *located compact topological space.*

⟦536⟧

If in a spread direction [fan direction] and in the corresponding spread [fan] each constituent of a node is replaced by some mathematical entity in such a way that in each node $\nu_1\nu_2 \ldots \nu_n\nu_{n+1}$ the constituents $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ are replaced by the same mathematical entities as in the node $\nu_1\nu_2 \ldots \nu_n$, the result of this process will be called a *dressed spread direction* [*dressed fan direction*] with a corresponding *dressed spread* [*dressed fan*].

Let us consider a *dressed fan direction SRL* whose row of nodes $b_1, b_2, \ldots$ of order 1 consists of the elements of ψ_1, whilst each element of a row of nodes

$$b_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n 1},\ b_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n 2}, \ldots$$

of order $n+1$ consists of the immediate ascendant of the row followed by a constituent for which is chosen successively each element of a subspecies of ψ_{n+1} which, though arbitrary to a certain extent, must include all elements of ψ_{n+1} at a distance $\leqslant 2.4^{-n}$ from the last constituent of $b_{\nu_1\ldots\nu_n}$, and must exclude all elements of ψ_{n+1} at a distance $\geqslant 3.4^{-n}$ from the last constituent of $b_{\nu_1\ldots\nu_n}$.

Each arrow of SRL defines a limiting element of L. For in each arrow of SRL each *accretion* of order n, i.e., each last constituent of a node of order n has a distance less than

$$(3.4^{-n} + 3.4^{-n-1} + 3.4^{-n-2} + \ldots) = 4^{-n+1}$$

from each of its descendant accretions of order $> n$.

Each limiting element of L coincides with an arrow of SRL. For, let $a_1, a_2, \ldots$ be a limiting element λ of L, and $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \ldots$ an infinite sequence of increasing natural numbers such that

$$\rho(a_{\nu_n}, a_\nu) < 4^{-n-2}$$

for any $\nu > \nu_n$. If to each a_{ν_n} we assign an element σ_n of ψ_n at a distance $\leqslant 4^{-n} + 4^{-n-1}$ from a_{ν_n}, then from

$$\rho(\sigma_n, a_{\nu_n}) \leqslant 4^{-n} + 4^{-n-1}, \quad \rho(a_{\nu_n}, a_{\nu_{n+1}}) < 4^{-n-2}, \quad \rho(a_{\nu_{n+1}}, \sigma_{n+1}) \leqslant 4^{-n-1} + 4^{-n-2}$$

follows $\rho(\sigma_n, \sigma_{n+1}) < 2.4^{-n}$, so that *the infinite sequence $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ generates an arrow of SRL* which, because $\rho(\sigma_n, a_{\nu_n}) \leqslant 4^{-n} + 4^{-n-1}$, coincides with λ.

If two limiting elements λ_1 and λ_2 of L are at a distance $< 4^{-n-2}$ from each other, then the distance of their respective a_{ν_n} is $< 3.4^{-n-2}$. Hence we can assign the same σ_n to both these a_{ν_n}, so that λ_1 and λ_2 correspond to two arrows of *SRL* which have an accretion of order n in common, and with which they coincide respectively.

On the other hand, two point cores of *RL* coinciding with two arrows of *SRL* respectively which have a common accretion of order n, are at a distance $\leqslant 2.4^{-n+1}$ from each other. So that we have proved:

LEMMA 1. *To each natural number p_3 a natural number p_4 can be assigned such that any two point cores of RL whose distance is $< 2^{-p_4}$ contain respectively two arrows of SRL which have their rod of order p_3 in common.*

And conversely:

LEMMA 2. *To each natural number p_1 a natural number p_2 can be assigned such that any two arrows of SRL which have their rod of order p_2 in common belong respectively to two point cores of RL which have a distance $< 2^{-p_1}$ from each other.*

Let $R'L'$ and $R''L''$ be two located compact topological spaces, and let I be a *full mapping* of $R'L'$ onto $R''L''$, i.e., an assignment of a point core of $R''L''$ to *each* point core of $R'L'$. Such a full mapping implies the assignment A of an arrow $\phi(E')$ of $S''R''L''$ to *each* arrow E' of $S'R'L'$ in such a way that to coinciding arrows E' coinciding arrows $\phi(E')$ are assigned.

Applying the fan theorem to this assignment A, we obtain:

LEMMA 3. *To each natural number p_2 a natural number p_3 can be assigned such that the rod of order p_2 of $\phi(E')$ is for each E' determined by its rod of order p_3, so that to any two arrows of $S'R'L'$ containing the same rod of order p_3 two respective arrows of $S''R''L''$ are assigned by A which contain the same rod of order p_2.*

By successive application of Lemmas 2, 3, and 1 we find that to each natural number p_1 there corresponds a natural number p_4 such that to each pair of point cores of $R'L'$ whose distance is $<2^{-p_4}$ the mapping I assigns a pair of point cores of $R''L''$ which have a distance $< 2^{-p_1}$ from each other.

This result establishes the

CONTINUITY THEOREM. *Every full mapping of a located compact topological space onto another located compact topological space is uniformly continuous.*

In particular, *a bounded function of a compact segment of the linear continuum is uniformly continuous* (**6**, p. 67; **10**, pp. 145–146).

REFERENCES

1. H. Weyl, *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*, Math. Z., *10* (1921), 39–79.
2. A. Dresden, *Brouwer's contributions to the foundations of mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc., *30* (1924), 31–40.
3. R. Wavre, *Y a-t-il une crise des mathématiques?* Revue de Métaphysique et de Morale, *31* (1924), 435–470.
4. ———, *Logique formelle et logique empiriste*, Revue de Métaphysique et de Morale, *33* (1926), 65–75.
5. P. Lévy, R. Wavre, and E. Borel, *Discussions*, Revue de Métaphysique et de Morale, *33* (1926), 253–258, 425–430, 545–551; *34* (1927), 271–276.
6. L. E. J. Brouwer, *Über Definitionsbereiche von Funktionen*, Math. Ann., *97* (1921), 60–75.
7. ———, *Wissenschaft, Mathematik und Sprache*, Monatsh. Math. Phys., *36* (1928), 153–164.
8. G. Mannoury, *La question vitale: A ou B?*, Nieuw Archief Wisk. (2), *21* (1943), 161–167.
9. L. E. J. Brouwer, *Consciousness, philosophy and mathematics*, Proc. Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, 1948), 1235–1249.
10. ———, *Historical background, principles and methods of intuitionism*, South African J. Sci., Oct.-Nov. 1952, 139–146.

Blaricum, Holland

ADDENDA AND CORRIGENDA ON THE ROLE OF THE PRINCIPIUM TERTII EXCLUSI IN MATHEMATICS

1954 B

⟦1⟧

Regarding my paper (1923 B) published thirty years ago I would now like to make the following remarks.

I. Page 1 ⟦p. 268⟧, line 3 the term 'to test' ⟦prüfen⟧ is used for either proving or reducing to absurdity. In subsequent intuitionistic literature ⟦(1948 B), (1948 C), (1954 A)⟧, however, a property of a mathematical entity is said to be 'tested' if either its contradictoriness or its noncontradictoriness is ascertained, and 'judged' if either its presence or its absurdity is ascertained.

II. Page 3 ⟦p. 270⟧, footnote [1]), the noncontradictoriness of applications of the principle of excluded middle to the attribution of a property E to a well-constructed mathematical system was pointed out. In subsequent intuitionistic literature, however, it became apparent that for the simultaneous application of the principle mentioned to the attribution of a property E to each element of a mathematical species S noncontradictoriness remains ensured only for finite S. For infinite S the simultaneous attribution mentioned can very well be contradictory. ⟦2⟧

III. ⟦Brouwer made this correction in the German text published in this volume⟧.

IV. Page 4 ⟦p. 271⟧, line 8 up, the classical Heine–Borel covering theorem was formulated for an arbitrary 'closed' bounded point species. The intuitionistic critique of this theorem that follows there should have been preceded by an exposition of the intuitionistic splitting of the classical notion 'closed'. For, if in a ⟦3⟧
Cartesian or in a 'located' compact topological space R we understand by a *core* the species of the points that coincide with a given point, by an *accumulation core* of a core species Q a core of which every neighborhood contains an infinitely proceeding sequence of cores of Q that are mutually apart, and by a *limit core* of a core species Q a core of which every neighborhood contains a core of Q, if we then say that a core species Q containing all of its accumulation cores is α-closed and that a core species Q that contains all of its limit cores is β-closed, if, accordingly, we call the union of a core species Q and its accumulation cores the α-closure of Q and the species of limit cores of Q the β-closure of Q, if we take the formulation cited above of the classical Heine–Borel covering theorem as applying to 'closed' bounded core species Q, then this formulation is intuitionistically correct only if by 'closed' is meant 'β-closed' and if, moreover, Q is a species *located* in R, that is to say, it is from every core of R at a distance that is computable with unlimited accuracy. In particular, therefore, with regard to the number sequence $c_1, c_2, c_3, \ldots$ referred to on page 4 ⟦p. 271⟧, line 3 up, which is bounded and is located in the number continuum, the classical covering theorem is intuitionistically valid only for its β-closure, that is to say for its union with its limit number,

but not for its α-closure, that is to say, for its union with the number 0, *if this number should turn out to be identical with the limit number*. Nor is the classical covering theorem intuitionistically valid for number core species that are β-closed and bounded, *but not located in the number continuum*, as, for example, the union of the number cores $p_1, p_2, p_3, \ldots$, in which $p_\nu = 1$ for $\nu < k_1$ and $p_\nu = -1$ for
⟦4⟧ $\nu \geqq k_1$.

V. The example given on page 5 ⟦p. 272⟧, lines 10–20, of a monotonic, continuous, nowhere differentiable function defined everywhere in the closed unit inter-
⟦5⟧ val possesses these properties exclusively as a function of the (classical) continuum of approximations made according to a law, not as a function of the (intuitionistic) continuum of more or less freely proceeding approximations. A connection between monotonicity and differentiability of full functions of the intuitionistic con-
⟦6⟧ tinuum can be found in my (1923A), p. 24 ⟦p. 267⟧.

FURTHER ADDENDA AND CORRIGENDA ON THE ROLE OF THE PRINCIPIUM TERTII EXCLUSI IN MATHEMATICS

1954 C

⟦1⟧

§ 1

With reference to point V of my (1954B) I give below an example of a *continuous, monotonic, nowhere differentiable, real, full function of the intuitionistic closed unit continuum K.*

For a natural number n we understand by $\chi_n(x)$ the real function of K that for the 'even n-cores' $x = \frac{a}{n}$ (a being an integer and $0 \leqq a \leqq n$) is equal to 0, for the 'odd n-cores' $x = \frac{2a+1}{2n}$ (a being an integer and $0 \leqq a \leqq n$) is equal to $\frac{1}{4n}$, and for every a ($0 \leqq a \leqq n$) is linear between $x = \frac{a}{n}$ and $x = \frac{2a+1}{2n}$ as well as between ⟦2⟧ $x = \frac{2a+1}{2n}$ and $x = \frac{a+1}{n}$. Further we put $\psi_1(x) \equiv x$ and, for $n \geqq 2$, f being an opaque fleeing property and $\kappa_1(f)$ being its critical number, we put $\psi_n(x) \equiv \chi_n(x)$ ⟦3⟧ if $n = \kappa_1(f)$, otherwise $\psi_n(x) \equiv 0$. Then $\psi(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(x)$ is a continuous, nowhere differentiable, real, full function of K.

For one must take into account the possibility α) that at some time it turns out that $\kappa_1(f)$ is nonexistent, so that, for all values of x, $\psi(x)$ possesses an ordinary derivative equal to 1.

But one must also take into account the possibility β) that at some time a natural number $m = \kappa_1(f)$ will be found. In that case $\psi(x)$ has, for all values of x that lie apart from the m-cores, an ordinary derivative, either equal to $\frac{3}{2}$ or equal to $\frac{1}{2}$; ⟦4⟧ for all even m-cores x it has a right derivative (nonexistent for $x = 1$) equal to $\frac{3}{2}$, and a left derivative (nonexistent for $x = 0$) equal to $\frac{1}{2}$; and for all odd m-cores x it has a right derivative equal to $\frac{1}{2}$ and a left derivative equal to $\frac{3}{2}$, while for every value of x the possibility must be taken into account that at some time it shall turn out either to be an m-core or to lie apart from the m-cores. ⟦5⟧

Therefore, with respect to the existence of an ordinary derivative, or a right and a left derivative, of $\psi(x)$, one must, *for every value of x, take into account possibilities lying mutually apart, so that for no single value of x an ordinary derivative can be calculated.*

By the nature of the case this function $\psi(x)$ is not 'completely differentiable' in the sense of (1923A), § 3.

So far as the function $g(x)$, mentioned in (1923B), p. 5 ⟦p. 272⟧ is concerned, it must, according to the explanations that follow below, be abandoned as an example of a continuous, monotonic, nowhere differentiable function, *even for the classical* closed unit continuum K_r. [1])

§ 2

By a $k^{(\nu)}$ we understand a closed $\lambda^{(4\nu+1)}$-interval; for $\nu \geqq 0$, by an $h^{(\nu)}$ we understand a $k^{(\nu)}$ entirely or partially covered by K; further, after ordering the $h^{(\nu)}$ for all values of ν in a single fundamental sequence $\vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \ldots$, to be called $\mathcal{F}$, by a *unitary standard number* we understand an infinitely proceeding sequence $\vartheta^{(c_1)}, \vartheta^{(c_2)}, \vartheta^{(c_3)}, \ldots$, in which, for every ν, $\vartheta^{(c_\nu)}$ is an $h^{(\nu)}$ and $\vartheta^{(c_{\nu+1})}$ consists entirely of inner points of $\vartheta^{(c_\nu)}$. Then, the species of unitary standard numbers is
⟦6⟧ identical with the species of accretion sequences of a *dressed fan* w, of which we can say – because every unitary number core, that is, every number core of K, coincides with a unitary standard number – that it *represents* K.

As a function of a variable number core x, either of K_r or of K, $g(x)$ is now obtained as follows. Let f be a fleeing property; let $\kappa_1(f)$ be its critical number; let p_ν and q_ν be respectively the least and the greatest endcores of $\vartheta^{(\nu)}$; and let $\varphi_\nu(x)$ be the continuous function of K_r, or of K, that for the part of $\vartheta^{(\nu)}$ that belongs to K_r, or to K, is equal to

$$\frac{q_\nu - p_\nu}{2\pi} \sin 2\pi \frac{x - p_\nu}{q_\nu - p_\nu}$$

and, for $x \leqq p_\nu$ as well as for $x \geqq q_\nu$ is equal to 0. Then we put $g_\nu(x) \equiv x$ for $\nu = 1$, $g_\nu(x) \equiv \varphi_\nu(x)$ for $\nu = \kappa_1(f)$, and $g_\nu(x) \equiv 0$ for all other values of ν. Finally we put $g(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x)$.

If we call a $\vartheta^{(\nu)}$ for which $\nu = \kappa_1(f)$ the *critical interval* of f and if we represent this by $i(f)$, then (at least for the current examples of $\mathcal{F}$ and f) not a single indication is at hand concerning the position of a possible $i(f)$; therefore it seems at the outset that for every x every possibility of obtaining a guarantee for the non-belonging to $i(f)$ is lacking and so is for every unitary finite binary fraction x every possibility of computing a ratio 1 : 3 for the lengths of the segments into which it would have to divide a possible $i(f)$ to which it would belong; therefore finally it seems that for every x every possibility of computing an ordinary derivative is lacking.

§ 3

This situation, however, changes when one decides to make the infinitely proceeding process of the creation, by free choices, of a unitary standard number u run

[1]) With respect to $\psi(x)$ a similar disappearance of a counterexample, due to the disappearance of the absence of a requisite algorithm, belongs to the realm of possibilities *only for a fixed fleeing property f.*

parallel to the infinitely proceeding process of the successive judgments of the assignment of f to the successive natural numbers and moreover to take care that the creation process of u continually lags sufficiently far behind the process of judging that was just mentioned to prevent contact with an $i(f)$ that might possibly appear, so that there must come into existence a number core x of K for which $g(x)$ possesses an ordinary derivative equal to 1.

Once this insight has been obtained, it is not far-fetched to observe that the way, indicated here, in which u comes to exist is at hand for all the accretion sequences of the elements of a subfan w' of w that is obtained from w by the deletion, from the species of constituents that are admitted for the nodes of w, of a possible $i(f)$ and of the two λ-intervals that are of the same length as $i(f)$ and are partially covered by $i(f)$. Therefore, for every number core x of K that is represented by this dressed fan w', $g(x)$ possesses an ordinary derivative.

By means of the same fan w' it is even possible to exhibit, for every natural number n, a measurable core species S_n that is contained in K, has a measure greater than $1-2^{-4n}$, and in which $g(x)$ everywhere possesses an ordinary derivative. For that one establishes first of all for every n one of the following facts: either for $\nu \leqq n$ no critical interval of f occurs among the $h^{(\nu)}$ or for some $m \leqq n$ a critical interval of f occurs among the $h^{(m)}$. Further, there is chosen for S_n, in the first case, the core species of K represented by w' and, in the second case, the species of the cores of K that lie apart from the two endcores of $i(f)$. If we further observe that the union of the infinitely proceeding sequence of the S_ν forms a measurable core species that is contained in K and has measure 1, then $g(x)$ turns out to be a continuous, monotonic, real, full function of K that is differentiable almost everywhere.

And since the predeterminate elements of w' represent number cores of K_r, K_r also possesses an (everywhere dense, ever unfinished and ever enumerable) core species in which $g(x)$ is everyherew differentiable.

MATHEMATICS

1954 D

ORDNUNGSWECHSEL IN BEZUG AUF EINE COUPIERBARE GESCHLOSSENE STETIGE KURVE

VON

L. E. J. BROUWER

(Communicated at the meeting of February 27, 1954)

Die geschlossene stetige Kurve K der Euklidischen Ebene werde in ihrem Punkte [1]) S *coupierbar* genannt, falls sie in solcher Weise ein stetiges Bild eines Euklidischen Kreises C mit R als Urbild von S darstellt, dass die Konvergenz [2]) des Bildes P' eines variablen Punktes P von C gegen S die Konvergenz von P gegen R nach sich zieht, während in einem gewissen R enthaltenden, von den von R entfernt liegenden, in U und V abgebildeten, Punkten A und B begrenzten Bogen ϑ von C für einen variablen Punkt G des Bogens AR und einen variablen Punkt H des Bogens RB aus der Konvergenz der Bilder G' und H' von G und H gegeneinander die Konvergenz von G und H gegen R, mithin auch die Konvergenz von G' und H' gegen S folgt. Offensichtlich liegen dann U und V entfernt von S.

Im hier geschilderten Falle sei $\bar{K}$ eine *α-Streckenapproximation durch S, U und V* von K, d.h. ein geschlossener Streckenzug mit endlichvielen Knickpunkten, zu denen S, U und V gehören, auf welchen K mittels Verrückungen $<\alpha$ seiner Punkte und unter Invarianz von S, U und V stetig abgebildet wurde. Das Segment USV von $\bar{K}$ werden wir mit d, dessen Teile US und SV mit c' und c'' bezeichnen.

Sei π ein S als Mittelpunkt besitzender Quadratumfang der Seitenlänge β, dessen Seiten von den Knickpunkten von $\bar{K}$ entfernt liegen. Wir können α und β derweise wählen, dass der Komplementärbogen des Teilbogens USV in K, sowie dessen Bild in $\bar{K}$, ausserhalb von π in einer Entfernung $\circ\!>2\alpha$ von π gelegen sind, und dass auf π bei jedem stetigen Übergang von einer Kreuzung mit c' zu einer Kreuzung mit c'' Abstände $\circ\!>2\alpha$ zum Teilbogen USV von K, mithin auch Abstände $\circ\!>2\alpha$ zu K selbst auftreten, so dass bei jedem solchen Übergang Punkte passiert werden welche, wenn wir K und $\bar{K}$ mit korrespondierenden Umlaufssinnen versehen, in bezug auf K und $\bar{K}$ die gleiche Ordnung besitzen.

Offensichtlich hat π mit c' und c'' je eine ungerade, mit d eine gerade Anzahl von Kreuzungen. Ein keinen Punkt von c'' enthaltendes, von Punkten von c' begrenztes bzw. keinen Punkt von c' enthaltendes, von Punkten von c'' begrenztes abgeschlossenes Segment von π werden wir

[1]) Mit „Punkten" werden in diesem Aufsatze „Punktkerne" gemeint.

[2]) Mit „Konvergenz" wird in diesem Aufsatz „positive Konvergenz" gemeint.

als ein D' bzw. D'', ein nicht in einem umfassenderen D' enthaltenes D' bzw. nicht in einem umfassenderen D'' enthaltenes D'' als ein E' bzw. E'', ein E' bzw. E'' das mit d eine ungerade Anzahl von Kreuzungen hat, als ein E_1' bzw. E_1'' und ein E' bzw. E'' das mit d eine gerade Anzahl von Kreuzungen hat, als ein E_2' bzw. E_2'' bezeichnen.

Bei einem Umlauf von π durchschreitet man abwechselnd ein E' und ein E'', während jedes E' vom beim Umlauf unmittelbar darauf folgenden E'' durch ein keinen Punkt von d enthaltendes, als *Zwischensegment* zu bezeichnendes, offenes Segment von π getrennt wird.

Sei Q ein E_1' oder ein E_1'' (offenbar gibt es wenigstens ein E_1' und wenigstens ein E_1''). Seien $\mathfrak{z}$ und η die Q einschliessenden Zwischensegmente. Alsdann besitzen die von d entfernt liegenden Punkte von $\mathfrak{z}$ und die von d entfernt liegenden Punkte von η verschiedene Ordnungen in bezug auf $\bar{K}$. Überdies gibt es sowohl auf $\mathfrak{z}$ einen Punkt $T(\mathfrak{z})$ wie auf η einen Punkt $T(\eta)$, der in bezug auf K und $\bar{K}$ die gleiche Ordnung besitzt. Diese Punkte $T(\mathfrak{z})$ und $T(\eta)$ besitzen also verschiedene Ordnungen in bezug auf K, womit wir bewiesen haben:

Zu einer coupierbaren geschlossenen stetigen Kurve K, insbesondere also in bezug auf eine Jordansche Kurve, können zwei von K entfernt liegende Punkte konstruiert werden, welche in bezug auf K verschiedene Ordnungen besitzen.

Obiges soll § 4 meines Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **28,**
pp. 503–508 (1925) befindlichen intuitionistischen Beweises des Jordan- [[1]]
schen Kurvensatzes ersetzen. Nebenbei bemerke ich dass § 1 dieses Beweises unnötig umständlich ist, dass nämlich der l.c. p. 503 unten
und p. 504 oben befindliche Absatz wie folgt gekürzt werden kann: [[2]]

„Sei nun ε so gewählt, dass das zugehörige $\varepsilon_2 < \frac{1}{3}$ der Breite von J ist, und seien A, B und C drei derartige Punktkerne von J, dass $\varrho(A, C) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\varrho(C, B) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Alsdann gibt es einen A, B und C enthaltenden Bogen von J der Breite $< \varepsilon_2$."

Weiter ist l.c. p. 504 Z. 18 v.u. τ'' durch τ' und p. 505 Z. 1 v.o. [[3]]
„gleich $\frac{1}{16}\,\varepsilon'$" durch „$< \frac{1}{16}\,\varepsilon'$" zu ersetzen.

§ 1

Let $\mathcal{F}(x)$ be a total real function of one independent variable number core x on the
⟦1⟧ intuitionistic continuum, P an arbitrarily chosen value of x. We shall call a closed interval of the intuitionistic continuum whose endcores are apart from each other, a *substantial* interval. Let ρ be an infinitely proceeding sequence $i_1, i_2, \ldots$ of substantial intervals containing P, which converges positively to P, and let d_ν be the difference quotient of $\mathcal{F}(x)$ corresponding to i_ν.

If a number core c can be constructed with the property that it is impossible to choose the sequence ρ in such a way that, for a suitably chosen natural number m, $|d_\nu - c| > 2^{-m}$ for every ν, we shall say that *$\mathcal{F}(x)$ is weakly differentiable in $x = P$ and that it possesses the weak differential quotient c* in $x = P$.

If a number core c can be constructed with the property that to every natural number n a natural number m can be associated such that for every ρ and every i_ν, $i_\nu < 2^{-m}$ (i.e. the length of i_ν is less than 2^{-m}) entails $|d_\nu - c| \le 2^{-n}$, we shall say that *$\mathcal{F}(x)$ is strongly differentiable in $x = P$* and that *it possesses the strong differential quotient c* in $x = P$.

We shall show by an example that it can occur that a total real function on the intuitionistic continuum is weakly differentiable in $x = P$ for a certain P without being strongly differentiable.

Let the total real function $\omega_\nu(x)$ on the intuitionistic continuum be defined for
⟦2⟧ every natural number ν by putting it for the closed intervals $x \leqq -2^{-\nu+1}$, $-2^{-\nu+1} \leqq x \leqq -2^{-\nu}$, $-2^{-\nu} \leqq x \leqq 2^{-\nu}$, $2^{-\nu} \leqq x \leqq 2^{-\nu+1}$ and $x \geqq 2^{-\nu+1}$ successively $\equiv 0$, $\equiv \sqrt{-3 \cdot 2^{-\nu}x - x^2 - 2^{-2\nu+1}}$, $\equiv 0$, $\equiv \sqrt{3 \cdot 2^{-\nu}x - x^2 - 2^{-2\nu+1}}$ and $\equiv 0$.

⟦3⟧ Let α be an assertion which has neither been judged nor been recognised as judgeable. Let an infinitely proceeding sequence of total real functions on the intuitionistic continuum $\zeta_1(x), \zeta_2(x), \ldots$ be generated as follows: As long as during the process of the successive choices of the $\zeta_\nu(x)$ it has not become known to the creating subject that the assertion α is judgeable, every $\zeta_\nu(x)$ is chosen equal to $\omega_\nu(x)$. But as soon as between the choice of $\zeta_{r-1}(x)$ and $\zeta_r(x)$ it becomes known to the creating subject that α is judgeable, $\zeta_r(x)$ and likewise $\zeta_{r+\nu}(x)$ for every natural number ν, is chosen $\equiv 0$. Then for $\mathcal{F}(x) \equiv \zeta(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta_\nu(x)$ and $P = 0$ a possible occurrence of a ζ_r would exclude the possibility of choosing the sequence ρ in such a way that for a suitably chosen natural number m, $|d_\nu| > 2^{-m}$ for every ν. Now it is not contradictory that α will once be recognised as judgeable, therefore it is not contradictory that a ζ_r will occur; this entails the noncontradictority of the impossibility, i.e. the impossibility of choosing the sequence ρ in such a way that for a suitably chosen natural number m, $|d_\nu| > 2^{-m}$ for every ν. Thus $\zeta(x)$ *is weakly differentiable in* $x = 0$ *and has at* $x = 0$ *the weak differential quotient* 0.

