Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
Kahle/Austin Foundation

https://archive.org/details/constructivityin0000ahey

CONSTRUCTIVITY IN MATHEMATICS

STUDIES IN LOGIC

AND

THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

L. E. J. BROUWER
E. W. BETH
A. HEYTING

Editors



1959

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM

CONSTRUCTIVITY IN MATHEMATICS

PROCEEDINGS OF THE COLLOQUIUM HELD AT AMSTERDAM, 1957

EDITED BY

A. HEYTING,

Professor in the University of Amsterdam



1959

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM

No part of this book may be reproduced in any form by print, microfilm or any other means without written permission from the publisher

UNIVERSITY OF ARIZONA LIBRARY

PRINTED IN THE NETHERLANDS

510.6
I6
1957

PREFACE

This volume contains the lectures, held at the International Colloquium "Constructivity in Mathematics", which took place at Amsterdam from August 26 to 31, 1957. This colloquium was organized by the Nederlandse Vereniging voor Logica en Wijsbegeerte der Exacte Wetenschappen (Netherlands Society for Logic and Philosophy of Science) and sponsored by the International Union for History and Philosophy of Science (I.U.H.P.S.). Subventions were obtained from UNESCO, by the intermediary of I.C.S.U. and I.U.H.P.S., from the Netherlands Ministry of Education and from the Municipality of Amsterdam.

Several different notions of constructivity were discussed in these lectures, and important results were communicated in various directions. Yet there are so many connections between them, that every classification according to subjects proved unsatisfactory. Therefore the lectures are arranged alphabetically by authors' names.

The appendix contains the summaries of three lectures, by S. C. Kleene, by Martin Davis and by G. Kreisel, D. Lacombe and J. R. Schoenfield, which were held at the Summer Institute of Symbolic Logic in June 1957 at Cornell University, Ithaca, N.Y. The subjects of these lectures are closely connected to that of the Colloquium. We thank the American Mathematical Society, the organizing Committee of the Summer Institute, and the authors for allowing the publication of these papers in this volume.

In the name of the organizing Committee,

A. HEYTING

519.6 P

CONTENTS

PREFACE V

PAUL BERNAYS, Über eine natürliche Erweiterung des Relationenkalküls 1

E. W. BETH, Remarks on Intuitionistic Logic. 15

FREDERIC B. FITCH, Quasi-constructive Foundations for Mathematics 26

R. L. GOODSTEIN, Recursive Analysis 37

ANDRZEJ GRZEGORCZYK, Some Approaches to constructive Analysis 43

HANS HERMES, Zum Inversionsprinzip der operativen Logik . . . 62

A. HEYTING, Some Remarks on Intuitionism 69

LÁSZLÓ KALMÁR, An Argument against the Plausibility of Church's Thesis 72

S. C. KLEENE, Countable Functionals 81

GEORG KREISEL, Interpretation of Analysis by means of constructive Functionals of finite Types 101

DANIEL LACOMBE, Quelques Procédés de Définition en Topologie récursive 129

M. H. LÖB, Constructive Truth 159

PAUL LORENZEN, Über die Begriffe "Beweis" und "Definition" . . . 169

ANDRZEJ MOSTOWSKI, On various Degrees of Constructivism 178

JOHN MYHILL, Finittely representable Functions 195

D. NELSON, Negation and Separation of Concepts in constructive Systems 208

RÓZSA PÉTER, Rekursivität und Konstruktivität 226

H. RASIOWA, Algebraische Charakterisierung der intuitionistischen Logik mit starker Negation 234

H. RASIOWA und R. SIKORSKI, Formalisierte intuitionistische elementare Theorien 241

ROMAN SIKORSKI, Der Heytingsche Prädikatenkalkül und metrische Räume 250

ERNST SPECKER, Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis 254

EDUARD WETTE, Von operativen Modellen der axiomatischen Mengenlehre 266

APPENDIX

MARTIN DAVIS, Computable Functionals of arbitrary finite Type 281
S. C. KLEENE, Realizability 285
G. KREISEL, D. LACOMBE, and J. R. SCHOENFIELD, Partial recursive Functionals and effective Operations 290

ÜBER EINE NATÜRLICHE ERWEITERUNG DES RELATIONENKALKULS

PAUL BERNAYS
Eidg. Technische Hochschule, Zürich

Die folgenden Betrachtungen wurden angeregt durch die Beschäftigung mit der axiomatischen Mengenlehre. Wie man weiss, beruht die endliche Axiomatisierbarkeit der Mengenlehre auf der Gültigkeit jenes Klassentheorems, das besagt: Jedes k-stellige Prädikat, das sich aus der Elementbeziehung und der Gleichheit prädikatenlogisch aufbauen lässt, stellt sich extensional durch eine Klasse von k-Tupeln dar, deren Existenz aus gewissen endlich vielen Existenzaxiomen für Klassen gefolgert werden kann. Diese Tatsache wurde zuerst von J. von Neumann bemerkt, der die Axiome jedoch nicht als solche der Klassenexistenz, sondern der Funktionenexistenz formulierte, übrigens auch mit Hervorhebung des konstruktiven Charakters der meisten dieser Axiome, die auch Beziehungen zu Curry's kombinatorischer Theorie der Funktionalität aufweisen.

Der Sachverhalt, der in dem Klassentheorem zum Ausdruck kommt, betrifft nicht nur die Mengenlehre, sondern generell die Prädikatenlogik, da anstelle des Grundprädikats $\in$ beliebige andere Prädikate genommen werden können. Man wird damit auf den Gedanken einer Behandlung der Prädikatenlogik geführt, bei welcher die Individuen nicht explicite auftreten, vielmehr nur die Prädikate, bzw. die ihnen extensional entsprechenden Klassen, direkt als Parameter fungieren.

Soweit man hier nur die Prädikatenlogik der ersten Stufe im Auge hat, wird man den Kalkul mit den neuen Elementen als einen elementaren Kalkul mit nur freien Variablen ansetzen. Insbesondere tritt dabei an die Stelle der Existenzaxiome die Einführung von Konstanten für Ausgangsklassen und Ausgangsoperationen, wodurch zugleich der konstruktive Charakter jener Axiome zum Ausdruck kommt.

Für die Logik der einstelligen Prädikate wird ein solcher Kalkul durch die Boole'sche Algebra geliefert, in welcher als Grund-

beziehung die Gleichheit oder die Subsumption genommen werden kann. Mittels der Operationen $\cap$, $\cup$, $^-$ (Durchschnitt, Vereinigung, Komplement) sowie der Konstanten 0, 1 lässt sich dann jede in der Logik der ersten Stufe darstellbare Beziehung zwischen einstelligen Prädikaten durch eine aussagenlogische Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen ausdrücken. Andererseits ist übrigens zu beachten, dass nicht jedes Prädikat, das aus gegebenen Prädikaten im einstelligen Kalkul gebildet werden kann, in der Boole'schen Algebra darstellbar ist. Ein Beispiel bildet schon das Prädikat $A(c) \vee (x)B(x)$. Auch die Beziehungen und Eigenschaften sind generell nur insoweit innerhalb der Boole'schen Algebra darstellbar, als nicht die Gleichheit darin (explicite oder implicite, etwa durch Anzahlbedingungen) auftritt. Als ein Positives ist dagegen zu bemerken, dass alle allgemeingültigen (darstellbaren) Prädikatenbeziehungen aus den Axiomen der Boole'schen Algebra aussagenlogisch herleitbar sind.

Ein Analogon zur Boole'schen Algebra für die Logik der mehrstelligen Prädikate ist der Peirce–Schröder'sche Relativkalkul, dessen algebraische Behandlung von Korselt und Löwenheim gepflegt wurde, und auf dessen Vorzüge und Probleme in neuerer Zeit durch die Arbeiten von Tarski auf diesem Gebiete wieder eine verstärkte Aufmerksamkeit gelenkt wurde. Dieser Kalkul ist von vornherein so angelegt, dass er sich auf die Prädikatenlogik mit Einschluss des Gleichheitsprädikats bezieht, da die Klasse der Doppelpaare $\langle c, c\rangle$ als konstantes Relativ $1'$ auftritt. Das Verhältnis zur Prädikatenlogik mit Identität entspricht freilich nicht ganz demjenigen der Boole'schen Algebra zur Logik der einstelligen Prädikate. Nämlich einerseits sind nicht alle in der Prädikatenlogik ausdrückbaren Eigenschaften und Beziehungen zweistelliger Prädikate im Relativkalkul ausdrückbar, wenn man nicht Beziehungen einführt, durch welche die Individuen wieder explicite auftreten. Die zuerst von Korselt hierfür angegebenen Beispiele sind reine Identitätsformeln. Als Beispiele mit einem auftretenden Prädikatenparameter hat Tarski die beiden folgenden angegeben:

$$(x)(y)(z)(Eu)(R(x, u) \,\&\, R(y, u) \,\&\, R(z, u)),$$

$$(Ex)(Ey)(Ez)(Eu)(R(x, y) \,\&\, R(x, z) \,\&\, R(x, u) \,\&\, R(y, z) \,\&\, R(y, u) \,\&$$

$$\&\, R(z, u)).$$

Ausserdem aber können auch nicht alle im Prädikatenkalkul allgemeingültigen darstellbaren Beziehungen zwischen zweistelligen Prädikaten aus den üblichen Axiomen des Relativkalkuls hergeleitet werden. Ein Beispiel einer solchen nicht herleitbaren Beziehung wurde von LYNDON [4] aufgewiesen. Der Beweis der Unabhängigkeit erfolgt mittels eines endliche Modells für eine Relationenalgebra. Ein unendliches Axiomensystem zur Herleitung aller logisch allgemeingültigen Beziehungen des Relativkalkuls wurde gleichfalls von Lyndon, in Anknüpfung an eine Überlegung von Tarski aufgestellt.

Was nun die Beschränktheit in den Darstellungen von Prädikatbeziehungen betrifft, so hängt diese offensichtlich mit der Einschränkung des Relativkalkuls auf das Binäre zusammen. Die Auszeichung des Binären im Relativkalkul erhält freilich von der Logik her ein wesentliches Moment der Berechtigung durch den Löwenheim'schen Satz, wonach jede logische Formel hinsichtlich ihrer Erfüllbarkeit mit einer binären Formel gleichwertig ist. Jedoch ist zu beachten, dass diese Gleichwertigkeit nicht für denselben Individuenbereich besteht, sondern der Übergang von einem gegebenen Bereich zu einem Bereich von Tupeln erforderlich wird. Somit ist es nicht verwunderlich, dass wir bei der Darstellung von Prädikateneigenschaften und -beziehungen nicht völlig mit dem binären Formalismus auskommen.

Eine Loslösung von der Einschränkung auf das Binäre findet sich in der Behandlung der Relationentheorie in den Principia Mathematica, wo einerseits die Bildungsprozesse des Relativkalkuls alle vorkommen, ausserdem aber noch solche, welche den Übergang von k-Tupeln zu l-Tupeln für $k \neq l$ ermöglichen, so die beiden Prozesse der Bildung des cartesischen Produkts $A \times B$ und ferner des Vorbereichs (domain) einer Relation. Tatsächlich sind hier schon fast alle Operationen vorhanden, deren es für das Klassentheorem bedarf; es genügt zur Ergänzung der Prozess der Umklammerung, dh. des Überganges von einer Klasse von Tripeln $\langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ zu der Klasse der entsprechenden Tripel $\langle\langle a, b\rangle, c\rangle$. Der Gedanke, den so erweiterten Operationenbereich wiederum als eine Art von Algebra zu betrachten, liegt in der Richtung der heutigen abstrakten Algebra, und der Weg zur Konstituierung eines dieser Auffassung angemessenen Kalkuls wurde auch schon beschritten.

Überlegen wir uns, worauf es hierbei ankommt. Zunächst empfiehlt es sich, wie schon gesagt wurde, dass man sich von der Bindung an das Binäre befreit. Die Gewinnung der k-tupel durch iterierte Paarbildungen hat in der Mengenlehre insofern einen Vorteil, als für die Paare die Kuratowski'sche Darstellung möglich ist, welche sich nicht auf beliebige k-tupel verallgemeinern lässt. Jedoch bringt dieses Verfahren Komplikationen mit sich, da die Zusammenfügung von Tupeln nicht assoziativ ist und mit wachsender Anzahl k immer mehr Typen von k-tupeln zu unterscheiden sind, denen dann auch verschiedene Typen von Klassen von k-tupeln entsprechen. Angesichts dessen erscheint es als vorteilhafter, die Klassen von k-tupeln schlechthin als Aneinanderreihungen von k Kolonnen mit Elementen aus einem Individuenbereich V aufzufassen. Der nächstliegende Ansatz ist dann, dass man Klassen mit verschiedenen Kolonnenzahlen (Stellenzahlen) unterscheidet. Die Stellenzahl mag, wo es auf die Unterscheidung ankommt, durch einen oberen Index angegeben werden, so dass z.B. $A^{(3)}$ eine variable dreistellige, $B^{(5)}$ eine solche fünfstellige Klasse bedeutet. Nimmt man als Ausgangsklasse die einstellige Klasse V der Individuen und die zweistellige Klasse I der Doppelpaare, so genügen als Ausgangsoperationen

1) Die Zusammenfügung zweier Klassen $A^{(k)} \circ B^{(l)}$, welche eine $k+l$-stellige Klasse, das cartesische Produkt von $A^{(k)}$ und $B^{(l)}$ ergibt,
2) die Vertauschung p_{ij} der i-ten mit der j-ten Spalte einer Klasse $A^{(k)}$ mit $k \geqslant 2$; $i, j \leqslant k$.
3) die Streichung der ersten Spalte einer Klasse $A^{(k)}$ mit $k \geqslant 2$,
4) die Boole'sche Differenzbildung von zwei Klassen $A^{(k)}$ und $B^{(k)}$, dh. die Bildung der Klasse derjenigen k-tupel, die zu $A^{(k)}$ aber nicht zu $B^{(k)}$ gehören, symbolisch: $A^{(k)} \dot{-} B^{(k)}$.

Die Operation der Zusammenfügung ist assoziativ. Durch Zusammenfügung einer Klasse $A^{(k)}$ mit sich selbst erhält man die Potenzen von $A^{(k)}$, z.B. $A^{(k)} \circ A^{(k)} = (A^{(k)})^2$; $V \circ V = V^2$. Aus der Boole'schen Differenz in Verbindung mit den Potenzen von V erhält man die Boole'schen Operationen: $-A^{(k)} = V^k \dot{-} A^{(k)}$; das Komplement von V^k ist die k-stellige Nullklasse $0^{(k)}$; $A^{(k)} \cap B^{(k)} = A^{(k)} \dot{-} (-B^{(k)})$.

Aus den Vertauschungen von Spalten gewinnt man in bekannter Weise die sämtlichen Permutationen der Spalten einer Klasse.

Durch die Operation des Weglassens der ersten Spalte in Verbindung mit Permutationen können wir die Streichung beliebiger Spalten einer Klasse bewirken. Das Resultat mag durch das domain-zeichen D mit der Nummernfolge der verbleibenden Spalten als Index angegeben werden, sodass z.B. $D_{124}A^{(5)}$ die dreistellige Klasse angibt, die aus $A^{(5)}$ durch Streichung der dritten und fünften Spalte entsteht. Im Vergleich mit den Klassenoperationen der Mengenlehre entsprechen die Operationen 2) und 3) den Operationen der Bildung der konversen Klasse und des domains. Die Operation der Um-Klammerung wird durch die allgemeineren domain-bildungen entbehrlich.

Eine Normalform der Aussagen können wir entsprechend wie im Relativkalkul erhalten. Nämlich eine Gleichung $A^{(k)} = B^{(k)}$ lässt sich umformen in $(A^{(k)} \dot{-} B^{(k)}) \cap (B^{(k)} \dot{-} A^{(k)}) = 0^{(k)}$, und eine Ungleichung $A^{(k)} \neq 0^{(k)}$ ist ersetzbar durch $D_1(V \circ A^{(k)}) = V$. Schliesslich lässt sich die Alternative $A^{(k)} = 0^{(k)} \vee B^{(l)} = 0^{(l)}$ durch

$$A^{(k)} \circ B^{(l)} = 0^{(k+l)}$$

ausdrücken.

Bezüglich der Rechengesetzlichkeiten sei noch bemerkt, dass die Zusammenfügung in beiden Richtungen distributiv ist gegenüber der Boole'schen Differenz und somit gegenüber allen Boole'schen Operationen, dh. es gilt

$$A^{(k)} \circ (B^{(l)} \dot{-} C^{(l)}) = (A^{(k)} \circ B^{(l)}) \dot{-} (A^{(k)} \circ C^{(l)})$$

$$(A^{(k)} \dot{-} B^{(k)}) \circ C^{(l)} = (A^{(k)} \circ C^{(l)}) \dot{-} (B^{(k)} \circ C^{(l)}).$$

Auch sind die Permutationen p_{ik} mit den Boole'schen Operationen vertauschbar.

Wir können uns nun auch klarmachen, dass für unseren Operationsbereich keine Beschränkung für die Darstellung von logisch zusammengesetzten Prädikaten und Aussagen besteht. Es sei jedem vorkommenden Prädikatzeichen ein Klassenzeichen zugeordnet, dessen oberer Index die Stellenzahl angibt. Eine Sonderstellung nimmt das Gleichheitszeichen ein, dem wir das Zeichen der Paarklasse I zuordnen.

Der gegebene Ausdruck werde zunächst so umgeformt, dass in jeder der auftretenden mehrstelligen Primformeln alle Argumentvariablen voneinander verschieden sind. Dieses geschieht durch Hinzunahme eines Existenzquantors, indem beispielsweise ein

Ausdruck $R(a, a, b)$ durch $(Ex)(x = a \;\&\; R(a, x, b))$ ersetzt wird. Nach dieser Vorbereitung bringen wir den Ausdruck auf pränexe Normalform. Zu dieser gehört ein Ausdruck ohne gebundene Variablen, aus dem sie durch sukzessive vordere Quantisierungen entsteht, und der auch – auf Grund unserer anfänglichen Massnahme – in keiner Primformel Übereinstimmungen zwischen Argumenten aufweist.

Unsere Aufgabe zerlegt sich somit in die beiden: 1.) Einem Ausdruck mit nur freien Variablen in der Anzahl k einen k-stelligen Klassenausdruck zuzuordnen und 2.) die Quantisierungen klassenmässig darzustellen. Zur Ausführung von 1) ordnen wir jeder der k Variablen je eine Spalte einer k-spaltigen Matrix zu. Eine Primformel mit r Argumenten ($r \leqslant k$) wird dargestellt durch die Klasse von k-tupeln, die man aus der Klasse $P^{(r)} \circ V^{k-r}$, – „$P^{(r)}$" sei das dem Prädikatensymbol zugeordnete Klassenzeichen, – durch solche Vertauschungen erhält, mittels derer die ersten r Spalten bezüglich in diejenigen übergehen, die den Argumenten des Prädikatensymbols entsprechen. Der aussagenlogische Aufbau wird in bekannter Weise mit Hilfe der Boole'schen Operationen, die hier auf Klassen von k-tupeln anzuwenden sind, in's Klassentheoretische übersetzt.

Die Operation des Seinsquantors, angewandt auf eine mindestens zweistellige Klasse, übersetzt sich in eine Domainbildung. Ist der zu bindenden Variablen die i-te Spalte in der darstellenden Klasse des vorherigen Ausdrucks zugeordnet, dann wird die i-te Spalte gestrichen. Die Anwendung des Allquantors bei einer mehr als einstelligen Klasse wird durch Negationen auf existenzielle Quantifizierung zurückgeführt. Die Quantifizierung von einem einstelligen Prädikat liefert nicht ein Prädikat sondern eine Aussage. Hier ist daher das Verfahren ein wenig anders: entspricht dem Prädikat $B(a)$ die Klasse $B^{(1)}$, so stellen sich die Aussagen $(x)B(x)$ bzw. $(Ex)B(x)$ durch $B^{(1)} = V$ bzw. $B^{(1)} \neq 0^{(1)}$ dar.

Beispielsweise stellen sich hiernach die Aussagen $(x)(Ey)R(x, y)$ und $(Ex)(y)R(x, y)$ durch $D_1R^{(2)} = V$ und $-D_1(-R^{(2)}) \neq 0^{(1)}$ bzw. $D_1(-R^{(2)}) \neq V$ dar. Das Peirce'sche Produkt $P^{(2)}; Q^{(2)}$ wird dargestellt durch $D_{13}((P^{(2)} \circ V) \cap (V \circ Q^{(2)}))$; es kann aber auch ausgedrückt werden durch $D_{14}((P^{(2)} \circ Q^{(2)}) \cap (V \circ I \circ V))$. Das früher erwähnte Prädikat $A(c) \vee (x)B(x)$ findet einen entsprechenden Klassenausdruck durch $A^{(1)} \cup -D_1(V \circ -B^{(1)})$. Die im Relationenkalkul

nicht darstellbare Aussage

$$(x)(y)(z)(Eu)(R(x, u) \,\&\, R(y, u) \,\&\, R(z, u))$$

wird jetzt darstellbar durch

$$D_{123}(p_{24}(R^{(2)} \circ V^2) \cap p_{34}(V \circ R^{(2)} \circ V) \cap (V^2 \circ R^{(2)})) = V^3.$$

Diese Beispiele betreffen den Übergang von logischen Ausdrücken zu darstellenden Klassenausdrücken. Der umgekehrte Prozess ist ersichtlich ausführbar. Insbesondere ist dabei zu berücksichtigen, dass sich eine Zusammensetzung $A^{(k)} \circ B^{(l)}$ übersetzen lässt in die Konjunktion der Prädikatausdrücke, die den Gliedern $A^{(k)}$, $B^{(l)}$ entsprechen, wobei die freien Variablen der Konjunktionsglieder verschieden zu nehmen sind. Diese Tatsache beruht auf der Gültigkeit der Gleichung

$$P^{(k)} \circ Q^{(l)} = (P^{(k)} \circ V^l) \cap (V^k \circ Q^{(l)}).$$

Aus dieser Gleichung geht übrigens hervor, dass man die Operation des Zusammenfügens von Klassen auf diejenige des rechtsseitigen und linksseitigen Anfügens von V, nämlich $A \circ V$, $V \circ A$, zurückführen kann. Das Anfügen von V bedeutet eine Art des trivialen Überganges von einer k-stelligen zu einer $k+1$-stelligen Klasse; prädikatenlogisch bedeutet es, dass man in einem k-stelligen Prädikat noch ein Argument hinzufügt, von dem es in Wirklichkeit nicht abhängt. Die Möglichkeit der Hinzufügung solcher uneigentlicher Argumente kann man dazu benutzen, um formal die Unterscheidung der Stellenzahlen der Klassen aufzuheben und damit die Boole'schen Operationen sowie auch die Permutationen auf beliebige Klassen anwendbar zu machen.

Dieser Schritt ist vollzogen in der zylindrischen Algebra von Tarski und Thompson [6] sowie auch in der polyadischen Algebra von Halmos [2]. Hier betrachtet man Klassen von unendlichstelligen Tupeln (ω-Folgen), wobei jedoch für jede Klasse nnr endlich viele Stellen relevant sind [1]). Für solche Tupelklassen kommt ein rechtsseitiges Anfügen einer Spalte nicht mehr in Betracht. Die Klasse V und ihre verschiedenen Potenzen sind jetzt nicht mehr von der 1 der Boole'schen Algebra unterschieden.

---

[1]) Es werden von den oben genannten Autoren noch allgemeinere Klassen unendlicher Tupel betrachtet. Diese haben aber nicht mehr die vorherige Beziehung zum üblichen Prädikatenkalkul.

Das frühere vordere Anfügen einer V-Spalte an $A^{(k)}$ lässt sich jetzt durch die Permutation $p_{12}p_{23} \cdots p_{k,k+1}A^{(k)}$ ausdrücken, wofür wir üblichermassen schreiben $p_{(1\ldots k+1)}A^{(k)}$. Entsprechend drückt sich das vordere Anfügen von V^l aus durch $p_{1,l+1}\, p_{2,l+2} \cdots p_{k,l+k}A^{(k)}$.

Anstelle der Domainbildung tritt bei Tarski die Operation der Zylindrifikation auf. Diese beiden stehen miteinander in folgendem Zusammenhang: bezeichnet D ohne Index die Weglassung der ersten Spalte und C die Zylindrifikation in Bezug auf die erste Spalte, so ist $CA^{(k)} = p_{(1\ldots k)}DA^{(k)}$, eine Gleichung, die auch nach $DA^{(k)}$ auflösbar ist. Die Zylindrifikation in Bezug auf die i-te Spalte C_i [1]) lässt sich definieren durch

$$C_iA^{(k)} = p_{1i}Cp_{1i}A^{(k)}.$$

Die Permutationen werden bei Tarski mittels der Einführung von „Diagonalelementen" d_{ik} eliminiert. Bei Benutzung der Permutationen können diese folgendermassen definiert werden:

$$d_{ii} = 1;\ d_{12} = I;\ d_{1k} = p_{2k}I \text{ für } k \neq 1, 2;\ d_{2k} = p_{1k}I \text{ für } k \neq 1, 2;\ d_{ki} = d_{ik};$$
$$d_{ik} = p_{1i}p_{2k}I \text{ für } i \neq 1, 2;\ k \neq 1, 2;\ i \neq k.$$

Umgekehrt lassen sich – was Tarski benutzt hat – die Permutationen p_{ik} durch die Diagonalelemente in Verbinding mit den Operationen C_i folgendermassen ausdrücken:

$$p_{ij}A^{(k)} = C_l(C_i(C_j(A^{(k)} \cap d_{jl}) \cap d_{ij}) \cap d_{il}),\ l > k \text{ und } l \neq i, j.$$

Man ersieht hieraus, dass als Grundelemente des Systems die Diagonalelemente, die zylindrischen Operationen und die Boole'schen Operationen genügen. Bei Tarski werden ausserdem die oberen Indices weggelassen. Für das so resultierende System der zylindrischen Algebra haben Tarski und Thompson ein höchst elegantes Axiomensystem aufgestellt. Hier besteht jedoch für die Anwendung auf die Klassentheorie insofern eine gewisse Schwierigkeit, als die Eigenschaft einer Klasse, höchstens k relevante Stellen zu haben, wie es scheint, nicht durch nur eine Formel ausdrückbar ist. Damit hängt zusammen, dass die vorhin gegebene Definition der Permutationen nicht in allgemeiner Weise, sondern nur mit einer von Fall zu Fall zu treffenden Wahl des Index l formuliert werden kann. Auch die Möglichkeit, den binären Relationenkalkul

---

[1]) Ein unwesentlicher Unterschied unserer Bezeichnung gegenüber derjenigen von Tarski ist, dass wir von 1 an numerieren.

direkt in den Formalismus einzubegreifen, ist nicht ohne weiters ersichtlich.

Will man den Formalismus von vornherein der besonderen Aufgabe einer dem Prädikatenkalkul mit Gleichheit entsprechenden Klassentheorie anpassen, so erscheint es als angemessen, die oberen Indices beizubehalten. Zugleich lässt sich der Formalismus so anlegen, dass als einzige Grundkonstanten mit Indices die Permutationen p_{ik} auftreten. Die Gesetzlichkeiten der Permutationen können ebenso wie die der Boole'schen Algebra als ein bekannter Formalismus vorweggenommen werden. Übrigens genügen für die Permutationen p_{ik} die folgenden Axiome:

$$p_{ii}A^{(k)} = A^{(k)};\ p_{ik}A^{(k)} = p_{ki}A^{(k)};\ p_{ij}p_{jk}p_{ki}A^{(k)} = p_{jk}A^{(k)},\ i \neq j,\ k.$$

Auch die Vertauschbarkeit der Permutationen mit den Boole'schen Operationen möge als vorgängiges Axiom gelten. Die 1 der Boole'schen Algebra kann z.B. durch $1 = I \cup -I$ definiert werden. 0 werde wie üblich als -1 definiert. Um in Entsprechung zum üblichen Prädikatenkalkul den leeren Individuenbereich auszuschliessen, fügen wir in der Boole'schen Algebra das Axiom $0 \neq 1$ (die Negation von $0 = 1$) hinzu.

Ausser den Boole'schen Operationen und den Permutationen haben wir als Grundkonstanten jetzt nur I und C. In Anbetracht der Unterscheidung der Stellenzahlen der Klassen, welche übrigens nur als Maximalzahlen der relevanten Stellen zu interpretieren sind, müssen wir für das genaue formale Operieren die Formbestimmungen fixieren. Unsere Formeln setzen sich aussagenlogisch aus Gleichungen zwischen Termen zusammen. Die Terme werden in k-Terme unterschieden; jeder k-Term ist auch ein $k+1$-Term. Eine Variable $A^{(k)}$ ist ein k-Term; die Boole'schen Operationen und die Operation C führen von k-Termen zu k-Termen. I ist ein 2-Term. $p_{ij}A^{(k)}$ ist ein l-Term, wenn $l \geqslant i, j, k$ ist; $p_{1,k+1}CA^{(k+1)}$ ist ein k-Term. Für eine Variable mit Index k dürfen nur k-Terme eingesetzt werden.

Unser Kalkul ist ein elementarer Kalkul mit freien, nach Sorten unterschiedenen Variablen, einschliesslich des Gleichheitsschemas. Als Axiome für I und C und die Stellenzahlen nehmen wir:

(1) $p_{ij}A^{(k)} = A^{(k)}$ für $i, j, > k$
(2) $Cp_{1l}A^{(k)} = p_{1l}A^{(k)}$ für $l > k$

(3) $p_{ij}CA^{(k)} = Cp_{ij}A^{(k)}$ für $i, j \neq 1$
(4) $p_{12}(A^{(k)} \cap I) = A^{(k)} \cap I$
(5) $CI = 1$
(6) $A^{(k)} \cap CA^{(k)} = A^{(k)}$
(7) $C(A^{(k)} \cap CB^{(l)}) = CA^{(k)} \cap CB^{(l)}$
(8) $C(I \dot{-} A^{(k)}) = -C(I \cap A^{(k)})$
(9) $Cp_{12}Cp_{12}A^{(k)} = Cp_{12}CA^{(k)}$
(10) $A^{(1)} = 0 \vee CA^{(1)} = 1.$

An dieses Axiomesystem seien die folgenden speziellen Bemerkungen geknüpft. Aus dem Ax. 5 ergibt sich – wegen $p_{12}1 = 1$ – auch $1 = p_{12}CI$, woraus gemäss unserer vorherigen Festsetzung hervorgeht, dass 1 ein Einsterm ist. Aus Ax. 8 und 5 ergibt sich $C0 = 0$.[1]) Aus Ax. 7 und 6 folgt $CCA^{(k)} = CA^{(k)}$. Mit Hilfe dieser Gleichung erhält man aus Ax. 9 durch Einsetzung von $CA^{(k)}$ für $A^{(k)}$, nebst Anwendung von Ax. 6, $p_{12}Cp_{12}CA^{(k)} = Cp_{12}CA^{(k)}$. Vermerkt sei noch die folgende aus der Definition von C_i folgende Formel $C_iA^{(k)} = p_{ij}C_jp_{ij}A^{(k)}$. Ferner erhält man aus $p_{12}Cp_{12}CA^{(k)} = Cp_{12}CA^{(k)}$ mit Ax. 9 zunächst $C_1C_2A^{(k)} = C_2C_1A^{(k)}$ und weiter allgemein $C_iC_jA^{(k)} = C_jC_iA^{(k)}$. Die Formel $C(A^{(k)} \cup B^{(l)}) = CA^{(k)} \cup CB^{(l)}$ ist aus Ax. 6 und 7, sowie $C0 = 0$ und $CCA^{(k)} = CA^{(k)}$ auf dem in Henkin's Schrift [3a] angegebenen Weg herleitbar.

Das Axiom 10 sticht von den anderen dadurch ab, dass es nicht eine Gleichung ist. Es hat in unserem System die analoge Rolle wie Axiom XII in dem von Tarski 1941 aufgestellten Axiomensystem [5] des binären Relationenkalkuls, von dem in einer späteren Abhandlung [1] bemerkt ist, dass es dazu dient, die Einfachheit der Algebra zu bewirken. Damit erklärt es sich auch, dass man nicht die Ersetzbarkeit dieses Axioms durch ein solches von der Form einer Gleichung erwarten kann.

Mit Hilfe dieses Axioms beweist man u.a. die Formel

$$A^{(k)} \neq 0 \rightarrow C_1C_2 \ldots C_kA^{(k)} = 1.$$

Dabei wird wesentlich die Festsetzung benutzt, dass $p_{1,l+1}CA^{(l+1)}$ ein l-Term ist, was übrigens gleichbedeutend damit ist, dass stets $C_{l+1}A^{(l+1)}$ ein l-Term ist.

Auf Grund der Abweichungen unseres Klassenformalismus von

---

[1]) Man könnte umgekehrt auch die Gleichung $C0 = 0$ als Axiom nehmen und aus dieser in Verbindung mit Ax. 8 die Formel $CI = 1$ herleiten.

dem anfänglichen sind die früheren Ausführungen über die Darstellung logischer Ausdrücke durch Klassenausdrücke etwas zu modifizieren.

Was zunächst die Normalform der Aussagen anbetrifft, so können wir jetzt jede Gleichung $A^{(k)} = B^{(l)}$ umformen in

$$(A^{(k)} \dot{-} B^{(l)}) \cap (B^{(l)} \dot{-} A^{(k)}) = 0;$$

$A^{(k)} \neq 0$ ist ersetzbar durch $C_1 C_2 \ldots C_k A^{(k)} = 1$ und eine Konjunktion $A^{(k)} = 0$ & $B^{(l)} = 0$ ist umformbar in $A^{(k)} \cup B^{(l)} = 0$.

Bei der Darstellung von logischen Ausdrücken verfahren wir in gleicher Weise wie vordem. Wir haben dabei jetzt die Vereinfachung, dass wir die Bestandteile aussagenlogischer Zusammensetzungen nicht erst durch Anfügen von V-Potenzen auf gleiche Stellenzahl zu bringen brauchen. Ausserdem stellt sich jetzt die existenzielle Quantifizierung in Bezug auf die Variable der i-ten Spalte durch die Operation $p_{(k \ldots i)} C_i A^{(k)}$ dar.

Geben wir noch zum Vergleich mit den früheren Beispielen die entsprechenden neuen Darstellungen:

$$(x)(Ey)R(x, y) \quad : \quad C_2 R^{(2)} = 1$$

$$(Ex)(y)R(x, y) \quad : \quad C_2(-R^{(2)}) \neq 1.$$

Peirce'sches Produkt $P^{(2)}; Q^{(2)}$:

$C_3(p_{23} P^{(2)} \cap p_{13} Q^{(2)})$ bzw. allgemein $C_i(p_{2i} P^{(2)} \cap p_{1i} Q^{(2)}$ für $i \neq 1, 2$;

$$A(c) \vee (x)B(x) \quad : \quad A^{(1)} \cup -C(-B^{(1)})$$

$$(x)(y)(z)(Eu)(R(x, u) \\ \& R(y, u) \& R(z, u)) \; :$$

$$C_4(p_{24} R^{(2)} \cap p_{12} p_{24} R^{(2)} \cap p_{13} p_{24} R^{(2)}) = 1.$$

Für die modelltheoretische Betrachtung unseres Systems ist die Unterscheidung der Termsorten hinderlich – wiewohl sie für das formale Deduzieren keine Schwierigkeit macht. Wir können in bekannter Weise diese Trennung mittels der Einführung von Sortenprädikaten beseitigen, womit wir zugleich erreichen, dass verschiedene vorher nur inhaltlich getroffene Festsetzungen ihren Ausdruck durch Axiome finden.

Wir nehmen eine Folge von einstelligen Prädikatzeichen

N_k ($k=1, 2, \ldots$) und ersetzen jede Formel $\mathfrak{f}(A^{(k)}, B^{(l)})$ durch die entsprechende Formel

$$N_k(A) \,\&\, N_l(B) \to \mathfrak{f}(A, B).$$

Es sind dann folgende Axiome hinzuzufügen:

$$N_k(A) \to N_{k+1}(A); \qquad N_k(A) \,\&\, N_k(B) \to N_k(A \dot{-} B);$$

$$N_k(A) \to N_k(CA); \qquad N_k(A) \to N_k(p_{ij}A), \text{ für } i, j \leqslant k;$$

$$N_{k+1}(A) \to N_k(p_{1,k+1}CA); \qquad N_2(I).$$

Dabei sei besonders daran erinnert, dass die Buchstaben i, j, k, l hier nicht als formale Variablen, sondern als metamathematische Variablen fungieren. Wir haben es also hier nicht eigentlich mit Formeln, sondern mit Formelschematen zu tun.

Unsere Axiome 1 und 2 stellen sich jetzt auch als Bedingungen für die Prädikate N_k dar. Überdies bemerken wir nunmehr, dass wir die generelle Formbedingung, wonach in jeder Formel mit Variablen diesen entsprechende Sortenprämissen zugeordnet werden sollen, fallen lassen können. In der Tat bedeutet das Voranstellen dieser Vorderglieder bei allen den Formelschematen einen Leerlauf, bei denen die Stellenzahl der auftretenden Klassen keiner Beschränkung unterliegt, wie dies bei allen Axiomen 3 bis 9, sowie auch bei den vorgängigen für die Boole'sche Algebra und die Permutationen der Fall ist. Wir können also bei allen diesen Axiomen die sortenbestimmenden Vorderglieder weglassen und kommen damit wieder mehr zu der Formulierung bei Tarski–Thompson zurück. Die Sortenprädikate treten dann nur noch in den vorhergenannten sechs Axiomen sowie in den modifizierten Axiomen 1, 2 und 10 auf, die jetzt lauten

(1′) $\qquad N_k(A) \to p_{ij}A = A \text{ für } i, j > k$

(2′) $\qquad N_k(A) \to Cp_{1j}A = p_{1j}A \text{ für } j > k$

(10′) $\qquad N_1(A) \to A = 0 \vee CA = 1.$

Im Vergleich mit dem Tarski–Thompsonschen System sind die vorgeschlagenen Systeme der intendierten Deutung mehr angepasst und erleichtern dadurch unter anderem die Einordnung des binären Relationenkalkuls. Jedenfalls aber ist unser Axiomensystem nur

eine geringe Modifikation des Tarski–Thompson'schen Systems, und insbesondere ist jedes Modell unseres Axiomensystems eine zylindrische Algebra.

Für die zylindrischen Algebren hat Tarski ein Repräsentationstheorem [1]) bewiesen, das insbesondere Folgendes besagt: Jede zylindrische Algebra, in welcher für jedes Element a die Bedingung $C_k a = a$ für alle Indizes k von einer gewissen Stelle an erfüllt ist (Bedingung des lokal Endlichdimensionalen) ist isomorph einer direkten Vereinigung solcher zylindrischer Algebren, wie sie unserer interdierten Klassendeutung entsprechen. Diese werden von Henkin „highly proper locally finite dimensional cylindric algebras" genannt. Von diesem Repräsentationstheorem machen wir in folgender Weise eine Anwendung.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine Formel unseres Systems, worin jeder vorkommenden Variablen eine Sortenprämisse als Vorderglied entspricht. Diese drücke im Sinn der intendierten Interpretation unseres Formalismus einen allgemeingültigen Satz der Klassentheorie aus. Wir wollen zeigen, dass die Formel aus unserem Axiomensystem herleitbar ist:

Wir denken uns zunächst unseren Formalismus durch Hinzunahme von Quantoren erweitert und bilden die Negation derjenigen Formel $\mathfrak{F}^*$, die aus $\mathfrak{F}$ durch Generalisierung der freien Variablen entsteht. Angenommen die Formel $\neg\, \mathfrak{F}^*$ wäre verträglich mit unseren Axiomen, dann könnten wir nach dem Vollständigkeitssatz diese Axiome zusammen mit $\neg\, \mathfrak{F}^*$ erfüllen. Von einem so erhaltenen Modell könnten wir dasjenige Untermodell bilden, in welchem der Individuenbereich auf diejenigen Elemente beschränkt ist, für welche mindestens eine der Sortenaussagen N_k zutrifft. In der Tat führen auf Grund unserer Axiome die verschiedenen Operationen in unserem System niemals aus dieser Gesamtheit heraus, so dass die genannte Beschränkung des Individuenbereiches wieder ein Modell liefert. Dieses Untermodell ist nun zunächst eine zylindrische Algebra, und ferner ist für diese auf Grund unseres Axioms 2′ die Bedingung des lokal Endlichdimensionalen erfüllt. Somit ist nach dem Represäntationstheorem das Modell isomorph einer direkten Vereinigung von zylindrischen Algebren, wie sie unserer intendierten

---

[1]) Ein ähnliches Theorem wurde auch von Halmos in [2] für die polyadischen Algebren bewiesen. — Eine Verallgemeinerung des Tarski'schen Theorems über den Fall des lokal Endlich-dimensionalen hinaus wurde von Henkin in [3] gegeben.