But if $\zeta(x)$ has at $x = 0$ a strong differential quotient 0, this would entail that a natural number m were known such that $\zeta(x)$ would have difference quotients $\lessdot \frac{1}{4}\sqrt{2}$ for substantial intervals with $x = 0$ as one of their endpoints and length less than 2^{-m}. It would follow that a ζ_r had occurred, therefore α would have been recognised as judgeable. As this is not the case, $\zeta(x)$ *is not strongly differentiable in* $x = 0$.

§ 2

As has been shown before, the measurable core species with measure 1, in which the function is differentiable, which is postulated by the classical theory of real functions for every total monotone real function on the closed unit continuum, can be constructed only in special cases for the intuitionistic unit continuum K. ⟦See (1923B), p. 5; further (1954C)⟧. Because of the result of § 1 the question arises for each result of this kind whether the differentiability for the core species in question is strong or weak. We shall here tackle this problem for the case of the function $g(x)$ which was treated in the latter paper after being introduced in (1923B) p. 5. What follows there from the construction of the subfan w' of w for an arbitrary point core P of this subfan, is the following: As soon as a critical interval $i(f)$ occurs, a natural number l can be calculated with the property that the distance from P to $i(f)$ is greater than 2^{-l}. Consequently, if we suppose that, in the terminology of § 1, a sequence ρ and a natural number m can be chosen such that $|d_\nu - 1| > 2^{-m}$ for every ν, then there could occur no critical interval, so we would have $g(x) \equiv x$, but this is incompatible with the hypothesis. But the fact which is proved hereby, namely that the hypothesis in question is contradictory, expresses no more than that $g(x)$ is weakly differentiable in $x = P$ and possesses the weak differential quotient 1.

But let us now consider the subfan w'' of w, which is obtained from w by removing from the species of the constituents which are admissible for the nodes of w, every λ-interval which has the same length as $i(f)$ and lies in the interior of $j(f)$; here $j(f)$ is, if $i(f)$ is a $k^{(\nu)}$, the $\lambda^{(3\nu+1)}$-interval which contains $i(f)$ in as central a position as possible (if this criterium is ambiguous, then from the two intervals which may be taken that one is chosen which lies furthest to the right).

An arbitrary number core P of w'' has from a possible $i(f)$ which is a $k^{(\nu)}$, a distance $> 2^{-3\nu+2}$, so it has also a distance $> 2^{-3\nu+2}$ from a number core Q belonging to this $i(f)$; consequently the difference quotient of $g(x)$ corresponding to the interval PQ must differ less than $2^{-\nu-4}\pi^{-1}$ from 1.

Therefore P has also a distance $> 2^{-3\nu+2}$ from a number core Q which belongs to a possible $i(f)$ which is *longer* than a $k^{(\nu)}$, and the difference quotient of $g(x)$, corresponding to an interval with endpoints P and a number core Q that belongs to a possible $i(f)$ that is *shorter* than a $k^{(\nu)}$, must also differ by less than $2^{-\nu-4}\pi^{-1}$ from 1.

It follows *firstly* that to every natural number r a natural number q can be associated such that, if the interval with as endpoints a number core P of w'' and a number core of K which lies apart from P has the property that a possible $i(f)$ either lies apart from that interval or is $<2^{-q}$, then the difference quotient of $g(x)$ corresponding to that interval differs by less than 2^{-r} from 1; *secondly* that to every natural number q a natural number p can be associated such that, if an interval with endpoints a number core P of w'' and a number core of K which lies apart from P is $<2^{-p}$, then a possible $i(f)$ either lies apart from that interval or is $<2^{-q}$.

Consequently $g(x)$ possesses in P a strong differential quotient 1, for it has a strong differential quotient 1 'on the right' as well as 'on the left'.

In the same way as could be associated ⟦(1954C)⟧ by means of w' to every natural number n a measurable core species S_n contained in K and with measure $>1-2^{-4n}$, on which $g(x)$ is everywhere weakly differentiable, in the case considered here w'' gives rise for every natural number n to a measurable core species U_n with measure $>1-2^{-3n}$, on which $g(x)$ is everywhere strongly differentiable; finally the union of the infinitely proceeding sequence of the U_ν yields a measurable core species with measure 1, contained in K, on which $g(x)$ has everywhere a strong differential quotient 1.

MATHEMATICS

AN EXAMPLE OF CONTRADICTORITY IN CLASSICAL THEORY OF FUNCTIONS 1954 F

BY

L. E. J. BROUWER

(Communicated at the meeting of April 24, 1954)

As proved in a previous communication [1]) the classical theorem asserting that *each monotone function of the unity continuum is differentiable almost everywhere*, cannot be said to be true, neither for the classical nor for the intuitionist continuum.

In the following it will be established that this theorem is not only not true, but contradictory.

§ 1

For each n let $\chi_n(x)$ have the meaning defined in the communication mentioned above. Let α be an assertion so far neither tested nor recognized as testable. Let an infinitely proceeding sequence S of full functions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... of the unity continuum be generated as follows: First $\psi_1(x)$ is chosen $\equiv x$. Then, for $\nu \geqslant 2$, as long as during the successive choices of the $\psi_\nu(x)$ the creating subject has neither experienced the truth nor the absurdity of α, each $\psi_\nu(x)$ is chosen $\equiv 0$. But as soon as between the choice of $\psi_{r-1}(x)$ and that of $\psi_r(x)$ the creating subject has experienced the truth of α, the effect will be that $\psi_r(x)$ is chosen $\equiv \chi_r(x)$, and that, for each natural number ν, $\psi_{r+\nu}(x)$ is chosen $\equiv 0$. On the other hand, as soon as between the choice of $\psi_{s-1}(x)$ and that of $\psi_s(x)$ the creating subject has experienced the absurdity of α, the effect will be that $\psi_s(x)$, and likewise $\psi_{s+\nu}(x)$ for each natural number ν, is chosen $\equiv 0$ [2]).

By the method indicated in the communication quoted above it is established that $\psi(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(x)$ is a monotone, nowhere differentiable full function of the intuitionist unitary continuum.

§ 2

Let σ be the species of the rationality assertions of the unitary standard [[2]]
numbers. As is known, the simultaneous assertion of the principle of
testability for the elements of σ is contradictory. [[3]]

We consider a unitary standard number $k_1, k_2, k_3, \ldots$, denote it by ϱ,

---

[1]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., **A 57**, 109–111 (1954). [[1]]

[2]) Obviously one and the same α can give rise to different sequences S.

and denote its rationality assertion by α. We combine an enumeration of ϱ with the above derivation of an infinitely proceeding sequence S of full functions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... from α in such a way that each k_ν gets its turn in the enumeration of ϱ between the choice of $\psi_\nu(x)$ and that of $\psi_{\nu+1}(x)$. As before we put $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(x) \equiv \psi(x)$.

We consider the species of the functions $\psi(x)$ originating in this way from *some* ϱ by means of *some* S. Let us indicate this species by τ.

Let us, for a moment, suppose that, for each element of τ, $\psi(x)$ is differentiable for some value d of x.

On the basis of this supposition the differential coefficient g of $\psi(x)$ for $x=d$ must either lie apart from 1 or lie apart from $\frac{3}{2}$ as well as from $\frac{1}{2}$.

In the first case it is impossible that $\psi(x)$ should some time turn out to be $\equiv x$, hence also that α should some time turn out to be contradictory. This means that in the first case α is noncontradictory.

In the second case it is impossible that, for some natural number m $\psi(x)$ should some time turn out to be $\equiv x+\psi_m(x)$. For, this would entail that the corresponding value d of x for which the differential coefficient would have to lie apart from $\frac{3}{2}$ as well as from $\frac{1}{2}$, would neither be allowed to lie apart from all m-cores nor to coincide with some m-core. Hence in the second case it is neither possible that α should some time turn out to be true. This means that in the second case α is contradictory.

In both cases our conclusion implies that α is a testable assertion. But this clashes with the contradictority of the simultaneous assertion of the principle of testability for the elements of σ.

Our supposition having led to a contradiction, we see that *the assertion that each monotone full function of the unity continuum must be differentiable for some value of the independent variable, is contradictory*. This is more than was promised in the beginning.

THE EFFECT OF INTUITIONISM ON CLASSICAL ALGEBRA OF LOGIC. 1955

BY L. E. J. BROUWER. [1]

CLASSICAL algebra of logic, founded by Boole, developed by De Morgan, Jevons, Peirce, and perfected by Schröder, furnishes a formal image of the laws of common-sensical thought. This common-sensical thought is based on the following, conscious or subconscious, threefold belief: First, in a *truth* existing independently of human thought and expressible by means of sentences called "true assertions", mainly assigning certain properties to certain objects or stating that objects possessing certain properties exist or that certain phenomena behave according to certain laws. Furthermore in the possibility of extending one's knowledge of truth by the mental process of thinking, in particular thinking accompanied by linguistic operations independent of experience called "logical reasoning", which to a limited stock of "evidently" true assertions mainly founded on experience and sometimes called *axioms,* contrives to add an abundance of further truths. Finally, using the term "false" for the converse of true, in the so-called "principle of the excluded third" saying that each assertion, in particular each existence assertion and each assignment of a property to an object or of a behaviour to a phenomenon, is either true or false, independently of human beings knowing about this falsehood or truth, so that e.g. contradictority of falsehood would imply truth, while an assertion σ which is true if the assertion τ is true as well as if it is false, would be universally true.

Until not long ago this threefold belief of common-sensical thought was shared by scientific, also by mathematical, thought. As long as mathematics was considered as the science of space and time, it was a beloved field of activity of logical reasoning, not only in the days when space and time were believed to exist independently of human experience, but also after they had been taken for innate forms of conscious exterior human experience. There continued to reign some conviction that a mathematical assertion is either false or true, whether we know it or not, and that after the extinction of humanity mathematical truths, just as laws of nature, will survive.

Only after intuitionism had recognized mathematics as an autonomic interior constructional mental activity which although it has found extremely useful linguistic expression and can be applied to an exterior world, nevertheless neither in its origin nor in the essence of its method has anything to do with language or an exterior world, on the one hand axioms became illusory, on the other hand the criterion of truth or falsehood of a mathematical assertion was confined to mathematical activity itself, without appeal either to logic or to a hypothetical omniscient being. An immediate consequence was that in mathematics no truths could be recognized which had not been experienced, and that for a mathematical assertion α the two cases formerly exclusively admitted were replaced by the following four: *1.* α has been *proved to be true*; *2.* α has been *proved to be false, i.e. absurd*; *3.* α has neither been proved to be true nor to be absurd, but an algorithm is known leading to a decision either that α is true or that α is absurd; *4.* α has neither been proved to be true nor to be absurd, *nor do we know an algorithm leading to the statement either that* α *is true or that* α *is absurd.* In the first and second (first, second and third) case α is said to be *judged* (*judgeable*). We remark that an assertion of possibility of some construction of bounded finite character in some finite mathematical species is necessarily judgeable. For, such a construction can be attempted only in a finite number of particular ways, each of which will succeed or fail after a finite number of steps. Furthermore we remark that an assertion which is in the fourth case may at some time pass into one of the other cases, not only because further thinking may generate a construction accomplishing this passage, but also because in intuitionist mathematics a mathematical entity is not necessarily predeterminate, and may, in its state of free growth, at some time acquire a property which it did not possess before. An example of the fourth case is the assertion: "Three natural numbers a, b, n, cannot satisfy the equation $a^n + b^n = c^n$ for $n > 2$." Each mathematical assertion which is in the fourth case yields a refutation of the principle of the excluded third.

Closely connected with the principle of the excluded third, also called *principle of judgeability*, is the *principle of reciprocity of absurdity* saying that a mathematical assertion whose noncontradictority has been established is true. Obviously the latter principle is a corollary of the former one, but the converse does not hold, as may be deduced as follows from the existence of so-called "fleeing properties".

A property f having a sense for natural numbers is called a *fleeing property* if it satisfies the following three requirements:

(i) For each natural number n, it can be decided whether or not n possesses the property f;

(ii) no way is known to calculate a natural number possessing f;

(iii) the assumption that at least one natural number possesses f, is not known to be contradictory.

In particular, a fleeing property f is called *opaque,* if the assumption that at least one natural number possesses f, is neither known to be contradictory nor to be noncontradictory.

Obvious examples of fleeing properties can easily be given. For each fleeing property f the assertion that at least one natural number possesses f, is in the fourth case.

For each fleeing property f every natural number n can be proved to be

either a *down-number* of f, if *no* natural number $\leqslant n$ possesses f;
or an *up-number* of f, if *some* natural number $\leqslant n$ possesses f.

In case an up-number of f is found, on the one hand f has lost its fleeing nature, on the other hand there exists a *smallest natural number possessing* f denoted by κ_f and called the *critical number of* f.

Let f be an opaque fleeing property which is *two-sided with regard to parity* by which we mean that neither of an odd nor of an even κ_f the existence is known to be contradictory.

Let us consider the infinite sequence $a_1, a_2, \ldots$, where $a_\nu = (-2)^{-\nu}$, if ν is a down-number, and $a_\nu = (-2)^{-\kappa_f}$, if ν is an up-number of f. This infinite sequence is convergent because beyond a_ν its field of variation is $< 2^{-\nu+1}$. So it defines a real number s_f, which we call the *oscillatory binary shrinking number of* f.

Let us consider the assertion "$s_f = 0$". It satisfies the principle of reciprocity of absurdity, for, if some day a proof of its noncontradictority will be given, its truth will be established simultaneously. But it does not satisfy the principle of the excluded third.

Another corollary of the principle of judgeability is the *principle of testability* saying that each mathematical assertion can be *tested,* i.e. proved either to be noncontradictory or to be contradictory. That the principles of judgeability and testability are not equivalent, is demonstrated by considering the assertion "s_f is rational" which means that an integer p and a natural number q can be calculated such that $s_f = \frac{p}{q}$. It is easily seen that this assertion is noncontradictory without being either true or false.

It is by the unlawfulness proved above of passing from non-contradictority to truth as its equivalent that from the intuitionist point of view large parts of classical mathematics have become untenable, and classical algebra of logic has lost its general validity for mathematics, as we shall illustrate by denoting by $\bar{\alpha}$ the assertion of the absurdity of the assertion α and showing the intuitionist falsehood of the formulae

$$(2)\quad \overline{\bar{\sigma} + \bar{\tau}} \equiv \sigma \times \tau$$

$$(3)\quad \sigma + \tau \equiv \overline{\bar{\sigma} \times \bar{\tau}}$$

$$(4)\quad \overline{\sigma \times \tau} \equiv \bar{\sigma} + \bar{\tau}$$

which on account of duality between affirmation and negation and between logical sum and logical product would follow from the intuitionistically true assertion

$$(1) \quad \overline{\sigma + \tau} \equiv \bar{\sigma} \times \bar{\tau}$$

with which they form the so-called De Morgan system.

To refute (2) and (3) we only have to consider the special case $\sigma \equiv \tau$, in which both these formulae express the equivalence of truth and noncontradictority for an arbitrary assertion. This equivalence, as we have seen, does not exist for the assertion of rationality of the above number s_f.

⟦2⟧ To refute (4) we have to go a bit farther into the consequences of the intuitionist point of view, and to take into consideration that intuitionist infinite sequences, in particular the convergent infinite sequences of rational numbers that are the real numbers, need not, like those of classical mathematics, be predeterminate, but may proceed with a greater or smaller amount of freedom. By virtue of this circumstance there exist, for any real number a, real numbers b which are $\neq a$, and nevertheless not known to be either $> a$ or $< a$, so neither known to be either $\geqslant a$ or $\leqslant a$. Now let r be a real number $\neq 0$, but not known to be either $\geqslant 0$ or $\leqslant 0$, σ the assertion $r \geqslant 0$ and τ the assertion $r \leqslant 0$. Then $\sigma \times \tau$ is equivalent to $r = 0$, $\overline{\sigma \times \tau}$ to $r \neq 0$, which is true, and $\bar{\sigma} + \bar{\tau}$ to "either $r \geqslant 0$ or $r \leqslant 0$," which is not true.

Still farther penetration into intuitionist developments even leads to a proof that general validity of any of the formulae (2), (3) and (4) is
⟦3⟧ not only not true, but contradictory.

Fortunately classical algebra of logic has its merits quite apart from the question of its applicability to mathematics. Not only as a formal image of the technique of common-sensical thinking has it reached a high degree of perfection, but also in itself, as an edifice of thought, it is a thing of exceptional harmony and beauty. Indeed, its successor, the sumptuous symbolic logic of the twentieth century which at present is continually raising the most captivating problems and making the most surprising and penetrating discoveries, likewise is for a great part cultivated for its own sake. Don't let us forget that it is Boole who has been the originator of all this.

ON THE EXTENSION OF THE DOMAIN OF A FUNCTION

⟦Brouwer gave the following proof in a course of lectures during the academic year 1938–1939. Thanks are due to Mr. C.A.M. van der Linden for permission to use his lecture notes. The proof is an adaptation to intuitionism of the paper 'Ueber die Erweiterung des Definitionsbereichs einer stetigen Funktion', Math. Annalen 79 (1918), p. 209–211 ⟦Vol. 2, 1918 C⟧.⟧

Theorem. A function f which is defined on a located compact subspecies S of a Cartesian n-dimensional space can be extended to a continuous function φ in the whole space.

Definition. A species S is located if the distance $\rho(P, S)$ from P to S can be calculated for every point P.

Example for $n = 1$ of a compact species that is not located. Let k be the first number for which the k^{th}–$(k+9)^{th}$ digits in the decimal expansion of π are 0123456789. If k is even, then $1 \in S$; if k is odd, then $-1 \in S$. No other point belongs to S.

Proof of the theorem (for $n = 2$).

According to (1919A) S coincides with a fan F in which every element is a sequence of λ_{4n}-squares; let D be the fan-direction corresponding to F, i.e. the species of finite sequences which are admissible for F. Let us call a λ_{4n}-square a μ_n-square. All the μ-squares that occur in elements of D can be arranged in a sequence $\mu^{(i)}$. To each $\mu^{(i)}$ we associate a point m_i of S as follows: Among the squares $\mu^{(j)}$ lying inside $\mu^{(i)}$ we determine that which has minimal index and maximal coordinates; by repeating this procedure we obtain a sequence of μ-squares which defines m_i. The species of the m_i is denumerably infinite and everywhere dense in S; some of the m_i may coincide.

Let μ_0 be any μ-square. We define $\varphi(\mu_0)$ as follows.

Case 1. μ_0 is overlapped by one or more μ_i. Then we choose among them that which is of the same size as μ_0 and has maximal coordinates; if this is $\mu^{(i_1)}$, then $\varphi(\mu_0) = f(m_{i_1})$.

Case 2. μ_0 is not overlapped by a $\mu^{(i)}$. Let P be the vertex of μ_0 with maximal coordinates. Define $r_i'(P) = 2\rho(P, S) - \rho(P, m_i)$. $r_i(P) = \max(r_i'(P), 0)$.

$$\varphi(P) = \varphi(\mu_0) = \frac{\sum \frac{r_i(P)}{i^2} f(m_i)}{\sum \frac{r_i(P)}{i^2}}$$

Only points m_i in a circle of radius $2\rho(P, S)$ give contributions to the sums. Call this circle the active circle γ_P. The sums are convergent because $r_i(P)$ and $f(m_i)$ are bounded.

Let the nested sequence $\{\sigma_n\}_n$ of μ-intervals determine the point Q, then $\varphi(Q)$ is defined by $\lim \varphi(\sigma_n)$. It is easy to see that this limit exists.

It must now be proved that

1. $\varphi = f$ on S.
2. Different sequences, determining the same point Q, give the same value $\varphi(Q)$.
3. φ is continuous.

Item 1 is an immediate consequence of the fact that a point of S is determined by a sequence of squares in case 1. For the proof of items 2 and 3 it is sufficient to prove:

(*) For every $\eta > 0$ there is a number ε such that the values of φ for two μ-squares at a distance less than ε differ less than η.

This proof uses the fact that f is uniformly continuous on S (see for instance (1954A), § 6). Let $\eta > 0$ be given, and let ε_1, ε_2, ε_3 be positive numbers to be determined later; $\varepsilon_1 > 2\varepsilon_2$. Let A_1 and A_2 be points such that $\rho(A_1, A_2) < \varepsilon_2$. At least one of the two following statements holds:

(1) $\rho(A_i, S) < 2\varepsilon_1 \quad (i = 1, 2)$

(2) $\rho(A_i, S) > \varepsilon_1 \quad (i = 1, 2)$.

Case (1). Let μ_1 and μ_2 be μ-squares of diameter $<\varepsilon_2$, containing A_1, respectively A_2, and let L_1, L_2 be their vertices with maximal coordinates. $\rho(L_1, L_2) < 3\varepsilon_2$; $\rho(L_i, S) < 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. The active circles of L_1 and L_2 have radii $<4\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ and are both contained in a circle of radius $<4\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2$. Because f is uniformly continuous the variation of f in this circle will be less than η if ε_1 and ε_2 are small enough; it follows that $|\varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2)| < \eta$.

Case (2). ε_1 is now fixed. By the Heine–Borel theorem (1926C) there is a finite set $m_1, \ldots, m_{h-1}$ of points m_i which approximates every point of S to $\frac{1}{4}\varepsilon_1$. Let P be any point such that $\rho(P, S) > \varepsilon_1$, P' a point in S such that $\rho(P_1, P) < \rho(P, S) + \frac{1}{4}\varepsilon_1$ and $m_{i(P)}$ a point such that $\rho(P_1, m_{i(P)}) < \frac{1}{4}\varepsilon_1$; $i(P) < h$.

$\rho(P, m_{i(P)}) < \rho(P, S) + \frac{1}{2}\varepsilon_1 < 1\frac{1}{2}\rho(P, S)$.

$r_{i(P)}(P) \geqq 2\rho(P, S) - \rho(P, m_{i(P)}) > \frac{1}{2}\rho(P, S)$.

$$\text{Put } \varphi_n(P) = \frac{\displaystyle\sum_1^n \frac{r_{i(P)}}{i^2} f(m_i)}{\displaystyle\sum_1^n \frac{r_{i(P)}}{i^2}} \; ; \; n > h.$$

We use the abbreviations:

A = the numerator of $\varphi_n(P)$; B = the denominator of $\varphi_n(P)$.

$$\alpha = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{r_{i(P)}}{i^2} f(m_i); \quad \beta = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{r_{i(P)}}{i^2} \; ; \quad R_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}.$$

Let K be the maximum of f on S.

$$|A| < KB. \quad |\alpha| \leqq KR_n\rho(P, S). \quad |\beta| \leqq R_n\rho(P, S).$$

B contains the term with index $i(P)$; hence

$$B \geqq \frac{r_{i(P)}(P)}{i(P)^2} > \frac{\rho(P, S)}{2h^2}.$$

$$\frac{|\alpha|}{B} < 2Kh^2R_n. \quad \frac{|\beta|}{B} < 2h^2R_n.$$

$$|\varphi_n(P)-\varphi(P)| = \frac{A\beta - B\alpha}{B(B-\beta)} < \frac{K|\beta|+|\alpha|}{B-\beta}.$$

Take $\varepsilon < \frac{\eta}{16K}$ and find n_0 such that $2h^2R_n < \varepsilon$ for $n > n_0$.

$$|\varphi_n(P)-\varphi(P)| < 4K\varepsilon < \tfrac{1}{4}\eta.$$

This holds for every point P such that $\rho(P, S) > \varepsilon_1$. Let A_1, A_2 be two such points. It remains to find ε_3 such that $|\varphi_n(A_1)-\varphi_n(A_2)| < \frac{1}{2}\eta$ for $\rho(A_1, A_2)<\varepsilon_3$.

$$|r_i(A_1)-r_i(A_2)| \leqq |2\rho(A_1, S)-2\rho(A_2, S)|+|\rho(A_1, m_i)-\rho(A_2, m_i)| < 3\varepsilon_3.$$

Put $\sum_1^n \frac{r_i(A_1)}{i^2} = G_1, \ \sum_1^n \frac{r_i(A_2)}{i^2} = G_2.$

$$|G_1 - G_2| < 3\varepsilon_3 \sum_1^n \frac{1}{i^2} < 6\varepsilon_3.$$

$$\left|\frac{r_i(A_1)}{G_1}\right| < \frac{2\rho(A_1, S)}{|G_1|} < 2h^2 \text{ (as for } B \text{ above).}$$

$$\left|\frac{r_i(A_1)}{G_1} - \frac{r_i(A_2)}{G_2}\right| = \left|\frac{r_i(A_1)(G_2-G_1)-(r_i(A_1)-r_i(A_2))G_1}{G_1G_2}\right| <$$

$$\frac{12h^2\varepsilon_3+3\varepsilon_3}{G_2} < \frac{2h^2}{\varepsilon_1}(12h^2\varepsilon_3+3\varepsilon_3).$$

Take ε_3 so small that this is $< \frac{\eta}{4K}$.

$$|\varphi_n(A_1)-\varphi_n(A_2)| = \left|\sum_1^n \frac{r_i(A_1)}{G_1}\frac{f(m_i)}{i^2} - \sum_1^n \frac{r_i(A_2)}{G_2}\frac{f(m_i)}{i^2}\right| <$$

$$< \frac{\eta}{4K}\cdot K\sum \frac{1}{i^2} < \tfrac{1}{2}\eta.$$

This completes the proof.

II DISCONTINUOUS INTUITIONISTIC FUNCTIONS OF A REAL VARIABLE

⟦Among Brouwer's papers there was a sketchy draft for a lecture which he gave in April 1938. It contains some statements which were not published elsewhere. Here follows a translation of the main parts.⟧

Intuitionism has a radical influence on the theory of discontinuous functions, mainly because it considers the continuum as a spread, and hence considers a point of the continuum as a nested fundamental sequence of λ-intervals, which is generated by free choices. It is evident by this definition that the continuum consists of unsharp points ⟦i.e. points for which only an initial segment of the sequence is known⟧, and this entails the following two intuitionistic theorems:

1. Every full function is uniformly continuous.
2. If a fundamental sequence of functions converges *everywhere* to a limit function, then the convergence is uniform.

These theorems are consequences of the intuitionistic main theorem on finitary spreads (the unit continuum coincides with such a spread). This theorem says that the value of a function from a finitary spread to the natural numbers is determined for every element of the spread before a fixed stage of the choices.

Theorem 1 entails that there exist no everywhere defined discontinuous functions.

....