Klassendeutung entsprechen. Diese Vereinigung kann ferner auf Grund des Axioms 10′ nicht mehrgliedrig sein, ist also selbst eine zylindrische Algebra im Sinne unserer intendierten Interpretation. Für eine solche sollte aber $\mathfrak{F}$ ein allgemeingültiges Gesetz sein; also kann $\neg \mathfrak{F}^*$ nicht darin erfüllt sein. (Man beachte, dass der Satz $\neg \mathfrak{F}^*$ ein reiner Existenzsatz ist, worin sich die Existenzbehauptung, zufolge unserer Voraussetzung über die Form von $\mathfrak{F}$, auf Individuen des *Untermodells* bezieht.) Unsere Annahme der Unbeweisbarkeit von $\mathfrak{F}$ ist also zu verwerfen.

Damit ist allerdings zunächst nur die Beweisbarkeit von $\mathfrak{F}$ unter Hinzunahme von Quantoren gezeigt. Jedoch ergibt sich aus dem Umstande, dass weder die Formel $\mathfrak{F}$ noch unsere Axiome gebundene Variablen enthalten, durch Anwendung des Herbrand'schen Satzes, (bzw. des ersten ε-Theorems oder auch des Gentzen'schen Eliminationssatzes), dass $\mathfrak{F}$ auch in unserem Formalismus herleitbar ist. In diesem Sinne ergibt sich also die Vollständigkeit unseres Formalismus.

BIBLIOGRAPHY

[1] L. H. Chin and A. Tarski, Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras. Univ. Cal. Publ. Math. **1** (1951), No. 9, 341–384.

[2] P. R. Halmos, Algebraic logic (II). Fund. Math. 43 (1956), 255–325; cf. also Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. **40** (1954), 159–166.

[3] L. Henkin, The representation theorem for cylindrical algebras, Mathematical Interpretation of Formal Systems, pp. 85–97, Amsterdam, North Holland Publishing Comp. 1955.

[3a] ————, La structure algébrique des théories mathématiques. Paris, Gauthier–Villars, 1956.

[4] R. E. Lyndon, The representation of rational algebras. Ann. of Math. **51** (1950), 707–729.

[5] A. Tarski, On the calculus of relations. J. Symb. Log. **6** (1941), 73–89.

[6] ———— and F. B. Thompson, Some general properties of cylindric algebras. Bull. Amer. Math. Soc. **58** (1952), 65–66.

[7] A. Tarski, A representation theorem for cylindrical algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **58** (1952), 65–66.

REMARKS ON INTUITIONISTIC LOGIC

E. W. BETH

University of Amsterdam

By way of introduction, I wish to make a few comments concerning the philosophy which is behind the investigations on which I am to report, the modest beginnings of which go back to 1943 [1]. If intuitionistic mathematics is at all a legitimate form of mathematical thought, then it must admit of a presentation which, in lucidity and rigor, attains a level equal to that which is characteristic of classical mathematics in its most outstanding contemporary manifestations. In order to achieve this end we must, in particular, try to eliminate such subjective, and sometimes even mystical, elements as can be found in most intuitionistic writings. On the other hand, no satisfactory insight can be obtained by simply studying those formal systems which result if, from extant formalisations of classical mathematics, we drop such principles as are open to intuitionistic criticism.

We must rather start from the truly mathematical, that is, objective, content of intuitionistic mathematics and try to construct a language (a terminology, or a conceptual apparatus) in which this content can be adequately expressed. If such a construction turns out to be impossible, it seems to follow that intuitionistic mathematics is condemned forever to remain a purely subjective experience ([2], p. 197). But on the other hand, once we have at our disposal a suitable conceptual framework for the study of intuitionistic mathematics, we may expect to be in a position exactly to find out what connections can be established between intuitionistic mathematics and certain parts of classical mathematics.

In carrying out the above program, we can certainly take advantage of the tremendous amount of experience which has been acquired in the formalisation of classical mathematics. On the other hand, we ought to beware of premature transfer of methods and results, and we must keep in mind that intuitionistic mathematics is entitled to a formalisation which is fully adapted to its own peculiar character.

In a recent publication [4] I have made an attempt to carry out the above program for the intuitionistic elementary predicate logic. I start by giving a definition of the notion of an (intuitionistic) model. This definition is found to suggest the construction of a certain calculus of sequents, which admits of a constructive interpretation. On the other hand, this calculus of sequents may be alternatively described as a Formal System F_0, the completeness of which can be established both classically and intuitionistically.

I shall not dwell here upon such relatively elementary matters as the equivalence of F_0 to other extant formalisations of the intuitionistic elementary predicate logic, or its transposition into a Hilbert-type formalisation (for which we obtain, hence, variants to Gentzen's Hauptsatz and Subformula Theorem; on the corresponding results for the classical case [6]; – in view of the possibility of this transposition, it is clearly incorrect to say that the present approach to metamathematics compels us to adopt a Gentzen-type formalisation of logic).

At this moment, it seems more fruitful to discuss certain problems which arise from an attempt to extend the results obtained so far to wider domains of logic and mathematics.

1. The Notion of a Predicate

In order to illustrate certain difficulties inherent in the intuitionistic notion of a predicate, I wish to discuss a concrete example, which is also interesting in other connections.

Let us agree to denote a sentence **P** as *decidable*, if it satisfies the condition:

(1) $$P \vee \overline{P};$$

likewise, the predicates **S** and **T** will be denoted as decidable, if they satisfy the conditions:

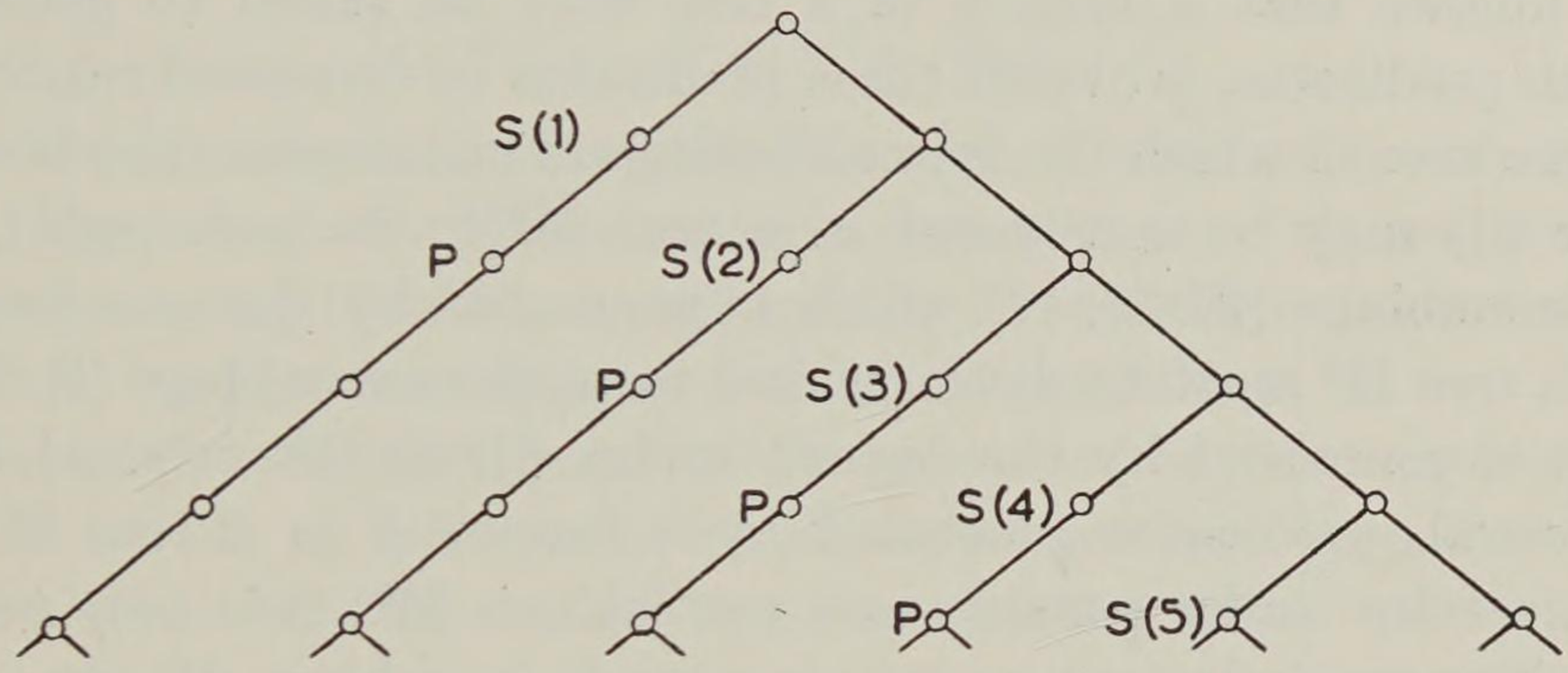
(2) $(x)[S(x) \vee \overline{S(x)}]$ and (3) $(x)[T(x) \vee \overline{T(x)}]$.

Now suppose that both **S** and **T** are decidable and that, moreover, the following conditions are satisfied:

(4) $P \leftrightarrow (Ex)S(x)$; (5) $\overline{P} \leftrightarrow (Ex)T(x)$;

does it follow that the sentence **P** is decidable? In other words: does the sequent (2), (3), (4), (5) $\vdash$ (1) hold true intuitionistically?

Kleene's theorem (*cf.* [8], p. 284) seems to suggest an affirmative answer to this question. However, in accordance with the semantic rules stated in [4], the tree below provides a counter-model to our sequent. Let us now ask for a sentence **P** and for predicates **S** and **T** which satisfy the conditions (2) to (5) without satisfying condition (1).



It needs hardly saying that the above tree **M** does not provide us with a uniquely determined assemblage [**P**, **S**, **T**]. In order to obtain a suitable assemblage, we must rather select a certain branch in **M**. Then it seems natural to assume that **S** holds for the natural number k, if the formula $S(k)$ appears on that branch, and that **S** does not hold for k, if $S(k)$ does not appear; and likewise for **P** and **T**. However, such a procedure involves the following difficulties.

(i) First consider those branches which, after going SE for a certain number of steps, turn SW. On such a branch, we inevitably meet with a formula P. So clearly the sentence $\mathbf{P} \vee \overline{\mathbf{P}}$ must be considered as true.

(ij) If we happen to select the branch which goes indefinitely SE, we meet with another difficulty. We do not meet with the formula P on this branch, and so the sentence $\overline{\mathbf{P}}$ must be considered as true. We also do not meet with any formula $T(k)$ and so the condition $(Ex)T(x)$ is not satisfied. It follows that the above condition $\overline{P} \leftrightarrow (Ex)T(x)$ is not satisfied.

Hence, if the assemblages [**P**, **S**, **T**] are selected as above, they do not suit our purpose. These difficulties vanish completely, if we agree to describe the situation, not in terms of *truth* and *falsehood*, but in terms of being secured, of absurdity, and of decidability.

A sentence **U** is said to be *secured* on a branch β of a tree **M**, if β is included in a subtree **M′** of **M** on which **U** is valid; it is said to be *absurd*, whenever $\overline{\mathbf{U}}$ happens to be secured; and it is said to be *decidable*, whenever $\mathbf{U} \vee \overline{\mathbf{U}}$ is secured (or, in other words: whenever either **U** or $\overline{\mathbf{U}}$ is secured). The last part of the definition agrees with the above definition of decidability.

It follows that a branch in a tree may be taken to generate certain predicates, provided these predicates be discussed relatively to some tree to which the branch belongs. For instance, the branch under (ij) may be considered as a tree $\mathbf{M}^0$ in its own right, but the assemblage $[\mathbf{P}^0, \mathbf{S}^0, \mathbf{T}^0]$ which is generated by the one branch in this tree $\mathbf{M}^0$ must be distinguished from the assemblage [**P**, **S**, **T**] which is generated by the branch under (ij) in the original tree. In general, predicates generated by a branch β in a tree **M** are not invariant under passage to a partial tree $\mathbf{M}^0$; it is easy to see that they are invariant under passage to a subtree **M′**. In view of this situation, we must be prepared for certain difficulties in the construction of an intuitionistic logic of higher order.

In intuitionistic writings, the notion of a sentence **U** being secured is usually explained with reference to free choice sequences or to unsolved problems. The following explanation in terms of the *theory of games* seems to be more convenient in various respects.

We imagine the following game between two players, A and B. A has to select, by successive moves, a certain branch β in the above tree **M**; after each move of A, B may either state a guess as to whether or not A will finally meet with a formula P, or pass; both A's moves and B's guesses are, of course, irrevocable; if B's guess turns out to be right, then he wins, but if it turns out to be wrong, then A wins. It will be clear that for A the best tactics will be always to move SE, and that for B the best tactics will be always to pass; whoever first deviates from this tactics, will certainly lose; but if both A and B stick to this tactics, then the game will remain undecided.

2. Intuitionistic Logic of Higher Order

Let us now consider the most simple intuitionistic system of higher-order logic. We have individual variables and parameters $x, y, z, \ldots, 1, 2, 3, \ldots$ and class variables and parameters $X, Y, Z, \ldots, A, B, C, \ldots$. We have atoms $T(t)$, where T is a class variable or

parameter and t is an individual variable or parameter. Furthermore, we may have certain predicate constants, such as equality and distinctness; then we admit atoms $t=t'$, $t \# t'$, $T=T'$, $T \# T'$.

Starting from these elements, we construct in an obvious manner a two-sorted intuitionistic elementary logic. Thus it makes sense to say that a sequent:

(f) $$U_1, U_2, \ldots, U_m \vdash V_1, V_2, \ldots, V_n$$

holds true intuitionistically [the U's and V's are supposed to be closed formulas]. We do not specify any axioms of class-existence or extensionality; insofar as such axioms are needed and admissible, they are supposed to appear among the premisses U.

Thus an intuitionistic proof can be presented as a closed semantic tableau which, in turn, may be construed as describing a certain construction, tending to convert an arbitrary model of the premisses into a model of the conclusion; this fact seems to substantiate the intuitionistic claim that every mathematical proof must be a construction. Specifically, the problem of deriving a certain conclusion V from given premisses U belongs to a class of problems which have been characterised by Brouwer as *adjustment problems* ('inpassingsproblemen').

However, it will also be clear that no proof ever requires the construction of the models to be actually completed. We may restrict ourselves to constructing trunks of a certain length; this length must be sufficient for the specific conversion which is contemplated.

In view of this conception of intuitionistic proof, the rejection of proof from assumptions for which no model is known seems not to be justified. For instance, from an intuitionistic point of view, a clear sense can be given to the study of the implications of assumptions concerning the existence of certain impredicative classes.

On the other hand, Henkin's distinction between *standard* and *non-standard models* seems not to be relevant in the present context. It is true that a complete construction of certain models may be required if we wish to show that a certain sequent (f) does not hold true intuitionistically. In such a situation, however, we are hardly interested in the question as to the standard or non-standard character of the models involved. In point of fact, in view of our

experiences in Section 2 it remains to be seen if such models as we often happen to construct can in any reasonable sense be considered as standard-models.

3. Intuitionistic Formalisation of Arithmetic

Intuitionistic mathematics developed in a time when arithmetic was still considered as a relatively unproblematic field; therefore, intuitionists have hardly given sufficient attention to the foundations of this domain.

However, the notion of an intuitionistic model involves a number of arithmetical concepts and, in fact, my investigations on intuitionistic logic can be entirely formulated in a suitable version of arithmetic. This fact already makes it necessary for me to go into the problem of the foundations of intuitionistic arithmetic. I wish to make a number of scattered remarks on this subject, although at present I have no definite results to offer.

In particular, I wish to discuss certain objections, raised by K. Gödel and G. Kreisel in connection with my intuitionistic completeness proof for the intuitionistic elementary predicate logic (*cf.* [9]; actually, Kreisel's report does not contain a statement of the objections; but it describes the context in which they arise).

It is argued by Gödel and Kreisel (if I understand them correctly) that the existence of an intuitionistic completeness proof for the intuitionistic elementary predicate logic would enable us, for a primitive recursive predicate $\mathbf{S}$, such that $(x)\overline{\overline{\mathbf{S}(x)}}$, to assert also $(Ex)\mathbf{S}(x)$, and thus effectively to determine a natural number k such that $\mathbf{S}(k)$.

I do not wish to refute this argument, but I do wish to make the following observations.

(i) Let $\mathbf{S}$ be the predicate which is generated by the branch under (ij) in Section 1. In accordance with the semantic rules in [4], the sentence $(x)\overline{\overline{\mathbf{S}(x)}}$ is secured on this branch, but the sentence $(Ex)\mathbf{S}(x)$ is not. Of course, it can be argued that the predicate $\mathbf{S}$ is not primitive recursive. However, it remains to be seen, whether and how this fact can be expressed.

(ij) The intuitionistic completeness proof starts from the assumption that *there is a procedure which, whenever a model* $\mathbf{M}$ *of the conjunctive* $[U_1, U_2, \ldots, U_m]$ *is given, transforms it, in a finite*

number of steps, into a model **N** *of the disjunctive* $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$. Under this assumption, it shows that the corresponding sequent (f) is derivable in the formal system F_0.

Charles D. Parsons, of Harvard University, has made the very apposite remark that the above assumption can be interpreted in two manners.

(a) If interpreted in a *weak* sense, it requires that, before the procedure can be applied to a trunk $\mathbf{M}_k$ of a model **M**, we show that $\mathbf{M}_k$ can be extended into a model of the conjunctive $[U_1, U_2, \ldots, U_m]$.

(b) If interpreted in a *strong* sense, it requires that the procedure can be (tentatively) applied to *any* trunk $\mathbf{M}_k$.

Now if the assumption is interpreted in the weak sense, it is pretty clear that we cannot prove the corresponding sequent (f) to be derivable. For it is known that there are conjunctives C for which the existence of a model **M** cannot be proved in a constructive manner. In such cases, there trivially is a procedure which, whenever a model **M** of C is given, transforms it into a model **N** of $\{\varnothing\}$, that is, into the zero-tree. It would then follow from the completeness theorem that the conjunctive C is inconsistent which, however, is not necessarily the case.

From the statement of the proof in [4], there can be no doubt that the assumption is meant to be interpreted in the strong sense. Then the derivability of the corresponding sequent (f) follows immediately from Brouwer's *Fundamental Theorem on Finitary Spreads*. I did not use this remark in [4], as I wanted my argument to be independent of the several statements of the proof of this theorem which at present are available.

(iij) Therefore, it seems to me that the objections to my intuitionistic completeness proof rather affect the proofs of Brouwer's Fundamental Theorem.

In this connection I may observe that already in [3] I expressed certain doubts regarding these proofs.

Before turning to the main topic of this paper, I wish to make a few critical remarks concerning current usage of the terms "*Peano's arithmetic*" and "*Heyting's arithmetic*". These terms are frequently used to denote certain deductive theories which are formalised within elementary logic with identity.

This implies, however, a serious misinterpretation of the inten-

tions of the authors concerned, as they appear from the original texts. From Peano's comments [10] it is obvious that he intended to present a formalisation of Dedekind's characterisation of the sequence of all natural numbers. And Heyting's text [7] leaves no doubt that he intended to establish an intuitionistic version of Peano's formalisation.

It is interesting to observe that Heyting adopts Peano's defective definition of addition and multiplication for natural numbers. In this context, it should be noted that in Dedekind we find a much more adequate treatment of such matters. Both Peano and Heyting rely, in principle, on a logic of higher order in which, for instance, variables for functions are available, and such an apparatus provides a suitable framework for a formalisation of Dedekind's theory. It is known, however, that only about 1930 a clear insight into these matters was obtained, and therefore it is not surprising that in Heyting's paper, based on work done in 1928, we do not find a satisfactory treatment of the intuitionistic formalisation of arithmetic. It is true that *Principia Mathematica*, following Frege, avoids Peano's error, but this approach was clearly less attractive from an intuitionistic point of view.

In view of this state of affairs, it must be considered as highly regrettable that the name "*Heyting's arithmetic*" has been given to a formal system obtained by restating Heyting's axioms in terms of elementary logic and that the impression has been created that in this manner a more or less satisfactory characterisation of intuitionistic arithmetic can be obtained.

In setting up an axiomatic basis for intuitonistic arithmetic, we can follow either Peano or Russell (an adaptation of formalised set-theory to intuitionistic conceptions would clearly present considerable difficulties). In both cases we have to start from a convenient formalisation of higher-order logic. Then we could either adapt the definition of the notion of a natural number, as given by Frege and Russell, or we could follow Dedekind and Peano in characterising the set of all natural numbers by means of suitable axioms. In both cases, we would need suitable axioms of class-existence.

However, such a purely deductive approach to arithmetic cannot be expected to prove entirely adequate. In the first place, by the results of Skolem and Gödel, our axiom system will be neither

categoric nor complete; but from an intuitionistic point of view these defects will not be taken too tragically.

A more serious difficulty arises from the fact that a purely deductive treatment of a mathematical theory assigns equal importance to all models of its axioms. In the case of arithmetic, however, we feel that there is one privileged model, whose properties the theory is meant to find out. And this privileged position of a certain specific model is even more strongly emphasised by intuitionistic mathematicians.

This model cannot be considered as being given in advance, it is the result of a construction. According to Heyting, each application of the axiom of complete induction involves a reference to the manner in which the system of all natural numbers is constructed. Thus, in an attempt to establish an adequate formalisation of intuitionistic arithmetic, we ought to refer to the construction of its privileged model.

4. Logic and Metalogic

In order to fix the ideas, let us first consider the construction of suitable model for elementary arithmetic in $+$ and $\cdot$, for instance:

$0 = 0$
$0 + 0 = 0$
$0.0 = 0$
$0 \# 1$
$1 = 1$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$0.1 = 0$
$1.0 = 0$
$1.1 = 1$
$0 \# 2$
$1 \# 2$
$2 = 2$
$0 + 2 = 2$
$1 + 1 = 2$
etc.

With this construction, however, the following difficulty arises.

We wish the formula:

$$(x)(y)[x+y=y+x],$$

for instance, not merely to be *true*, but rather to be *secured*, on the model. But it will be clear that this purpose cannot be achieved by studying the construction as it proceeds, step by step. It must rather be based on an insight into the general method of construction. Therefore, it will be necessary to describe the construction in a suitable metalanguage; on the basis of this description, we shall then be able to show that the above formula is indeed secured.

If the same question is asked, for instance, for the various elementary cases of the axiom of complete induction, we must be prepared to meet with certain complications, which are well-known in the metathematics of classical arithmetic. In our meta-system we shall need a certain version of arithmetic, which is "*stronger*" than the system of elementary arithmetic which we wish to study.

Of course, it would carry us too far, in the context of the present paper, to consider all the implications of the above remarks. For the moment, I must restrict myself to the conclusion that in the study of the foundations of intuitionistic arithmetic we must be prepared to meet with two kinds of difficulties, namely, those which are known from investigations into the foundations of classical arithmetic, and those which derive from the peculiarities of an intuitionistic approach.

5. Postscript (added February, 1958)

The difficulty encountered in Section 1, which is concerned with the interpretation of the logical operators [a certain branch in a tree may represent a predicate **A** such that, "naïvely" speaking, the formulas $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, ... and $(x)A(x)$ are true], is completely solved as follows. Our notation suggests that 1, 2, 3, ... denote, as usually, definite natural numbers, that A stands for a predicate defined for natural numbers, and that x is a variable ranging over natural numbers. However, this is by no means necessary; in fact, in [4], p. 2, it is stipulated that "as individual parameters, we use numerals 1, 2, 3, ..." [This statement has presumably been overlooked by some readers.] Specifically:

We consider the tree structure **M** in Section 1. Let 1 be the one branch which goes SE; let 2 be the uppermost branch which goes SW; let 3 be the next branch which goes SW; and so on. Let $1^0, 2^0, 3^0, \ldots$ be the natural numbers. There is a function f such that $f(1^0)=1$, $f(2^0)=2$, $f(3^0)=3, \ldots$. Let **A** be defined as follows:

$$A(x) \leftrightarrow (En)[f(n)=x],$$

where n ranges over natural numbers and x ranges over branches in **M**. We then have $A(1), A(2), A(3), \ldots$ and $\overline{(x)A(x)}$; *cf.* [7], S. 65, *Bemerkung*.

Thus the above-mentioned difficulty, far from pointing to a discrepancy between "naïve" intuitionistic mathematics and our semantic construction of intuitionistic logic, rather seems to confirm their agreement.

BIBLIOGRAPHY

[1] E. W. Beth, Semantical Considerations on Intuitionistic Mathematics, Indag. Math., **9** (1947).

[2] ————, Les fondements logiques des mathématiques, 2me éd., Paris–Louvain 1955.

[3] ————, L'existence en mathématiques, Paris–Louvain 1956.

[4] ————, Semantic Construction of Intuitionistic Logic, Mededelingen der Kon. Ned. Akad. van Wet., Afd. Lett., N.R., **19** (1956) no. 11.

[5] ————, Intuitionistic Predicate Logic, in: Summaries of Talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University (mimeographed), **I**.

[6] ————, Remarks on Elementary Predicate Logic, N. Archief v. Wiskunde (3) **5**, (1957).

[7] A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik II, Sitzungsber. der Preussischen Akad. der Wiss., Phys.-Math. Kl., 1930.

[8] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, Amsterdam–Groningen 1952.

[9] G. Kreisel, Gödel's Interpretation of Heyting's Arithmetic, in the above Summaries. — I wish to express my sincerest thanks to Professors Gödel and Kreisel for kindly explaining their objections to me, and I hope that in the above discussion their views have not been distorted.

[10] G. Peano, Formulaire de mathématiques. Tome II, Turin 1897–98.

QUASI-CONSTRUCTIVE FOUNDATIONS FOR MATHEMATICS

FREDERIC B. FITCH
Dept. of Philosophy, Yale University, New Haven, Conn., U.S.A.

1. Introduction

A consistent system **JE′** is presented which contains H. B. Curry's theory of combinators [1] and a modified form of the writer's "extended basic logic" [2] as subsystems. The fusion of these two systems into a single logic provides a consistent foundation for a large part of mathematical analysis [1]). The following principle of extensionality is available in **JE′** for each choice of n, including $n=0$: If for all 'c_1', ..., 'c_n' it is the case that '$ac_1 \ldots c_n$' and '$bc_1 \ldots c_n$' are derivable from each other and that '$\sim ac_1 \ldots c_n$' and '$\sim bc_1 \ldots c_n$' are derivable from each other, then '$[a=b]$' is a theorem. The consistency of **JE′** is proved from the consistency of a system **J′** in essentially the same way that the consistency of a system **KE′** is elsewhere proved by the writer from the consistency of the system **K′** of extended basic logic [5]. The system **J′** is very much like **K′**, but it is stronger in certain respects. In particular, **J′** contains a rule to the effect that 'a' is a theorem of **J′** if and only if, for every 'b', 'ab' is a theorem of **J′**. (For example, since 'ab' is a theorem of **J′** for every 'b' if 'a' is chosen as '$W=$', it follows that '$W=$' is a theorem of **J′**.) A system will be said to be "constructive" if the class of Gödel numbers of its theorems is recursively enumerable, or, equivalently, if the class of its theorems (written in the notation of the system **K**) is represented in the system **K** of basic logic. A system will be said to be "quasi-constructive" if the class of its theorems (written in the notation of the system **K**) is represented in the system **K′** of extended basic logic. Every constructive system is quasi-constructive. The systems **K′**, **J′**, **KE′** and **JE′** are quasi-constructive but not constructive. The present paper is concerned with defining the system **JE′** and establishing its consistency.

[1]) For an indication of the adequacy of extended basic logic as a foundation for a large part of mathematical analysis, see [3] and [4].

2. Well-formed formulas

The class **U** of well-formed formulas (wffs) is defined by induction in terms of a finite class **Y** of atomic wffs, as follows: (1) Every member of **Y** is a wff. (2) If 'a' and 'b' are wffs, so is '(ab)'. (3) The only wffs are those that are such in virtue of (1) and (2). The atomic wffs are the following (others may be added): '$\sim$', 'E', '$=$', 'V', 'ε', 'o', 'W'.

3. Conventions

If no ambiguity results from so doing, we may write 'ab' for '(ab)', and 'abc' for '$((ab)c)$', and '$abcd$' for '$(((ab)c)d)$', and so on. Also, '$[bac]$' for 'abc', that is, for '$((ab)c)$'. We assume that lower-case italic letters from the beginning of the alphabet stand for arbitrary wffs. Omission of the quotation marks serves to indicate reference not to a wff but to that which the wff designates. Thus it is correct to say that 'E' designates E, and that in general 'a' designates a.

4. Remarks on interpretation

If a wff 'ab' is a theorem of one of the systems we consider, this theorem is viewed as asserting that b is a member of a, and a is viewed as being a class. If 'abc' (or, equivalently, '$[bac]$') is a theorem, we regard this theorem as asserting that a relates b to c, and we view a as being a two-place relation. If '$abcd$' is a theorem we consider this theorem to be asserting that a relates b to c to d, and we view a as being a three-place relation. And so on. The same wff may serve to designate a proposition, a class, a two-place relation, and so on. For example, '$=$' serves to designate the two-place relation identity, but also for $n = 1, 2, \ldots$, it serves to designate the $n+2$-place relation of c_1 to c_2 to c_3 to ... to c_{n+2} such that c_1 is identical with c_2 and there is no restriction on the other cs. Similarly, 'V' serves to designate the two-place relation of disjunction as between propositions, but it also designates the two-place operation, "join of classes", and in this latter role it can also be viewed as designating the three-place relation of c_1 to c_2 to c_3 such that c_3 is a member of one of (and hence a member of the join of) c_1 and c_2. Similarly, '$\sim$' designates both negation of propositions and complementation of classes. It also denotes complementation of n-place relations for all $n > 1$. Similarly,

'V' denotes "join of n-place relations". We will regard conjunction as defined in terms of disjunction and negation, and we will regard universality as defined in terms of existence and negation.

5. The system H′

This system is very much like the system **K′** of extended basic logic, but it possesses the property that if 'a' is a theorem of **H′**, so is 'ab'. Use will be made of **H′** in connection with the proof of the consistency of **JE′**. The rules defining **H′** are listed immediately below. They are in effect infinite in number since we may choose n and m as 0, 1, 2, 3 and so on. By the "negates" of a wff '$ab_1 \dots b_n$' we mean the wffs '$\sim (ab_1 \dots b_n)$', '$\sim (ab \dots b_{n-1})b_n$', '$\sim (ab_1 \dots \dots b_{n-2})b_{n-1}b_n$', ..., '$\sim (ab_1)b_2 \dots b_n$', '$\sim ab_1 \dots b_n$'. We write "iff" for "if and only if". We could replace "if and only if" by "if" without essentially weakening the rules, since the "if and only if" forms would then be derivable owing to the fact that it is tacitly understood that the only theorems of **H′** are those that are such in virtue of these rules. The wffs "in **H′**" are the theorems of **H′**.

Rule $(=)$. '$[a=b]c_1 \dots c_n$' is in **H′** iff 'a' and 'b' are the same wff.

Rule (ε). '$\varepsilon abc_1 \dots c_n$' is in **H′** iff '$bac_1 \dots c_n$' is in **H′**.

Rule (o). '$oabcd_1 \dots d_n$' is in **H′** iff '$a(bc)d_1 \dots d_n$' is in **H′**.

Rule (W). '$Wabc_1 \dots c_n$' is in **H′** iff '$abbc_1 \dots c_n$' is in **H′**.

Rule (V). '$[a\,V\,b]c_1 \dots c_n$' is in **H′** iff '$ac_1 \dots c_n$' or '$bc_1 \dots c_n$' is in **H′**.

Rule (E). '$Eab_1 \dots b_n$' is in **H′** iff, for some 'c', '$acb_1 \dots b_n$' is in **H′**.

Rule $(\sim)$. '$\sim (ab_1 \dots b_m)c_1 \dots c_n$' is in **H′** iff '$\sim ab_1 \dots b_m c_1 \dots c_n$' is in **H′**.

Rule $(\sim =)$. '$[a\,(\sim =)\,b]c_1 \dots c_n$' is in **H′** iff '$a$' and '$b$' are different wffs.

Rule $(\sim \varepsilon)$. '$\sim \varepsilon abc_1 \dots c_n$' is in **H′** iff '$\sim bac_1 \dots c_n$' is in **H′**.

Rule $(\sim o)$. '$\sim oabcd_1 \dots d_n$' is in **H′** iff '$\sim a(bc)d_1 \dots d_n$' is in **H′**.

Rule $(\sim W)$. '$\sim Wabc_1 \dots c_n$' is in **H′** iff '$\sim abbc_1 \dots c_n$' is in **H′**.

Rule $(\sim V)$. '$[a\,(\sim V)\,b]c_1 \dots c_n$' is in **H′** iff '$\sim ac_1 \dots c_n$' and '$\sim bc_1 \dots c_n$' are both in **H′**. (Notice that '$[a\,(\sim V)\,b]c_1 \dots c_n$' could have been written more simply as '$\sim Vabc_1 \dots c_n$'.)

Rule $(\sim E)$. '$\sim Eab_1 \dots b_n$' is in **H′** iff, for every 'c', '$\sim acb_1 \dots b_n$' is in **H′**.

Rule $(\sim \sim)$. '$\sim \sim (ab_1 \dots b_m)c_1 \dots c_n$' is in **H′** iff '$ab_1 \dots b_m c_1 \dots c_n$' is in **H′**.

6. Some theorems about H′

The following theorems show that **H′** is consistent and that it is at least as adequate as **K′**.

6.1. Theorem. There is no 'a' such that 'a' and one of its negates are both in **H′**.

Proof: By essentially the same method as was used in EBL to show the consistency of **K′**.

6.2. Theorem. If for the system **H′** we define '$\acute{\varepsilon}$' and '$\acute{o}$' respectively as 'ε' and 'o', and if we define '&' and 'A' in terms of 'V', 'E' and '$\sim$' in obvious ways, then every theorem of **K′** is a theorem of **H′**.

Proof: All the primitive rules for **K′** are seen to be among the primitive and derived rules for **H′**.

6.3. Theorem. If 'a' is in **H′**, so is '$ab_1 \ldots b_n$'.

Proof: It is clear from the nature of the primitive rules for **H′** that any method for showing that 'a' is in **H′** can be paralleled by a method for showing that '$ab_1 \ldots b_n$' is in **H′**.

6.4 Theorem. 'a' and a negate of '$ab_1 \ldots b_n$' are not both in **H′**.

Proof: By 6.1 and 6.3.

6.5. Theorem. '$ab_1 \ldots b_n$' and a negate of 'a' are not both in **H′**.

Proof: If a negate of 'a' is in **H′**, so is '$\sim a$' by Rule ($\sim$), and then so is '$\sim ab_1 \ldots b_n$', by 6.3. For '$ab_1 \ldots b_n$' to be in **H′** would then conflict with 6.1.

7. The system J′

This system is defined in terms of the system **H′** by the following rule:

7.1. Rule for **J′**. 'a' is in **J′** iff, for some $n \geqslant 0$, for all 'b_1', ..., 'b_n', '$ab_1 \ldots b_n$' is in **H′**.

7.2. Theorem. If 'a' is in **H′** then 'a' is in **J′**.

Proof: By 7.1, choosing n as 0.

7.3. Theorem. If, for all 'b_1', ..., 'b_n', '$ab_1 \ldots b_n$' is in **J′**, then 'a' is in **J′**.

Proof: The hypothesis gives the result that '$ab_1 \ldots b_n c_1 \ldots c_m$' is in **H′** for some m and for all 'b_1', ..., 'b_n', 'c_1', ..., 'c_m', by 7.1. Whence 'a' is in **J′** by 7.1.

7.4. Theorem. If 'a' is in **J′**, then, for all 'b_1', ..., 'b_k', '$ab_1 \ldots b_k$' is in **J′**.

Proof: From 7.1 and the hypothesis we get the result that for some m and for all 'c_1', ..., 'c_m', '$ac_1 \dots c_m$' is in **H′**. If $m<k$, apply 6.3 and 7.2. If $m>k$, apply 7.1, choosing n as $m-k$.

7.5. Theorem. There is no 'a' such that 'a' and one of its negates are both in **J′**.

Proof: By 7.1, 6.4, 6.5.

7.6. Theorem. All the rules defining **H′** are also valid for **J′**.

Proof: By 7.1 and the nature of each rule.

7.7. Theorem. The system **H′** would have the same theorems as the system **J′** if the following rule were added to the rules for **H′**: 'a' is in **H′** iff, for all 'b', 'ab' is in **H′**.

Proof: By 7.3, 7.4 and 7.6 we see that the resulting system is no stronger than **J′**, and clearly it is at least as strong.

8. The system JE′

This system differs from **J′** mainly in possessing a principle of extensionality (8.35). A subsystem of **JE′** is H. B. Curry's theory of combinators. In defining **JE′** we use a two-place syntactical relation of "consequence" relating classes of wffs to wffs. The classes considered are always quasi-constructive classes, that is, classes that are represented in **K′**. We write "$\mathbf{A} \vdash a$" to assert that 'a' is a consequence of the class **A**. We write "$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$" to assert that '$b$' is a consequence of **A** for every member 'b' of **B**. We write "$a_1, \dots, a_n \vdash b_1, \dots, b_m$" to assert that each of 'b_1', ..., 'b_m' is a consequence of the class consisting of 'a', ..., 'a_n'. We let $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ be the union of the classes **A** and **B**, and we let **0** be the empty class. The theorems of **JE′** are those wffs 'a' such that $\mathbf{0} \vdash a$. The rules defining the consequence relation will now be stated. They are to be understood as asserted for all integral non-negative choices of n and m.

8.1. $\mathbf{0} \vdash [a=a]b_1 \dots b_n$. (This could also be written as $\mathbf{0} \vdash =aab_1 \dots b_n$.)

8.2. If $\mathbf{A} \vdash a$, then $\mathbf{B} \cup \mathbf{A} \vdash a$.

8.3. If $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, and $\mathbf{B} \vdash \mathbf{C}$, then $\mathbf{A} \vdash \mathbf{C}$.

8.4.1. $ac_1 \dots c_n \vdash [a\,V\,b]c_1 \dots c_n$.

8.4.2. $bc_1 \dots c_n \vdash [a\,V\,b]c_1 \dots c_n$.

8.5. $\sim ac_1 \dots c_n,\ \sim bc_1 \dots c_n \vdash [a(\sim V)b]c_1 \dots c_n$.

8.6. $abc_1 \dots c_n \vdash Eac_1 \dots c_n$.

8.7. If, for specified 'a', 'c_1', ..., 'c_n', the class **A** has as its

members all wffs '$\sim abc_1 \dots c_n$' for all choices of 'b', then $\mathbf{A} \vdash \sim Eac_1 \dots c_n$.

8.8. $bac_1 \dots c_n \vdash \varepsilon abc_1 \dots c_n$.

8.9. $\sim bac_1 \dots c_n \vdash \sim \varepsilon abc_1 \dots c_n$.

8.10. $a(bc)d_1 \dots d_n \vdash oabcd_1 \dots d_n$.

8.11. $\sim a(bc)d_1 \dots d_n \vdash \sim oabcd_1 \dots d_n$.

8.12. $abbc_1 \dots c_n \vdash Wabc_1 \dots c_n$.

8.13. $\sim abbc_1 \dots c_n \vdash \sim Wabc_1 \dots c_n$.

8.14. $\sim ab_1 \dots b_m c_1 \dots c_n \vdash \sim (ab_1 \dots b_m)c_1 \dots c_n$.

8.15. $ab_1 \dots b_m c_1 \dots c_n \vdash \sim \sim (ab_1 \dots b_m)c_1 \dots c_n$.

8.16. If, for specified 'a', the class **A** consists of all wffs 'ab' for all choices of 'b', then $\mathbf{A} \vdash a$.

8.17. $\mathbf{0} \vdash [[a=b]\,V\,[a(\sim=)b]]c_1 \dots c_n$.

8.18. If $\mathbf{A} \vdash cd_1 \dots d_n$ and $\mathbf{B} \vdash cd_1 \dots d_n$, then $\mathbf{D} \vdash cd_1 \dots d_n$, where **D** is the class of all wffs '$[a\,V\,b]d_1 \dots d_n$' such that '$ad_1 \dots d_n$' is in **A** and '$bd_1 \dots d_n$' is in **B**. (Notice that the 'd_1', ..., 'd_n' with respect to which the class **D** is defined are the same as those mentioned in the hypothesis of 8.18.)