Theorem 2 entails moreover that the method by which simple discontinuous functions are classically constructed, namely as the limit of continuous functions, fails, for this limit is always again a continuous function. Thus there is some reason for Weyl's exclamation at his first confrontation with intuitionism: 'There are no discontinuous functions!' But this goes too far, for we can consider functions which are defined on an everywhere dense subspecies of the continuum and these may very well be discontinuous and coincide in their domain with the limit of a sequence of continuous functions, *even* if they are totally discontinuous (which contradicts a theorem of Baire). This is always the case when the domain is denumerable. We can even take for the domain an outer limiting species U of measure 1, thus a species which contains plenty of unsharp points. In this case the function is defined almost everywhere and yet totally discontinuous, and in its domain it is the limit of continuous functions f_ν. The construction is as follows. ⟦See for the notation (1919A), § 14⟧ $U = \mathscr{S}(k_1, k_2, \ldots)$. The graph of f_ν consist of straight line segments above the free intervals $\geqq \varepsilon_\nu$ of $K_\nu = \mathscr{S}(k_1, \ldots, k_\nu)$, connected by continuous arcs which are horizontal line segments over the intervals $< \varepsilon_\nu$ of K_ν; further $f_{\nu+1}$ has the same values as f_ν on K_ν.

Baire's theorem does not completely lapse, for we can prove the following somewhat contrived theorem: If the species σ of the points of convergence of a sequence of continuous functions is everywhere dense in the domain g and if ⟦the limit⟧ function is totally discontinuous (with oscillation s), then there exists an everywhere dense inner limiting species γ where the limit oscillation of the sequence of functions is s, so that every point of γ is apart from every point of σ. Now it is also possible to define totally discontinuous functions whose domain has points in common with every everywhere dense inner limiting species; hence there exist discontinuous functions which *cannot* be considered in their whole domain as limits of continuous functions. But, as we have seen, it is by no means true that this negative property holds for every discontinuous function. Nor can we state that, if the domain of a function contains for every ε an everywhere dense set of points where the oscillation is $<\varepsilon$, it follows that there are points of continuity (consider for instance the function that has the value 2^{-n} for $x = a \cdot 2^{-n}$, a odd). This theorem does hold if also points of continuity outside the domain are considered.

....

As to the construction of discontinuous functions, we can in the first instance restrict the range to a denumerable or denumerably unfinished set. If we wish to get rid of this restriction and to admit unsharp values, we can obtain these in the first place by means of unsharp approximations of x, which can be generated by a (not necessarily finitary) spread of x-values (not identical with the continuum), contained in the domain, such that each of its nodes defines an interval which converges to zero on every element of the spread. A priori we are less sure of this result if (more generally) for every ν the axis of x is divided into finite sets of κ-intervals such that for each of these sets the function values lie in a given λ_ν-interval of y. We can try to find for every unsharp y a well-defined species of x-values which is generated by approximations. This can be achieved by a process analogous to that by which functions are defined which take the value 0 on a measurable species and 1 on its complement.

⟦Here follows a summary of the definition of a measurable function and the theorems on its approximation, as in (1923 A), § 2.⟧

One may ask whether for measurable functions Baire's theorem holds: If a function f is pointwise discontinuous on every perfect species, then there can be *constructed* a fundamental sequence of continuous functions which has f as its limit function in the whole domain of f. This is not the case because Baire's proof uses essentially invalid existence proofs. Instead we have the approximation by a fundamental sequence of continuous functions which approximate f almost everywhere on its domain, as stated above. Further we have the theorem: If the sequence $f', f'', \ldots$ converges almost everywhere to φ and every $f^{(\nu)}$ is measurable, then φ is measurable. This replaces the old theorem: If $f', f'', \ldots$ are measurable

⟦559⟧

and uniformly bounded and if the sequence converges *everywhere* to f, then f is measurable. This theorem is worthless because convergence *everywhere* to a discontinuous function is impossible.

⟦Remark about the connection between measurable and integrable functions. See (1923A).⟧

It is improbable that there exists a solid equivalent for the classical theorem that the indefinite integral of an integrable function f is almost everywhere differentiable and has almost everywhere f as its differential quotient. This is a consequence of the invalidity of the theorems of Borel and Vitali (When every point of a species Q with exterior measure $m>0$ is contained in a convergent chain of closed intervals, then there is for every ε a finite number of these intervals, apart from each other, whose intersection with Q has a measure $>(1-\varepsilon)\cdot m$.) Also the differentiability 'almost everywhere' of monotone functions holds only for completely derivable (i.e. possessing almost everywhere the four derivatives) monotone functions ⟦See (1923A), § 3, Satz 9.⟧

Finally we must remark that a function which is defined almost everywhere is full only in a very weak sense. In the first place, when we form the union of, say, complementary inner and outer limiting species, many unsharp points will waver and not belong to the union. Further the notion of 'almost everywhere' is in a sense unstable. Let a species σ satisfy the conditions that it is measurable with measure 1, that it 'übereinstimmt' ⟦(1923C)⟧ (resp. is congruent) with the continuum, and that all its measurable topological equivalents have the measure 1; then we can not only construct a located perfect pointspecies which does not belong to σ, but we can even give an example of a non-measurable topological equivalent τ of σ and a measurable species s of measure 1 ($1-\varepsilon$ resp.) of points that do not belong to τ. This property holds also for σ itself if an appropriate measure is used.

⟦See about the last remark also the end of (1927B).⟧

SYLLABUS OF A POSTHUMOUS MANUSCRIPT BASED ON THE LECTURES WHICH BROUWER GAVE AT CAMBRIDGE, ENGLAND, IN 1946

The manuscript cannot be published here for the reason mentioned in the Introduction to this edition. It is a connected account of some parts of intuitionistic mathematics. Probably it was not written in its definitive form before 1954, for it contains additions and clarifications pertaining to some papers which appeared after 1946.

Chapter 1
HISTORICAL INTRODUCTION. FUNDAMENTAL NOTIONS

Most of the material of this chapter is contained in the papers (1952 B), (1928 A) and (1954 A). There are some additions and modifications. In the definition of a spread a distinction is made between a *spread direction* and a *spread law*. A spread law is predeterminate, a spread direction need not be so. From the definition it becomes clear that the interpretation of 'not necessarily predeterminate' suggested in note ⟦8⟧ to (1954 A) is correct.

Chapter 2
GENERAL PROPERTIES OF SPECIES, SPREADS AND SPACES

The chapter falls into loosely connected parts.

1. A new refined terminology for spread theory is introduced. A spread direction can be defined by the species of sterilized nodes (as in 1925 A) or by the species of admissible nodes (K in 1954 A). In the former case different hypotheses can be made concerning the distribution of the sterilized nodes. In the latter case new notions can be introduced by sterilizing some of the nodes which at first were admissible. Further some of the decisions involved in the definition of a spread may be predeterminate or open to free choice. New denominations are introduced for several notions obtained by these distinctions. In particular, roughly speaking, a predeterminate fan is here called a *cluster*; by sterilizing a (not necessarily predeterminate) subspecies of the admissible nodes in a cluster a *bunch* is obtained.
2. The basic notions of species theory are introduced as in (1925 A), with some additions and simple examples.
3. The proof of the theorem in (1928 B) is given in a slightly more precise form.
4. The Cartesian plane and the reduced Cartesian plane are defined by means of λ-squares. The proof of the theorem: 'Every compact located point core species of the Cartesian plane coincides with a bunch point spread' is proved along the lines of (1919 A), p. 14 ⟦p. 202⟧.
5. The definition of a located compact topological space is given as in (1926 B).

Chapter 3
ORDER

The theory of well-ordered species deviates from that in (1927 A) mainly in the following respect: In a well-ordered species every element is a full element. A pseudo well-ordered species is obtained by assigning to each element of a well-ordered species W one of the predicates 'full' or 'empty'; this may be done by successive choices after the elements of W have been ordered in a fundamental sequence.

Virtual order is introduced in the same way as in (1927 C) and its use for the continuum is motivated. The theorems about the equivalence of virtual order and inextensible order are proved. Brouwer mentions explicitly that conditions 6 and 7 of (1927 C) ought to be interpreted according to 6′ and 7′, mentioned in note ⟦4⟧ to (1927 C).

It is proved that neither the full nor the reduced continuum can be completely ordered.

Chapter 4
CLOSER ANALYSIS OF THE CONTINUUM

It is proved in detail that the continuum C over the species S of order type η is independent of the similarity mapping of S onto the binary fractions. Moreover, the same continuum is obtained by starting from any subspecies of C which has order type η and is everywhere dense in C.

The precision of the position of an element of C with respect to S is discussed as in (1921). It is shown in the same way as in (1930 A) that the continuum does not possess several properties asserted in classical mathematics. Moreover, for each of these properties a wider, but classically equivalent, definition is given which makes it hold intuitionistically. The latter is done in more detail than in (1930 A).

Chapter 5
THE BUNCH THEOREM

In the formulation and in the proof of the bar theorem (here called the bunch theorem) the notions introduced in Chapter 2 are taken into account. The notion of a bar is not introduced.

The theorem on uniform continuity of full functions is proved. The following theorem is mentioned without proof: 'If an infinite sequence $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... of uniformly continuous functions of the unit-continuum converges everywhere to a limiting function $f(x)$, then not only is $f(x)$ again a uniformly continuous function, but moreover the convergence of the $f_\nu(x)$ to $f(x)$ is uniform.'

It is shown in greater detail than in (1923 B) that the classical form of the Heine–Borel theorem does not hold intuitionistically. The intuitionistic form of the theorem is proved along the lines of (1926 C).

Finally Brouwer proves that any ordering of the continuum must be identical with or inverse to its intuitive virtual order.

NOTES

1905 Life, Art and Mysticism

⟦1⟧ The pamphlet from which these fragments are taken, contains lectures which Brouwer gave for a students' society. It expresses a philosophical position which he held all his life. In (1948 C) he defended similar ideas. The introduction of (1908 C) can only be understood on this basis; this proves that according to Brouwer himself there was a narrow connection between his general philosophical ideas and his philosophy of mathematics and science. For this reason we must give some attention to the pamphlet, but printing an integral translation is out of the question. In many places Brouwer runs on inconsiderately, for instance on the position of women in society, and these digressions have nothing to do with his fundamental ideas. On the other hand, some of his utterances are really prophetic in so far as they announce problems which are becoming serious to-day, more than half a century later. Here we give a translation of a sequence of fragments which renders as faithfully as possible his main line of thought. Omitted are irrelevant digressions and quotations from Meister Eckhart, Jakob Böhme and the Bhagavad Gita, which abound in the original.
⟦2⟧ The jump from the end to the means is an important notion in Brouwer's philosophy of science. See (1907), chapter 2.
⟦3⟧ Brouwer does not explain the word 'karma'. He simply borrows it from the theosophic jargon.

1907 On the foundations of mathematics

⟦*Notes to chapter 1*⟧
⟦1⟧ See also (1918 B), p. 5 ⟦p. 152⟧ or (1925 A, p. 248 ⟦p. 305⟧).
⟦2⟧ The definitions of the arithmetical operations by recursion and the derivation of their properties by induction are intuitionistically correct. Probably Brouwer intended to demonstrate that the notions of these operations are more primitive than the general notions of recursion and of induction.
⟦3⟧ In the thesis Brouwer still used the principle of excluded middle uncritically. He rejected it in (1908 C), and drew the consequences of this rejection in his papers (1918), (1919 A). Here he assumes that it is always decidable whether two of the newly introduced numbers are equal or not. The notions of difference (negation of equality) and of apartness ('örtlich verschieden: see (1919 A), p. 3 ⟦p. 191⟧) are not yet distinguished. See about this matter (1921).
⟦4⟧ In his later work Brouwer abandoned the notion of the continuum as a basic notion of mathematics. While here the continuum is considered as given, and points in it are determined by sequences of (for instance) dual fractions, in the later papers (1918), (1919 A) the continuum is defined by means of a spread and points on it are defined by elements of the spread.
⟦5⟧ After the rejection of the principle of excluded middle it became clear that

the usual form of the Bolzano–Weierstrass theorem does not hold. See (1952 C).
⟦6⟧ In this proof the principle of excluded middle is used (see note 7), but a correct proof can easily be given by projection.
⟦7⟧ This is again an application of the principle of excluded middle, for there are points on $\alpha\beta$ for which it is unknown whether they lie to the left or to the right of P.
⟦8⟧ For the following characterization of the arithmetical operations see remark 1 in (1917) and the papers mentioned there. The theory which Brouwer sketches here and which he elaborated later, is not intuitionistic. Brouwer returns to the foundations of mathematics below under the heading 'The possible pointsets' ⟦p. 44⟧.
⟦9⟧ Brouwer seems to forget the case of infinite intervals, or of the whole continuum, as the domain of a scale.
⟦10⟧ Brouwer identifies the curves with the functions; he writes that the functions intersect or are disjoint, etc..
⟦11⟧ Brouwer means: Each of the groups contains a subgroup of index 2; this subgroup as well as the whole group is called a group of motions. Brouwer used the word 'group' somewhat loosely; evidently the terminology was not fixed in 1907 as it is now.
⟦12⟧ See about the following deduction remark 2 in (1917) and the literature mentioned there.
⟦13⟧ It seems that Brouwer says 'group' where we say 'semigroup' and 'invertible group' where we say 'group'.
⟦14⟧ Brouwer solved this problem in his paper 'Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie', Math. Annalen 67 (1909), p. 246–267; Math. Annalen 69 (1910), p. 180 and 181–203. See Volume 2, (1909 C), (1910 H).
⟦15⟧ By 'single-valued' Brouwer means that $f(x, y, \operatorname{tg} \vartheta)$ depends only on $\operatorname{tg} \vartheta$, not on ϑ.
⟦16⟧ 'Calibration curve' is the literal translation of Hamel's 'Aichkurve'.
⟦17⟧ Brouwer summarized this section in (1908 A). He repeatedly revised his notion of the continuum. In the following the fundamental ideas of his set theory are present, but they are not completely thought out. He gave some corrections in remark 3 in (1917). The definition of the continuum by means of a spread and a general theory of cardinal numbers appear in (1918) and in a more definitive form in (1925 A).
⟦18⟧ The Dutch text is not clear. Probably 'subordination' means the process of replacing the elements of a set by other sets and applying ordinal addition, and by 'alternation' Brouwer means that finite sets, sets of type ω and sets of type η can be used alternately.

⟦19⟧ Brouwer returns to the theory of well-ordered sets in chapter 3 ⟦p. 81⟧; see for the definitive theory (1927 A).
⟦20⟧ There is a striking analogy between this passage and the definition of the continuum by means of a spread, but the difference between the two conceptions is fundamental. Here, in the thesis, Brouwer considers the continuum *C* as given by intuition. When a dense scale *D* is constructed on *C*, every point of *C* can be approximated by a sequence of points of *D*. The approximating sequences of the elements of a subset of *C* form a tree, as illustrated in the figure. The operation 'completion to a continuum' corresponds with admitting two branches at every branching-point. This leads naturally to the definition of the continuum by means of a spread, as it occurs in (1919 A), but here Brouwer does not introduce this notion.
⟦21⟧ This conclusion is due on the one hand to the restrictions on the construction of a set that Brouwer has introduced, on the other hand to the application of the principle of excluded middle. Brouwer corrected it in remark 3 of (1917). In (1918) and (1925 A) he elaborated a theory of cardinal numbers, based on an extended notion of a set.
⟦22⟧ In this section Brouwer paraphrases § 33 of Hilbert's monograph.
⟦23⟧ Here and below the text is corrected according to remark 4 in (1917).
⟦24⟧ See the end of remark 4 in (1917).
⟦25⟧ This is perhaps the clearest formulation of Brouwer's fundamental ideas, to which he remained faithful all his life, no matter how often he had to revise details in the development.

⟦*Notes to chapter 2*⟧
⟦1⟧ Brouwer never seriously discussed the philosophical problem of induction. He describes induction as a mode of behaviour. Obviously the term 'mathematical induction' must not be understood here in the sense which it has in arithmetic. It denotes the mathematical aspect of the process of generalization.
⟦2⟧ See remark 5 in (1917).
⟦3⟧ See remark 6 in (1917), and also (1909).
⟦4⟧ Brouwer used the French translation: B. A. W. Russell, Essai sur les fondements de la géometrie, traduction par A. Cadenat, revue et annotée par l'auteur et par L. Couturat, Paris 1901.

We shall indicate in notes where the cited places of the translation differ from the original.
⟦5⟧ In the French translation, in stead of 'In part this is true, but not wholly' there is stated: 'Ce n'est cependant pas le cas.' The following sentence, cited by Brouwer, does not occur in the English edition: 'Tout criterium de l'égalité est, non pas une définition, mais une proposition qui peut être vraie ou fausse.'

⟦*Notes to chapter 3*⟧

⟦1⟧ G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884; Grundgesetze der Arithmetik, Jena 1893–1903. G. Peano, Formulaire de mathématiques, Torino 1894–1908. B. Russell, Principles of mathematics I, Cambridge 1903. Brouwer seems not to have known Frege's work. He has never mentioned it.

⟦2⟧ See about the principle of excluded middle remark 7 in (1917) and the important paper (1908 C).

⟦3⟧ Brouwer elaborates his remarks on Hilbert's 'Ueber den Zahlbegriff' at the end of this chapter ⟦p. 93⟧.

⟦4⟧ This footnote anticipates Brouwer's doubts as to the principle of excluded middle.

⟦5⟧ See the end of Hilbert's paper 'Ueber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik', Verhandl. 3. internat. Math. Kongress Heidelberg 1904, Grundlagen der Geometrie Anhang VII.

⟦6⟧ Evidently Brouwer means that a lawlike sequence, e.g. that of digits in the decimal expansion of π, is a mathematical object because one law of progression, which can be applied to each digit in its turn, is given.

⟦7⟧ Brouwer writes $m \cdot \omega$, where the modern notation is $\omega . m$.

⟦8⟧ See remark 9 in (1917) and the paper (1912 A2), p. 91 ⟦p. 133⟧.

⟦9⟧ As Brouwer justly remarks, denumerably unfinished is not a power in the proper sense. In later papers (1918, 1925 A) he does not mention this notion and he builds up a theory of powers based on one-to-one correspondence.

Perhaps a better translation of the Dutch 'aftelbaar onaf' would be 'ever denumerable, ever unfinished', but this is too cumbersome.

⟦10⟧ See remark 10 in (1917) and the paper (1912 A2), p. 91–93 ⟦p. 133–135⟧.

⟦11⟧ See remark 11 in (1917).

⟦12⟧ See remark 12 in (1917) and the paper (1912 A2), p. 94–96 ⟦p. 136–138⟧.

⟦13⟧ See remark 13 in (1917).

⟦14⟧ See remark 14 in (1917).

⟦15⟧ Russell uses $\hat{x}(\varphi x)$ instead of $x \ni \varphi x$.

⟦16⟧ These passages, which Brouwer puts (in Dutch) between quotation marks, are not exact translations of Russell's words, but free paraphrases. We have translated them into English. In particular Russell (Principles of mathematics, p. 105) writes 'all terms', 'any term', where Brouwer uses the Dutch word 'ding', which means 'thing' or 'object' in English.

⟦17⟧ The following paragraphs 1°–4° are composed of quotations from Russell's book and comments by Brouwer. The sentences which Brouwer translated literally from Russell's book are here printed in italics.

⟦18⟧ See for further comment (1917), remark 15.

⟦19⟧ The following is not a literal quotation from Hilbert's paper.

⟦20⟧ Here Brouwer foresees the fundamental ideas which Hilbert would develop in his Proof Theory (Beweistheorie). Hilbert was certainly influenced by conversa-

tions with Brouwer. Brouwer explicitly states this in footnote [2]) to (1928 A).
⟦21⟧ In later work Brouwer no longer considers *continuous* as an irreducible notion. See note ⟦4⟧ to chapter 1.
⟦22⟧ We do not reproduce the Index of Authors.

1908 A Die möglichen Mächtigkeiten

⟦1⟧ This paper summarizes the section on 'The possible pointsets' in the thesis ⟦p. 44⟧. See also note ⟦17⟧ to that section.
⟦2⟧ In his copy Brouwer changed the words 'während das weitere' into 'weil die genannte Operation'.

1908 B On the foundations of mathematics

⟦1⟧ This reply to the review by Mannoury of Brouwer's thesis gave Brouwer the opportunity to clarify some points. Some less important remarks are omitted in the following.
⟦2⟧ I have extended Brouwer's quotation for the sake of clarity.
⟦3⟧ This discussion on the counterexample to Russell's axioms for projective geometry is less important.

1908 C The unreliability of the logical principles

⟦1⟧ Here Brouwer alludes to his theory of causality, explained in chapter 2 of this thesis ⟦p. 53⟧. Because of the extremely condensed form of this passage I add here a somewhat different version in German, which was found among Brouwer's papers.

'Die Wissenschaft (d.i. die empirische Naturwissenschaft) beobachtet Ereignisse und Ereignisverkettungen, welche sich zeitlich *wiederholen*, das heisst, die sich, obwohl sie untereinander qualitativ verschieden sind, dennoch mit Nutzen als einander gleich auffassen lassen.

Solche Vereinzelung der Idee zur Wahrnehmbarkeit und demzufolge auch zur Wiederholbarkeit ereignet sich mit der Auflösung der religiös-kontemplativen Ur-Einheit: durch das mystische Ur-Geschehen der Spaltung in das *Subjekt* und in die nun zu einem '*Anderen*' und Unerreichten gewordenen Erreichbarkeit.

Der Drang zur Erreichung dieser (direkt nicht zugänglichen) Erreichbarkeiten wird von der Vernunft an vorläufigen Erreichbarkeiten entlang geführt, und zwar anhand eines mathematischen Systems von gesetzten Setzbarkeiten, wie es aus der Selbstentfaltung der Abstraktion von Wiederholung und Wiederholbarkeit gewonnen wird.'
⟦2⟧ Brouwer had a lifelong interest in mysticism. The pamphlet (1905) (see the fragments ⟦p. 1–10⟧) is entirely devoted to it, and in (1948 C) he holds similar views.

⟦3⟧ Later Brouwer made the remark that the principle of excluded middle does lead to a contradiction when it is applied to an infinite species of propositions. See (1928 A) and (1954 A).
⟦4⟧ For the theory of cardinalities see the thesis ⟦p. 82–83⟧. Brouwer revised this theory in later papers; see (1918 B) and (1925 A).

1909 The nature of geometry

⟦1⟧ Inaugural lecture as privaat-docent (unsalaried lecturer) in the University of Amsterdam, 12 October 1909.
⟦2⟧ The following is not a historically exact description of Descartes' ideas. It seems that Riemann was the first to define space as a 'Zahlenmannigfaltigkeit'. B. Riemann, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abh. Akad. Wiss. Göttingen 13 (1854), Ges. math. Werke p. 272–287.
⟦3⟧ Compare the first paragraph in chapter 2 of the thesis, also the beginning of (1908 C).
⟦4⟧ A. Cayley, A sixth memoir on quantics, Phil. Trans. Roy. Soc. 149 (1859), Collected Works II p. 561. S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen III Abt. 5. D. Hilbert, Math. Annalen 56 (1903) p. 381–422, Grundlagen der Geometrie, Anhang IV.
⟦5⟧ See Brouwer's papers: Beweis des ebenen Translationssatzes, Math. Annalen 72 (1912), p. 37–54. Remark on the plane translation theorem, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 21 (1918), p. 935–936. Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie, Math. Annalen 67 (1909), p. 246–267, 69 (1910), p. 180–203. See Volume 2 (1912 B), (1909 B), (1910 H).
⟦6⟧ See Brouwer's paper 'Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl', Math. Annalen 70 (1911), p. 161–165, Volume 2, (1911 C).
⟦7⟧ Brouwer gave a proof of Jordan's theorem in the paper 'Beweis des Jordanschen Kurvensatzes', Math. Annalen 69 (1910), p. 169–175, Volume 2, (1910E), and an intuitionistic proof in (1925 B).
⟦8⟧ See Brouwer's paper 'Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve', Math. Annalen 72 (1912), p. 422–425, Volume 2, (1912 L).
⟦9⟧ See Brouwer's papers: 'Sur le théorème de M. Jordan dans l'espace à *n* dimensions', C. R. Acad. Sci. Paris 153 (1911), p. 524–544. 'Beweis des Jordanschen Satzes für den *n*-dimensionalen Raum', Math. Annalen 71 (1911), p. 314–319. See Volume 2, (1911 L), (1911 F).

1912 A Intuitionism and formalism

⟦1⟧ The Dutch word for mathematics is 'wiskunde', which means 'sure knowledge'.

⟦2⟧ G. Peano, Math. Annalen 37 (1890), p. 182–228.
G. Mie, Math. Annalen 43 (1893), p. 553–568.
The latter paper is a free paraphrase, not a translation, of the former.
⟦3⟧ These footnotes were added in the translation.
⟦4⟧ Footnote * was added in the translation.
Footnote †: E. Borel, Revue du mois 80 (1912), p. 221, reprinted in: Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1914, Note IV, section VII, La philosophie mathématique et l'infini, p. 166–174.
⟦5⟧ It is not clear which axiom system for set theory Brouwer had in mind. The system which Zermelo gave in Math. Annalen 65 (1908), p. 261–281, differs from that which Brouwer gives in the following respects: The existence of the sets $\emptyset$, $\{a\}$ and $\{a, b\}$ is postulated. The 'Aussonderungsaxiom' is only postulated for subsets of a given set. An axiom of infinity is given. – The translation of the names of the axioms is not the usual one. The axiom of selection is usually called the axiom of choice; the axiom of inclusion is the axiom of comprehension; the axiom of composition is the axiom of sum-set or of union.
⟦6⟧ Brouwer never used the term 'elementary series'. In the Dutch text he used 'fundamentaalreeks'; in German he said 'Fundamentalreihe' for a sequence determined by a law.
⟦7⟧ The footnote runs, corrected according to remark 9 in (1917):

'If "construct" were here replaced by "define" (in the formalistic sense), the proof would *not* be satisfactory to the intuitionist. For, in Cantor's argument in Math. Annalen 49 (1897) ⟦Ges. Abh. p. 282–351⟧, it is not allowed to replace the words "muss es geben" (p. 214, line 17) ⟦p. 332, line 27⟧ by the words "können wir bestimmen".'

Later Brouwer changed the words 'the proof' into 'the formalistic proof of this property'.
⟦8⟧ In his copy Brouwer deleted 'but' and wrote in the margin 'and when a proof (for the rest not recognized by the intuitionist) is added by the formalist'.
⟦9⟧ The reference is to (1908 C).

1914 Review of: A. Schoenflies und H. Hahn, Die Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen

⟦1⟧ In this review Brouwer takes the opportunity of explaining his own ideas on set theory. In later papers he revised these ideas; in (1919 D), footnotes 8 and 9, he refers to this review and indicates the changes to be made in it.
⟦2⟧ M. Fréchet, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), p. 1–74.
⟦3⟧ The references are to (1908 A) and to E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1914, Note VI, Introduction, IV, p. 225.
⟦4⟧ $f(x)$ is not total. See (1921), where it is argued that not every real number admits a decimal expansion.