8.19. $[a(\sim V)b]c_1 \dots c_n \vdash \sim ac_1 \dots c_n,\ \sim bc_1 \dots c_n$.

8.20. If **A**, $abd_1 \dots d_n \vdash cd_1 \dots d_n$ for every 'b', then **A**, $Ead_1 \dots d_n \vdash cd_1 \dots d_n$.

8.21. $\sim Eac_1 \dots c_n \vdash \sim abc_1 \dots c_n$.

8.22. $\varepsilon abc_1 \dots c_n \vdash bac_1 \dots c_n$.

8.23. $\sim \varepsilon abc_1 \dots c_n \vdash \sim bac_1 \dots c_n$.

8.24. $oabcd_1 \dots d_n \vdash a(bc)d_1 \dots d_n$.

8.25. $\sim oabcd_1 \dots d_n \vdash \sim a(bc)d_1 \dots d_n$.

8.26. $Wabc_1 \dots c_n \vdash abbc_1 \dots c_n$.

8.27. $\sim Wabc_1 \dots c_n \vdash \sim abbc_1 \dots c_n$.

8.28. $\sim (ab_1 \dots b_m)c_1 \dots c_n \vdash \sim ab_1 \dots b_m c_1 \dots c_n$.

8.29. $\sim \sim (ab_1 \dots b_m)c_1 \dots c_n \vdash ab_1 \dots b_m c_1 \dots c_n$.

8.30. $ac_1 \dots c_n,\ \sim ac_1 \dots c_n \vdash bc_1 \dots c_n$.

8.31. $a \vdash ab$.

8.32. $[a=b]cd_1 \dots d_n \vdash [a=b]d_1 \dots d_n$.

8.33. $[a(\sim=)b]cd_1 \dots d_n \vdash [a(\sim=)b]d_1 \dots d_n$.

8.34. If '$(\dots a \dots)$' is any wff in which 'a' occurs, and if '$(\dots b \dots)$' is the result of replacing 'a' by 'b' in one or more places in '$(\dots a \dots)$', then

$$(\dots a \dots)c_1 \dots c_n,\ [a=b]c_1 \dots c_n \vdash (\dots b \dots)c_1 \dots c_n.$$

8.35. Suppose that for some $h>0$, and for all 'c_1', ..., 'c_h', it is the case that '$ac_1 \dots c_h$' and '$bc_1 \dots c_h$' are derivable from each other and that '$\sim ac_1 \dots c_h$' and '$\sim bc_1 \dots c_h$' are derivable from each other, where in saying that 'e' is "derivable" from 'f' we mean that $f \vdash e$ can be established without use of 8.16, 8.31 or 8.34; then $\mathbf{0} \vdash [a=b]d_1 \dots d_n$. Although use of 8.34 is not permitted in the kind of derivability just mentioned, the following two rules, 8.36 and 8.37, are permitted and are indeed weaker forms of 8.34. (For discussion of an analogous situation, see paragraph 13 of EV.)

8.36. If [etc., as in 8.34], and if '$(\dots a \dots)$' is of the form '$[d=e]$' or '$[d(\sim=)e]$', where 'a' occurs in 'd' or in 'e' or in both, then [etc., as in 8.34].

8.37. If [etc., as in 8.34], and if

$$\mathbf{0} \vdash (\dots a \dots)c_1 \dots c_n, \quad [a=b]c_1 \dots c_n,$$

then

$$\mathbf{0} \vdash (\dots b \dots)c_1 \dots c_n.$$

9. Comparison systems

The consistency of **JE′** can be established by use of certain special systems which will be called "comparison systems". To each quasi-constructive class **A** of wffs there corresponds a comparison system C(**A**). The rules defining C(**A**) are exactly like those defining **H′** except that the rule mentioned in 7.7 is used as an additional rule (to make C(**A**) like **J′** in that respect) and the Rules $(=)$ and $(\sim=)$ are replaced by the following two rules:

9.1. Rule $(=)$**A**. '$[a=b]c_1 \dots c_n$' is in C(**A**) iff '$[a=b]$' is in **A**.

9.2. Rule $(\sim=)$**A**. '$[a\ (\sim=)\ b]c_1 \dots c_n$' is in C(**A**) iff '$[a=b]$' is not in **A**.

10. Some properties of comparison systems

10.1. For each quasi-constructive class **A**, the comparison system C(**A**) can be shown to be consistent by the same kind of argument used to prove the consistency of such systems as **K′**, **H′** and **J′**. It is also to be noted that in C(**A**), as in **K′** and **H′**, the defining rules can contain or omit the phrase "and only if" without thereby strengthening or weakening the system. This is also true of **J′** if **J′** is viewed as defined by the same rules as **H′** together

with the rule mentioned in 7.7, and this comment applies to this latter rule as well as to the others.

10.2. Although **A** in C(**A**) is always chosen as a quasi-constructive class, C(**A**) itself is not necessarily a quasi-constructive class. If **A** is the class of all wffs of the form '$[a=a]$', then C(**A**) is the same system as **J′** and so is quasi-constructive just as **J′** is. But if **A** is any quasi-constructive class within which all quasi-constructive classes are represented (as they are in **K′**), then a diagonal argument can be used to show that the complement of **A** cannot be represented in **A** and so cannot be quasi-constructive. In this case it is hard to see how C(**A**) could be proved to be quasi-constructive, because 9.2 makes essential use of the complement of **A**. It therefore appears likely that C(**K′**) is not quasi-recursive (i.e., is not represented in **K′**).

10.3. A comparison system C(**A**) will be said to be "normal" if among the members of **A** are all wffs of the form '$[a=a]$' and if it satisfies the following substitution condition: If '$(\ldots a \ldots)$' and '$[a=b]$' are theorems of the system, then so is '$(\ldots b \ldots)$', where '$(\ldots a \ldots)$' is any wff in which 'a' occurs and where '$(\ldots b \ldots)$' is the result of replacing 'a' by 'b' in '$(\ldots a \ldots)$' in one or more places.

11. Lemma on normal comparison systems

Suppose:

(1) The comparison system C($\mathbf{A}_1$) is normal.

(2) The class $\mathbf{A}_2$ results from adjoining to $\mathbf{A}_1$ all wffs of the form '$[c=d]$' which are obtainable from members of $\mathbf{A}_1$ by replacing 'a' by 'b' or 'b' by 'a' in one or more places. (Thus $\mathbf{A}_2$ is defined in the way indicated in terms of $\mathbf{A}_1$ and some specific pair of wffs 'a' and 'b'.)

(3) For all $k \geqslant 0$ and for all 'c_1', ..., 'c_k': '$ac_1 \ldots c_k$' is a theorem of C($\mathbf{A}_2$) iff '$bc_1 \ldots c_k$' is, and '$\sim ac_1 \ldots c_k$' is a theorem of C($\mathbf{A}_2$) iff '$\sim bc_1 \ldots c_k$' is.

Then C($\mathbf{A}_2$) is a normal comparison system.

Proof: The only three ways that the above-mentioned wffs 'a' and 'b' can gain entrance into theorems of C($\mathbf{A}_2$) are: (i) by occurring in wffs of the form '$[f=g]c_1 \ldots c_n$', where '$[f=g]$' is in $\mathbf{A}_2$ so that 9.1 applies; (ii) by occurring in wffs of the form '$[f(\sim=)g]c_1 \ldots c_n$', where '$[f=g]$' is not in $\mathbf{A}_2$, so that 9.2 applies; and (iii) by occurring as indicated in wffs of the forms '$ac_1 \ldots c_n$',

'$bc_1 \ldots c_n$', '$\sim ac_1 \ldots c_n$', and '$\sim bc_1 \ldots c_n$' (or in the 'c_1, ..., 'c_n' of such wffs) to which the rules mentioned in paragraph 9 apply, other than 9.1 and 9.2. But it is evident that (i)–(iii) guarantee that it is impossible for 'a' to gain entrance into some theorem of C($\mathbf{A}_2$) in some way in which 'b' cannot also gain entrance (or conversely) if hypotheses (2) and (3) of the lemma are true. From this fact, and from the fact that C($\mathbf{A}_1$) itself is normal, it is seen that C($\mathbf{A}_2$) must be normal.

12. Alternative definition of a comparison system

An alternative way to define the comparison system C(**A**) is first to define a relation of "consequence" for C(**A**) by use of 8.1–8.16 together with the following two rules:

12.1. If '$[a=b]$' is in **A**, then $\mathbf{0} \vdash [a=b]c_1 \ldots c_n$.

12.2. If '$[a=b]$' is not in **A**, then $\mathbf{0} \vdash [a(\sim=)b]c_1 \ldots c_n$.

The class of theorems of C(**A**) can then be defined as the class of those wffs 'a' such that $\mathbf{0} \vdash a$. It is not hard to show that the class of theorems assigned to C(**A**) by this new definition of C(**A**) is the same as that assigned by the old definition [1]). Furthermore, it can be shown that in this new definition we can include rules 8.17–8.33, and in the case of a normal comparison system, rule 8.34 as well, without thereby increasing the number of theorems assigned to C(**A**). Therefore if C(**A**) is a normal comparison system we can regard it as so defined that the class of its theorems is specified as consisting of those wffs 'a' such that the result, $\mathbf{0} \vdash a$, is obtainable from 12.1, 12.2, 8.1–8.34.

13. Theorem on the relation of comparison systems to JE′

To each result, $\mathbf{D} \vdash d$, that can be established for **JE′** from 8.1–8.35, there corresponds at least one normal comparison system C(**A**) such that the result in question (and previous results leading up to it) can be obtained for C(**A**) by respective uses of 8.1–8.34 and 12.1 in exactly the same way the same result is obtained for **JE′** by corresponding uses of 8.1–8.35. (Here we are regarding comparison systems to be defined by the method of paragraph 12.) Furthermore this correspondence of comparison systems to results can be arranged in such a way that if the comparison systems C($\mathbf{B}_1$) and C($\mathbf{B}_2$) respectively correspond to the results, $\mathbf{D}_1 \vdash d_1$,

[1]) The method of proof is the same as that sketched in paragraph 10 of EV.

and $\mathbf{D}_2 \vdash d_2$, and if the former of these two results is used to obtain the latter, then $\mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{B}_2$.

Proof: Corresponding to the initial vacuous result (before any of the rules of **JE′** are used) we choose as the first normal comparison system the one that is equivalent to **J′**, that is, the comparison system C(**A**) for which **A** consists of all wffs of the form '$[a=a]$'. Since all the rules for **JE′** other than 8.35 are valid in all normal comparison systems, the use of any rule other than 8.35 does not require a change to a new corresponding comparison system when a new result is obtained. In the case of a use of rule 8.35, however, we require a new comparison system in which the use of rule 8.35 corresponds to a use of rule 12.1. This new comparison system is found by taking the previous comparison system C($\mathbf{A}_1$) and extending it to a comparison system C($\mathbf{A}_2$) relatively to the 'a' and 'b' of 8.35 just as C($\mathbf{A}_1$) is extended to C($\mathbf{A}_2$) in the lemma on normal comparison systems. Then C($\mathbf{A}_2$) is the required new comparison system. Now C($\mathbf{A}_2$) can be shown to be normal by use of the above-mentioned lemma. The first two conditions of the lemma are clearly satisfied. Because of the nature of the hypothesis of 8.35 it can be shown that condition (3) of the lemma is also satisfied. More specifically, if k of the lemma is less than h of 8.35, and if '$ac_1 \dots c_k$' is a theorem of C($\mathbf{A}_2$), then '$ac_1 \dots c_k c_{k+1} \dots c_h$' is a theorem of C($\mathbf{A}_2$) for all '$c_{k+1}$', ..., '$c_h$', by 7.4 (which holds for C($\mathbf{A}_2$) as well as for **J′**). From this it follows by the hypothesis of 8.35 that '$bc_1 \dots c_k c_{k+1} \dots c_h$' is a theorem of C($\mathbf{A}_2$) for all '$c_{k+1}$', ..., '$c_h$', since all previous results obtained for **JE′** are valid for C($\mathbf{A}_2$). Finally, '$bc_1 \dots c_k$' is a theorem of C($\mathbf{A}_2$) by 7.3 (which holds for C($\mathbf{A}_2$) as well as for **J′**). Similarly the rest of condition (3) can be shown to be satisfied. On the other hand, if $k \geqslant h$, it is sufficient to observe that if '$ac_1 \dots c_h$' and '$bc_1 \dots c_h$' are "derivable" from each other in the sense of 8.35, then so are '$ac_1 \dots c_h c_{h+1} \dots c_k$' and '$bc_1 \dots c_h c_{h+1} \dots c_k$', so that if one of them is a theorem of C($\mathbf{A}_2$), so is the other. Similarly the rest of condition (3) is satisfied. Thus, since all the conditions of the lemma are satisfied, C($\mathbf{A}_2$) is normal. Notice that all results so far established for C($\mathbf{A}_1$) will also hold for C($\mathbf{A}_2$) because 12.1 is no weaker in the case of C($\mathbf{A}_2$) than in the case of C($\mathbf{A}_1$) and because 8.1–8.34 are just the same in strength for C($\mathbf{A}_2$) as for C($\mathbf{A}_1$). Notice also that $\mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{A}_2$ as required. In case a new result, $\mathbf{D} \vdash d$, follows from infinitely many

previous results in such a way that there is no last one of them, we let $\mathbf{A}_1$ be the union of the classes $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, ..., of the comparison systems $C(\mathbf{B}_1)$, $C(\mathbf{B}_2)$, ..., corresponding to those previous results. Then $C(\mathbf{A}_1)$ can be shown to be normal [1]), and it is the required comparison system unless the new result follows by 8.35. In the latter case we use an extension $C(\mathbf{A}_2)$ of $C(\mathbf{A}_1)$ as before.

14. The consistency of JE′

From the foregoing we see that at any stage of proving theorems of **JE′** there is always a corresponding normal comparison system such that all the theorems of **JE′** at that stage are also theorems of that comparison system. Since all comparison systems are consistent, it follows that **JE′** is consistent at every stage and is therefore consistent in general.

BIBLIOGRAPHY

[1] H. B. Curry, Consistency and completeness of the theory of combinators. J. Symb. Log. **6** (1941), 54–61.

[2] F. B. Fitch, An extension of basic logic. J. Symb. Log. **13** (1948), 95–106. This paper will be referred to as EBL.

[3] ————, The Heine–Borel theorem in extended basic logic. J. Symb. Log. **14** (1949), 9–15.

[4] ————, A demonstrably consistent mathematics. J. Symb. Log. **15** (1950), 17–24 and **16** (1951), 121–124.

[5] ————, An extensional variety of extended basic logic. Forthcoming in J. Symb. Log. This paper will be referred to as EV.

---

[1]) See 11.3 of EV.

RECURSIVE ANALYSIS

R. L. GOODSTEIN
University of Leicester, England

Many theorems of classical analysis have the general form

$$\lim_{m\to\infty}\ (\lim_{n\to\infty} f(m,n))=0$$

where $f(m,n)$ is a rational function of integral variables. For instance the integral

$$\int_0^1 e^t dt = e-1$$

may be expressed by the repeated limit

$$\lim_{m\to\infty}\ \lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left\{\left(\frac{r}{m}\right)^k-1\right\}\frac{1}{k!}=-1,$$

and the equation $\sin\pi=0$ by

$$\lim_{m\to\infty}\ \lim_{n\to\infty}\ \sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^r}{(2r+1)!}\left\{4\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{2s+1}\right\}^{2r+1}=0.$$

In general, as in these particular instances, $\lim_{n\to\infty} f(m,n)$ is not a rational function of m, so that a repeated limit theorem appears to require a passage from the rational field to the field of real numbers for its formulation and proof. In certain cases, however, the property expressed by a repeated limit may be reinterpreted as a property of a single convergent sequence of rational numbers, and it is with such cases that recursive analysis is concerned. We shall consider some classical theorems which may be interpreted in this way, and shall also note some classical results which transcend these methods.

The equation $\sin\pi=0$ affords a simple illustration of some of the fundamental ideas. The uniform continuity of the power series $\sum(-1)^r x^{2r+1}/(2r+1)!$ enables us to choose an n_k such that $|\sin\pi-\sin\pi_{n_k}|<2^{-(k+1)}$, where $\pi_n=4\sum_0^n(-1)^s/(2s+1)$, and in virtue

of the uniform convergence of the power series we may further choose m_k so that

$$|\sin \pi_{n_k} - s_{m_k}(\pi_{n_k})| < 2^{-(k+1)}$$

where $s_m(x) = \sum_0^m (-1)^r x^{2r+1}/(2r+1)!$, whence it follows that the equation $\sin \pi = 0$ is equivalent to the inequality

$$|s_{m_k}(\pi_{n_k})| < 2^{-k}$$

which says that the sequence of rational numbers $s_{m_k}(\pi_{n_k})$ converges to zero.

The object of looking at the equation $\sin \pi = 0$ in this way is of course that (provided the inequality is *proved* without leaving the rational field) it obviates the introduction of operations on real numbers which are the primary source of the logical difficulties in the foundations of analysis, and so makes possible a branch of mathematical analysis which is not dependent on the theory of sets.

We have not yet completed the interpretation of the equation $\sin \pi = 0$ in recursive analysis. There remain three tasks to be accomplished. We must re-interpret the properties of continuity and convergence so that no reference outside the rational field remains, and most important of all, we must say what kinds of functions m_k and n_k may be.

In recursive analysis all functions are rational recursive functions of integral or rational arguments, the notion of recursive function being extended from integer to rational functions in the natural way. We may confine our considerations to primitive recursive functions, for the extension to wider classes of recursive functions (short of general or partial recursive functions) presents no difficulty and introduces no new feature. The system of analysis we construct is a free variable system, founded on recursive arithmetic, employing neither universal nor existential operators· We exclude general recursive functions on the grounds that they do not share with singly and multiply recursive functions (and some ordinal recursive functions) the property of determining their value for a given argument in an *assignable* number of steps; the absence of an existential operator would in any case deprive general recursive functions of much of their utility.

The primary concepts of recursive analysis are *relative equality*, *relative convergence*, the *reduced sequence*, *relative continuity*, and the *relative derivative* and *integral*.

A recursive relation $R(n, p)$ is said to hold for majorant n if there is a recursive function $M(p)$ such that

$$n \geqslant M(p) \rightarrow R(n, p).$$

Similarly $R(m, n, p)$ holds for majorant m, n (the order of m, n being material) if there are recursive functions $M(p)$, $N(m, p)$ such that

$$m \geqslant M(p) \ \& \ n \geqslant N(m, p) \rightarrow R(m, n, p).$$

If $|f(n)-g(n)|<2^{-k}$, for majorant n, we say that $f(n)$ and $g(n)$ are equal, relative to n.

And if

$$|f(m, n)-g(m, n)|<2^{-k}$$

for majorant m, n we say that $f(m, n)$, $g(m, n)$ are equal, relative to m, n.

A (rational) recursive function $f(m, n)$ of positive integral variables m, n is said to be convergent in m, relative to n, if there is a strictly increasing recursive function $M(k)$, and a recursive function $\nu(x, y, z)$ such that

$$\{m_1 \geqslant M(k) \ \& \ m_2 \geqslant M(k) \ \& \ n \geqslant \nu(m_1, m_2, k)\} \rightarrow |f(m_1, n)-f(m_1\, n)| < 2^{-k}.$$

The example m/n shows that convergence relative to n does not entail convergence for any fixed n.

If $f(m, n)$ is recursively convergent in n, for each value of m, so that there is recursive function $N(k, m)$ such that

$$N \geqslant n \geqslant N(k, m) \rightarrow |f(m, N)-f(m, n)|<2^{-k},$$

and if $f(m, n)$ converges also relative to n, so that

$$M \geqslant m \geqslant M(k) \rightarrow |f(M, n)-f(m, n)|<2^{-k}$$

for majorant n, then the function $R_f(p)=f(M(p), N(p, M(p)))$ is called the *reduce* of $f(m,n)$. $R_f(p)$ is recursively convergent and $f(m, n)=R_f(m)$ relative to m, n.

If $f(n, x)$ is a recursive function of a positive integral variable n

and a rational variable x, recursively convergent for $a \leqslant x \leqslant b$, and if there is a recursive function $C(k, x, y)$ and a strictly increasing recursive function $c_f(k)$ such that

$$a \leqslant x \leqslant X \leqslant b \ \& \ X - x < 2^{-c_f(k)} \ \& \ n \geqslant C(k, x, X) \rightarrow |f(n, x) - f(n, X)| < 2^{-k},$$

then $f(n, x)$ is said to be continuous for $a \leqslant x \leqslant b$, relative to n. A function continuous relative to n is not necessarily continuous for any fixed n. A relatively continuous function is always relatively equal to a uniformly convergent relatively continuous function. Without loss of generality we may take any relatively continuous $f(n, x)$ in a standard form such that $p \geqslant q \rightarrow |f(p, x) - f(q, x)| < 2^{-q}$; in fact we may take f to be also continuous uniformly in n.

If $f(n, x)$ is continuous relative to n for $a \leqslant x \leqslant b$ and if $s(n)$ is recursively convergent, $a \leqslant s(n) \leqslant b$, then $f(n, s(n))$ is recursively convergent. The convergent sequence $f(n, s(n))$ takes the place of the classical repeated limit

$$\lim_{m \to \infty} f(m, \lim_{n \to \infty} s(n)).$$

If $f(n, x)$ is relatively continuous for $a \leqslant x \leqslant b$ and $g(n, t)$ is uniformly convergent for $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, with $a \leqslant g(n, t) \leqslant b$, then the reduce of $f(n, g(m, t))$, *viz.* $fg(k, t) = f(k+1, g(c_f(k+1), t))$ is called the *application* of f to g. $fg(k, t)$ is uniformly recursively convergent (in standard form) and, for $n \geqslant k+1$, $m \geqslant c_f(k+1)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$,

$$|fg(k, t) - f(n, g(m, t))| < 2^{-k}.$$

If $f(n, x)$, $g(n, t)$ are relatively continuous (in suitable intervals) then so is $fg(n, t)$.

A relatively continuous function has a least upper bound but this bound is not in general attained.

If $f(n, x)$ is continuous for $a \leqslant x \leqslant b$, relative to n, and $f(n, a) < 0$, $f(n, b) > 0$ for all n, and if there are recursive functions $g(x)$, $h(x)$ such that, for $a \leqslant x \leqslant b$,

$$(1) \qquad n \geqslant h(x) \rightarrow |f(n, x)| \geqslant 2^{-g(x)}$$

then there is a recursive real number (recursively convergent function) s_n such that

$$f(n, s_n) = 0, \text{ relative to } n.$$

If we drop condition (1) then (by contrast with the classical case) s_n may cease to be recursively convergent. An alternative sufficient condition to (1) is that there be a positive constant q, such that

$$a \leqslant x < y \leqslant b \rightarrow |f(n, y) - f(n, x)|/(y - x) > q$$

for majorant n.

A recursively convergent function $f(n, x)$ is differentiable for $a \leqslant x \leqslant b$, relative to n, if there are recursive functions $f^1(n, x)$, $d(k)$ such that

$$a \leqslant x < X \leqslant b \;\&\; X - x < 2^{-d(k)} \rightarrow |f(n,x) - f(n,X) - \\ -(x - X)f^1(n,x)| < (X - x)2^{-k},$$

for majorant n. $f^1(n, z)$ is called a relative derivative of $f(n, x)$.

If $f(n, x)$ is relatively differentiable for $a \leqslant x \leqslant b$ there is a recursive c_k (depending on k alone) such that $a < c_k < b$ and

$$|f(n, b) - f(n, a) - (b - a)f^1(n, c_k)| < 2^{-k}$$

for majorant n. In general the sequence c_k is not recursively convergent; in fact c_k may fail to be uniformly contained in (a, b), that is to say, it may be impossible to determine a constant $\mathbf{m}$ such that $a + 1/\mathbf{m} < c_k < b - 1/\mathbf{m}$, even though c_k does not converge to a or b. If however $f^1(n, x)$ satisfies some additional condition, for instance that for some constant α, and majorant n,

$$a \leqslant x < y \leqslant b \rightarrow |f^1(n, y) - f^1(n, x)| \geqslant (y - x)2^a$$

then there is a recursively convergent c_n such that

$$f(n, b) - f(n, a) = (b - a)f^1(n, c_n)$$

relative to n.

To define the relative integral we introduce first the concept of a ruled function.

If $f(n, x)$ is uniformly recursively convergent for $a \leqslant x \leqslant b$ and if there are recursive functions a_r^n, v_r^n, $b(n)$ and $t(m, n, r)$ such that

$$a_0^n = a,\ a_{b(n)+1}^n = b,\ a_{r+1}^n > a_r^n,\ a_r^n = a_{t(m,n,r))}^m \text{ for } m > n,$$

and

$$0 \leqslant r \leqslant b(n) \;\&\; a_r^n < x < a_{r+1}^n \rightarrow f(n, x) = v_r^n$$

then $f(n, x)$ is said to be ruled in (a, b).

If $f(n, x)$ is ruled in (a, b) the sum

$$\sum_{r=0}^{b(n)} v_r^n (a_{r+1}^n - a_r^n)$$

is the relative integral of $f(n, x)$ from a to b, denoted by $I_f(n, a, b)$.

A relatively continuous function $f(n, x)$ is relatively integrable, and its relative integral is relatively differentiable with a relative derivative $f(n, x)$. The substitution theorem for the relative integral takes the simple form

$$I_f(n, a, b) = I_{fg \cdot g^1}(n, t_0, t_1), \text{ relative to } n,$$

where $g^1(n, t)$ is a relative derivative of $g(n, t)$ in (t_0, t_1), $a = g(n, t_0)$, $b = g(n, t_1)$ relative to n,

$\alpha \leqslant g(n, t) \leqslant \beta$ for majorant n, and $f(n, x)$ is relatively continuous for $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

We conclude by noting the following theorem on relatively inverse functions, important in the construction of the elementary functions.

In the interval $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\phi(n, t)$ is continuous relative to n and $\phi(n, t) \geqslant 2^{-\mu}$ for majorant n. In the interval $0 \leqslant x \leqslant b$, $g(m, x)$ has a relative derivative $1/\phi g(m, x)$, and $g(m, 0) = \alpha \leqslant g(m, x) \leqslant \beta$, for majorant m.

Then $g(n, x)$ and $f(n, t) = I_\phi(n, a, t)$ are inverse functions, relative to n, that is to say, in the appropriate intervals,

$$fg(k, x) = x, \text{ and } gf(k, t) = t, \text{ relative to } k.$$

BIBLIOGRAPHY

[1] R. L. Goodstein, Function theory in an axiom-free equation calculus. Proc. London Math. Soc. Ser. 2, **48** (1945), 401–434.

[2] ————, Mean value theorems in recursive function theory. Proc. London Math. Soc. Ser. 2, **52** (1950), 81–106.

[3] ————, The relatively exponential, logarithmic and circular functions in recursive function theory. Act. Math., **92** (1954), 171–190.

[4] ————, A constructivist theory of plane curves. Fund. Math. **43** (1956), 23–35.

[5] H. Meschkowski, Zur rekursiven Funktionentheorie. Acta Math. **95** (1956), 9–23.

[6] E. Specker, Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. J. Symb. Log. **14** (1949), 145–154.

SOME APPROACHES TO CONSTRUCTIVE ANALYSIS

ANDRZEJ GRZEGORCZYK
Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

There are many different directions in the foundations of constructive analysis. The aim of this paper is to describe the results going in one of these directions. It can be generally caracterized as follows. The constructive analysis according to the ideas elaborated in Poland is not a part of the intuitionistic mathematics. All methods of proof are allowed. The constructive tendency consists only in the narrowing of the field of mathematical entities considered in classical analysis. In the constructive calculus we consider only those objects for which we have constructive methods of approximation, this means methods given by means of constructive functions of integers. The most constructive are general recursive (GR) ones. But the consideration of larger and also of narrower classes is usefull as well. In order to constructivize a mathematical notion we consider its classical definition written in terms of the arithmetic of natural numbers. Then we relativize the existential quantifiers according to the following well known scheme. If the classical notion is defined by a definition of the form:

$$\Gamma(a) \equiv (x)(Ey)A(x, y, a)$$

then we consider the following two relativized notions:

$$(0.1) \qquad \begin{cases} \Gamma_\alpha(a) \equiv (x)A(x, \alpha(x), a) \\ \Gamma_X(a) \equiv (E\alpha)[\alpha \in X \text{ and } \Gamma_\alpha(a)]. \end{cases}$$

where X is a class of definable functions, and we investigate especially the notion $\Gamma_{GR}(a)$.

E.g. Considering sequences we relativize the notion of convergence according to the above scheme as follows:

$$(0.2) \qquad \begin{cases} \{a_k\} \underset{\alpha}{\to} a \equiv (k, n)\left[k \geqslant \alpha(n) \supset |a_k - a| < \frac{1}{n+1}\right], \\ \{a_k\} \underset{X}{\to} a \equiv (E\alpha)[\alpha \in X \text{ and } \{a_k\} \underset{\alpha}{\to} a]. \end{cases}$$

In this direction of thought we can expect results of the following kinds:

(A) The notion Γ_{X_0} (e.g. Γ_{GR}) possesses some mathematical properties.

(B) If the class X is closed under several logical operations, the notion Γ_X possesses some mathematical properties.

(C) There exists a GR functional $\Phi(\alpha)$ which establishes a mathematical property of Γ_α.

We shall give many examples of theorems and open problems of these three kinds. The results (B) are stronger than (A), and (C) are stronger than (B). The results (C) are often intuitionistically provable.

1. The real numbers

First let us mention the results concerning constructive real numbers.

In order to simplify the notation we shall consider only positive real numbers R and non negative integers N. A real number a can be determined by a function $\alpha \in N^N$ by means of many different methods of approximation. The most usual are the three following:

$$\alpha \text{ determines}_1\ a \equiv (p, q)[a > p/q \equiv \alpha(p, q) = 1]$$

$$\alpha \text{ determines}_2^i\ a \equiv a = \sum_n \frac{\alpha(n)}{i^n};\ \alpha(n) < i \text{ for } n \geqslant 1,\ i > 1.$$

$$\alpha \text{ determines}_3\ a \equiv (k, n)[|\alpha(n)_2/\alpha(n)_1 - a| < 1/(k+1) \text{ for } n > \alpha(k)_3]\ ^1).$$

Now we can define e.g. the general recursive real numbers as determined in one of the above mentioned senses by some GR functions of integers. Similarly we may define different other notions of real constructive numbers according to the scheme:

$$a \in X_j^i \equiv (E\alpha)\ \alpha \text{ determines}_j^i\ a \text{ and } \alpha \in X. \tag{1.1}$$

If the class X contains some simple PR (primitive recursive) functions and is closed under substitutions and recursion then the following implications are true:

$$a \in X_1 \supset a \in X_2^i \supset a \in X_3. \tag{1.2}$$

---

[1]) $\alpha(n)_i = (\alpha(n))_i$, and $(k)_i$ has the meaning of KLEENE [7], p. 230.

If the class X is closed also under the operation of the least-number operator with the existence condition (the effective minimum) then:

$$a \in X_3 \supset a \in X_1. \tag{1.3}$$

These two well known results have the form (B). But there is a difference between the implications 1.2 and 1.3. For 1.2 we can prove a stronger theorem of the form (C). Namely there exist functionals $\Phi_2^1,\ \Phi_3^i \in PR$ such that

$$\alpha \text{ determines}_1 \ a \supset \Phi_2^i(\alpha) \text{ determines}_2^i \ a \tag{1.4}$$

$$\alpha \text{ determines}_2^i \ a \supset \Phi_3^i(\alpha) \text{ determines}_3 \ a \tag{1.5}$$

and there are no GR functionals corresponding to the implication 1.3 [1] [2].

From (1.2) and (1.3) it follows that for $X = GR$ all classes X_j^i of real numbers are equivalent. If $X = PR$ the definitions (1.1) are not equivalent as was shown by SPECKER [20], and the most comprehensive class is PR_3. It seems to be quite natural that the third method of determination is the most general one. It may be simplified as follows. Setting:

$$\alpha \text{ determines } a \equiv (n)\{|\alpha(n)/(n+1) - a| < 1/(n+1)\} \tag{1.6}$$

we can choose PR functionals Φ and Φ' such that

$$\begin{cases} \alpha \text{ determines } \ a \supset \Phi(\alpha) \text{ determines}_3 \ a \\ \alpha \text{ determines}_3 \ a \supset \Phi'(\alpha) \text{ determines } a. \end{cases} \tag{1.7}$$

This functionals even can be obtained from some PR functions using only the operation of substitution. From results of Mazur it follows that if the set X is closed under the operations of substitution and recursion then the set X_3 of real numbers constitutes a field of numbers arithmetically closed in the field of real numbers. Namely Newton's approximation method can be written by means of simple recursion. The sets PR_1 and PR_2^i are not even rings of real numbers as was shown by SPECKER [20]. Other results con-

---

[1]) For the definition of GR or PR functionals see KLEENE [7], [8] or GRZEGORCZYK [4].

[2]) This follows from the results of MOSTOWSKI [15] concerning recursive sequences.

cerning recursive numbers are contained in [11], [12], [13], [16], [17], [18], [19], [22].

Among these results some may be expressed in our notation briefly. E.g.

$$a \in X_2^i \equiv \text{the function } \lambda n[i^n \cdot a] \text{ is in } X;$$

if X is closed under the operations of substitution and simple recursion [1]). Under the same assumption

$$a \in X_1 \equiv \lambda n[a \cdot n] \in X \equiv \lambda n[a \cdot n!] \in X \equiv \{a = \sum_{n=0} \frac{\alpha(n)}{n!}$$
$$\text{for some } \alpha \in X \ (\alpha(n+1) < n+1)\}.$$

But some of these implications are not established by PR functionals [12] [17]. There exists a functional $\Phi \in PR$ such that if α determines$_3$ a, β determines$_2^i$ a and for some γ, $\gamma(n) \to \infty$ and $\beta(\gamma(n)) < i-1$, then $\Phi(\alpha, \gamma)$ determines$_2^i$ a [12].

2. Sequences of real numbers

Other exemples of results of the kinds (A)(B)(C) will concern sequences. A function $\alpha \in (N \times N)^N$ of two arguments determines$_j^i$ a sequence $\{a_k\}$ if and only if for each $k \in N$ the function of one argument $\lambda n \alpha(k, n)$ determines$_j^i$ a_k. Similarly as in the preceding section we say that

(2.1) $$\{a_k\} \in \bar{X}_j^i \equiv (E\alpha)\ \alpha \text{ determines}_j^i\ a_k \text{ and } \alpha \in X.$$

From (1.4) and (1.5) we obtain the implications:

(2.2) $$\{a_k\} \in \bar{X}_1 \supset \{a_k\} \in \bar{X}_2^i \supset \{a_k\} \in \bar{X}_3$$

provided that X is closed under the operations of substitution and recursion. The converse implications are true for no i not only for $X = PR$ but also for $X = GR$ as was pointed out by Mostowski [15]. Just in the case when X is closed under the operation of general minimum (without the condition of effectiveness), the converse implications hold. Other results of Mostowski [15] involve the existence of a PR functional Φ such that if a power of q is divisible by p, and α determines$_2^q$ a, then

---

[1]) The function $[a]$ will be the greatest integer less that or equal to a (entier).

$\Phi(\alpha)$ determines$_2^p$ a. Hence if X is closed under recursion and substitution then the following implication holds:

If a power of q is divisible by p, then

$$\overline{X}_2^q \subset \overline{X}_2^p.$$

For sequences the converse implication holds if $X = GR$. For PR numbers it is an open problem. Mostowski considers two notions of determining$_1$. The second differs from the first by application of the relation $\leqslant$ in the place of $<$. In the case of GR sequences they lead to two different notions of GR sequences: $\overline{GR}_1$ and $\overline{GR}_{1'}$. Mostowski establishes the inequalities:

$$\overline{GR}_1 - \overline{GR}_{1'} \neq 0 \neq \overline{GR}_{1'} - \overline{GR}_1;\ \overline{GR}_1 \neq \overline{GR}_2^1 \neq \overline{GR}_{1'}$$

where

$$a_k \in \overline{GR}_2^1 \equiv (E\alpha)\left\{\alpha \in GR \text{ and for every } m>1,\ a_k = \sum_n \frac{\alpha(m,k,n)}{m^n}\right\}.$$

It is not known whether $\overline{GR}_2^1 = \bigcap_{m<1} GR_2^m$.

There are some simple PR functionals Φ^+, Φ^-, $\Phi^\times$ and a GR functional $\Phi^{1/}$ such that

(2.3) if α, β determine a, b then $\Phi^{+(-)}(\alpha, \beta)$ determines $a \pm b$ and $\Phi^\times(\alpha, \beta)$ determines $a \cdot b$, and

(2.4) if α determines a and $a \neq 0$, then $\Phi^{1/}(\alpha)$ determines $1/a$.

Hence if X is closed under substitution and recursion then $+$, $-$, $\cdot$, do not lead out of the class $\overline{X}_3$ of sequences. If X is closed also under effective minimum, then division does not lead out of the class $\overline{X}_3$ neither.

Mazur showed that there is a sequence $\{1/\alpha(n)\} \in \overline{PR}_3$ such that $\alpha \notin PR$. Hence the functional $\Phi^{1/}$ can not be PR. For division of PR sequences Mazur proved only that:

If $\{a_k\} \in \overline{PR}_3$ and $a_k \geqslant \varepsilon > 0$, then $\{1/a_k\} \in \overline{PR}_3$, because the following general lemma holds: there exists a PR functional Φ such that if α determines $\{a_k\}$ and $1/a_k \leqslant \beta(k)$ then $\Phi(\alpha, \beta)$ determines $\{1/a_k\}$.

There are also others counterexemples due to Mazur: e.g. there exist two functions $\alpha, \beta \in PR$ such that the sequence $a_n = \alpha(n)/\beta(n)$

is increasing, limited and $\lim a_n \notin GR_3$. Another exemple of such a sequence is due to Specker. But we shall sketch the Mazur proof to be able to employ Mazur's functions in the continuation. Mazur starts from a PR function $h(m, x)$ such that

$j(m) = (\mu x)[h(m, x) = 0]$ does not belong to GR. Putting:

$$\gamma_0(m, n) = 1 \dot{-} \prod_{i \leqslant n} h(m, \mathrm{i}), \quad \sigma(m) = \lim_{n \to \infty} \gamma_0(m, n).$$

We see that:

$$\gamma_0(m, n) = 0, \text{ or } \gamma_0(m, n) = 1; \text{ if } \gamma_0(m, n) = 1 \text{ then } \gamma_0(m, n+1) = 1$$

$$\sigma(m) = \begin{cases} 0 \text{ if } (n)\ \gamma_0(m, n) = 0 \\ 1 \text{ if } \sim(n)\ \gamma_0(m, n) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

hence $j(m) = (\mu x)[\gamma_0(m, x) = \sigma(m)]$. This minimum is effective, thus σ cannot belong to GR. Now setting $a = \sum_m \frac{\sigma(m)}{2^m}$, and $b_n = \sum_{m \leqslant n} \frac{\gamma_0(m,n)}{2^m}$ we obtain that $\{b_n\}$ is not decreasing sequence of rationals, $a \notin GR_3$, and $a = \lim \{b_n\}$. The definition of a strictly increasing sequence is also very easy. Thus the Bolzano–Weierstrass theorem is satisfied neither by GR_3 numbers and sequences nor by PR_3. It holds for X_3 numbers and sequences if X is closed under the general minimum operation.

Setting

$$\delta(m, i) = \begin{cases} 0 \text{ if } (En)[n < i \text{ and } \gamma_0(m, n) = 1] \\ \gamma_0(m, i) \text{ in the other case,} \end{cases}$$

we obtain that for each m, there exists at most one i such that $\delta(m, i) = 1$. Hence putting: $a_m = \sum_i^{\infty} \frac{\delta(m,i)}{2^i}$ we obtain that: $[1 - a_m] = 1$ if and only if $\sigma(m) = 0$, thus $\sigma(m) = 1 \dot{-} [1 - a_m]$. (See note on page 46). Hence the sequence $\{[1 - a_m]\}$ cannot be $\overline{GR}_3$ in spite of that $\{1 - a_m\} \in \overline{GR}_3$.

Mazur defined also a PR sequence $1/\varphi(n)$ converging to 0 but not GR convergent. Namely $\varphi(n) = 1 + \sum_{k \leqslant n} \prod_{i \leqslant k} (1 \dot{-} \delta(i, n))$.