Brouwer changed 'rational ausfällt' (line 12) into 'ein endlicher Dualbruch ist'.
[[5]] The references are to (1908 C) and (1912 A).
[[6]] See remark 11 in (1917).
[[7]] Before 'Teilmenge' Brouwer inserted 'nichtabzählbare'.
[[8]] Before 'Gebieten' Brouwer inserted 'einander enthaltenden'. He changed e_1, e_2 into $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}$ and, only in line 11, i_1, i_2 into $i_{\gamma_1}, i_{\alpha_2}$.
[[9]] The references are to (1912 A), [[p. 135]] and [[p. 136–138]].

1917 Addenda and Corrigenda on the Foundations of Mathematics

[[1]] See note [[17]] to (1907) chapter 1.
[[2]] Here follows a more detailed explanation of this passage. A denumerable set A is given by a function f from the natural numbers to some set S. The elements of A become known one after the other by determining the values of f for the natural numbers. At the moment when $f(n)$ is determined, the order relations between $f(n)$ and $f(1), f(2), \ldots, f(n-1)$ can be fixed; in this manner the order relation on A is defined step by step. Thus the order type of A is known only when a law is given by which the order relations are fixed beforehand; the set of possible laws is denumerable.
[[3]] Brouwer alludes to the diagonal method: A mapping of the real numbers on the real functions can be considered as a function f of two variables; the real number y is mapped on the function (in modern notation) $\lambda x\ f(x, y)$. The function $\lambda x(f(x,x)+1)$ does not belong to the range of this mapping. Brouwer argues that $\lambda x\ f(x,x)$ need not be a function, because, if f is discontinuous, it cannot be defined everywhere, and so it may be undefined on the line $x = y$.

1918 B Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil: Allgemeine Mengenlehre

[[1]] The content of this paper has been revised and extended in the papers (1925 A), (1926 A), (1927 A). The corrections concern almost every page; therefore I have not added references to the latter papers. In particular Brouwer rewrote the theory of ordered species, including that of well-ordering, on a new basis. This paper is interesting mainly from the historical point of view. Many definitions and theorems occur here for the first time. On the other hand we see that in 1918 Brouwer had not yet completely thought out the consequences of his point of view. We reprint the paper because it is the introduction to (1919 A), of which a revised version has never appeared.
The notes [[2]]–[[6]] are taken from the 'Berichtigungen' which were printed behind (1919 A).
[[2]] instead of 'für jedes n' read 'für jedes $n > 1$'.

⟦3⟧ instead of 'von der Menge' read 'von einer unbegrenzten Wahlfolge'.
⟦4⟧ instead of 'eines gewissen' read 'eines gewissen eventuell fortfallenden'.
⟦5⟧ instead of 'von Quadraten' read 'von einander nicht überdeckenden Quadraten'.
⟦6⟧ instead of '$\geqslant$' read '$\lessgtr$ (und gleichzeitig $\lessgtr$)'.

1919 A *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Zweiter Teil: Theorie der Punktmengen*

⟦1⟧ A revised edition of this paper, though announced in footnote [1]) to (1925 A), has never appeared. However, among Brouwer's papers there was a manuscript on functions of a real variable of which the first part, under the title 'Grundlagen aus der Theorie der Punktmengen', is finished. It is dated 26.2.1924. The handwriting is not Brouwer's, but there are some corrections in his handwriting. It contains the main parts of (1919 A) with proofs elaborated in minute detail. In the following notes we give some of these proofs in translation and in abbreviated form. These notes are marked (M).

In (1952 C) Brouwer recasted the treatment of the Bolzano–Weierstrass theorem. In that paper he stated that the reasonings on Cantor's main theorem are also obsolete. Some sections of the present paper can be considered as definitive, because the corrections to be made in them are of minor importance. This holds for §§ 1, 3, 4, 6, 9, 13, 14, 16–21. (The numbers of sections are added by the editor.)
⟦2⟧ See for the definitions of 'Menge' (Spread) and of 'Species' (1918) or (1925 A). η is, as usual, the order type of the rationals. Brouwer uses 'Ordinalzahl' for 'order type'.
⟦3⟧ A square κ_ν has opposite vertices $(a \cdot 2^{-\nu+1}, b \cdot 2^{-\nu+1})$, $((a+1) \cdot 2^{-\nu+1}, (b+1) \cdot 2^{-\nu+1})$, a and b integers. A square λ_ν has opposite vertices $(a \cdot 2^{-\nu}, b \cdot 2^{-\nu})$, $((a+2) \cdot 2^{-\nu}, (b+2) \cdot 2^{-\nu})$, a and b integers. Negative values for ν are admitted.
⟦4⟧ According to Brouwer's terminology a *point* is a telescoped sequence of λ-squares. A *point core* is the species of the points which coincide with a given point. See the beginning of (1923 A).
⟦5⟧ Let $P \mathrm{s} Q$ mean: P coincides with Q, and let $P \mathrm{t} Q$ mean: P lies apart from Q(örtlich verschieden). The following properties are easily proved: s is an equivalence relation. t is symmetrical. $P \mathrm{s} Q \,\&\, P \mathrm{t} R \rightarrow Q \mathrm{t} R$. $P \mathrm{s} Q$ and $P \mathrm{t} Q$ contradict each other. When $P \mathrm{t} Q$ is impossible, then $P \mathrm{s} Q$ holds. Hence $P \mathrm{s} Q$ is equivalent with its double negation. However, when $P \mathrm{s} Q$ is impossible, it does not follow that $P \mathrm{t} Q$ holds (see the counterexample in (1949 A)).
⟦6⟧ (M) 'Eine Fundamentalreihe von Punkten ist eine Punktmenge, bei der bei der ersten Wahl jeder Zahl n ein λ-Quadrat entspricht, bei den weiteren Wahlen aber für jedes ν alle Zahlen n_ν mit Ausnahme einer einzigen zur Vernichtung führen.'

⟦7⟧ In the margin of his copy Brouwer inserted after 'a priori': 'Die gegenseitige "Ausschliessung a priori" scheint hinauszukommen auf die gegenseitige Ausschliessung von Endlichkeit und Unendlichkeit einer bestimmten Spezies. Jedenfalls scheint das "a priori" ausschliessen zu wollen, dass in den Definitionen von α_1 und α_2 ein Absurditätsbegriff auftritt. Weiter scheinen zu einem gegebenen α_1 sehr gut mehrere α_2 passen zu können.'

One may infer that the notion of 'Ausschliessung a priori' was not clear to Brouwer himself. A possible interpretation would be that α_1 is equivalent to the negation of α_2 and α_2 is equivalent to the negation of α_1, but this is not in agreement with the next paragraph. See note ⟦8⟧.

⟦8⟧ This is not clear. Let $\alpha_1(x)$ be the property: From some node of the sequence x on there is only one admissible choice; let $\alpha_2(x)$ be the property: At infinitely many nodes of the sequence x there are at least two admissible choices. (A node is a finite sequence of natural numbers; see (1954 A). A node is admissible if it does not cause the 'Hemmung des Prozesses'.) Then neither is $\alpha_1(x)$ equivalent to the negation of $\alpha_2(x)$, nor is $\alpha_2(x)$ equivalent to the negation of $\alpha_1(x)$. Brouwer seems to have had in mind some other interpretation. In his copy he cancelled the last two lines of the paragraph (beginning after 'unendlich oft') and replaced them by: 'auch anders hätte gewählt werden können (wegen Ekartierung des Absurditätsbegriffes kann man nicht schreiben: bei denen unendlich oft die Einzigmöglichkeit der getroffenen ungehemmten Wahl absurd ist).'

⟦9⟧ This paragraph continues the preceding one. It is supposed that for every node x it is known either that every continuation of x has property α_1 or that every continuation of x has property α_2 (see note ⟦8⟧). The formulation is ambiguous: a spread (Menge) is identified with the species of its elements, which are infinitely proceeding sequences, but this section can only be understood by considering M, M_1 and M_2 as species of finite sequences.

⟦10⟧ The rest of §2 needs revision on the basis of the theory of well-ordering developed in (1927 A).

⟦11⟧ (M) For spreads this can be proved as follows. Let $\lambda_{-n_1}, \lambda_{-n_2}, \ldots$ $(n_i \geqslant 0)$ be the λ-squares $> \lambda_1$ which are admitted at the first choice in the spread M. Find the (n_i+1)th descendants of λ_{-n_i}; these form a subsequence s_i of a fundamental sequence. These sequences s_i can be combined into a subsequence s of a fundamental sequence. Take s as the species of admissible first choices for a spread M_0; let the descendants of a choice in M_0 be the same as for the corresponding choice in M. M_0 is a uniform pointspread which coincides with M.

⟦12⟧ In the case that the pointspecies is not bounded it is not always possible to find the exact maximum m_ν, but one can always find a sequence $\{\mu_\nu\}$ such that at the νth choice no square with sides greater than μ_ν is chosen and that $\mu_\nu \leqslant \frac{1}{2}\mu_{\nu-1}$. This is sufficient.

⟦13⟧ (M) Instead of λ_{3n-1} we take λ_{3n-2}. Let q be as in the paper and let q_1 be the λ_{3n-2}-square with its centre nearest to that of q and with maximal coordinates (the latter condition serves to make q_1 unique). Let q', q'_1 be determined analogously with $n+1$ instead of n. Let $d(A, B)$ denote the horizontal distance (difference of abscissae) between A and B. Let M, M', M_1, M'_1 be the centres of q, q', q_1, q'_1 respectively. Because q' lies inside q, we have

$$d(M, M') < 2^{-3n-1}.$$

From the definition of q_1 it follows that

$$d(M, M_1) \leqslant 2^{-3n+1}.$$

Analogously

$$d(M', M'_1) \leqslant 2^{-3n-2}.$$

Hence

$$d(M_1, M'_1) < 2^{-3n+2} - 2^{-3n-1}.$$

The same holds for the vertical distances. It follows that q'_1 lies inside q_1.

⟦14⟧ See for the Bolzano–Weierstrass theorem (1952C).

⟦15⟧ Brouwer changed the first word 'der' into 'jeder'. He rewrote the result in italics, lines 8–12, as follows: 'Wenn jeder Punkt der Ebene von der geschränkten Punktspecies Q unbegrenzt ist, so ist Q zerlegt in eine solche Species der Kardinalzahl h von punktierten Species, deren jede durch den Zusammenfall mit einem bestimmten Elemente von Q definiert ist, dass eine endliche Kardinalzahl $k \geqslant h$ gefunden werden kann.' However, as appears from (1952C), this is not yet a correct formulation of the theorem.

⟦15a⟧ Brouwer added in the margin: 'Die Menge der Punkte 0, 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... ist in diesem Sinne *nicht* abgeschlossen.'

⟦16⟧ It is not true that a point Q that cannot be a condensation point, is an isolated point. It is also not true that a point of Q that cannot be an isolated point, is a condensation point. Though there is some analogy between the use of 'kontradiktorisch spaltet' in this case and in § 2, it does not become clear what Brouwer means by it.

⟦17⟧ § 7 and § 8 need revision.

⟦18⟧ The notion of a located point species (katalogisierte Punktspecies) is important for intuitionistic analysis. The proof on the next page shows that the closure of a located point species coincides with a fan.

⟦19⟧ (M) This 'Verfahren' makes use of q'''_ν, μ_{n_ρ} and σ_{n_ρ} (see the next paragraph in the text). There are two cases:

1. At least one square of s_{n_ρ} is at least partly covered by q'''_ν.
2. No square of s_{n_ρ} has this property.

In case 1 q'_ν can contain no point of R. In case 2 it follows from the properties of the cataloguing that there is a point of R inside q''_ν.

⟦20⟧ (M) For any square q with length d we denote the concentric square with length $\frac{3}{4}d$ by q'. It must be supposed that Q contains at least one point A. It is then

easy to find a k_1-square containing A. It must be shown that every k_n-square q contains a k_{n+1}-square. Let B be a point of R in q''. There is a λ-square q_1 of the length of the k_{n+1}-squares such that q_1' contains B. q_1 is a k_{n+1}-square and it lies inside q.
⟦21⟧ §§ 10, 11 and 12 need revision.
⟦22⟧ The notion of a region (Bereich) is the constructible counterpart of that of an open pointset. See the definition in (1918 B) ⟦p. 155⟧.
⟦23⟧ $k = E\backslash\beta$, but it is not true that $\beta = E\backslash k$, so β is not the complement of k in the usual sense.
⟦24⟧ The intersection of a finite set or of a fundamental sequence of region-complements is a region-complement.
Proof (M). Let $M_i = \bigcap_k M_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ be region-complements. The M_{ik} can be arranged in a fundamental sequence $\{N_i\}$. $\bigcap M_i = \bigcap N_i = \bigcap P_i$, where each P_i is a finite set of squares and $P_{i+1} \subset P_i$. By adding to every P_i an outer strip of breadth 2^{-i} we obtain contracting sets of squares which define $\bigcap M_i$ as a region-complement.
Second proof. Let M_i be the complement of the region A_i. Then $\bigcap M_i$ is the complement of the region $\bigcup A_i$.
⟦25⟧ (M) The intersection of a finite set of outer limiting species is an outer limiting species.
Proof. Let $A_r = \bigcup_i k_{ri}$ $(r = 1, \ldots, n)$ be outer limiting species; the k_{ri} are region-complements. Define $\bigcap_{r=1}^{n} k_{ri} = k_i$. Each k_i is a region-complement (see note ⟦24⟧). $A' = \bigcup_i k_i$. It must be proved that A' coincides with $A = \bigcap_r A_r$. A point P of A belongs for every $r \leqslant n$ to some k_{r,m_r}; let m be $\max(m_1, \ldots, m_n)$, then $P \in k_{rm}$ $(r = 1, \ldots, n)$, so $P \in k_m$, so $P \in A'$. Conversely, let Q be a point of A', then Q belongs to some k_i, so $Q \in k_{ri}$ $(r = 1, \ldots, n)$, so $Q \in A_r$ $(r = 1, \ldots, n)$, so $Q \in A$.
⟦26⟧ The word 'Komplement' is here also used in another sense than is usual. See note ⟦23⟧.
⟦27⟧ Counterexample: The union of the closed square with opposite vertices (0,) and (1, 1), and the closed square with opposite vertices (1, 0) and (2, 1), is not closed.
(M) The intersection of a fundamental sequence of outer limiting species is not always an outer limiting species. This can be shown by defining an inner limiting species which cannot be an outer limiting species. We first give an example in one dimension of an outer limiting species which cannot coincide with an inner limiting species. Let $A = \bigcup_n K_n$ be an everywhere dense consolidated outer limiting species, while every K_n is nowhere dense.(As an example we can take for K_n the species of infinite ternal fractions which contain at most $n-1$ digits 1.) Suppose that A coincides with the inner limiting species $I = \bigcap_n \beta_n$, then every K_m is contained in every β_n. Because A is consolidated, K_m coincides with a pointfan F_m. To every point P of F_m there is associated a square $i(P)$ of β_n to which it belongs. By the fan theorem there is a maximum for the number of choices for P by which $i(P)$ is determined. It follows that K_m is contained in a finite initial segment a_{mn} of β_n.

By considering a finite continuation of a_{mn} we find a number c_{mn} such that every point at a distance less than c_{mn} from a_{mn} belongs to β_n.
⟦The rest of the proof is in Brouwer's handwriting; I therefore reproduce the original version.⟧
Mithin könnte man einen solchen Punkt P_1 und eine solche positive reelle Grösse b_1 bestimmen, dass P_1 einen Abstand $> b_1$ von K_1 besässe, während jeder Punkt in einer Entfernung $\leqslant b_1$ zu β_1 gehörte. Weiter könnte man n_2 und a_2 ($\leqslant \frac{1}{4}b_1$) in solcher Weise wählen, dass die Entfernung von P_1 und K_{n_2} kleiner als a_2 wäre, und darauf P_2 und b_2 in solcher Weise, dass P_2 einen Abstand $< a_2$ von P_1 und einen Abstand $> b_2$ von K_{n_2} besässe, während jeder Punkt in einer Entfernung $\leqslant b_2$ zu β_{n_2} gehörte. Sodann könnte man n_3 und a_3 ($\leqslant \frac{1}{4}b_2$ und $\leqslant \frac{1}{4}a_2$) so wählen, dass die Entfernung von P_2 und K_{n_3} kleiner als a_3 wäre, und darauf P_3 und b_3 in solcher Weise dass P_3 einen Abstand $< a_3$ von P_2 und einen Abstand $> b_3$ von K_{n_3} besässe, während jeder Punkt in einer Entfernung $\leqslant b_3$ zu β_{n_3} gehörte. In dieser Weise fortfahrend, würde man eine unbegrenzt fortgesetzte Folge $P_1, P_2, P_3, \ldots$ von Punkten erzeugen, welche gegen einen Punkt P konvergieren würde, der zu I gehören müsste, aber unmöglich zu A gehören könnte.

Ebenso wie es äussere Grenzspecies gibt, welche nicht mit einer inneren Grenzspecies zusammenfallen können, gibt es innere Grenzspecies, welche nicht mit einer äusseren Grenzspecies zusammenfallen können. Betrachten wir z.B. die innere Grenz*menge* $I = \bigcap(\beta_1, \beta_2, \ldots)$, welche auf der Einheitsstrecke von den unendlichen Ternalbrüchen mit einer Fundamentalreihe von Ziffern 1 gebildet wird, und nehmen wir einen Augenblick an, dass sie mit der äussern Grenzspecies $A = \bigcup(K_1, K_2, \ldots)$ zusammenfällt. Alsdann ist (weil die Menge I auf jeder Stufe eine Fundamentalreihe von ungehemmten Wahlmöglichkeiten besitzt) in der Menge aller Wahlen aller Stufen von I in solcher Weise eine Fundamentalreihe $w_1, w_2, \ldots$ von Wahlen und zu jedem w_ν ein K_{n_ν} bestimmt, dass jede einen Punkt P von I erzeugende unbegrenzt fortgesetzte Wahlfolge ein und nur ein Element w_{ν_P} der genannten Fundamentalreihe enthält und zum diesem w_{ν_P} zugeordneten K_{ν_P} gehört. Wenn wir nun aber ein bestimmtes w_α betrachten, so bilden die von denjenigen Wahlfolgen, die w_α enthalten, erzeugten Punkte von I eine in einem gewissen Intervall i_α überall dichte Punktmenge π_α. Damit diese Punktmenge π_α in ihrem Ganzen zur *abgeschlossenen* Punktspecies K_{n_α} gehören kann, muss K_{n_α} das ganze Intervall i_α enthalten, und dies ist deshalb unmöglich, weil *jedes* Intervall der Einheitsstrecke Punkte enthält, welche *nicht* zu I, also *nicht* zu A, also erst recht*nicht* zu K_{n_α} gehören.'
⟦28⟧ §15 needs revision.
⟦29⟧ (M) 'Offenbar ist die Vereinigung einer beliebigen endlichen Anzahl von messbaren Bereichen wiederum ein messbarer Bereich. Von der Vereinigung einer Fundamentalreihe von messbaren Bereichen lässt sich dasselbe nur dann aussagen, wenn die Inhalte der Vereinigungen ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge bilden.

Analog ist der Durchschnitt einer beliebigen endlichen Anzahl von messbaren Bereichkomplementen wiederum ein messbares Bereichkomplement, während sich vom Durchschnitt einer Fundamentalreihe von messbaren Bereichkomplementen nur dann dasselbe aussagen lässt, wenn die Inhalte der Durchschnitte ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge bilden.'

⟦30⟧ (M) Firstly it must be proved that $i(k_1) = \lim i({}_\nu L_\nu)$ exists and that $i - i(k_1) < 2^{-\rho}$. Take $\sigma > \nu$.

$$i({}_\nu L_\nu) - i({}_\sigma L_\sigma) = \{i({}_\nu L_\nu) - i({}_\nu L_\sigma)\} + \{i({}_\nu L_\sigma) - i({}_\sigma L_\sigma)\}.$$

$L_\sigma \subset L_\nu$; from both the same squares are removed, therefore

$$i({}_\nu L_\nu) - i({}_\nu L_\sigma) \leqslant i(L_\nu) - i(L_\sigma) < \varepsilon_\nu = 2^{-4\nu-\rho}.$$

$$i({}_\nu L_\sigma) - i({}_\sigma L_\sigma) = \sum_{r=\nu}^{\sigma-1} \{i({}_r L_\sigma) - i({}_{r+1} L_\sigma)\}.$$

Now ${}_{r+1}L_\sigma$ is formed by removing from ${}_r L_\sigma$ the intersections with the κ_{r+2}-squares which have an intersection $< 2\varepsilon_{r+1}$ with ${}_r L_{r+1}$. The number of κ_{r+2}-squares is 2^{2r+2}; from each of them there is removed at most $2\varepsilon_{r+1}$, so

$$i({}_r L_\sigma) - i({}_{r+1} L_\sigma) < 2^{2r+2} \cdot 2\varepsilon_{r+1} = 2^{-2r-1-\rho}.$$

$$i({}_\nu L_\sigma) - i({}_\sigma L_\sigma) < \sum_{r=\nu}^{\sigma-1} 2^{-2r-1-\rho} < 2^{-2\nu-\rho}.$$

$$i({}_\nu L_\nu) - i({}_\sigma L_\sigma) < 2^{-4\nu-\rho} + 2^{-2\nu-\rho}.$$

It follows that $i(k_1)$ exists. Further

$$i(L_\nu) - i({}_\nu L_\nu) < \sum_{r=0}^{\nu-1} 2^{-2r-1-\rho} < 2^{-\rho},$$

so

$$i(k) - i(k_1) < 2^{-\rho}.$$

Now it must be proved that k_1 is a catalogued region-complement. Let P_r be the set of κ_{r+1}-squares covered by ${}_r L_r$, and let a be a square of P_r.

$$i(a \cap {}_r L_r) > 2\varepsilon_r, \qquad i({}_r L_r) - i({}_r L_{r+1}) < \varepsilon_r,$$

so

$$i(a \cap {}_r L_{r+1}) > \varepsilon_r = 16\varepsilon_{r+1}.$$

Consequently a contains at least one κ_{r+2}-square b such that $i(b \cap {}_r L_{r+1}) > 2\varepsilon_{r+1}$. b belongs to ${}_{r+1}L_{r+1}$, so it belongs to P_{r+1}. The sets P_r evidently satisfy the definition of a catalogued region-complement. It is easy to see that this region-complement coincides with k_1.

⟦31⟧ (M) We use the notations of note ⟦30⟧. Let a be a square of P_ν.

$$i({}_\nu L_\nu \cap a) \geqslant 2\varepsilon_\nu = 2^{-4\nu-\rho+1}.$$

By a computation analogous to that in note ⟦30⟧ we obtain, for $\sigma > \nu$,

$$i({}_\nu L_\nu \cap a) - i({}_\sigma L_\sigma \cap a) < \tfrac{4}{3} \cdot 2^{-4\nu-\rho-1}.$$

$$i({}_\sigma L_\sigma \cap a) > \tfrac{2}{3} \cdot 2^{-4\nu-\rho-1} > 4\varepsilon_{\nu+1}.$$

Now take σ such that $2^{-2\sigma} > 4\varepsilon_{\nu+1}$. Then a contains at least two $\kappa_{\sigma+1}$-squares of P_σ. Hence we can choose τ so that a contains at least 8 $\kappa_{\tau+1}$-squares of P_τ; among these there are certainly two separated squares. In this way we find a sequence $\{r_i\}$ such that every κ_{r_i+1}-square of P_{r_i} contains at least two separated $\kappa_{r_{i+1}}+1$-squares of $P_{r_{i+1}}$. The spread of nested sequences in which every ith choice is a κ_{r_i+1}-square in P_{r_i} defines a perfect species contained in k.

⟦32⟧ (M) $iM'_{\nu_1} - iM'_\nu < 2^{-\rho-2}$. Further, because $R \backslash N''_\nu \subset M''_{\nu_1} \backslash M''_\nu$,

$$iR - iN''_\nu \leqslant (iM''_{\nu_1} - iM''_\nu) < 2^{-\rho-2}.$$

By addition:

$$i(M'_{\nu_1} \cup R) - iN_\nu < 2^{-\rho-1}.$$

$$i(M'_{\nu_1} \cup R) - ih \leqslant 2^{-\rho-1}.$$

$$|i(M'_{\nu_1} \cup R) - iM'''_{\nu_1}| < 2^{-\rho-1}.$$

$$|i(M'_{\nu_1} \cup R) - ik'''| < 2^{-\rho-1}.$$

$$|ik''' - ih| < 2^{-\rho}.$$

⟦33⟧ (M) A more exact definition of A_2 is as follows:

$$p^r_m = N^r_m \cap k^r. \quad {}_np^r_m = N^r_m \cap M^r_n. \quad {}_ng^m = \bigcup_{r=1}^{m} {}_np^r_m. \quad g^m = \bigcap_n {}_ng^m. \quad A_2 = \bigcup_m g^m.$$

It follows from these definitions that, for $r \geqslant n$ and $r \geqslant m+1$,

$${}_sp^r_m \subset N^r_m \cap M^r_{m+1} \subset N^r_{m+1}.$$

$${}_sp^r_m \subset N^r_{m+1} \cap M^r_n = {}_np^r_{m+1}.$$

Further

$$g^m = \bigcup_{s=1}^{m} g^m \cap N^s_m = \bigcup_{s=1}^{m} \bigcap_n \bigcup_{r=1}^{m} {}_np^r_m \cap N^s_m = \bigcup_{r=1}^{m} \bigcap_n {}_np^r_m = \bigcup_{r=1}^{m} p^r_m.$$

It must be proved that $iA_2 = iA_1$.

$$i(N^r_m \backslash p^r_m) \leqslant i(M^r_m \backslash k^r) \leqslant 2^{-m}.$$

$$i \bigcup_{r=1}^{m} N_m^r - ig^m = \sum_{r=1}^{m} i(N_m^r \backslash p_m^r) \leqslant m \cdot 2^{-m}.$$

$$L_m^m \backslash \bigcup_{r=1}^{m} N_m^r = \bigcup_{r=1}^{m} [L_m^r \backslash (L_m^{r-1} \cup N_m^r)].$$

$$iL_m^m - i \bigcup_{r=1}^{m} N_m^r < m \cdot 2^{-m}.$$

$$iL_m^m - ig^m < m \cdot 2^{-m+1}.$$

$$ih^m - ig^m < m \cdot 2^{-m+1}.$$

It follows that $\lim ig^m = iA_2$ exists and that $iA_2 = iA$.