For the relativized notion of convergence it is easy to prove that there exists a functional $\Phi \in PR$ that

(2.6) If α determines $\{a_k\}$ and $\{a_k\} \underset{\beta}{\to} a$, then $\Phi(\alpha, \beta)$ determines a.

Hence if the class X is closed under the operation of substitution and recursion then:

If $\{a_k\} \in \overline{X}_3$ and $\{a_k\} \underset{X}{\to} a$, then $a \in \overline{X}_3$; under the same assumptions the four arithmetical operations on X-convergent sequences lead to the arithmetical operations on the limits of them.

There are also functionals $\Phi, \Phi', \Psi \in GR$ such that:

(2.7) If α determines $\{a_k\}$, $\{a_k\} \to a$, and β determines a, then $\{a_{\Phi(\alpha,\beta,n)}\} \underset{\Phi'(\alpha,\beta)}{\longrightarrow} a$

where $\Phi(\alpha, \beta, n)$ is an increasing function of n, and:

If α determines $\{a_k\}$, $\{a_k\} \to a$, β determines a and $\{a_k\}$ is monotonic, then $\{a_k\} \underset{\Psi(\alpha,\beta)}{\longrightarrow} a$.

Hence if the class X is closed under the operations of substitution and effective minimum then

If $\{a_k\} \in \overline{X}_3$, $\{a_k\}$ is monotonic and $\lim \{a_k\} = a \in X_3$, then $\{a_k\} \underset{X}{\to} a$.

3. Functions preserving sequences

According to the general program explained in the beginning we shall relativize also some analytical properties of real functions such as continuity and integrability. But in advance it seems to be useful to examine some general conditions which are very natural from a logical point of view. For example it seems to be very natural to define the notion of a real function of class X in such a way that a real function of class X cannot lead outside of the real numbers of the class X. The stronger condition of preserving the sequences of the class X was investigated by Mazur in the case of $X = GR$ and $X = PR$, and implies some purely analytical properties.

Let us say that a real function f preserves the sequences of the class X if for every sequence of real numbers for which the function f is defined the following implication holds:

(3.1) $$\{a_n\} \in \overline{X} \supset \{f(a_n)\} \in \overline{X}.$$

In order to simplify the arguments we shall assume that all considered real functions are defined over the whole set of all

positive real numbers. We shall also speak about X-numbers, and $\overline{X}$-sequences (without indices) meaning X_3-numbers and $\overline{X}_3$-sequences.

We shall make a little summary of the results of Mazur leading to the conclusion that a real function preserving the sequences of the class GR is continuous in the set of GR real numbers. These investigations were initiated by Banach and Mazur in 1938. They considered first of all the natural-number functionals preserving the sequences of natural functions.

Let a functional

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, n_1, \ldots, n_m) = l,$$

defined over the k-tuples of X-functions from N^N and over the m-tuples of N and assuming values from N, be said to preserve X-functions (abbrev. $\Phi \in X_M$) if and only if:

(3.2) for every k-tuple $\beta_1, \ldots, \beta_k$ of X-functions from $(N \times N)^N$ the function defined as follows

$$\varphi(s_1, \ldots, s_k, n_1, \ldots, n_m) = \Phi(\lambda r_1\, \beta_1(r_1, s_1), \ldots, \lambda r_k\, \beta_k(r_k, s_k), n_1, \ldots, n_m)$$

belongs to the class X.

If the class X of natural functions is closed under the operations of substitution, recursion, effective minimum then the class X_M of functionals is closed also under the same operations. There is the open question whether the class GR_M can be caracterized inductively as the least class closed under these operations. The class GR_M is not identical with the class of GR functionals. Strictly speaking there exists a GR_M-functional $\Phi(\alpha)$ defined over the GR-functions which cannot be extended to a GR-functional defined over the whole class N^N of functions.

The continuity of Banach–Mazur general recursive functions follows from the continuity of GR_M-functionals. Let us consider the following properties of functions and functionals.

We shall say that: α is a pseudoconstant function ($\alpha \in Pc$) when: $\alpha(n) = 0$ for any $n \in N$ or there exists such $k \in N$, that $\alpha(n) = \operatorname{sgn}(n \dot{-} k)$ for any $n \in N$. A functional Φ distinguishes Pc functions from 0 if and only if the following condition is satisfied:

(3.3) $$(\alpha)[\alpha \in Pc \supset \{\Phi(\alpha) = 0 \equiv (n)\alpha(n) = 0\}].$$

It is easy to prove the following:

Theorem (3.4). Neither PR_M nor GR_M functionals distinguish Pc functions from 0.

Proof. Indeed if we had $\Phi \in GR_M$ (PR_M) and if 3.2 were satisfied, then we should have $\sigma \in GR$, where

$$\sigma(m) = \operatorname{sgn}(\Phi(\lambda n \gamma_0(m, n))).$$

A function $\beta(n, m)$ converges to $\alpha(m)$ $(\beta(n, m) \underset{n\to\infty}{\to} \alpha(m))$ if and only if then:

$$(m)\,(E\,k)\,(n)\,[n \geqslant k \supset \beta(n, m) = \alpha(m)].$$

A functional Φ is continuous for X-functions if and only if for each $\beta \in (N \times N)^N$

(3.5) if $(n)\lambda m \beta(n, m) \in X$ and $\beta(n, m) \underset{n\to\infty}{\to} \alpha(m)$, then $\Phi(\lambda m \beta(n, m), m) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(\alpha, m)$.

Let us say that a functional Φ is continuous in Pc if and only if

(3.6) 1. $\Phi(O, m) = O(m)$, [1])

2. For every $\beta \in (N \times N)^N$ if $(n)\lambda m \beta(n, m) \in Pc$, and $\beta(n, m) \underset{n\to\infty}{\to} O(m)$, then $\Phi(\lambda m \beta(n, m), m) \underset{n\to\infty}{\to} O(m)$.

Theorem (3.7). There exists a hyperfunctional $\Omega \in PR$ such that for every functional $\Phi(\alpha, m)$ if Φ is not continuous in Pc, then for some k the functional $\Psi(\alpha) = \Omega(\Phi, \alpha, k)$ distinguishes Pc from 0. [2])

Mazur's definition of this hyperfunctional is the following:

$$\Omega(\Phi, \alpha, k) = \operatorname{sgn}(\Phi(\lambda m \Omega'(\Phi, \alpha, k, m), k))$$

where

$$\Omega'(\Phi, \alpha, k, m) = \operatorname{sgn}\Big(\sum_{\nu \leqslant m} \{\Phi(\lambda x \varrho(y, x), k) \sum_{z \leqslant \nu} \alpha(z)\}\Big)$$

and

$$\varrho(y, x) = \operatorname{sgn}((x+1) \dot{-} y).$$

From (3.4) and (3.7) it follows that

Theorem (3.8). If the functional $\Phi \in PR_M \cup GR_M$, then Φ is continuous in Pc.

---

[1]) We put $O(n) = 0 \cdot n = 0$.

[2]) The hyperfunctionals PR and GR of any higher type can be defined inductively similarly as PR and GR functionals in [4].

Further Mazur proves that all GR_M-functionals are continuous for GR-functions in the sense of the definition (3.5). He proves also that PR_M are not continuous for PR-functions. Hence some PR_M-functionals cannot be extended to GR_M-functionals. But we do not know now how to apply directly the continuity of GR_M-functionals to the proof of the continuity of functions preserving GR-sequences. For this purpose Mazur needs the new notion of X_M-*real* functionals, which are defined over the same objects as the natural functionals but may assume real values, and satisfy the condition:

(3.9) For every k-tupel $\beta_1, \ldots, \beta_k$ of X functions from $(N \times N)^N$

the real sequence:

$$a_{s_1, \ldots, s_k, n_1 \ldots, n_m} = \Phi(\lambda r_1\, \beta_1(r_2, s_1), \ldots, \lambda r_k \beta_k(r_k, s_k), n_1, \ldots, n_m)$$

belongs to the class $\bar{X}$ of sequences.

Now similarly to (3.6) we say that

(3.10) A real functional Φ is Pc continuous if and only if

1. $\Phi(O) = 0$,
2. For every $\beta \in (N \times N)^N$ if $(n)\lambda m \beta(n, m) \in Pc$ and $\beta(n, m) \underset{n\to\infty}{\to} O(m)$ then $\Phi(\lambda m \beta(n, m)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

And similarly as in the case of (3.8) he proves:

Theorem (3.11). If the class X is closed under the operations of substitution and limited recursion and the X_M-functionals do not distinguish Pc-functions from 0, then they are Pc-real continuous. [1])

Proof. We define the functional:

$$\Psi(\alpha, x, k) = \operatorname{sgn} \sum_{y \leqslant x} \left\{ \left[\frac{\gamma(y, k)}{2} \right] \cdot \sum_{z \leqslant y} f(z) \right\},$$

---

[1]) Under the scheme of limited recursion we understood the following scheme:

$$\alpha(0, r) = \beta(r)$$
$$\alpha(n + 1, r) = \gamma(n, r, \alpha(n, r))$$
$$\alpha(n, r) \leqslant \delta(n, r).$$

For the details see [3]. In many cases in this paper (e.g. in Theorem 3.7) we may consider the class X closed under the above scheme instead of the scheme of simple recursion.

where γ determines the sequence $\Phi(\lambda m \varrho(k, m))$, and:

$$\chi(\alpha, k) = \Phi(\lambda x\, \Psi(\alpha, x, k))$$
$$\Omega(\alpha, k) = (k+1)\ \min\left(\frac{1}{k+1}, |\chi(\alpha, k)|\right).$$

Supposing that $\Phi(\lambda m \beta(n, m)) \to 0$ we infer that there exists a k_0 such that for every $m \in N$ there exists such $n > m$ that

$$\Phi(\lambda m \beta(n, m)) \geqslant 3/(k_0 + 1).$$

One can calculate that under the above supposition the functional $\Omega(\alpha, k_0)$ distinguishes Pc-functions from 0.

As a relativization of the notion of convergence of a sequence of natural functions we need the following notions:

$$(3.12) \quad \begin{cases} \beta(n, m) \underset{\gamma}{\to} \alpha(m) \equiv (x, y, n)(n \geqslant \gamma(x) \wedge y \leqslant x \supset \beta(n, y) = \alpha(y)) \\ \beta(n, m) \underset{X}{\to} \alpha(m) \equiv (E\gamma)(\gamma \in X \wedge \beta(n, m) \underset{\gamma}{\to} \alpha(m)). \end{cases}$$

Theorem (3.13). If the class X is closed under the operations of substitution and limited recursion and the real X_M-functionals are Pc-continuous then they have the following property: for every real $\Phi \in X_M$,

$$(3.14) \quad \beta \in X \wedge \beta(n, m) \underset{X}{\to} O(m) \supset \Phi(\lambda m \beta(n, m)) \to \Phi(O).$$

Proof. We define the functionals:

$$\Psi(\alpha, x) = \sum_{n \leqslant \gamma(x)} \{\beta(n, x) \cdot \alpha(n) \cdot (2 \dot{-} \sum_{u \leqslant n} \alpha(u))\},$$

where:

$$\beta(n, m) \underset{\gamma}{\to} 0(m);$$

$$\Theta(\alpha) = \Phi(\lambda x \Psi(\alpha, x)) + \Phi(O).$$

Then we calculate that

$$\Theta(\lambda m \varrho(n, m)) \to 0 \equiv \Phi(\lambda m \beta(n, m)) \to \Phi(O).$$

Theorem (3.15). If the class X is closed under the operations of substitution and limited recursion, and the real X_M-functionals satisfy the condition (3.14), then they satisfy the following:

$$(3.16) \quad \Phi \in X_M \wedge \alpha, \beta, \gamma \in X \wedge \beta(n, m) \underset{\gamma}{\to} \alpha(m) \supset \Phi(\lambda m \beta(n, m)) \to \Phi(\alpha).$$

Proof. We put

$$\delta(n, x) = 2^{\beta(n,x) \dot{-} \alpha(x)} \cdot 3^{\alpha(x) \dot{-} \beta(n,x)} \dot{-} 1$$

$$\tau(\zeta, x) = (\alpha(x) + \exp(\zeta(x)+1, 2)) \dot{-} \exp(\zeta(x)+1, 3)$$

$$\Phi'(\zeta) = \Phi(\lambda x \tau(\zeta, x)),$$

where

$$\exp(m, k) = (\mu x)\,[m \text{ is not divisible by } k^{x+1}].$$

If $\beta(n, m) \underset{\gamma}{\to} \alpha(m)$ then $\delta(n, m) \underset{\gamma}{\to} O(m)$ and according to (3.14): $\Phi'(\lambda m \delta(n, m)) \to \Phi'(0)$, and thus $\Phi(\lambda m \beta(n, m)) \to \Phi(\alpha)$.

Theorem (3.17). If the class X is closed under the operations of substitution and effective minimum, and the real X_M-functionals satisfy the condition (3.16), then they are real continuous for X-functions.

Proof. Let us assume that for an increasing function $\varepsilon(n)$, and every $n, k \in N$: $|\Phi(\lambda m \beta(\varepsilon(n), m)) - \Phi(\alpha)| \geqslant 4/(r_0+1)$, and

$$\left| |\Phi(\lambda m \nu(n, m)) - \Phi(\alpha)| - \frac{\gamma(n,k)}{k+1} \right| < \frac{1}{k+1},$$

where $\gamma \in X$, $\beta(n, m) \underset{n\to\infty}{\to} \alpha(m)$, and $\nu(n, m) = \exp(n+1, p_m)$, where p_m are primes ($p_0 = 2$).

Now define a function $\eta \in X$ as follows:

$$\eta(0) = (\mu k)\left[\frac{\gamma(k,k)}{k+1} \geqslant \frac{1}{r_0+1} \wedge \nu(k, 0) = \alpha(0)\right];$$

$$\eta(x+1) = (\mu k)\left[k > \eta(x) \wedge \frac{\gamma(k,k)}{k+1} \geqslant \frac{1}{r_0+1} \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \nu(k, y) = a(y) \text{ for } y \leqslant x+1\right].$$

Then we obtain that $\nu(\eta(n), m) \underset{n\to\infty}{\to} \alpha(m)$, and by (3.16)

$$\Phi(\lambda m \nu(\eta(n), m)) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(\alpha),$$

what leads to a contradiction with our assumptions.

Theorem (3.18). If the class X is closed under the operations of substitution and effective minimum and X_M-functionals do not distinguish Pc-functions from 0, then the real functions preserving X-sequences are continuous in the set of X-real numbers in the sens of Heine.

Proof. Let f be a real function preserving X-sequences.

We define a real X_M-functional:

$$\Phi(\alpha)=f\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(k)\bmod 10}{10^k}\Big)\ ^{1}).$$

Now if $\{a_n\}\to a$ and for every n, $a_n, a\in X$, then every sequence $\beta(n,m)$ of decimal developments of numbers $\{a_n\}$ converges to the decimal development $\alpha(n)$ of the number a, and for every n, $\lambda m\beta(n,m)\in X$ and $\alpha\in X$. On the other hand, according to the Theorems (3.11), (3.13), (3.15), (3.17), the functional Φ is continuous. Thus $\{f(a_n)\}\to f(a)$.

Let us mention some other properties of X_M-functionals.

Theorem (3.19). If the class X is closed under the operations of substitution and limited recursion, and if X_M-functionals do not distinguish Pc-functions from 0, then every X_M-functional can be presented in the following form:

$$\Phi(\alpha)=\lim a_{\alpha(n)}$$

where

$$a_n=\Phi(\lambda m v(n,m)).$$

Proof. Let us consider the following functional:

$$\Gamma(\alpha,n,x)=\begin{cases}\alpha(x) & \text{for } x\leqslant n\\ 0 & \text{for } x>n.\end{cases}$$

It is evident that $\Gamma(\alpha,n,x)\underset{X}{\to}\alpha(x)$. Hence by (3.15)

$$\Phi(\alpha)=\lim\Phi(\lambda x\Gamma(\alpha,n,x)).$$

On the other hand

$$v(\tilde{\alpha}(n),m)=\Gamma(\alpha,n,m),$$

where

$$\tilde{\alpha}(n)=\prod_{i\leqslant n}p_i^{\alpha(i)}.$$

In the particular case if Φ assumes only integral values, then

$$\Phi(\alpha)=\lim\varphi_{\Phi}(\tilde{\alpha}(n)).$$

Kleene has given in [8] an example of a GR_M-functional of the above form which is not a GR-functional. It is easy also to define a functional of the above form which is not a GR_M-one. E.g. the functional

$$\Phi(\alpha)=\lim_{n\to\infty}1\dot{-}\prod_{i\leqslant n}(1\dot{-}\alpha(i))$$

---

[1]) We set that $x\bmod y=x\dot{-}y^{(\mu z)[y^{z+1}>x]}$.

can be expressed in the above form and distinguishes Pc-functions from 0.

The intermediate value theorem for the functions preserving GR-sequences holds too, but does not follow directly from the continuity theorem, because of the non-continuity of the space of GR-numbers. There is not a complete analogy between functions preserving GR-sequences and real continuous functions. We can construct a function preserving GR-sequences and not limited in a segment. Mazur's idea of functions preserving sequences can be extended to other branches of calculus, but no interesting result is yet known. [1])

4. Constructively continuous real functions

As follows from the above mentioned results, there exists a real function defined over GR-numbers and preserving GR-sequences, which cannot be extended to a continuous function defined over the whole half straight line. The problem arises how to define GR-continuous functions which are continuous on the whole set of considered real numbers. Accordingly to our general ideas explained in the introduction we shall relativize the classical notion of continuity. Let us consider four formulations of the classical condition of continuity:

H $\quad (a)(\{a_n\})[\{a_n\} \to a \supset \{f(a_n)\} \to f(a)]$.

C $\quad (a)(n)[f(a) \in S_n \supset (E\,k)(a \in S_k \wedge f(S_k) \subset S_n)]$.

L $\quad (E\alpha)[(n)(a)(a \in S_n \supset f(a) \in S_{\alpha(n)}) \wedge$
$(a, b)(b \neq f(a) \supset (E\,n)[a \in S_n \wedge b \notin S_{\alpha(n)}])]$.

S $\quad f$ is uniformly continuous in any rational segment.

In C and L, $\{S_n\}$ is a recursive enumeration of open rational segments. [2])

The first two are familiar Heine's and Cauchy's conditions. The third was considered by D. Lacombe. The four conditions are classically equivalent.

---

[1]) Mazur's functions have been considered by D. Klauda in [6], but he proves only very weak theorems. Mazur's theorems are only mentioned briefly in [14] but not published for several years. So this little summary may be useful.

[2]) E.g. $S_n = \{$the set of numbers a satisfying the inequalities:
$(n)_1/((n)_2 + 1) < a < (n)_3/((n)_4 + 1)\}$.

The relativization of the above conditions leads to the following definitions of relativized continuity:

$$f \text{ cont}_{\text{H}}\, \phi \equiv (a)(\{a_n\})(\alpha, \beta)(\alpha \text{ determines } a \wedge \{a_n\} \underset{\beta}{\longrightarrow} a \supset \supset \{f(a_n)\} \underset{\phi(\alpha,\beta)}{\longrightarrow} f(a)).$$

$$f \text{ cont}_{\text{C}}\, \phi \equiv (a)(\alpha, \beta)(n, s)\ \{\alpha \text{ determines } a \wedge \beta \text{ determines } f(a) \wedge \frac{\beta(s)\pm 1}{s+1} \in S_n \supset a \in S_{\Phi(\alpha,\beta,s,n)} \wedge f(S_{\Phi(\alpha,\beta,s,n)}) \subset S_n\}.$$

$$f \text{ cont}_{\text{L}}\, \alpha \equiv [(n)(a)(a \in S_n \supset f(a) \in S_{\alpha(n)}) \wedge (a, b)(b \neq f(a) \supset (En)[a \in S_n \wedge b \notin S_{\alpha(n)}])].$$

$$f \text{ cont}_{\text{S}}\, \alpha \equiv (a, b)(n, m)\left[r_n < a, b < r_m \wedge |a-b| < \frac{1}{\alpha(n,m,k)} \supset \supset |f(a)-f(b)| < \frac{1}{k+1}\right],$$

where $\{r_n\}$ is a recursive sequence of rationals.