⟦34⟧ (M) We start by proving the theorem for a finite sequence of outer limiting sets:

$$A_r = \bigcup_m k_{rm} \qquad (r = 1, \ldots, n).$$

$$k_{rm} = \bigcap_s {}_sL_{rm}.$$

We define

$${}_sL_m = \bigcup_{r=1}^{n} {}_sL_{rm}.$$

$k_m = \bigcap_s {}_sL_m$ is the uniting region-complement $\bigcup_{r=1}^{s*} k_{rm}$. (We use the notation $k_1 \cup^* k_2$ for the uniting region-complement of k_1 and k_2, and the notation $\bigcup_i^* k_i$ for the uniting region-complement of the k_i.)

$\bigcup_{r=1}^{n} A_r = \bigcup_{r=1}^{n} \bigcup_m k_{rm}$ can be arranged in a fundamental sequence of region-complements, which defines a uniting outer limiting species A. It must be proved that A is measurable. Given ε, we find p such that

$$ik_{rq} - ik_{rp} < \varepsilon \qquad (r = 1, \ldots, n;\ q > p).$$

Suppose that $i(k_{rq} \backslash {}_sL_{rp}) > \varepsilon$. Then there would exist a region-complement c such that $c \subset k_{rq}$, c has a positive distance to ${}_sL_{rp}$, and $ic > \varepsilon$. But then $i(c \cup k_{rp}) > ik_{rp} + \varepsilon$, while $c \cup k_{rp} \subset k_{rq}$. This is a contradiction, so we have proved

$$i(k_{rq} \backslash {}_sL_{rp}) < \varepsilon \qquad (q > p;\ r = 1, \ldots, n).$$

It follows further that $i(k_{rq} \backslash {}_sL_p) < n\varepsilon$, and that $ik_q - ik_p < n\varepsilon$. This proves that A is measurable.

Now we consider the case of an infinite fundamental sequence of outer limiting sets: $A_r = \bigcup_m k_{rm}$ $(r = 1, \ldots)$.

Define $A_m^\circ = \bigcup_{r=1}^{m*} A_r$. It is supposed that $\lim iA_m^\circ$ exists, $= i$. Let the double sequence $\{k_{rs}\}$ be in some way rearranged in a simple sequence $\beta_1, \beta_2, \ldots$. We form the uniting region-complements $\gamma_m = \bigcup_{r=1}^{m*} \beta_r$. It must be proved that $\lim i\gamma_m$ exists. First choose m so big that $i - iA_m^\circ < \frac{1}{2}\varepsilon$, then s so big that

$$iA_r - ik_{rs} < \frac{\varepsilon}{2m} \qquad (r = 1, \ldots, m).$$

It follows that

$$ik_{rt} - ik_{rs} < \frac{\varepsilon}{2m} \qquad (r = 1, \ldots, m;\ t > s).$$

Putting $\bigcup_{r=1}^{m*} k_{rt} = V_t$, $\bigcup_{r=1}^{m*} k_{rs} = V_s$, we deduce easily that

$$iV_t - iV_s < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

$$iA_m^\circ - iV_s \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

V_s is contained in some γ_n; for $k \geqslant n$ we have

$$iA_m^0 - i\gamma_k < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

$$i - i\gamma_k < \varepsilon.$$

This proves the theorem.

[[35]] (M) Choose a sequence $\{\rho_\nu\}$ of natural numbers such that $\rho_\nu < \rho_{\nu+1}$ for every ν. k^r contains a full closed catalogued species $l^r = \bigcap_s P_s^r$ such that $il^r > ik^r - 2^{-\rho_r}$. Define $h^m = \bigcup_1^{m*} l^r$. $h^m = \bigcap_s Q_s^m$, where $Q_s^m = \bigcup_{r=1}^{m*} P_s^r$.

$$l^m \subset h^m, \quad \text{so} \quad ih^m > ik^m - 2^{\rho_m}.$$

A number n can be found such that $P_n^s \subset M_m^r$ $(s = 1, \ldots, r)$.

$$Q_n^r \subset M_{m'}^r. \quad h^r \subset M_{m'}^r. \quad h^r \subset k^r. \quad A^\circ = \bigcup h^r \subset A.$$

$$i \geqslant iA^\circ > ik^m - 2^{-\rho_m}.$$

$$i \geqslant iA^\circ \geqslant i - 2^{-\rho_m}. \quad i = iA^\circ.$$

[[36]] (M) It can now easily be proved that the measure of a region-complement is unique. Let $k = \bigcap_n M_n$ coincide with $k' = \bigcap_n M_n'$. k contains a subspecies d which is a uniform pointspread; $d = \bigcap_m P_m$, where each P_m is a finite set of κ_{r_m}-squares. Moreover, $i(d) > ik - 2^{-\rho}$.

Let N_n' be obtained from M_n' by adding a small brim R_n' of area less than 2^{-n}; let the breadth of R_n' be less than that of κ_{r_m}.

P_m contains points of k, so P_m contains points of M_n'. It follows that $P_m \subset N_n'$.

$$iP_m < iN_n'. \quad id < iN_n' < iM_n' + 2^{-n}. \quad ik \leqslant ik' + 2^{-\rho}. \quad ik \leqslant ik'.$$

Analogously $ik' \leqslant ik$.

Now let $A = \bigcup_n k_n$ and $A' = \bigcup_n k'_n$ be coinciding outer limiting species. A contains a consolidated outer limiting species $d = \bigcup_n h_n$, where every h_n coincides with a pointfan; $id = iA$. $h_n \subset A'$, so for every point P of h_n there is an index m such that $P \in k'_m$. By the fan theorem there is a maximum m_0 for m, so $h_n \subset k'_{m_0}$. It has been proved above that this entails $ih_n \leqslant ik'_{m_0} \leqslant iA'$. $iA = id \leqslant iA'$. Analogously $iA' \leqslant iA$.

⟦37⟧ (M) It is easily proved that a region-complement or an outer limiting species which is measurable according to § 16 (§ 17) is also measurable according to § 18.

⟦38⟧ (M) Here follows a more detailed version of this proof. We use the notations $\cup^*$ and $\bigcup^*$ (see note ⟦34⟧).

$$a'_r \cap k_r \subset Q. \quad a''_s \cap k_s \subset C(Q). \quad (a'_r \cap a''_s) \cap (k_r \cap k_s) = \emptyset. \tag{1}$$

Suppose for a moment that

$$i(a'_r \cap a''_s) \geqslant 2^{-r} + 2^{-s}.$$

As

$$i(\beta_r \cup \beta_s) < 2^{-r} + 2^{-s},$$

wc should have

$$i[(a'_r \cap a''_s) \cap (k_r \cap k_s)] > 0,$$

in contradiction with (1). Consequently

$$i(a'_r \cap a''_s) < 2^{-r} + 2^{-s}.$$

In particular

$$i(a'_r \cap a''_{r+1}) < 2^{-r} + 2^{-r-1}.$$

$$i(a'_r \cup^* a'_{r+1}) - ia'_r < 2^{-r} + 2^{-r-1}.$$

Further $ia'_r - id'_r < 2^{-r}$, so we obtain:

$$i(a'_r \cup^* a'_{r+1}) - id'_r < 2^{-r+2}.$$

$$i(d'_r \cup^* d'_{r+1}) - id'_r < 2^{-r+2}. \tag{2}$$

$d'_r \cup^* d'_{r+1}$ and d'_r are region-complements, which can be written as:

$$d'_r \cup^* d'_{r+1} = \bigcap M_n; \quad d'_r = \bigcap N_n.$$

$$M_{n+1} \subset M_n; \quad N_{n+1} \subset N_n; \quad N_n \subset M_n.$$

$$i(d'_r \cup^* d'_{r+1}) = \lim iM_n; \quad id'_r = \lim iN_n.$$

It follows from (2) that a number m can be found such that

$$iM_n < iN_n + 2^{-r+2} \quad \text{for} \quad n \geqslant m.$$

The region-complement $\bigcup_{s=1}^{r-1*} d'_s$ can be written as $\bigcap P_n$ where $P_{n+1} \subset P_n$.

$$i(P_n \cup^* M_n) - i(P_n \cup^* N_n) < 2^{-r+2} \quad \text{for} \quad n \geqslant m.$$

$$i \bigcup_{r=1}^{n+1} {}^* d'_r - i \bigcup_{r=1}^{n} {}^* d'_r < 2^{-r+2} \quad \text{for} \quad n \geqslant m.$$

Hence $\bigcup^* d'_r$ is a measurable outer limiting species; let its measure be i'.

By § 17 (see also note ⟦33⟧) $\bigcup d'_r$ contains a measurable outer limiting species A'_Q such that $iA'_Q = i'$; it is easy to see that $A'_Q \subset Q$.

Analogously $\bigcup d''_r$ contains a measurable outer limiting species A''_Q with measure $i'' = i \bigcup^* d''_r$. $A''_Q \subset C(Q)$.

From $i \bigcup_1^{n*} d'_r \geqslant id'_n$ it follows that $i' \geqslant i$. Analogously $i'' \geqslant 1-i$. From $A'_Q \cap A''_Q = \emptyset$ it follows easily that $i'+i'' \leqslant 1$. Consequently $i = i'$.

⟦39⟧ (M) We can find region-complements k'_r and k''_r such that

$$k'_r \subset A'_Q, \quad k''_r \subset A''_Q, \quad ik'_r > i-2^{-r}, \quad ik''_r > 1-i-2^{-r}.$$

Further we can find finite sets a'_r, a''_r of κ-squares such that

$$a'_r \supset k'_r, \quad a''_r \supset k''_r, \quad ia'_r < ik'_r+2^{-r}, \quad ia''_r < ik''_r+2^{-r}.$$

Finally we can find a measurable region-complement β_r with complement k_r such that

$$i\beta_r < 2^{-r+1},$$

$$a'_r \cap k_r \subset k'_r \subset A'_Q \subset Q,$$

$$a''_r \cap k_r \subset k''_r \subset A''_Q \subset C(Q).$$

$$ia'_r + ia''_r \geqslant ik'_r + ik''_r > 1-2^{-r+1}.$$

This proves the theorem.

⟦40⟧ (M) Theorem. A region that is measurable according to § 18 is also measurable according to § 16, with the same measure.

For the proof it is important to remark that in the definition of measurability in § 18 d_ν may be supposed to coincide with a pointfan. This follows easily from the first theorem in § 16.

Let $Q = \bigcup c'_r$ be a region-complement, the c'_r being extending finite sets of κ-squares, and let Q be measurable according to § 18 by means of $(a'_\nu, a''_\nu, \beta_\nu)$ (see § 18 for the notation); let i be its measure. We may suppose that $d'_\nu = a'_\nu \cap C\beta$ coincides with a pointfan. $d'_\nu \subset Q$, so for every point P of d'_ν there is a number μ_P such that $P \in c'_{\mu_P}$. By the fan theorem there is a maximum μ for μ_P, so $d'_\nu \subset c'_\mu$.

Choosing ν such that $id'_\nu > i-\varepsilon$, we obtain $ic'_\mu > i-\varepsilon$. Further $d''_r \subset CQ \subset Cc'_\mu$ for every r, so

$$id''_r \leqslant 1-ic'_\mu \quad \text{for every } r.$$

$$1-i \leqslant 1-ic'_\mu.$$

$$ic'_\mu \leqslant i.$$

It follows that $\lim ic'_\mu = i$.

Remark. An analogous theorem for region-complements does not hold. Let $\{a_n\}$ be a descending sequence of finite dual fractions which satisfies the conditions:
1. It is impossible that for some m, $a_n > 2^{-m}$ holds for every n.
2. No fundamental sequence $c(n)$ is known such that $a_{c(n)} < 2^{-n}$ for every n.
Let Q_n be the square with side a_n centred at the origin. Then the region-complement $Q = \bigcap Q_n$ is measurable with measure 0 according to § 18, but it is not measurable according to § 16.

⟦41⟧ (M) The proof of this theorem can be based on the last theorem of § 19.

Let $\{Q_n\}$ be a sequence of measurable species; $i\bigcup_{n=1}^r Q_n = i_r$. $\lim i_r = i$. Q_n contains a measurable outer limiting species R_n such that $iR_n = iQ_n$.

$$i\bigcup_{n=1}^{r}{}^{*} R_n = i\bigcup_{n=1}^{r} R_n = \bigcup_{n=1}^{r} Q_n = i_r.$$

$$\lim i\bigcup_{n=1}^{r}{}^{*} R_n = i.$$

Now we can apply the last but one theorem in § 17. $\bigcup R_n$ contains a measurable outer limiting species A' such that $iA' = i\bigcup^* R_n = i$. $A' \subset \bigcup Q_n$.

Put $C\bigcup_{n=1}^r Q_n = \bigcap_{n=1}^r CQ_n = S_r$. CQ_n contains a measurable outer limiting species P_n such that $iP_n = i(CQ_n)$.

$$i\bigcap_{n=1}^{r} P_n = iS_r = 1-i_r. \qquad \lim i\bigcap_{n=1}^{r} P_n = \lim iS_r = 1-i.$$

P_n contains a measurable region-complement k_n^m such that $ik_n^m > iP_n - 2^{-m-n-1}$.

$$i\bigcap_{n=1}^{r} k_n^m > i\bigcap_{n=1}^{r} P_n - \sum_{s=1}^{r} 2^{-m-s-1}.$$

$$i\bigcap_{n=1}^{r-1} k_n^m - i\bigcap_{n=1}^{r} k_n^m < i\bigcap_{n=1}^{r-1} P_n - i\bigcap_{n=1}^{r} P_n + 2^{-m-r-1}.$$

It follows that $\lim_{r\to\infty} i\bigcap_{n=1}^r k_n^m$ exists and is $> 1-i-2^{-m-1}$. Putting $\bigcap_{n=1}^\infty k_n^m = k^m$, we have $ik^m > 1-i-2^{-m-1}$.

$$i\bigcup_{m=1}^{h} k^m \geqslant 1-i-2^{-h}.$$

On the other hand, $\bigcup_{m=1}^h k^m \subset S_r$ for every r; it follows that

$$i \bigcup_{m=1}^{h} k^m \leqslant 1-i.$$

Consequently

$$\lim_{h\to\infty} i \bigcup_{m=1}^{h} k^m = 1-i.$$

As

$$i \bigcup_{m=1}^{h}{}^{*} k^m = i \bigcup_{m=1}^{h} k^m,$$

we have also

$$\lim_{h\to\infty} \bigcup_{m=1}^{h}{}^{*} k^m = 1-i.$$

It follows that $\bigcup k^m$ contains a measurable outer limiting species A'' with measure $1-i$. $A'' \subset C \cup Q_n$.

Now the last theorem of § 19 yields the desired result.

⟦42⟧ A proof of this theorem can be given analogous to that in note ⟦41⟧.

1919 C Signifische Sprachforschung

⟦1⟧ For the history of the signific movement in the Netherlands see (1946). The paper (1919 C) expresses in the main Mannoury's ideas, but it is also signed by Brouwer.

1919 D Intuitionistische Mengenlehre

⟦1⟧ (1918), (1919 A).
⟦2⟧ (1907), (1908 B), (1908 C), (1911 A), (1912 A), (1914), (1917).
⟦3⟧ D. Hilbert, Mathematische Probleme, Comptes rendus 2me Congrès internat. Mathém., Paris 1900; Ges. Abh. III, p. 290–329. D. Hilbert, Axiomatisches Denken, Math. Annalen 78 (1918), p. 405–419; Ges. Abh. III, p. 405–415.
⟦4⟧ In this footnote Brouwer states for the first time his theory on the origin of the belief in the principle of excluded middle.
⟦5⟧ This characterization of the order type of the continuum needs revision in this respect that the subset of elements of M lying before a given element of P is not decidable. This is clearly stated in (1921). It is astonishing that the above paper was reprinted unchanged in 1922. In (1926 A) Brouwer denotes the order type of the continuum by κ; there he gives no characterization of this order type.
⟦6⟧ In (1952 C) Brouwer states that the reasonings about 'Cantor's main theorem' need revision.
⟦7⟧ (1914).
⟦8⟧ (1921).

1921 Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwickelung?

⟦1⟧ 1. Teil = (1918); 2. Teil = (1919 A).
⟦2⟧ This important remark occurs here for the first time. Brouwer developed it in (1927 B), Theorem 1.
⟦3⟧ (1919 A).
⟦4⟧ (1914).
⟦5⟧ 'Fundamentalreihe' means 'sequence determined by a law'. In (1930 A) Brouwer writes 'reduziertes Kontinuum' instead of 'Kontinuum im engeren Sinne'.
⟦6⟧ (1918).
⟦7⟧ The definitions of 'Ausfüllungselement' and of 'Ergänzungselement' correspond to the definition of real numbers by means of nested intervals. In (1926 A) Brouwer introduced the notion of 'Einschaltungselement', which is an intuitionistic refinement of the Dedekind cut.
⟦8⟧ Brouwer denotes here by $>$ and $<$ the constructive order relation on the continuum, which he defines on the next page, line 12. $g \geqslant r$ is equivalent to the negation of $g < r$.
⟦9⟧ In footnote 11 to (1926 A) Brouwer remarks that 'verschieden' must not be taken here in the purely negative sense. The 'Ortsbestimmung dritter Ordnung' is 'verschieden' for two 'Ergänzungselemente' r, r', when for some g, $g > r$ and $g \leqslant r'$ or conversely. An analogous remark applies to the last line of this page.

1923 A Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten

⟦1⟧ In footnote [1]) to (1925 A) Brouwer announced a revised and enlarged version of this paper; this has never appeared. He repeatedly came back to the content of §1; see (1924 D), (1924 G), (1927 B), (1954 A). The manuscript mentioned in note ⟦1⟧ to (1919 A) also contains an enlarged version of §1.
⟦2⟧ See (1919 A), p. 3, 6 ⟦p. 191, 194⟧ for the definition of a 'ganze punktierte Species'.
⟦3⟧ In (1942 A) Brouwer introduced functions defined by choice sequences.
⟦4⟧ After 'ein' Brouwer added in the margin 'und nur ein'.
⟦5⟧ The proof of this theorem, as it is given here, is not convincing. See the criticism in footnote [1]) to (1924 D). In (1924 D) and (1924 G) Brouwer based the proof on the fan theorem. New formulations of the proof are contained in (1927 B) and (1954 A).
⟦6⟧ As Brouwer noted in the margin, he means 'Ausfüllungselement erster Art'; see the definition in (1921). In footnote [1]) to (1924 D) he introduced for this notion the term 'Lokalisierungselement'.
⟦7⟧ In his copy Brouwer deleted the second occurrence of '(im engern Sinne)'.

⟦8⟧ (1919 A).
⟦9⟧ (1918).
⟦10⟧ See Brouwer's correction in footnote [1]) to (1924 D).
⟦11⟧ References to (1919 A) and (1918).
⟦12⟧ Brouwer wrote in the margin the following explanation (in Dutch) of 'in dessen beliebiger Umgebung': 'This expression is chosen because it is ambiguous for the ordinates of the endpoints of the κ-intervals to which of c'_ν, c''_ν they belong.'
⟦13⟧ See (1924 A).
⟦14⟧ The posthumous paper II contains further remarks about convergent sequences of functions.

1923 B Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie

⟦1⟧ An English translation of this paper, with an introductory note by Charles Parsons, has appeared in J. van Heyenoort, From Frege to Gödel, A source book in mathematical logic 1879–1931, Cambridge Mass. 1967, p. 334–341.
⟦2⟧ For the term 'prüfen' (Dutch: toetsen; English: to test) see remark I in (1954 B).
⟦3⟧ (1908 C). See remark II in (1954 B).
⟦4⟧ For this theorem see (1926 C) and remark IV in (1954 B).
⟦5⟧ See remark V in (1954 B); further (1954 C) and (1954 E).
⟦6⟧ For the Bolzano–Weierstrass theorem see (1952 C).
⟦7⟧ E. E. Kummer, Über die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen. J. reine angew. Math. 13 (1835), p. 171–184.
⟦8⟧ Belinfante wrote several papers on the intuitionistic theory of infinite series. His work was continued by J. G. Dijkman (1946, 1948, 1952, 1961 A, 1962). See the General Bibliography.

1923 C Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe

⟦1⟧ Here the negation is used in the weak sense: At the present state of our knowledge we can assert neither that r is rational nor that r is irrational. Though Brouwer remarked in (1921) that a discontinuous function cannot be total, he does not draw the conclusion that the characteristic function of the rationals cannot be everywhere defined. This would have yielded a stronger conclusion than that given in the text.
⟦2⟧ (1908 C), (1923 B).
⟦3⟧ (1919 A).
⟦4⟧ The negations in footnotes [9]) and [10]) must be understood in the weak sense (see note ⟦1⟧ above), except that C and F are 'nicht verflochten', which holds in the strong sense. The fact that C and F are 'voneinander losgewunden' is a consequence

of the theorem that a discontinuous function cannot be total (see note ⟦1⟧ above).

In his manuscript Brouwer added the following explanations to footnotes [9]) and [10]) (in Dutch):

1. C and F are 'voneinander losgewunden', for if they would 'zusammenfallen', then there would be a natural number n such that the decision between rational and irrational would fall before the n-th choice in the fan that defines the continuum. This is absurd, for after the n-thchoice a rational as well as an irrational number can be obtained.
2. C and G are not congruent, for there may exist a negatively rational number which has the relation 'Anlehnung' to the rationals. It is sufficient to forbid that the choices are restricted in such a way that either a rational or a positively irrational number must result.
3. The 'Absonderungsbeziehung' holds between U and V, for if 'Entfernung' were impossible, then k_1 could not exist, and 'Entfernung' would hold.

1924 A Ueber die Zulassung unendlicher Werte für den Funktionsbegriff

⟦1⟧ See for an extension of the definition of a function (1942 A).
⟦2⟧ (1923 B) ⟦p. 270⟧.
⟦3⟧ (1923 A) ⟦p. 260⟧.

1924 B Perfect sets of points with positively-irrational distances

⟦1⟧ This paper is not announced as intuitionistic, but its terminology is the same as in the intuitionistic papers and its content is immune for intuitionistic criticism.

1924 C Intuitionistischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

⟦1⟧ Another intuitionistic proof of this theorem was published almost simultaneously by H. Weyl, Math. Zeitschr. 20 (1924), p. 142–146.

The doctoral thesis of B. de Loor, Die hoofstelling van die algebra van intuisionistiese standpunt, Amsterdam 1925, contains a critical survey of some of the classical proofs and an exposition of the two intuitionistic proofs.

Another intuitionistic proof was given by van der Corput (1949).

⟦2⟧ In (1924 E) the restriction to equations with leading coefficient apart from zero is weakened.

1924 D Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist

⟦1⟧ This is the first formulation of Brouwer's continuity principle. See for the definition of 'zählbar' (1925 A) ⟦p. 312⟧.

⟦2⟧ See (1924 G) § 1.
⟦3⟧ This is the first formulation of the bar theorem.
⟦4⟧ This is the first formulation of the fan theorem. See for another proof (1924 G) § 3.
⟦5⟧ (1923 A) ⟦p. 247⟧.
⟦6⟧ 'Lokalisierungselemente' are the same as 'Ausfüllungselemente erster Art', as defined in (1921).
⟦7⟧ ⟦p. 248⟧.

1924 E Intuitionistische Ergänzung des Fundamentalsatzes der Algebra

⟦1⟧ (1924 C).

1924 F Zur intuitionistischen Zerlegung mathematischer Grundbegriffe

⟦1⟧ (1924 F1).
⟦2⟧ (1923 C).
⟦3⟧ It is not easy to give an example of a real number with the property which is postulated for p and q. Let x range over the rationals and let $\#$ denote the relation of 'Entfernung'. p must satisfy $\bigwedge x \neg\neg (x \# p)$, while $\neg\neg \bigwedge x(x \# p)$ does not hold. It is well-known that $\bigwedge x \neg\neg A(x) \rightarrow \neg\neg \bigwedge x A(x)$ is not valid in intuitionistic logic. A counterexample is implicit in (1925 A) (see note ⟦11⟧ to that paper); this is a counterexample in the strong sense that $\bigwedge x \neg\neg A(x) \,\&\, \neg \bigwedge x A(x)$. However, no counterexample is known in which $A(x)$ has the form $x \# p$, but the possibility of such an example remains open.
⟦4⟧ (1923 C) ⟦p. 276⟧.

1924 G Bemerkungen zum Beweise der gleichmässigen Stetigkeit voller Funktionen

⟦1⟧ (1924 D) ⟦p. 287⟧.
⟦2⟧ See for the principle of transfinite induction (1927 A) ⟦p. 353⟧.
⟦3⟧ See (1927 A) ⟦p. 356⟧.

1925 A Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I

⟦1⟧ This program has been but partly realized. (1925 A), (1926 A) and (1927 A) contain the material of (1918). Further Brouwer came back to § 1 of (1923 A) in (1924 D), (1924 G), (1927 B) and (1954 A).
⟦2⟧ Brouwer gave the definition of a spread a more easily readible form in

(1954 A). In (1926 B) he extended the notion of a spread in this respect that the decisions about the effect of a choice are not given by a law, but are made themselves by choices. See also (1954 A) ⟦p. 529⟧ and note ⟦8⟧ to that paper. In (1942 A) he allowed that the freedom of restrictions may be restricted at any moment by a free decision, but he restracted this in (1952 B); see note ⟦11⟧ to that paper. In (1942 A) and (1942 C) he discussed an extension of the spread definition in which the symbol associated to a finite sequence of natural numbers can itself be freely chosen. He argues that this does not produce an essentially new notion.

⟦3⟧ In all his copies of this paper Brouwer made in 1929 several handwritten corrections. Some of these are also mentioned in (1942 A). Here follow two pages as they ran with Brouwer's corrections, from p. 245 ⟦p. 302⟧ line 4, 'Jede' on.

Jede in dieser Weise von einer unbegrenzten Wahlfolge erzeugte Folge von Zeichenreihen [1]) (welche also im allgemeinen nicht fertig darstellbar ist), heisst ein *Element der Menge.*

Wenn zu jedem n in ζ eine solche Nummer k_n bestimmt ist, dass jedesmal, wenn bei der n-ten Wahl eine in ζ höher als k_n liegende Nummer gewählt wird, die Hemmung des Prozesses zustande kommt, so heisst die Menge *finit.* [2])

Wenn gleiche und nur gleiche ungehemmte Wahlfolgen zu gleichen Folgen von Zeichenreihen führen, so heisst die Menge *individualisiert.*

Die Bestimmungsgesetze endlicher Folgen von Zeichenreihen sowie unbegrenzer Folgen von Zeichenreihen von der Art der Folge ζ bilden besondere Fälle von Mengen, deren Elemente von den einzelnen Zeichen gebildet werden. Die Menge der Nummern, d.h. der Zeichenreihen von ζ, werden wir mit A bezeichnen.

Zwei Mengenelemente heissen *gleich* oder *identisch*, wenn man sicher ist, dass für jedes n die n-te Wahl für beide Elemente dieselbe Zeichenreihe erzeugt. Die Identität mit einem Elemente der Menge M *werden wir als die Mengenspezies* M *oder auch als die Menge* M *bezeichnen.*

Zwei Mengen heissen *gleich* oder *identisch*, wenn zu jedem Element der einen Menge ein gleiches Element der anderen Menge angegeben werden kann, und zwei Mengenspezies, wenn sie dieselben Elemente haben.

Mengenspezies und Elemente von Mengenspezies werden *mathematische Entitäten* oder *Spezies nullter Ordnung* genannt.

[1]) Inklusive des Charakters ihrer Fortsetzbarkeitsfreiheit, welche sich nach jeder Wahl beliebig (eventuell bis zur völligen Bestimmtheit, oder auch einem Mengengesetze entsprechend) verengern kann. Die *Beliebigkeit* dieses unter Erhaltung der Fortsetzbarkeitsmöglichkeit einer endlichen Wahlfolge zugeordneten 'Verengerungszusatzes' erteilt dieser Wahlfolge, mithin auch ihren Fortsetzungen, eine neue Willkür. Von derartigen Verengerungszusätzen kann nun in der Menge auch eine beliebige wohlgeordnete Spezies angebracht werden (wobei also einer endlichen Wahlfolge z.B. eine Verengerung der für die weiteren Wahlen bestehenden Verengerungszusatzfreiheit zogeordnet werden kann).

[2]) Insbesondere bilden also die unbeschränkt fortsetzbaren Folgen von *einziffrigen* Nummern die Elemente einer finiten Menge.

Unter einer *Spezies erster Ordnung* verstehen wir eine (begrifflich fertig definierte) Eigenschaft, welche nur eine mathematische Entität besitzen kann, in welchem Falle sie, ebenso wie jede mit ihr identische mathematische Entität, ein *Element dieser Spezies erster Ordnung* genannt wird. Die Mengenspezies bilden besondere Fälle von Spezies erster Ordnung.

Zwei Spezies erster Ordnung heissen *gleich* oder *identisch*, wenn zu jedem Elemente der einen Spezies ein gleiches Element der anderen Spezies angegeben werden kann, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn sie dieselben Elemente haben.

Unter einer *Spezies zweiter Ordnung* verstehen wir eine Eigenschaft, welche nur eine mathematische Entität oder Spezies erster Ordnung besitzen kann, in welchem Falle sie, ebenso wie jede mit ihr identische Entität oder Spezies erster Ordnung ein *Element dieser Spezies zweiter Ordnung* genannt wird.

Zwei Spezies zweiter Ordnung heissen *gleich* oder *identisch*, wenn zu jedem Elemente der einen Spezies ein gleiches Element der anderen Spezies angegeben werden kann.

In analoger Weise definieren wir *Spezies n-ter Ordnung*, sowie deren Gleichheit bzw. Identität, wo n ein beliebiges Element von A repräsentiert, und wo eine Spezies n-ter Ordnung immer gleichzeitig eine Spezies $(n+1)$-ter Ordnung darstellt.

⟦The definitions of *Teilspezies*, *verschieden*, *diskret*, and *herausragen* were left unchanged. In the definition of *Kongruent* the last part, from 'mit anderen Worten' till 'unmöglich ist' was cancelled.⟧

⟦4⟧ In the margin of an unpublished manuscript Brouwer wrote the following remark after the definition of a spread: 'Inhalt, bzw. Quantität sind Attribute der Mengen, nicht der Mengenspezies. In Gegensatz zu den Spezies ist die Menge ihren Elementen gegenüber primär. Für den Quantitätsbegriff ist der Mengenbegriff als Grundlage unentbehrlich.' It is not clear what Brouwer means in this remark by 'Quantität'.

⟦5⟧ $>$ denotes the constructive order relation, as defined in (1921). $\leqq$ is equivalent to the negation of $>$. The notation is different from that in (1926 A) and in later papers, where $>$ is used for virtual order (§ 1) and $\mathrel{\circ\!\!>}$ for constructive order (§ 7).

⟦6⟧ Obviously it is intended that for $a_1 = 1$ the first part of the expression up to $\frac{1}{2^{a_1-1}}$ is 0.

⟦7⟧ Note that $m = n$ does not mean that the cardinal numbers m and n are the same. Also $<$ between cardinal numbers is not a virtual order as defined in (1926 A) § 1.

⟦8⟧ It must be a mistake that K is called a 'Menge' (spread). It is a Spezies.

⟦9⟧ After 'dass' (line 2) Brouwer added in the margin: 'gleichen Elementen α gleiche Elemente β entsprechen und'.

⟦10⟧ The notations and denotations are different from those in (1918).

⟦11⟧ This example yields a counterexample to the logical formula $\bigwedge x \neg \neg A(x) \rightarrow \neg \neg \bigwedge x A(x)$, as follows: Let f be the function which assigns 1 to the sequence in which every member is 1, and $n+2$ to the sequence consisting of n ($\geqslant 0$) members 1 followed by members 2. Let x range over S_3 and let $A(x)$ stand for: f is defined for x. Suppose that for some x, $\neg A(x)$ holds, then no 2 can occur in x, so $f(x) = 1$: this contradicts $\neg A(x)$. We have proved $\bigwedge x \neg \neg A(x)$. On the other hand, suppose $\bigwedge x A(x)$. By the fan theorem there is a number m such that $f(x)$ is known after the first m choices for x, but this is contradictory for the sequence beginning with m members 1. This proves $\neg \bigwedge x A(x)$.

1925 B Intuitionistischer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes

⟦1⟧ (1924 D) ⟦p. 290⟧.
⟦2⟧ (1923 A) ⟦p. 247⟧; see also (1924 D).
⟦3⟧ See the remark at the end of (1954 D), where this part of the proof is simplified.
⟦4⟧ As Brouwer remarked in the margin, the side of Q can be chosen to be a multiple of $\frac{1}{16}\varepsilon'$ and the sides of the squares q can be chosen equal to $\frac{1}{16}\varepsilon'$. τ'' must be τ'.
⟦5⟧ §4 must be replaced by (1954 D).
⟦6⟧ See for the definition of 'abweichen' (1923 C).

1926 A Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik II

⟦1⟧ (1925 A) ⟦p. 308⟧.
⟦Notes 2–9 were written by Brouwer in the margin of the manuscript. It is not known when he made these additions. The remarks in ⟦ ⟧ are added by the editor.⟧
⟦2⟧ Because $i_\omega \lessdot {}_\sigma\alpha'$ as well as $i_\omega \gtrdot {}_\sigma\alpha''$ is absurd. ⟦for in the first case there is an index τ such that ${}_\omega a_\tau < {}_\sigma a'_\tau$ and ${}_\omega a_\rho = {}_\sigma a'_\rho$ for $\rho < \tau$; this is impossible for $\sigma \leqslant \sigma_\tau$ and also for $\sigma > \sigma_\tau$. The second case is analogous.⟧
⟦3⟧ When τ is the first index for which ${}_\sigma a'_\tau$ and ${}_\sigma a''_\tau$ are not both equal to ${}_\omega a_\tau$, then ${}_\sigma a'_\tau \geqslant {}_\omega a_\tau \geqslant {}_\sigma a''_\tau$. Consequently $i_\omega \lessdot {}_\sigma\alpha'$ and $i_\omega \gtrdot {}_\sigma\alpha''$ are both absurd. ⟦Here Brouwer writes ${}_\omega a_\tau$ for ${}_{\sigma_\tau} a'_\tau$. The reasoning is analogous to that in note ⟦2⟧⟧.
⟦4⟧ ⟦Before 'Wenn' Brouwer added a new headline:⟧ Ortsbestimmung eines Einschaltungselementes.
⟦5⟧ (mehrdeutige Ortsbestimmung, bezw. Dualbruchentwickelung.) (Dedekindscher Schnitt.)
⟦6⟧ (eindeutige Ortsbestimmung, bezw. Dualbruchentwickelung, für welche eine letzte Ziffer 1 ausgeschlossen ist.)
⟦7⟧ (eindeutige Ortsbestimmung) ('duale Entwickelbarkeit')

(Entwickelbarkeit in einen unendlichen reduziert-regelmässigen Kettenbruch

$$\frac{1|}{|r_1} - \frac{1|}{|r_2} - \frac{1|}{|r_3} - \frac{1|}{|r_4} \dots \qquad (r_\nu \text{ ganz} \geqslant 2).)$$

⟦8⟧ (eindeutige Ortsbestimmung.) ('Einordenbarkeit in die Rationalzahlen', einerseits mehr, andererseits weniger als 'entweder Rationalität oder negative Irrationalität'.)
⟦9⟧ (eindeutige Ortsbestimmung.)

(Entwickelbarkeit in einen endlichen oder unendlichen regelmässigen Kettenbruch

$$\frac{1|}{|r_1} + \frac{1|}{|r_2} + \frac{1|}{|r_3} + \dots \qquad (r_\nu \text{ ganz} \geqslant 1).)$$

(Weniger als 'entweder Rationalität oder positive Irrationalität'.)
⟦10⟧ (1921).
⟦11⟧ (1925 A).

1926 B Intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriffes

⟦1⟧ (1925 A). In later papers by Brouwer this extension of the notion of a spread is not taken into account, except perhaps in (1954A); see note ⟦8⟧ to that paper.
⟦2⟧ See for the definition of the order relation on the continuum (1926A) §7.
⟦3⟧ Evidently 'positiv konvergent' must here not be taken in the sense of (1923 B), where it involves the existence of a limit.
⟦4⟧ Freudenthal (1936) has developed the theory of located-compact spaces axiomatically. He made it the basis of intuitionistic topology. Ashwinikumar (1969 B) extended the notion of a located-compact space in different directions and gave applications in Ashwinikumar (1970 A, B). Van Dalen (1968 B) defined the relation '*A* catalogues *B*' between subspecies of a located-compact space and derived some theorems about it. Troelstra (1966) treats the fundamental questions of intuitionistic topology.
⟦5⟧ (1924 D, G) (The fan theorem).
⟦6⟧ In the Dutch version Brouwer added after 'zu T gehören': 'and in which any two consecutive elements have a distance $< \frac{1}{2}\sigma_n$'.
⟦7⟧ Brouwer gave the definitions of 'n-dimensionales Element' and of 'n-dimensionales Fragment' in his paper 'Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets', Math. Annalen 71 (1911), p. 305–313; Volume 2 (1911 E).

The union of two located-compact species need not be located-compact. The uniting located-compact species of two n-dimensional elements S_1 and S_2 must be defined roughly as follows: Find located sequences F_1 and F_2 such that F_1 determines S_1, F_2 determines S_2 and $F_1 \cup F_2$ is a located sequence F; then F determines the uniting located-compact sequence of S_1 and S_2.

⟦8⟧ Bemerkungen zum natürlichen Dimensionsbegriff, Math. Annalen 27 (1924), p. 635–638; Volume 2 (1924 J2).
⟦9⟧ In the Dutch version Brouwer added after 'B_v': 'for some $v \leqslant n-2$'.
⟦10⟧ Über den natürlichen Dimensionsbegriff, J. reine angew. Math. 142 (1913), p. 146–152; Volume 2 (1913 A).

1926 C Die intuitionistische Form des Heine-Borelschen Theorems

⟦1⟧ (1923 B).
⟦2⟧ (1926 B).
⟦3⟧ (1924 D, G). Application of the fan theorem.
⟦4⟧ See also (1954 B), remark IV.

1927 A Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik III

⟦1⟧ Any detachable subspecies of a well-ordered species can be considered as the species of Vollelemente of the complete well-ordered species.
⟦2⟧ ⟦Among Brouwer's papers there was a note in Dutch referring to this place⟧: The converse of a 'reguläre Zerlegung' of a well-ordered species is indeterminate. This may be seen by the following example.

Let A be a well-ordered species in which there occurs a last constructional subspecies up to the order a inclusive, and B a well-ordered species in which the first element has b indices. Let $n_1, \ldots, n_a$ be the indices of the last constructional subspecies of order a in A. Suppose $a \geqslant b$. Then B can be joined to A on different levels, for we are free to modify the indices of the first element of B in one of the following ways:
Change the first index into $n_1 + 1$,
Change the first and second indices into n_1, $n_2 + 1$,
....
Change the first to bth indices into $n_1, n_2, \ldots, n_b + 1$.
Now suppose $a < b$. Then we are free to modify the indices of the first element of B in one of the following ways:
Change the first index into $n_1 + 1$,
Change the first and second indices into n_1, $n_2 + 1$,
....
Change the first to ath indices into $n_1, \ldots, n_{a-1}, n_a + 1$.
⟦3⟧ (1925 A) §7.

1927 B Über Definitionsbereiche von Funktionen

⟦1⟧ Footnotes $^1)-^4)$ refer to (1925 A) ⟦p. 310⟧, (1923 B) ⟦p. 273⟧, (1926 A) ⟦p. 335⟧ and ⟦p. 323⟧ respectively.

⟦2⟧ (1924 D, G).
⟦3⟧ In the margin of the manuscript Brouwer added: *Begründung von Fussnote* [7]). Das umrahmte 'einen' ⟦at the end of the third line from below⟧ bleibt nämlich sinnlos, so lange man es nicht durch 'einen bestimmten' ersetzen kann. Und das ist unmöglich, so lange das bezügliche $F_{sn_1 \dots n_r}$ für diese Entscheidung noch in verschiedene Verlängerungen 'zerlegt' werden muss. Die Eigenschaft ist also nur sinnvoll für die Elemente von μ_1 und die gehemmten Elemente von μ, und weiter ist definitionsgemäss verabredet worden, dass die 'Bestimmung', wenn sie für jedes $F_{sn_1 \dots n_r v}$ besteht, auch für $F_{sn_1 \dots n_r}$ gelten soll.
⟦4⟧ (1927 A).
⟦5⟧ (1923 C). The principle of excluded middle is equivalent with that of reciprocity of complementarity in this sense that, if one of these principles is universally valid, so is the other. In other words, if one of these principles is added to the axioms of intuitionistic logic, the other becomes a theorem. In (1954 A) ⟦p. 526⟧ Brouwer remarks that for a given property reciprocity of complementarity may hold, though the property is not decidable.
⟦6⟧ See for the definition of 'inhaltsgleich' (1927 A) ⟦p. 354⟧.
⟦7⟧ L. E. J. Brouwer, Some remarks on the coherence type η, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 15 (1913), p. 1256–1263; Volume 2 (1913 B).
⟦8⟧ (1923 C).
⟦9⟧ (1919 A). The more detailed paper, which is announced here, has never appeared.
⟦10⟧ L. E. J. Brouwer, Sur une théorie de la mesure, Enseignement Math. 13 (1911), p. 377–380; Volume 2 (1911 K).
⟦11⟧ In order to understand the following examples the reader must keep in mind that Brouwer uses the simple negation in the weak sense. For instance, in example 3 the words 'z.B. gehört der durch die Zahl r^2 gegebene Punktkern des Einheitskontinuums zu C_2, aber nicht zu C_1, must be understood as follows: As long as neither k_1 has been found nor the existence of k_1 has been proved absurd, we have no reason to place r^2 in G_1 or in the species $\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots\}$; therefore we have no reason to place it in H_1. For the mathematical (strong) negation Brouwer uses the term 'absurd'.
⟦12⟧ (1923 C). Footnotes [16]) and [17]) refer to pages ⟦279⟧ and ⟦276⟧.
⟦13⟧ (1919 A) ⟦p. 196, 201⟧. The more detailed paper has never appeared.
⟦14⟧ (1919 A) ⟦p. 210, 211⟧. The more detailed paper has never appeared.
⟦15⟧ (1925 A) ⟦p. 303⟧.
⟦16⟧ In his lectures Brouwer mentioned the union of the species of rational numbers and the species of negatively irrational numbers as an example of a pseudovolle species.

It seems that Brouwer has never applied the notion of a pseudototal function. See about this notion also the posthumous paper II.

⟦1⟧ Brouwer has in mind the species of points of the continuum, where $\doteq$ stands for coincidence.
⟦2⟧ (1926 A) ⟦p. 321, 335⟧.
⟦3⟧ (1926 A) ⟦p. 321⟧.
⟦4⟧ Among Brouwer's papers there was the following handwritten note, dated March 25, 1933, which was never published.

'Die Math. Annalen 95, S. 467 ⟦(1926 A), p. 335⟧ eingeführte *virtuelle Ordnung des Kontinuums K* besitzt den Charakter der *Unerweiterbarkeit*, d.h. jede Relation $a = b$ oder $c < d$, welche den infolge der Ordnungsvorschriften bestehenden Relationen dieser Art widerspruchsfrei hinzugefügt werden könnte, ist infolge der Ordnungsvorschrift schon erfüllt. Wenn nämlich die Relation $a = b$ den bestehenden Relationen widerspruchsfrei hinzugefügt werden kann, so folgt aus der Ordnungsvorschrift die Absurdität sowohl von $a \mathrel{\circ\!\!>} b$, wie von $a \mathrel{<\!\!\circ} b$, mithin die Absurdität sowohl von $a > b$, wie von $a < b$, mithin die Relation $a = b$. Und wenn die Relation $c < d$ den bestehenden Relationen widerspruchsfrei hinzugefügt werden kann, so folgt aus der Ordnungsvorschrift die Absurdität sowohl von $c = d$, wie von $c \mathrel{\circ\!\!>} d$, mithin die Absurdität sowohl von $c = d$, wie von $c > d$, mithin die Relation $c < d$.
Dass jede unerweiterbare Ordnung eine virtuelle Ordnung ist, wurde in (1927 C) bewiesen. Der dortige Beweis der Umkehrung dieses Satzes ist aber nicht stichhaltig, weil die Inkompatibilität der gleichzeitigen Existenz von zwei beliebigen der Beziehungen $r = s$, $r < s$ und $r > s$ nicht die Inkompatibilität der gleichzeitigen widerspruchslosen Adjungierbarkeit von zwei beliebigen dieser Beziehungen nach sich zieht. In der Tat ist die Spezies der vier Elemente a, b, c, d mit der ordnenden Relation $a < b$, $a < c$, $a < d$, $b < d$, $c < d$, virtuell geordnet, aber nicht unerweiterbar geordnet.'

⟦In the proof of Satz 3 the inference from $\neg\,((r < s) \in \alpha)$ to $\alpha \rightarrow \neg\,(r < s)$ is not allowed.⟧

In the margin of his copy Brouwer tried to avoid this difficulty by changing the definition of virtual order. He proposed to read axioms 6 and 7 as follows:
6′. Aus der Ungereimtheit, eine der Beziehungen $r < s$ und $r > s$ aus der Definition der geordneten Projektion herzuleiten, folgt $r \doteq s$.
7′. Aus der Ungereimtheit, eine der Beziehungen $r > s$ und $r \doteq s$ aus der Definition der geordneten Projektion herzuleiten, folgt $r < s$.

He adds the following remark:

'In diesem Falle ist z.B. die Sachlage ausgeschlossen, dass für ein Elementepaar (a, b) hinsichtlich jeder der drei Beziehungen $a \doteq b$, $a < b$ und $a > b$ die Unmöglichkeit der Herleitung aus der Definition der geordneten Projektion feststellbar wäre.'

With this definition of virtual order the theorems in the paper hold. The order relations in the continuum satisfy both definitions of virtual order. However, in the general case the new definition seems less interesting because it involves the metamathematical notion of derivability. In (III), Chapter 3, Brouwer mentioned explicitly that conditions 6 and 7 ought to be interpreted according to 6′ and 7′ above. In (1950 A) he asserted again that every saturated (unerweiterbare) order is a virtual order.

1928 A Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus

⟦1⟧ Supplement to the bibliography:
F1. Also: D. Hilbert, Ges. Abhandlungen III, p. 290–329.
F2. Also: D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Anhang VII.
F3. Also: D. Hilbert, Ges. Abhandlungen III, p. 405–415.
F4. Also: D. Hilbert, Ges. Abhandlungen III, p. 157–177.
F5. Also: D. Hilbert, Ges. Abhandlungen III, p. 178–191.
F6. Also: Jber. Deutsch. Math. Ver. 26 (1922), p. 201–215.
I1 = (1907).
I2 = (1908 C).
I3 = (1912 A).
I4 = (1914).
I5 = (1917).
I6 = (1919 D).
I7 = (1923 B).
I8 = (1923 C).
I9 = (1927 B).
⟦2⟧ It is not true that $\neg\neg A \rightarrow A$ for a given proposition A implies $A \vee \neg A$ (see (1948 C) ⟦p. 492⟧), but the assertion that $\neg\neg A \rightarrow A$ holds for every proposition A is equivalent with the assertion that $A \vee \neg A$ holds for every proposition A.
⟦3⟧ Here Brouwer claims priority for one of the basic ideas of proof theory.
⟦4⟧ J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Z. 26 (1927), p. 1–46.
⟦5⟧ F9 must be I9.
⟦6⟧ Strictly speaking the fan theorem is not needed for this conclusion. The theorem on negative continuity of total functions on the continuum, (1927 B), Theorem 1, suffices. It entails that the characteristic function of a decidable subspecies of the continuum cannot be 0 in one point and 1 in another; therefore it is contradictory that a subspecies of the continuum which, as well as its complement, contains a point kernel, would be decidable.
⟦7⟧ (1954 A) contains a detailed discussion of the principle of excluded middle and of its consequences.

1928 B *Beweis dass jede Menge in einer individualisierten Menge enthalten ist*

⟦1⟧ (1925 A). Here Brouwer does not apply the more general definition of 'Menge' which he gave in (1926 B).
⟦2⟧ In order to make N identical with M it is necessary to adapt the law which assigns a symbol to every admissible finite sequence of choices in M.
⟦3⟧ (1927 B). Theorem 2 is the fan theorem.

1929 *Mathematik, Wissenschaft und Sprache*

⟦1⟧ The paper (1933) contains a Dutch translation of parts I and II of this lecture with some additions. The most important of these additions will be cited in the notes below; they are marked '⟦1933⟧'.
⟦2⟧ ⟦1933⟧ Heading: Reflection on mathematics, science and language.
⟦3⟧ ⟦1933⟧ All three are subject to free volition with respect to extent and to modality.
⟦4⟧ ⟦1933⟧ As a consequence of the appearance of objects (including one's own person and one's fellow creatures) the world of perception is itself more or less stabilized. Objects differ widely in their degree of *egoicity*, i.e. the degree to which the desire for their stability is accepted as a guiding force for the free will.
⟦5⟧ ⟦1933⟧ The performance of mathematical actions and the choice of the ends they are to serve are also subject to free volition. In particular the degree of egoicity of objects is expressed in the choice of ends. It is even an essential condition for any initiative of the will that the order of this degree is clear; where it is blurred out, dreaming away can only be interrupted by automatic routine action.
⟦6⟧ Replace 'Mitmenschen' by 'Mitgeschöpfe'; see (1930 A), footnote 3.
⟦7⟧ ⟦1933⟧ For instance it is a quite essential hypothesis for a mathematical theory about my fellow-creatures that each of them possesses a mathematical-scientific mechanism of observation, action and reflection which is analogous to mine.
⟦8⟧ ⟦1933⟧ However, such a mathematical theory often becomes unconscious once it has aroused the readiness to action, while nevertheless this readiness remains as an automatic routine.
⟦9⟧ ⟦1933⟧ Of course the scientific theories which are at the basis of languages are far from exact. On the contrary, the greater part of the stability and the formal exactness which a language seems to possess by its grammar and its dictionary gets lost in practice because everyday life needs many more elementary notions than the elementary words and associations of words which language offers. On the other hand stability and exactness of the language is not necessary in practice because people are drilled by a common will to an automatism of understanding incomplete sentences.

Everything said so far is *reasonable reflection*, i.e. mathematical speculation in which the *content* neither of ends, nor of objects in the world of perception is involved. It is an essential hypothesis for human understanding that the structure of this reasonable reflection is the same for all individuals. Therefore it represents an eminent social value as a means of avoiding confusion in fixing the principles of social organization and in consolidating social life.

Moral reflection is of a completely different and much more individual nature. It tests the objects of the world of perception and also the mathematical activity itself with respect to their egoicity, and consequently their right to exist as sources of guiding force for the free will. Moral reflection tries to approach the connection between ends to be chosen and the origin and design of our life, which are clear as well as mysterious, by dwelling with tense vigilance on the borderline between dreaming away and perception of time. Causality appears there only ephemerically and there is no place for mathematical action. Its language is inexact and unstable, more suggestive than adequate, 'it ought not to be taken literally'. It assumes a 'prophetic' character in the rare cases where an inspiration is received which is transferable or which conveys a tendency to collective action.

Still moral reflection is not without social importance, firstly because, though practised in complete solitude, it induces a feeling for social justice and readiness to struggle against evil, and besides because from its prophetical language there crystallize now and then most useful moral theories.

⟦10⟧ ⟦1933⟧ Heading: Criticism of the attempts to purge mathematics by linguistic means.

⟦11⟧ Brouwer changed 'positiven' into 'geraden', 'negativen' into 'ungeraden'.

⟦12⟧ In all the following examples 'nicht' is used in the weak sense. Thus 'Diese duale Pendelzahl ist weder gleich Null noch von Null verschieden' must be understood as follows: We have neither a proof that this number is equal to zero, nor a proof that it is different from zero. Brouwer expresses the mathematical negation by 'unmöglich' or by 'absurd'.

⟦13⟧ See for the intuitionistic form of Jordan's theorem (1925 B).

⟦14⟧ See (1923 B).

⟦15⟧ See (1924 C, E), de Loor (1925) and H. Weyl (1924). Van der Corput (1946) gave another proof.

⟦16⟧ This is an immediate consequence of the continuity of total functions. See (1927 B) Theorem 1 and footnote 10.

1930 A Die Struktur des Kontinuums

⟦1⟧ This footnote is difficult to understand. In 'Existenz von A' A must be a mathematical entity, while in 'Widerspruchsfreiheit von A' A must be a proposition. The remark becomes false when we read 'Widerspruchsfreiheit der Existenz von A', for $(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ is a theorem in intuitionistic logic. Probably Brouwer means the following: Let A denote the conjunction of the axioms of the arithmetic of real numbers, B the conjunction of the axioms of Euclidean geometry. From any model of A we can construct a model of B. It does not follow that we can derive a formal consistency proof of B from any formal consistency proof of A.

⟦2⟧ (1929) ⟦p. 425⟧.

⟦3⟧ (1929) ⟦p. 417⟧.

⟦4⟧ (1929) ⟦p. 425⟧.

⟦5⟧ See, however, note ⟦4⟧ to (1927 C).

⟦6⟧ This must be: 'dass I unmöglich eine Teilspezies von I_ν sein kann'.

1933 Volition, Knowledge, Language

⟦1⟧ Translated from (1933), part III. Parts I and II of this paper are almost literal Dutch translations of parts I and II of (1929) with some additions which have been mentioned in the notes to the latter paper. The paper was read in Amsterdam on Dec. 12, 1932.

⟦2⟧ The negations must be understood in the weak sense; see (1923 C) note ⟦1⟧.

⟦3⟧ Here Brouwer added in the margin: 'consequently $n_v = |s_v|$'.

⟦4⟧ By this definition the function is not defined for values of x for which the order relation with respect to 1 (or to -1) is not known. This can be remedied as follows:

$$f(x) = 1+(n_v-1)(x+2)+[\tfrac{1}{2}(s_v-n_v)-(n_v-1)]\max(x+1,0)+ \\ +[-1-s_v-\tfrac{1}{2}(s_v-n_v)]\max(x-1,0).$$

The definition in the text becomes correct if we change 'the function of x' into 'the continuous total function of x'.

⟦5⟧ In the margin Brouwer completed the definition of the r_ρ by: 'while for $\rho > k_v$ every r_ρ is a rotation around the same axis as for $\rho = k_v$'.

1937 Signific dialogues

⟦1⟧ Brouwer gave an account of the signific movement in the Netherlands in his paper (1946). The leading person in this movement was G. Mannoury. His main writings are:

Die signifischen Grundlagen der Mathematik. Erkenntnis 4 (1934), p. 288–309, 317–348;

Handboek der Analytische Signifika I, II, Bussum 1947–1948;

Polairpsychologische Begripssynthese, Bussum 1953;

Les deux pôles de l'esprit, Paris 1932.

The dialogues from which the following fragments are taken, were held during the years 1919–1924. They were published in 1937. In view of the small number of documents concerning Brouwer's philosophical ideas it seemed desirable to publish the most important of his contributions to the discussion.

1939 Zum Triangulationsproblem

⟦1⟧ See for the definition of 'katalogisiertkompakte Spezies' (1926 B).
⟦2⟧ Evidently Brouwer means that the inequalities must be fulfilled for every value of ρ such that $1 \leqslant \rho \leqslant p$ and for one value of g such that $0 \leqslant g \leqslant s$. $\lessdot$ must be replaced by $\leqslant$. Analogous remarks must be made about the next definition.
⟦3⟧ See for the definitions of 'Fragment' and of 'gemessen' Brouwer's papers: Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets, Math. Annalen 71 (1911), p. 306; Volume 2, (1911 E).
Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71 (1911), p. 98; Volume 2, (1911 D).

1942 A Zum freien Werden von Mengen und Funktionen

⟦1⟧ (1926 B).
⟦2⟧ The references are to (1923 A), (1924 A) and (1927 B).
⟦3⟧ Brouwer elaborated this idea in (1942 B).
⟦4⟧ The references in footnotes [6])–[10]) are to (1925 A).
⟦5⟧ Admitting 'Verengerungszusätze zweiter Ordnung' causes unpleasant complications. Brouwer revoked it in (1952 B); see note ⟦11⟧ to that paper.

1942 B Die repräsentierende Menge der stetigen Funktionen des Einheitskontinuums

⟦1⟧ The references are to (1925 A) and (1927 B).

1942 C Beweis dass der Begriff der Menge höherer Ordnung nicht als Grundbegriff der intuitionistischen Mathematik in Betracht kommt

⟦1⟧ (1942 A).
⟦2⟧ Here follows another wording of the definition of a second order spread. We restrict it, as Brouwer does, to the case of universal spreads, i.e. spreads in which every finite sequence of natural numbers is admissible. Let ψ be a given numbering of the finite sequences of natural numbers. If α is an infinitely proceeding sequence of natural numbers (an ips), then $\bar{\alpha}n$ will denote $\psi(\langle\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)\rangle)$. A first order spread M is defined by a function φ which assigns a mathematical entity to every natural number. The element of M corresponding to the ips α is the sequence $\lambda n \cdot \varphi(\bar{\alpha}n)$. In a second order spread N_σ, φ is replaced by an element σ of a first order spread M. Let φ be as above and let σ correspond to the ips β, then $\sigma = \lambda n \cdot \varphi(\bar{\beta}n)$. The element of N_σ corresponding to the ips α is $\lambda n \cdot \sigma(\bar{\alpha}n) = \lambda n \cdot \varphi(\bar{\beta}(\bar{\alpha}n))$. Brouwer argues that, for every σ, N_σ is a subspecies of the spread M_1 and that M_1 is the union of the N_σ.
⟦3⟧ ρ must be replaced by ζ.

1946 A Synopsis of the signific movement in the Netherlands. Prospects of the signific movement

⟦1⟧ The prospectus cited here is (1918 A).
⟦2⟧ Here follow letters on the prospectus from Martin Buber and Erich Gutkind, with Brouwer's replies.
⟦3⟧ See (1919 C).
⟦4⟧ See (1937).

1946 B Address delivered on the conferment upon Professor G. Mannoury of the honorary degree of Doctor of Science

⟦1⟧ Multatuli, pseudonym of Eduard Douwes Dekker, Dutch author, 1820–1887.
⟦2⟧ G. Mannoury, Handboek der analytische signifika I, II, Bussum 1947–1948. Polairpsychologische begripssynthese, Bussum 1953.
⟦3⟧ See about these papers the obituary by D. van Dantzig, Gerrit Mannoury's significance for mathematics and its foundations, Nieuw Archief Wiskunde (3) 5 (1957), p. 1–18.

1947 Guidelines of intuitionistic mathematics

⟦1⟧ We have translated the Dutch 'samenvatten' for lawful sequences by 'survey in one act', for choice sequences by 'create', hoping to render Brouwer's ideas by these terms.
⟦2⟧ Brouwer does not specify how the restrictions may be varied. He has hesitated about the question whether 'second order restrictions' (1942 A) on the freedom of future restrictions must be admitted. From (1952 B), footnote * on p. 142 ⟦p. 511⟧ it appears that he eventually shrinked from the complications which this involves.
⟦3⟧ See also (1925 A) and (1954 A). Brouwer does not take into account the generalization which he considered in (1926 B).

1948 A Essentially negative properties

⟦1⟧ Note that 'cannot be tested' must be taken in the sense that no method is known to test α. Ordinary negation is used by Brouwer in this weak sense. For mathematical negation he uses 'absurd' or 'contradictory'.
⟦2⟧ See about this notion Van Dantzig (1949). Recently attempts have been made to clarify Brouwer's theory of the creating subject. See Troelstra (1969) and the literature mentioned there.
⟦3⟧ See for the definitions of the relations $<$, $>$, $\lessdot$, $\gtrdot$ (1926 A) ⟦p. 329⟧ or (1948 C), footnote on p. 1246 ⟦p. 491⟧.

1948 C Consciousness, Philosophy and Mathematics

⟦1⟧ The mathematical part of the lecture is a translation of (1948 B) with some additions.

⟦2⟧ See (1928 A), § 2.

⟦3⟧ In (1948 B) Brouwer added the following footnote (in Dutch):

This means that when in a given species of mathematical entities the principle of excluded middle holds for some property, then the principle of reciprocity of complementarity holds for that property in that species. The other interpretation, which is also true and for which even the converse holds by (1923 C), namely that if the principle of excluded middle would hold for every mathematical proposition, then the principle of reciprocity of complementarity would also hold for every mathematical proposition, has no mathematical significance.

⟦4⟧ It is proved in (1951) that the assertions in each pair are non-equivalent. See also note ⟦3⟧ to that paper.

⟦5⟧ Brouwer elaborated this remark in (1948 A).

⟦6⟧ See (1923 C).

1949 A The non-equivalence of the constructive and the negative order relation on the continuum

⟦1⟧ See for the definition of these relations (1951).

⟦2⟧ Brouwer defines two sequences $Q(\gamma, \alpha)$ and $R(\gamma, \alpha)$.

⟦3⟧ A λ_n-interval has endpoints $a \cdot 2^{-n}$ and $(a+2) \cdot 2^{-n}$, a a whole number. See (1925 A), p. 253 ⟦p. 310⟧.

⟦4⟧ This application of Brouwer's continuity principle is unjustified. $n(f)$ depends not only on the members of the sequence f, but also on the restrictions on its continuation. For instance, if the freedom of choice for f is restricted by the condition that every $k_i^{(\mu_i)}$ must contain the number $\frac{1}{2}$, then $n(f)$ can be taken 0. On the other hand, as long as no restrictions are made on the continuation of f (except those contained in the definition of J), it cannot be decided whether f is rational or not. Thus for no f there can be found a number $n(f)$ such that the decision about α_f is the same for every continuation of the initial segment of f with length $n(f)$.

Among Brouwer's papers there was a handwritten note in Dutch referring to this proof, which may throw some light on his line of thought. Here follows a translation.

Further distinctions in connection with the excluded middle.

$\bar{a}$ will mean: a is non-contradictory.

$\underline{a}$ will mean: a is contradictory.

b implies a will mean: *from now on* I have an algorithm which enables me to derive a from b.

The principle of testability can assert:
either: *from now on* either $\bar{a}$ or $\underline{a}$ holds, notation: $|a$,
or: from a certain moment in future on either $\bar{a}$ or $\underline{a}$ will hold, notation: $a|$.

Then $a|$ is non-contradictory, but $|a$ need not be non-contradictory. For instance, let p be a point of the continuum in course of development, whose continuation is free at this moment, but may be restricted at any moment in the future; then (p is rational)| is non-contradictory, but |(p is rational) is contradictory, for the complete freedom which exists at this moment makes it impossible to be sure that the rationality of p is contradictory, but also to be sure that it is contradictory that the rationality of p is contradictory.

Let α_c be the assertion that the real number c is rational, and let the continuation of c be free at the moment when the assertion is made. Let a be the drift with kernel 0 and counting numbers 2^{-n}. $R(a, \alpha_c) > 0$, but it is contradictory that *at this moment* $R(a, \alpha_c) \circ\!\!> 0$. Hence *at every moment* there are numbers > 0 for which it is contradictory that they are $\circ\!\!> 0$ *at the same moment*. Consequently it will be contradictory *at every moment in the future* that there exists an algorithm which derives for every real number $k > 0$ that $k \circ\!\!> 0$. Hence the equivalence of > 0 and $\circ\!\!> 0$ is contradictory.

However, on further reflection this proof of contradictority seems unsatisfactory, for $|a$ does not seem admissible as a mathematical notion. The proof becomes unattackable in the following modified form: ⟦Here follows essentially the same proof as is given in (1949 A).⟧

1949 B Contradictority of elementary geometry

⟦1⟧ It is not clear why Brouwer considers this proof unsatisfactory. Had he in mind the application of geometry to the space of experience? He cannot have meant the objection made in note ⟦4⟧ to (1949 A).
⟦2⟧ For the definitions of these notions see (1949 A).
⟦3⟧ Here the objection in note ⟦4⟧ to (1949 A) cannot be made, because the fan theorem is not needed; see note ⟦6⟧ to (1928 A).
⟦4⟧ Note the difference between the mathematical negation, denoted by 'contradictority', and the conversational negation, denoted by 'not true'.

1950 A Remarques sur la notion d'ordre

⟦1⟧ See (1927 C), in particular note ⟦4⟧ to that paper.
⟦2⟧ (1948 A).
⟦3⟧ For example: r is the limit of the sequence $\{a_n\}$, where $a_n = 2^{-n}$ if there are no 10 consecutive 7's among the first n digits in the decimal expansion of π and $a_n = 2^{-k}$ if k is the smallest number such that the $(k-9)$th–kth digits are 7 and $k < n$.

1950 B Sur la possibilité d'ordonner le continu

⟦1⟧ (1950 A).
⟦2⟧ éprouvable = testable. See (1948 C) ⟦p. 490⟧.

1951 On order in the continuum, and the relation of truth to non-contradictority

⟦1⟧ (1926 A), § 7.
⟦2⟧ (1948 B). See the translation in (1948 C) ⟦p. 490⟧.
⟦3⟧ (1948 B). See the translation in (1948 C) ⟦p. 493⟧. (1949 B). In (1949 A) Brouwer proved that $a > 0$ and $a \mathrel{\circ\!\!>} 0$ cannot be equivalent. In (1949 B) he inferred from this result that $a \geqq 0$ cannot be equivalent to (either $a = 0$ or $a \mathrel{\circ\!\!>} 0$). However, the proof in (1949 A) is open to objection; see note ⟦4⟧ to that paper. In (1949 B) Brouwer shows that $a \neq 0$ cannot be equivalent to (either $a < 0$ or $a > 0$) and that $a = a$ cannot be equivalent to (either $a \leqq 0$ or $a \geqq 0$).

It is easily shown that in each of the four pairs the negations of the two assertions are equivalent.
⟦4⟧ (1928 A).

1952 A An intuitionist correction of the fixed-point theorem on the sphere

⟦1⟧ point core = Punktkern. See for the definition (1923 A) § 1 or (1952 B) ⟦p. 512⟧.
⟦2⟧ For the Bolzano–Weierstrass theorem see (1952 C).
⟦3⟧ For the definition of a fleeing property (= fliehende Eigenschaft) see (1929) § III or (1933) § III.
⟦4⟧ See the correction in (1952 D), footnote 2).

1952 B Historical background, principles and methods of intuitionism

⟦1⟧ In the margin Brouwer changed 'complete' into 'absolute and sure'.
⟦2⟧ R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen?, Braunschweig 1888; also: Ges. math. Werke III, p. 335–391.
Brouwer's comment: (1907) ⟦p. 78⟧, footnote.

G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883; Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I, II, Math. Annalen 46 (1895), p. 481–512 and 49 (1897), p. 207–246. Auch in: Ges. Abh. mathematischen und philosophischen Inhalts, Hildesheim 1962.
Brouwer's comment: (1907) ⟦p. 80–82⟧.

D. Hilbert. See (1928 A); also Brouwer (1907) ⟦p. 77–79⟧.

B. Russell, An essay on the foundation of geometry, Cambridge 1897; Principles of mathematics I, Cambridge 1903.

Brouwer's comment: (1907) ⟦p. 61–67, 71⟧.

E. Zermelo, Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète, Acta math. 32 (1909), p. 185–193; Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Annalen 59 (1904), p. 514–516; Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, Math. Annalen 65 (1908) p. 261–281.

Brouwer's comment: (1907) ⟦p. 84⟧, (1912 A), (1917), remark 11.

L. Couturat, Les principes des mathématiques, Paris 1904; Pour la logistique, Revue Métaphysique Morale 14 (1906), p. 208–250.

Brouwer's comment: (1907) ⟦p. 90–91⟧.

⟦3⟧ In the margin Brouwer changed 'element extraneous to language and logic' into 'extralingual element'.

⟦4⟧ Evidently Brouwer means Gödel's paper 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathmatica und verwandter Systeme I', Monatshefte Math. 38 (1931), where it is proved that a consistency proof for elementary arithmetic cannot be given within that theory. However, Gentzen, Kalmár and Ackermann had given consistency proofs by means of transfinite induction up to ε_0, which is admissible in intuitionistic mathematics.

G. Gentzen, Math. Annalen 112 (1936), p. 493–565. Translation in: M. E. Szabo, The collected papers of Gerhard Gentzen, p. 132–201; see also p. 201–213 and 252–286.

W. Ackermann, Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, Math. Annalen 117 (1940), p. 162–194.

Kalmár's proof was published in: Hilbert und Bernays, Grundlagen der Mathematik II, 2. Auflage (1970), p. 513–535.

⟦5⟧ H. Poincaré, La science et l'hypothèse, Paris 1902; La valeur de la science, Paris 1905; Science et méthode, Paris 1908; Dernières pensées, Paris 1913.

Brouwer's comment: (1907), chapter 3.

E. Borel, Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles, Math. Annalen 60 (1905), p. 194–195; La logique et l'intuition en mathématiques, Revue Métaphysique Morale 15 (1907), p. 273–283; Sur les ensembles effectivement énumerables et sur les définitions effectives, Atti Acad. Lincei, Rendiconti cl. sc. fis. (5) 28 (1919), p. 163–165; Les paradoxes de l'infini, Paris 1946; Leçons sur la théorie des fonctions, 2e éd. Paris 1914, Note IV.

H. Lebesgue, Sur certaines démonstrations d'existence, Bulletin Soc. math. France 35 (1907), p. 202–212; Sur les controverses sur la théorie des ensembles et la question des fondements, Les entretiens de Zurich (1941), p. 109–124.

See about the pre-intuitionist school:

P. Bockstaele, Het intuitionisme bij de Franse wiskundigen, Verhandelingen Kon. Vlaamse Acad. Klasse Wetensch. 11 (1949) no. 32.

⟦6⟧ The notion of an ever-unfinished and ever-denumerable set occurs in Brouwer's thesis (1907) under the name of 'aftelbaar onaffe verzameling'. In the translation I used the shorter expression 'denumerably unfinished set'.
⟦7⟧ Probably Brouwer means by the axiom of ordinal connectedness the axiom that every Dedekind cut in a line determines a point. Hilbert's Vollständigkeits-axiom occurs in his Grundlagen der Geometrie, Axiom V2.
⟦8⟧ See (1928 A).
⟦9⟧ In the margin Brouwer added after 'intuition': i.e. by unlimited repetition of the process of generating a twoity or a fundamental sequence of mathematical entities previously acquired.
⟦10⟧ The fear which Brouwer expresses here seems to be invalidated by recent work on constructive analysis. See for example:
E. Bishop, Foundations of constructive analysis, New York 1967.
Trudy mat. inst. im. V. A. Steklova 52 (1958), 67 (1962), 93 (1967), 113 (1970), 114 (1970). Zapiski naučnyh seminarov Leningradskogo otdelenija mat. inst. im. V. A. Steklova 4 (1967), 8 (1968), 16 (1969), 20 (1971).
⟦11⟧ Probably Brouwer means that a species S must be re-defined when new mathematical entities, which may be elements of S, have been constructed. In stead of the condition of simple predicativity Brouwer introduced in (1925 A) species of different order.
⟦12⟧ See (1942 A), remark 2. It is not clear how introspection could forbid us to introduce the notion of second order restrictions. The reason for not introducing them is simply that they are hard to manage.
⟦13⟧ See for the proof (1927 B) or (1954 A).
⟦14⟧ See (1919 A) § 16.
⟦15⟧ By the Classical Cartesian plane Brouwer means the species of points defined by predeterminate (lawful) sequences. In (1930 A) he used for the analogous notion in one dimension the expression 'reduziertes Kontinuum'.
⟦16⟧ See (1927 B) § 3. In (1954 A) the theorem appears as a special case of a more general continuity theorem.

1952 C On accumulation cores of infinite core species

⟦1⟧ The definitions of a real number and of a real number core occur for the first time in (1927 B); they are there called 'Punkt des Linearkontinuums' and 'Punkt-kern des Linearkontinuums'. The notions of a point and of a point core had been introduced in (1919 A) and (1923 A).
⟦2⟧ See for the definitions of these notions (1929).
⟦3⟧ The definition of a standard number is analogous to that of a standard point, as given in (1952 B).

1952 D Fixed cores, which cannot be found, though they are claimed to exist by classical theorems

⟦1⟧ The words ‘cannot be constructed’ must be understood here in the sense of ‘at this moment we are not able to construct’. For the mathematical negation Brouwer uses ‘absurd’ or ‘contradictory’.

1954 A Points and spaces

⟦1⟧ (1952 B).
⟦2⟧ See for recent work on the notion of a choice sequence:
Kreisel (1968 B), Kreisel and Troelstra (1970), Myhill (1966, 1968, 1970), van Rootselaar (1970), Troelstra (1968 B, 1969 A, B, C, 1970 A, B).
⟦3⟧ It is questionable whether this attempt at a generalization of the notion of equality, and in particular the formalization of the notion of contradiction, fits into the intuitionistic current of thought. It seems more adequate to define equality in every case anew and to verify each time that the definition satisfies the conditions of symmetry, reflexiveness an transitivity, and that it does not contradict earlier definitions of equality.
⟦4⟧ In a formal system for the predicate calculus the three principles are formalized as follows:

Simple form	Extended form
Principle of judgeability	
(1a) $A \vee \neg A$	(1b) $\bigwedge x(A(x) \vee \neg A(x))$
Principle of testability	
(2a) $\neg A \vee \neg\neg A$	(2b) $\bigwedge x(\neg A(x) \vee \neg\neg A(x))$
Principle of reciprocity of complementarity	
(3a) $\neg\neg A \rightarrow A$	(3b) $\bigwedge x(\neg\neg A(x) \rightarrow A(x))$

It follows from the theorem $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A \& \neg\neg A$, that (1a) and consequently (2a) and (3a) are non-contradictory. The contradictority of (1b) and of (2b) was proved in (1928 A). (3b) would entail $\bigwedge x \neg\neg A(x) \rightarrow \bigwedge x A(x)$. That this is contradictory can easily be obtained from example S3 in (1925 A); see note ⟦11⟧ to that paper.
⟦5⟧ (1948 C).
⟦6⟧ Brouwer remarks that $\bigwedge x \neg A(x) \rightarrow \neg \bigwedge x A(x)$ holds, but $\bigwedge x \neg\neg A(x) \rightarrow \neg\neg \bigwedge x A(x)$ does not hold in general (this follows also from example S3 in (1925 A)); however, $\neg\neg A \& \neg\neg B \rightarrow \neg\neg(A \& B)$ holds.
⟦7⟧ It is easily proved, without using the principle of excluded middle, that the relation of equipotentiality is symmetric.
⟦8⟧ Brouwer does not explain what he means by ‘not necessarily predeterminate’.

The most reasonable interpretation is the extension of the notion of a spread which he indicated in (1926 B). It comes to the following.

The species K is determined by free choices as follows: In the first place the decision mentioned under (i) is made and, if necessary, m_0 is chosen. Further the nodes are examined one after the other in the order of the natural denumeration and for every node p that has already been placed in K, the decision mentioned under (ii) is made and, if necessary, m_p is chosen. Each of these decisions is made by a free choice. The properties of the natural denumeration warrant that this process is possible. In this way K is determined by a free choice sequence. The freedom can be restricted, but if every spread is admitted as a restriction, the definition of a spread becomes circular. Probably Brouwer had in mind that only lawful restrictions, i.e. restrictions which do not depend upon choices, can be admitted.

In the same way a crude block is determined by deciding for the nodes of K one after the other in the order of their natural denumeration whether it will belong to the block or not. The restriction on these decisions must be such that no arrow in $w(K)$ can avoid it. Further restrictions are necessary for a proper block. Analogous remarks can be made about the definition of a bar.

Kleene interpreted 'not necessarily predeterminate' as 'dependent on a free choice parameter'. He showed that under this interpretation the bar theorem is false. (Kleene and Vesley 1965). His example is as follows:

Define a crude bar $C(\beta)$, dependent on a free choice parameter β, in the universal spread direction by the following conventions:

$$\langle a\rangle \in C \Leftrightarrow \neg \bigwedge x(\beta x = 0).$$
$$\langle a_0, a_1\rangle \in C \Leftrightarrow \beta a_1 = 0.$$

For any arrow α, if $\beta\alpha_1 = 0$, then $\langle \alpha_0, \alpha_1\rangle \in C$; if $\beta\alpha_1 \neq 0$, then $\langle \alpha_0\rangle \in C$. Thus C is a crude bar. Suppose B is a block and $B \subset C(\beta)$. For $\beta = \lambda n\cdot 0$, $\langle 0\rangle \notin C(\beta)$, so $\langle 0\rangle \notin B$. As B is decidable, it must be known after some finite segment of β has been chosen, say after $\bar{\beta}(N)$, that $\langle 0\rangle \notin B$. Take $\beta(m) = 0$ for $m \leqslant N$, $\beta(N+1) = 1$, $\alpha 0 = 0$, $\alpha 1 = N+1$, then $\langle \alpha_0\rangle \notin B$ and $\langle \alpha_0, \alpha_1\rangle \notin B$, so α does not meet B.

⟦9⟧ $n > 1$ must be $n \geqq 1$.

⟦10⟧ This must be so understood that $n(\alpha)$ depends only on the members of the sequence α, not on the restrictions for the continuation of α. See note ⟦4⟧ to (1949 A).

⟦11⟧ It can be shown by a simple application of transfinite induction that every well-ordered block is a bar.

Charles Parsons (J. van Heyenoort, From Frege to Gödel, p. 451–452) gives an analysis of the suppositions made in the proof of the bar theorem.

1954 B Addenda and corrigenda on the role of the principium tertii exclusi in mathematics

⟦1⟧ For this paper the translation in J. van Heyenoort, From Frege to Gödel, p. 341–342, is used.
⟦2⟧ This contradictority is implicit in example S3 in (1925 A) ⟦p. 313⟧. It is stated explicitly in (1928 A).
⟦3⟧ Located compact spaces were introduced by Brouwer in (1926 B).
⟦4⟧ $v < k_1$ if among the first v digits in the decimal expansion of π there occurs no sequence 0123456789; $v \geqslant k_1$ if such a sequence does occur.
⟦5⟧ The expression 'classical continuum' seems less appropriate than the term 'reduziertes Kontinuum' which Brouwer used in (1930 A).
⟦6⟧ See also (1954 C).

1954 C Further addenda and corrigenda on the role of the principium tertii exclusi in mathematics

⟦1⟧ For this paper the translation in J. van Heyenoort, From Frege to Gödel, p. 342–345, is used.
⟦2⟧ See about this definition note ⟦4⟧ to (1933).
⟦3⟧ See for the definition of 'opaque fleeing property' (1952 B), p. 141 ⟦p. 510⟧.
⟦4⟧ See for the apartness relation (1919 A), p. 3 ⟦p. 191⟧ (örtlich verschieden) or (1923 C) (Entfernung).
⟦5⟧ This is not correct. A positively irrational point p lies apart from the m-cores, but it cannot be decided whether the derivative in p will be $\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$. Therefore the conclusion in the next paragraph holds.
⟦6⟧ See (1954 A) p. 16 ⟦p. 537⟧. Brouwer nowhere defines 'accretion sequence' (accretiereeks); probably it means the same as 'arrow'. In (1954 A) he defined 'accretion of order n' as 'each last constituent of a node of order n' ⟦p. 537⟧.

1954 D Ordnungwechsel in Bezug auf eine coupierbare geschlossene stetige Kurve

⟦1⟧ (1925 B).
⟦2⟧ ⟦p. 315–316⟧.
⟦3⟧ ⟦p. 316, 317⟧.

1954 E Intuitionistic differentiability

⟦1⟧ What Brouwer calls here the intuitionistic continuum is the same as what he called elsewhere simply the continuum. The distinction between the classical and the intuitionistic continuum was introduced in (1930 A), where the classical

continuum is called 'reduziertes Kontinuum'. See also note ⟦15⟧ to (1952 B).
⟦2⟧ See about this definition note ⟦4⟧ to (1933).
⟦3⟧ An assertion is judged when it is either proved or reduced to absurdity. See (1948 C) ⟦p. 489⟧.

1954 F An example of contradictority in classical theory of functions

⟦1⟧ (1954 C).
⟦2⟧ See for the definition of 'standard number' (1952 B) ⟦p. 514⟧.
⟦3⟧ See (1928 A) and note ⟦4⟧ to (1954 A).

1955 The effect of intuitionism on classical algebra of logic

⟦1⟧ Lecture delivered at the celebration of the centenary of the *Laws of Thought* by George Boole, 24th May 1954.
⟦2⟧ To refute (4) it is not necessary to introduce choice sequences. Let f be an opaque fleeing property, then $\sigma \equiv \bigvee x f(x)$ and $\tau \equiv \neg \bigvee x f(x)$ is a counterexample.
⟦3⟧ For this proof the notion of a choice sequence is essential. Let $A(x)$ be a predicate of the reals such that $\bigvee x A(x)$ and $\bigvee x \neg A(x)$. Then $\bigwedge x(A(x) \vee \neg A(x))$ is contradictory (1928 A); see also note ⟦6⟧ to (1928 A). Contradictority of (2) and of (4) is proved by taking $\sigma \equiv A(x)$, $\tau \equiv \neg A(x)$; that of (3) by taking $\sigma \equiv \tau \equiv A(x) \vee \neg A(x)$.

LITERATURE

ASHVINIKUMAR

1966 Hilbert spaces in intuitionism. Hilbertaj spacoj en intuiciismo. (with a abridged version in Hindi). Thesis, Amsterdam.

1969 A The intuitionist contradictority of certain classical set-theoretic results. *Nieuw Arch. Wisk.* (3) 17, p. 218–222.

1969 B Ueber katalogisierte Räume. *Compositio Math.* 21, p. 431–456.

1970 A On the intuitionistic theory of Stieltjes integration and its applications. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 73 = *Indag. Math.* 32, p. 62–76.

1970 B On Brouwer-Stieltjes integration. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 73 = *Indag. Math.* 32, p. 161–171.

1971 Een ander bewijs van de intuïtionistische tegenstrijdigheid van het keuze-axioma. *Nieuw Arch. Wisk.* (3) 19, p. 193–195.

ASHVINIKUMAR and SAHAB LAL SHUKLA

1971 Intuitionist determination of dual spaces of certain catalogued linear spaces I, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 74 = *Indag. Math.* 33, p. 240–251, 252–260.

BELINFANTE, M. J.

1929 A Ueber einen Grenzwertsatz aus der Theorie der unendlichen Folgen. *Math. Ann.* 101, p. 312–315.

1929 B Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* 1929, p. 639–660.

1930 A Ueber eine besondere Klasse von non-oszillierenden Reihen. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 33, p. 1170–1179.

1930 B Absolute Konvergenz in der intuitionistischen Mathematik. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 33, p. 1180–1184.

1931 A Die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes in der intuitionistischen Mathematik. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 34, p. 401–412.

1931 B Ueber die Elemente der Funktionentheorie und die Picardschen Sätze in der intuitionistischen Mathematik. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 34, p. 1395–1397.

1939 A Das Riemanschen Umordnungsprinzip in der intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen. *Compositio Math.* 6, p. 118–123.

1939 B Der Lévysche Umordnungssatz und seine intuitionistische Uebertragung. *Compositio Math.* 6, p. 124–135.

1941 Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 44, p. 173–185, 276–285, 420–425, 563–567, 711–717.

BETH, E. W.

1947 Semantical considerations on intuitionistic mathematics. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 50, p. 1246–1251 = *Indag. Math.* 9, p. 572–577.

1955 *Les fondements logiques des mathématiques* (Paris, Louvain 1955) 216 p.

1956 *L'existence en mathématiques* (Paris, Louvain 1956) 60 p.

BILLING, J.

1947 A failure of the Bolzano-Weierstrass lemma. *Arkiv Math. Astr. Fys.* 34b, nr. 11, 2 p.

CORPUT, J. G. VAN DER

1946 On the fundamental theorem of algebra. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 49, p. 722–732, 878–886, 985–994 = *Indag. Math.* 8, p. 430–440, 549–557, 605–614.

DALEN, D. VAN

1963 A Extension problems in intuitionistic plane projective geometry I, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 66 = *Indag. Math.* 25, p. 349–368, 369–383.

1963 B Extension problems in intuitionistic plane projective geometry. Thesis, Amsterdam.

1968 A A note on spread-cardinals. *Compositio Math.* 20, p. 21–28.

1968 B Reducibilities in intuitionistic topology. *J. Symbolic Logic* 33, p. 412–417.

DALEN, D. VAN and A. S. TROELSTRA

1970 Projections of lawless sequences. In: *Intuitionism and prooftheory* (Proc. Conf. Buffalo, N.Y. 1968) p. 163–186.

DESTOUCHES, J. L.

1951 Sur la mécanique classique et l'intuitionnisme. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 54, p. 74–79 = *Indag. Math.* 13, p. 74–79.

DANTZIG, D. VAN

1942 A On the affirmative content of Peano's theorem on differential equations. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 45, p. 367–373 = *Indag. Math.* 4, p. 140–146.

1942 B A remark and a problem concerning the intuitionistic form of Cantor's intersection theorem. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 45, p. 374–375 = *Indag. Math.* 4, p. 147–148.

1947 On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 50, p. 918–929, 1092–1103 = *Indag. Math.* 9, p. 429–440, 506–517.

1949 Comments on Brouwer's theorem on essentially-negative predicates. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 52, p. 949–957 = *Indag. Math.* 11, p. 347–355.

DIJKMAN, J. G.

1946 Einige Sätze über mehrfach negativ-konvergente Reihen in der intuitionistischen Mathematik. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 49, p. 829–833 = *Indag. Math.* 8, p. 532–536.

1948 Recherche de la convergence négative dans les mathématiques intuitionnistes. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 51, p. 681–692 = *Indag. Math.* 10, p. 232–243.

1952 Convergentie en divergentie in de intuitionistische wiskunde. Thesis, Amsterdam 1952.

1961 A Some intuitionistic remarks about transformations of sequences. *Compositio Math.* 15, p. 70–81.

1961 B On Markov chains and intuitionism. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 64 = *Indag. Math.* 23, p. 314–327.

1962 A note on intuitionistic divergence theory. *Nieuw Arch. Wisk.* (3) 10, 17–19.

1963 On Markov chains and intuitionism II. Discrete state-space and continuous parameter. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 66 = *Indag. Math.* 25, p. 275–281.

1964 Markov chains and intuitionism III. Note on continuous functions with an application to Markov chains. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 67 = Indag. Math. 26, p. 256–261.

EUWE, M.

1929 Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 32, p. 633–644.

FREUDENTHAL, H.

1936 Zum intuitionistische Raumbegriff.
Compositio Math. 4, p. 82–111.

GHOSE, AMITABHA

1968 Free choice sequences I, II.
In: *Automation in Language Translation and Theorem Proving*, p. 245–257, 259–261 (Commission of the European Communities, Brussels 1968).

GIBSON, C. G.

1967 The Radon integral in intuitionism.
Thesis, Amsterdam.

1969 The intuitionistic measure.
J. London Math. Soc. 44, p. 617–624.

1971 On the definition of an infinite species.
Nieuw Arch. Wisk. (3) 19, p. 196–197.

GOODMAN, N. D.

1968 Intuitionistic arithmetic as a theory of constructions.
Ph.D. thesis, Stanford University.

1970 A theory of constructions equivalent to arithmetic.
In: *Intuitionism and proof theory* (Proc. Conf. Buffalo 1968) p. 100–120.

GRISS, G. F. C.

1946 Negationless intuitionistic mathematics I.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 49, p. 1127–1133 = *Indag. Math.* 8, p. 675–681.

1950 Negationless intuitionistic mathematics II.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 53, p. 456–463 = *Indag. Math.* 12, p. 108–115.

1951 Negationless intuitionistic mathematics III, IV.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 54, p. 193–200, 452–471 = *Indag. Math.* 13, p. 193–200, 452–471.

HEYTING, A.

1927 Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplikation.
Math. Ann. 98, p. 465–490.

1927A Zur intuitionistischen Axiomatik der projektiven Geometrie.
Math. Ann. 98, p. 491–583.

1929 De telbaarheidspraedicaten van Prof. Brouwer.
Nieuw Arch. Wisk. (2) 16, p. 47–58.

1930 Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.
Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. 1930, p. 42–56.

1930 A Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik II, III.
Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1930, p. 57–71, 158–169.

1934 *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus, Beweistheorie.*
(Berlin 1934) IV+73 p. Reprint Berlin 1974.

1941 Untersuchungen über intuitionistische Algebra.
Nederl. Akad. Wetensch. Verhandelingen 1e sectie 18 no. 2, 36 p.

1950 Espace de Hilbert et intuitionnisme. Les méthodes formelles en axiomatique (Colloques internationaux due C.N.R.S., Paris 1953) p. 59–63.

1951 Note on the Riesz-Fischer theorem.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 54 Ser. A p. 35–40 = *Indag. Math.* 13, p. 35–40.

1955 Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration (Paris, Louvain 1955) 91 p.

1956 *Intuitionism, an Introduction* (Amsterdam, London, 3d ed. 1971) X+145 p.

1959 Infinitistic methods from a finitist point of view.
In: *Infinitistic methods* (Proc. Symp. Warsaw 1959, Warszawa 1959) p. 185–192.

1961 Axiomatic method and intuitionism.
In: *Essays on the foundations of mathematics* (Jerusalem 1961) p. 237–247.

1964 Remarques sur la théorie intuitionniste des espaces linéaires.
In: *E. W. Beth memorial colloquium* (Paris 1964, Dordrecht 1967).

1968 Recent progress in intuitionistic analysis.
In: *Intuitionism and proof theory* (Proc. Conf. Buffalo 1968) p. 95–100.

HOMAGK, FRITZ

1969 Ein intuitionistischer Beweis für den Grafensatz von D. Koenig. *Compositio Math.* 21, p. 292–294.

HOWARD, W. A. and G. KREISEL

1966 Transfinite induction and barinduction of types zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis.
J. Symbolic Logic 31, p. 325–358.

HULL, N. G.

1969 Counterexamples in intuitionistic analysis using Kripke's schema. *Z. Math. Logic Grundlagen Math.* 15, p. 241–246.

IONGH, J. J. DE

1948 Restricted forms of intuitionistic mathematics.
Proc. Xth Intern. Congress Philosophy, Amsterdam 1948, p. 744–748.

KLEENE, S. C. and R. E. VESLEY

1965 The foundations of intuitionistic mathematics especially in relation to recursive functions (Amsterdam 1965).

KREISEL, G.

1958 A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs.
J. Symbolic Logic 23, p. 369–388.

1967 Informal rigour and completeness proofs.
In: *Problems in the philosophy of mathematics*, ed. I. Lakatos, p. 138–186.

1968 A Functions, ordinals, species.
In: *Logic, Methodology and Philos. Sci.* III (Proc. Third Intern. Congr. Amsterdam 1967), p. 145–159.

1968 B Lawless sequences of natural numbers.
Compositio Math. 20, p. 222–248.

1970 Church's thesis: A kind of reducibility axiom for constructive mathematics.
In: *Intuitionism and proof theory* (Proc. Conf. Buffalo 1968) p. 121–150.

KREISEL, G. and W. A. HOWARD

See HOWARD, W. A.

KREISEL G. and A. S. TROELSTRA

1970 Formal systems for some branches of intuitionistic analysis.
Ann. Math. Logic 1, p. 229–387.

LOOR, B. DE

1925 Die hoofstelling van die algebra van intuitionistiese standpunt.
Thesis, Amsterdam.

MYHILL, JOHN

1966 Notes towards an axiomatization of intuitionistic analysis.
Logique et Analyse (N.S.) 9, p. 280–297.

1968 Formal systems of intuitionistic analysis I.
In: *Logic, Methodology and Philos. Sci.* III (Proc. Third Intern. Congr. Amsterdam 1967) p. 161–178.

1970 Formal systems of intuitionistic analysis II. The theory of species.
In: *Intuitionism and proof theory* (Proc. Conf. Buffalo 1968) p. 151–162.

ROOTSELAAR, B. VAN

1952 Un problème de M. Dijkman.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 55, p. 405–407 = *Indag. Math.*14, p. 405–407.

1954 Generalization of the Brouwer integral.
Thesis, Amsterdam.

1955 A On the mapping of spreads.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 58, p. 557–563 = *Indag. Math.* 17, p. 557–563.

1955 B Generating schemes for full mappings.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 58, p. 646–649 = *Indag. Math.* 17, p. 646–649.

1956 A remark on Brouwermeasurable functions.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 59 = *Indag. Math.* 18, p. 579–580.

1960 On intuitionistic difference relations.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 63 = *Indag. Math.* 22, p. 316–322.

1963 Corrections to the paper "On intuitionistic difference relations".
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 66 = *Indag. Math.* 25, p. 132–133.

1964 On intuitionistic notions of divergence and convergence.
Nieuw Arch. Wisk. (3) 12, p. 19–24.

1970 On subjective mathematical assertions.
In: *Intuitionism and proof theory* (Proc. Conf. Buffalo 1968), p. 187–196.

SAHAB LAL SHUKLA and ASHVINIKUMAR
See ASHVINIKUMAR

SCHULZ, KONRAD

1965 Zum Aufbau der intuitionistischen Topologie.
Diplomarbeit, Humboldt-Universität, Berlin.

1966 Zur Darstellung der intuitionistischen Mathematik im Rahmen eines Beweisbarkeitskalküls.
Monatsh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin 8, p. 399–402.

1967 A Spreadtheorie und intuitionistische Topologie.
Z. Math. Logik Grundlagen Math. 13, p. 251–264.

1967 B Speziestheorie und intuitionistische Topologie.
Z. Math. Logik Grundlagen Math. 13, p. 377–378.

SCOTT, DANA

1968 Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis.
Compositio Math. 20 p. 194–210.

1970 Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis II.
In: *Intuitionism and proof theory* (Proc. Conf. Buffalo 1968), p. 235–255.

TEENSMA, E.
1955 The intuitionistic interpretation of analysis.
Proc. of the second international congress of the international union for the philosophy of science, Zürich, 1954. Vol. II p. 144–150.

TROELSTRA, A. S.
1966 Intuitionistic topology.
Thesis, Amsterdam 1966.
1967 A Intuitionistic continuity.
Nieuw Arch. Wisk. (3) 15, p. 2–6.
1967 B Intuitionistic connectedness.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 70 = *Indag. Math.* 29, p. 96–105.
1967 C Finite and infinite in intuitionistic mathematics.
Compositio Math. 18, p. 94–116.
1968 A The use of "Brouwer's principle" in intuitionistic topology.
Contributions to Math. Logic (Coll., Hannover, 1966), p. 289–298.
1968 B The theory of choice sequences.
In: *Logic, Methodology and Philos. Sci.* III (Proc. Third Intern. Congr., Amsterdam 1967), p. 201–223.
1968 C One point compactifications of intuitionistic locally compact spaces.
Fund. Math. 62, p. 75–93.
1968 D New sets of postulates for intuitionistic topology.
Compositio Math. 20, p. 211–221.
1969 A Principles of intuitionism.
Lecture notes in mathematics 95 (Berlin, Heidelberg) 111 p.
1969 B Informal theory of choice sequences.
Studia Logica 25, p. 31–52.
1969 C Notes on the intuitionistic theory of sequences I.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 72, p. 430–440 = *Indag. Math.* 31, p. 430–440.
1970 Notes on the intuitionistic theory of sequences II, III.
Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 73, p. 99–109, 245–252 = *Indag. Math.* 32, p. 99–109, 245–252.
1971 Notions of realizability for intuitionistic arithmetic and intuitionistic arithmetic in all finite types.
In: *Proc. Second Skandinavian Logic Symposion*, Oslo, 1970, p. 369–405.

TROELSTRA, A. S. and D. VAN DALEN
See DALEN, D. VAN

TROELSTRA, A. S. and G. KREISEL
See KREISEL, G.

VESLEY, R. E. and S. C. KLEENE
See KLEENE, S. C.

WEYL, H.
1919 Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.
Math. Z. 10, p. 39–79.
1924 Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik.
Math. Z. 20, p. 131–150.

SACHVERZEICHNIS

	Page	English equivalent
Abbrechung, innere	192	
vollständige –	199	
abgeschlossen	164, 196	
Ableitung	196, 198	
Abschliessung	196	
Abschnitt	172, 355	
Absonderung	280	
abtrennbar	151, 304, 527	removable
Abtrennung	278	
Abweichung	278, 279, 527	to deviate
abzählbar	154, 312	denumerable
– unendlich	154, 306, 528	denumerably infinite
– unfertig	82, 104	denumerably unfinished
Addition von Ordinalzahlen	162, 531	ordinal addition
Adhärenz	197	
innere –	192	
Anfangsteil	355	
Anlehnung	278	
Anschliessung	278	
Appendix	197	
innere –	192	
äquivalent	157, 309	
aufzählbar	154, 312	
Ausdehnung, von grösserer (gleicher)	159, 312	
Ausfüllungselement	237	
Ausschnitt	355	
auszählbar	154, 312	
Begrenzung	201	
Bereich	155, 208, 313, 513	grid area
differenzierter –	155	
– von Ordnungszahlen	178 seq., 360 seq.	
Bereichmenge, durchsichtige	210	
Blockfunktion	461	
Bolzano-Weierstrass, Satz von	272, 516	
Dedekindscher Schnitt	431	
dicht, in sich	164, 196, 329	
nirgends –	164, 196, 323	
überall –	163, 196, 322	everywhere dense
diskret	303, 526	discrete
durchzählbar	154, 312	

Einhüllungsbeziehung	278	
Einschaltungselement	335	
Elementarsignal	421, 483	basic sign
endlich	152, 305, 528	finite
Endteil	355	
entfernt	278, 525	apart
vollständig –	316	
Entfernung	277, 279	apartness
Entität, mathematische	107, 150, 302	entity
Ergänzung	194	
Ergänzungselement	238	
erzeugungsgleich	353	
fliehende Eigenschaft	425, 444, 510	fleeing property
Folge, katalogisierte	341, 536	located infinite sequence
limitierte –	214	
Freifunktion	461	
Fundamentalreihe	161, 323, 488, 511	fundamental (predeterminate) sequence
abschliessende –	355	
Funktion	246, 391	
approximierbare –	252	
infinitäre –	260, 281	
messbare –	255	
negativ stetige –	391	
pseudovolle –	397	
stetige –	246	continuous function
summierbare –	250	
unstetige –	392	
volle –	248, 392, 514	full (total) function
Gebiet	155, 314	
geordnet	160, 323	ordered
differenziert –	166, 334	
teilweise –	406	
unerweiterbar –	407	
virtuell –	321, 504	virtually ordered
vollständig –	323, 530	completely ordered
Gewicht, von grösserem (gleichem)	159, 312	
gleichmächtig	152, 304, 528	equipotential
gleichwertig	354	
Grenzelement	163, 355	
Grenzpunkt	194, 516	accumulation point
Grenzspezies, innere	210	inner limiting species
– äussere	211	outer limiting species
– konsolidierte äussere	211	
grösser (Kardinalzahl)	157, 309	

halbgleichmächtig	152, 305	
halbidentisch	151, 303	
Hauptelement	163, 329	
Hauptrest	172, 359	
Heine-Borelsches Theorem	271, 350, 539	
herausragen	303, 527	to deviate
identisch	151, 302, 526, 527	identical
induktive Methode	170, 353, 531	inductive method
Induktion, transfinite	299	
induziert	179 seq., 360 seq.	
Inhalt	214 seq.	measure
inhaltsgleich	354	
Integral	256	
Integralspecies	250	
Intervall, freies	163	
geschlossenes –	160, 322	
offenes –	160, 322	
κ-, λ- –	310, 513	κ-, λ-grid interval
Intervallschachtelung, hohle	329	
Kardinalzahl	152, 304	
katalogisiert	201, 539	located
– kompakt	342, 536	located-compact
kausale Folge	417, 480	causal sequence
Kernspezies	315	core species
kleiner (Kardinalzahl)	157, 309	
Kohärenz	197	
innere –	192	
kompakt	341	
Komplement	210, 211	
Komplementärspezies	151, 304, 527	conjugate subspecies
örtliche –	194	
Komprehensionsaxiom	230	
Kondensationspunkt	195	
kongruent	151, 303, 527	congruent
örtlich –	194, 279	
Kontinuum	17, 236, 335, 391, 429 seq., 514, 525	continuum
reduziertes –	432, 540	classical continuum
Kurve, Jordansche	315	
coupierbare –	544	
Limespunkt	194	
Loslösung	279	
Lösungszahl	425, 444, 506	critical number
Loswindung	279	
Mächtigkeit	152, 304	
Menge	150, 301, 529	spread

finite –	247, 302, 512, 529	finitary spread, fan
individualisierte –	150, 302	
– höherer Ordnung	462	
wohlkonstruierte –	140	
Mengenspezies	590	
messbar	214 seq., 249, 513	measurable
nachzählbar	312	
Näherungszahl	426, 491	kernel
Nullelement	352	
Oberzahl	425, 444	up-number
Operation, erzeugende	169, 352, 531	generating operation
Ordinalzahl	161, 323	order type
wohlgeordnete –	169	well-ordered type
Ordnung (*vid.* geordnet)		
Ordnungszahl	357	ordinal number
Ortsbestimmung	240	
Pendelzahl	425, 553	oscillatory shrinking number
perfekt	164, 196, 329	
Präzisionslage	432	
Prinzipium tertii exclusi (*vid.* Satz vom ausgeschlossenen Dritten)		
Projektion, geordnete	406	
projektionsgleich	406	
prüfen	268, 478, 490, 539	to test
Punkt		point
– der Ebene	191	
– des Kontinuums	236	
freier –	195	
isolierter –	195	
unbegrenzter –	195	
Punktkern	246, 390, 513	(point) core
Punktmenge	191, 390	point spread
gleichmässige –	193	
numerierte –	192	
örtlich individualisierte –	194	
uniforme –	193	
Punktspezies		point species
ganze –	194	
gleichmässige –	193	
limitierbare –	201	
uniforme –	193	
Quadrat, κ-, λ-	155, 191, 513	grid square
Reihe, negativ konvergente	273	
non-oszillierende –	272	
positiv konvergente –	273	

Reziprozität der Komplementarspezies	268, 552	reciprocity of absurdity (complementarity)
Rest	355	
Satz vom ausgeschlossenen Dritten	75, 109, 410, 483	Principle of the excluded third
mehrfacher – – –	412	
Separabilität in sich	435	
Spaltungsspezies, konjugierte	192	
Spezies	511	species
– *n*-ter Ordnung	151, 303	
punktierte –	191	
wohlgeordnete –	45, 81, 169, 352, 530	well-ordered species
basierte – –	359	
kondensierte – –	172, 359	
quasi-vollständige – –	358	
vollständige – –	357	
Summe, ordnungsgemässe	325, 531	ordinal sum
superponiert	158, 311	
Teilung, ordnungsgemässe	321	
Treppenfunktion	461	
überdeckt	158	
Übereinstimmung	280	
übereinstimmen, örtlich	194	
übergeordnet	158, 310	
überlagert	311	
überzählbar	312	
Umfang, von grösserem (gleichem)	158, 311	
Umgebungsmannigfaltigkeit	453	
unbegrenzt	195, 516	lying open
unendlich	152, 305, 528	infinite
abzählbar –	154, 306, 528	denumerably infinite
reduzierbar –	152, 305	
Unterspezies, konstruktive	169, 352, 531	constructional subspecies
Unterzahl	425, 444	down-number
Urintuition	418, 477	basic intuition
Urspezies	169, 352	basic species
Verflechtung	279	
vergleichbar	425	
Verknüpfungssymbol	188, 386	
verschieden	303, 511, 526, 527	different
örtlich –	191, 238, 278, 525	apart
Verschmelzungsbeziehung	279	
versichert	286, 393, 534	barred
Verzerrung	398	
Vollelement	352	
Vollprodukt	327	

Wahlfolge	150, 302, 511	infinitely proceeding sequence
Wegschiebung	296	
Weite, von grösserer (gleicher)	311, 312	
Widerspruchslosigkeit	92, 410	noncontradictority, consistency
Wohlordnung	169, 352	
zählbar	154, 312	countable
Zahlsymbol	188, 386	
zerlegen	151, 304, 527	to split
Zerlegung, reguläre	355	
Zerlegungsspezies	151, 303, 527	removable subspecies
zusammenfallen	191, 193, 277, 513	to coincide
zusammenhängend, differenzierbar	453	
zusammensetzen	151, 304, 527	to compose
örtlich –	194	
Zweiheit	417, 477, 510	two-ity

INDEX OF SUBJECTS

accretion 537
– sequence 542
accumulation core 516, 539
addition, ordinal 531
apart 525
apriority 60
arrow 512, 528
bar 533
barred 534
basic intuition 477
basic sign 483
block 530
well-ordered – 532
Bolzano–Weierstrass theorem 272, 516
bounded in number 516
causal sequence 480
checking-number 491
coincide 513
composed 527
congruent 527
continuum, intuitionistic 511, 540
classical – 540
measurable – 18
core, point- 513
counting-number 491
creating subject 491
critical number 506, 553
cunning act 481
denumerably infinite 528
denumerably unfinished 82
deviate, to 527
different 511, 526, 527
differentiable
strongly, weakly – 546
discrete 526
distinct 511, 526
down-number 444
drift 491
entity, mathematical 107, 523
equal 511, 526
equipotential 528
fan 512, 529
– direction 529
– key 512
finite 528
fleeing property 444, 510
full function 514
fundamental sequence 511
greater, measurably 504
grid area 513
grid interval, κ-, λ- 513
grid square, κ-, λ- 513
horn 530
identical 511, 526
inductive method 531
infinite 528
judge, to 489, 539
kernel 491
limit core 539
limiting core 516
limiting number 524
limiting point 512
located 539
located infinite sequence 536
located-compact 536
mathematical system of second order 94
measurable grid area 513
move of time 480
node 512, 528
objectivity 59
open, to lie 516
operation, generating 531
order, complete 530
virtual – 504
ordinal sum 531
oscillation number 444
plane, intuitionist 512
point core 513
predeterminate sequence 488, 511, 528
principle of the excluded third 109, 488
– of reciprocity of complementarity 490
– of reciprocity of absurdity 552
– of testability 490
pyramid 530
removable 527
rod of nodes 512, 528
row of nodes 528
sector 529
sequence, infinitely proceeding 511
shrinking number 553
significs 447, 465
smaller, measurably 504
space, located compact topological 536
species 511
basic – 531
split, to 527
spread 529
– direction 529
– –, dressed 537
standard point 513
stump 530
subspecies, conjugate 527
constructional – 531
removable – 527
symbol 477
test, to 478, 490, 539
thing 480
two-ity 477, 510, 523
up-number 444
well-ordered species 45, 81, 530
wisdom 108, 485