Assuming that ϕ or α belongs to a certain class X from the logical hierarchy we obtain four formulations of the notion of continuity of the class X. There are open problems, for example: what are the weakest conditions for X under which these four formulations are equivalent. We know only the following result. Let us set:

$$f \in \text{continuous}_i\, X \equiv (E\varphi)\varphi \in X \wedge f \text{ cont}_i\, \varphi \wedge \{f(r_n)\} \in \overline{X}$$

for $i = \text{H, C, L, S}$. We have the theorem:

(4.1) $\text{continuous}_{\text{H}}\ GR = \text{continuous}_{\text{C}}\ GR = \text{continuous}_{\text{L}}\ GR = \text{continuous}_{\text{S}}\ GR.$

Proof. The class of $\text{continuous}_{\text{L}}\ GR$-functions is the class of D. Lacombe GR-real functions; $\text{continuous}_{\text{S}}\ GR$-functions are E. Specker's GR-functions. To prove these equations it is convenient to employ another (the fifth) condition equivalent to those mentioned in (4.1). It is one more logical condition introduced in [4]:

$$\Phi \text{ deter}_{\text{G}}\, f \equiv (a)(\alpha)[\alpha \text{ determines } a \supset \Phi(\alpha) \text{ determines } f(a)]$$
$$f \in X_{\text{G}} \equiv (E\Phi)\Phi \in X \wedge \Phi \text{ deter}_{\text{G}}\, f.$$

The identity of GR_{G}, $\text{continuous}_{\text{L}}\ GR$ and $\text{continuous}_{\text{S}}\ GR$ continuous functions was proved in [5]. On the other hand there exists an elementary recursive hyper-functional Θ such that if

f cont_{H} Φ and β determines $\{f(r_n)\}$ then $\Theta(\Phi, \beta)$ deter_{G} f. Conversely by means of the theorem on the GR uniform continuity in a segment of GR_{G}-functions [1]) we prove that if $f \in GR_{\text{G}}$ then for some $\Phi \in GR$, f cont_{H} Φ.

For the notion cont_{C} the proof is more difficult. First we prove the following lemma:

(4.2) If the class X is closed under the operations of substitution and effective minimum, f cont_{C} Φ, $\Phi \in X$ and $\{f(r_n)\} \in \overline{X}$, then $f \in X_{\text{G}}$.

Proof. If f cont_{C} Φ and β determines $\{f(r_n)\}$ then the following condition is satisfied:

$$(4.3)\quad \begin{cases} (\alpha)(k)(E n, q, t, s)[\alpha!(q) \pm 1/q+1 \in S_{\Phi(\lambda z \pi(t,z)\lambda z \beta(t,z), s, n)} \wedge \\ \qquad\qquad \wedge\ \beta(t, s) \pm 1/s+1 \in S_n \wedge |S_n| < 1/k+1], \end{cases}$$

where $\alpha!$ is identical with the functional γ defined in [5] p. 67 formula (32). (This functional has the property that every $\alpha!$ determines a number and if α determines a number then $\alpha! = \alpha$). And:

$$\pi(t, k) = (\mu x)[|x/(k+1) - r_t| < 1/(k+1)].$$

Hence the functional

$$\Psi(\alpha, k) = ((\mu z)\ \text{[the numbers } (z)_1 = n,\ (z)_2 = q,\ (z)_3 = t,\ (z)_4 = s \text{ satisfy the condition (4.3) under quantifiers]})$$

belongs to X, and if α determines a, then

$$\left| \frac{\Psi(\alpha, k)_1}{\Psi(\alpha, k)_2} - f(a) \right| < \frac{1}{k+1}.$$

Conversely we can prove that:

(4.4) If the class X is closed under the operations of substitution and effective minimum and $f \in \text{continuous}_{\text{L}}\ X$, then there exists a functional $\Phi \in X$ such that f cont_{C} Φ.

Proof. If f cont_{L} γ then we have:

$$(\alpha, \beta, n, s)(E k, q, t)[\beta!(s) \pm 1/s+1 \in S_n \supset \{(\alpha!(q) \pm 1/q+1 \in S_k \wedge S_{\gamma(k)} \subset S_n) \wedge ((\beta!(t) - 1/t+1, \beta!(t) + 1/t+1) \cap S_{\gamma(k)} = 0)\}].$$

---

[1]) See [4] p. 192.

Hence the functional

$$\Phi(\alpha, \beta, n, s) = ((\mu z)\ [\text{the numbers } (z)_1 = k,\ (z)_2 = q,\ (z)_3 = t \text{ satisfy the above condition under quantifiers}])_1$$

belongs to X and $f\ \text{cont}_C\ \Phi$.

The lemmas (4.2) and (4.4) finish the proof of (4.1).

The lemmas (4.2) and (4.4) may be formulated in the stronger form (C) using partial GR-functionals. The problem of stronger formulation of the whole theorem (4.1) remains open.

5. Constructive integration and measure

As further problems which can be formulated in the form (B) or (C) we shall mention some problems concerning the constructive notions of integration and measure.

The relativized notion of Riemann's integrable functions may be defined for example using the method of approximations by means of continuous functions in the following manner:

$$f \in \text{intg}_i\ X \equiv (E\{f_m\}, \{g_m\})\ (E\alpha) \Big\{ \alpha \in X \wedge$$

1. $\{f_m\}, \{g_m\} \in \text{continuous}_i\ X \wedge$
2. $(a) f_m(a) \leqslant f(a) \leqslant g_m(a) \wedge$
3. $(n, k, p, q) \left[n > \alpha(k, p, q) \supset \int_{r_a}^{r_p} |f_n(a) - g_n(a)|\, da < \frac{1}{k+1} \right] \Big\}$

where i runs over H, C, L, S and the notion of an ${}_iX$-sequence of continuous functions is defined by means of the same definitions as $\text{continuous}_i\ X$-functions using the integral X-functions with one additional parameter. It is easy to verify that for every class X the functions $\text{intg}_i\ X$ are Riemann-integrable in the familiar sense. It is evident also that: $\text{continuous}_i\ X \subset \text{intg}_i\ X$, for $i = \text{H, C, L, S}$.

The following formulas present open problems:

(5.1) If $g(a, b) = \int_b^a f(c)dc$ and $f \in \text{continuous}_i\ X$, then $g \in \text{continuous}_i\ X$.

(5.2) If $g(a, b) = \int_b^a f(c)dc$ and $f \in \text{intg}_i\ X$, then $g \in \text{continuous}_i\ X$.

(5.1) and (5.2) are true for $X = GR$ but I did not verify the (B) and (C) formulations of (5.1) and (5.2).

It is possible to relativize in a similar way the notion of Lebesgue measure. Many formulations of the definition of measurability may be considered. The following seems to be the most simple one:

$$(5.3)\quad A \in \text{measurable } X \equiv (E\alpha)\left\{\alpha \in X \wedge (k)(G)\left[G=\bigcup_i S_{\alpha(n)_i} \supset |G-A|+|A-G|<\frac{1}{k+1}\right]\right\}$$

where $\bigcup$ is the set-theoretical summation, and $|A|$ is the external Lebesgue measure. It is evident that for every class X if A is measurable X, then A is a Lebesgue-measurable set in the classical sense with a finite measure. (The extension of this definition to the set of all measurable sets presents no difficulties). Having the example of a limited and strictly increasing GR sequence $\{a_n\}$ of rationals with $\lim\{a_n\} \notin GR_3$, we can define a GR sequence of disjoint rational segments such that the measure of the sum of these segments is not a GR real number. [1]) There are many problems concerning the relativized measure similar to the problems concerning relativized integration or continuity.

BIBLIOGRAPHY

[1] S. Banach and S. Mazur, Sur les fonctions calculables, Ann. Soc. Pol. de Math. **16** (1937), 223.

[2] R. L. Goodstein, The formal structure of a denumerable system, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 174–182.

[3] A. Grzegorczyk, Some classes of recursive functions. Rozprawy Matematyczne **4** (1953), 1–46.

[4] ————, Computable functionals, Fund. Math. **42** (1955), 168–202.

[5] ————, On the definitions of computable real continuous functions, Fund. Math. **44** (1947), 61–71.

[6] D. Klauda, Berechenbare Analysis. Zeit. f. Math. Log. und Grund. d. Math. 2 (1956), 265–303.

[7] E. C. Kleene, Introduction to metamathematics. Groningen 1952.

[8] ————, A note on computable functionals, Indag. Math. **18** (1956), 275–280.

[9] ————, Hierarchies of number-theoretic predicates, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 312–341.

[10] D. Lacombe, Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variable réelles. C. R. Acad. Sci. Paris: I, **240** (1955), 2478–2480, II, **241** (1955), 13–14, III, **241** (1955), 151–153.

[1]) Cf. also [21].

[11] W. Markwald, Zur Eigenschaft primitiv-recursiver Functionen unendliche viele Werte anzunehmen, Fund. Math. 42 (1955), 166–167.
[12] S. Mazur, Introduction to computable analysis. (A long typewriten manuscript in the Library of Math. Inst. of Pol. Ac. Sc. not published for many years.)
[13] A. Mostowski, A lemma concerning recursive functions and its applications, Bull. Acad. Pol. Sci. III, 1 (1953), 277–280.
[14] ————, The present state of investigations of foundations of mathematics, Rozprawy Matematyczne 9 (1955), 1–48.
[15] ————, On computable sequences, Fund. Math. 44 (1957), 37–51.
[16] R. Myhill, Criteria for constructibility of real numbers, Jour. Symb. Log. 18 (1953), 7–10.
[17] R. Péter, Recursive functionen, Budapest 1951.
[18] H. G. Rice, Recursive real numbers, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 784–791.
[19] R. M. Robinson, Review of 20, Jour. Symb. Log. 16 (1951), 282.
[20] E. Specker, Nicht-konstructiv beweisbare Satze der Analysis, Jour. Symb. Log. 14 (1949), 145–158.
[21] Šanin, Nekatorie vaprosy matematičeskogo analiza v svietie konstructivnoi logiki. Zeitschrift für Math. Logik und Grund d. Math. 2 (1956), 27–36.
[22] A. M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc. 42 (1937), 230–265.

ZUM INVERSIONSPRINZIP DER OPERATIVEN LOGIK

HANS HERMES
Institut für mathematische Logik, Münster i. W.

1. Bei dem Aufbau der operativen Logik und Mathematik, wie er von LORENZEN [1] gegeben wurde, spielt das *Inversionsprinzip*, [1] pag. 29ff, eine wichtige Rolle. Die Anwendung dieses Prinzips erlaubt es z.B., bei der Konjunktion als einzige definierende Regel [1]) die Regel $p, q \to (p \wedge q)$ zu wählen; die weiteren Regeln $(p \wedge q) \to p$ sowie $(p \wedge q) \to q$ lassen sich dann mittels des Inversionsprinzips als zulässige Regeln [1]) erkennen. Die beiden letzten Regeln entstehen durch „Inversion" aus der erstgenannten.

Mit im wesentlichen derselben Ueberlegung, welche zur Begründung der unmittelbaren Inversion führt, lässt sich ein allgemeineres Prinzip einsehen, das von Lorenzen aufgestellt und ebenfalls Inversionsprinzip genannt wird. Es soll im folgenden gezeigt werden, dass die von Lorenzen, [1] pag. 30, gegebene Formulierung nicht aufrecht erhalten werden kann. Anschliessend wird eine neue Formulierung vorgeschlagen und begründet. Zum Schluss soll die Anwendung auf die Konjunktion besprochen werden.

2. Es ist zum leichteren Verständnis des Folgenden zweckmässig, zunächst kurz auf den bei Lorenzen zu Grunde gelegten Kalkülbegriff einzugehen. Ein Kalkül K wird gegeben durch endlich viele definierende Regeln. Eine derartige Regel hat die Form

$$(*) \qquad A_1, \ldots, A_n \to A.$$

Dabei sind $A_1, \ldots, A_n, A$ Formeln des Kalküls, d.h. Zeichenreihen, welche aus Konstanten und Variablen aufgebaut sind. Formeln ohne Variablen heissen Aussagen. Man unterscheidet Eigenvariablen und Fremdvariablen [2]). Für Eigenvariable darf man Aussagen einsetzen, welche im vorliegenden Kalkül K ableitbar sind. Die Fremdvariablen beziehen sich auf vorangehende Kalküle

---

[1]) Zu diesem Begriff vgl. Abschnitt 2.

[2]) Die Bezeichnung „Fremdvariable" kommt bei Lorenzen nicht vor.

(die Konstanten solcher Kalküle sollen unter denen von K vorkommen). Für Fremdvariable darf man Aussagen einsetzen, die ableitbar sind in den Kalkülen, auf welche sich die Fremdvariablen beziehen.

Im folgenden sollen ϱ, σ, τ Einsetzungen sein, d.h. Funktionen, welche für gewisse Variable erklärt sind und diesen Variablen ihnen (gemäss dem soeben Gesagten) entsprechende Aussagen zuordnen. Ist ϱ für alle in A vorkommenden Variablen erklärt, so soll A^ϱ die Aussage sein, welche aus A dadurch entsteht, dass man die Variablen durch die Aussagen ersetzt, welche ihnen durch ϱ zugeordnet sind. A^ϱ soll eine Spezialisierung von A heissen. Eine Ableitung in K ist eine endliche Folge von Aussagen, für welche gilt; jede Aussage entsteht aus vorangehenden durch Anwendung einer Regel; wenn es sich dabei etwa um die obige Regel (*) handelt, so bedeutet dies, dass es eine Einsetzung ϱ gibt, derart dass die betrachtete Aussage mit A^ϱ übereinstimmt, während vorher im Beweis die Aussagen A_1^ϱ, ..., A_n^ϱ (in irgend einer Reihenfolge) auftreten.

Es werden auch Regeln („Anfänge") der Gestalt (*) zugelassen, bei denen die Prämissen A_1, ..., A_n fehlen. Eine Aussage entsteht durch Anwendung einer solchen Regel, falls sie die Gestalt A^ϱ hat.

Eine Aussage heisst ableitbar in K, wenn sie die letzte Zeile eines Beweises in K ist.

Ein Kalkül K sei gegeben durch irgendwelche definierenden Regeln. Eine beliebige Regel R heisst in Bezug auf K *zulässig*, wenn in dem Kalkül, der durch Hinzunahme von R zu den definierenden Regeln von K entsteht, nicht mehr abgeleitet werden kann, als in K allein.

3. Wir geben zunächst die Lorenzensche Formulierung des Inversionsprinzips [1]). Um einen besseren Vergleich mit dem Folgenden zu ermöglichen, passen wir die Bezeichnungsweise der hier gewählten an. Ist A eine beliebige Formel, so soll unter A die Menge der in A vorkommenden Variablen verstanden werden. Die Formulierung lautet dann so:

---

[1]) Vgl. [1] pag. 30. Dabei wird angenommen, dass in der Formulierung, welche nicht ganz klar ist, unter den „eventuell zu ersetzenden Variablen", welche nicht in B frei vorkommen sollen, solche Variablen zu verstehen sind, die in einer der Formeln A^1, A^2, . . vorkommen.

Gegeben sei ein Kalkül K mit den definierenden Regeln

$$A_{i1}, \ldots, A_{in_i} \to A_i \qquad (i = 1, \ldots),$$
$$B_{j1}, \ldots, B_{jm_j} \to B_j \qquad (j = 1, \ldots).$$

C und D seien Formeln des Kalküls. Es mögen die folgenden Voraussetzungen gelten:

(1′) $C^\varrho \neq B_j^\sigma$ für alle ϱ, σ, j,

(2′) $A_{i1}, \ldots, A_{in_i} \to D$ sei zulässig in K für jedes i,

(3′) $\bar{A}_i$ sei fremd zu $\bar{D}$ für alle i.

Dann ist $C \to D$ zulässig in K.

Diese Formulierung ist zu stark, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt. Sie ist aber andererseits auch zu schwach. Die Forderung (3′) schliesst nämlich gerade die beabsichtigten Anwendungen aus, da z.B. im Falle der Konjunktion die Bedingung der Variablenfremdheit nicht erfüllt ist [1]).

Gegenbeispiel. Gegeben sei zunächst ein Kalkül K_0, in welchem genau alle aus den Konstanten o und | gebildeten Zeichenreihen abgeleitet werden können. Die Variablen a, b sollen sich auf diese Zeichenreihen beziehen. Der Kalkül K sei definiert durch die folgenden Regeln, welche im Hinblick auf die vorangehende Formulierung des Inversionsprinzips sogleich in zwei Klassen geteilt seien:

$$a, b \to a\,| \qquad (i = 1),$$
$$\to \mathrm{o}\,| \qquad (j = 1),$$
$$a, b \to |\,b \qquad (j = 2).$$

Es sei $C = \mathrm{o}\,|\,|$, $D = |\,b$. Dann sind die obigen Voraussetzungen erfüllt:
(1′), weil jede Spezialisierung o | bzw. $|\,b$ von o | | verschieden ist; (2′), weil $a, b \to D$ sogar eine definierende Regel ist; und (3′), weil $a\,|$ und $|\,b$ keine gemeinsamen Variablen enthalten. Andererseits ist aber $C \to D$ entgegen der Behauptung unzulässig in K. In K kann man nämlich, wie man sofort sieht, nur Aussagen ableiten,

---

[1]) Man vergleiche dazu Nr. 6. Auch bei der Anwendung, die Lorenzen, [1] pag. 31, auf einen arithmetischen Kalkül macht, ist (3′) nicht erfüllt.

welche die Konstante $\circ$ enthalten. Andererseits erlaubt die Hinzunahme der Regel $C \to D$ die folgende Ableitung für $||$:

$$\begin{array}{ll} \circ\,| & (j=1) \\ \circ\,|\,| & (i=1) \\ |\,| & (C \to D). \end{array}$$

4. Wir geben nun eine Neuformulierung für das *Inversionsprinzip*. Vorgelegt sei ein Kalkül K mit den definierenden Regeln

$$\begin{array}{ll} A_{i1}, \ldots, A_{in_i} \to A_i & (i=1, \ldots) \\ B_{j1}, \ldots, B_{jm_j} \to B_j & (j=1, \ldots). \end{array}$$

C und D seien Formeln des Kalküls. Es mögen die folgenden Voraussetzungen gelten:

(1) $C^\varrho \neq B_j^\sigma$ für alle ϱ, σ, j,

(2) $A_{i1}, \ldots, A_{in_i} \to D$ sei zulässig in K für jedes i,

(3) $\bar{A}_{ik} \cap \bar{D} \subseteq \bar{C} \cap \bar{A}_i$ für alle i, k,

(4) falls $C^\varrho = A_i^\sigma$, so $\varrho = \sigma$ für $\bar{C} \cap \bar{A}_i$ für alle ϱ, σ, i.

Dann ist $C \to D$ zulässig in K.

Begründung [1]): Es ist zu zeigen, dass jede Aussage, die in K mit Hinzunahme der Regel $C \to D$ abgeleitet werden kann, sich auch ohne diese Regel gewinnen lässt. Sei ein derartiger Beweis vorgelegt. Wir betrachten die erste Stelle, an der die Regel $C \to D$ angewendet wurde. Dort steht dann eine Aussage der Gestalt D^ϱ,

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A_{i1}^\sigma = A_{i1}^\tau \\ \vdots \\ A_{in_i}^\sigma = A_{in_i}^\tau \\ \vdots \\ C^\varrho = A_i^\sigma \\ \vdots \\ D^\varrho = D^\tau \end{array}$$

.

---

[1]) Wir sprechen nicht von einem *Beweis*, da es sich hier nicht um eine Ableitung in einem Kalkül handelt.

während vorher eine Aussage der Gestalt C^ϱ aufgetreten ist (vgl. die schematische Figur!). C^ϱ muss nach einer der Regeln des Kalküls gewonnen worden sein. Nach Voraussetzung (1) kommt dafür keine der B-Regeln in Frage. Es gibt also ein i und ein σ, sodass $C^\varrho = A_i^\sigma$, während im Beweise die Aussagen $A_{i1}^\sigma, \ldots, A_{in_i}^\sigma$ vorangehen. Es soll nun vermöge Voraussetzung (2) die Aussage D^ϱ aus den Aussagen $A_{i1}^\sigma, \ldots, A_{in_i}^\sigma$ unmittelbar durch Anwendung der zulässigen Regel $A_{i1}, \ldots, A_{in_i} \to D$ gewonnen werden. Dies geht genau dann, wenn es eine Einsetzung τ gibt, dergestalt dass

$$\tau = \begin{cases} \sigma \text{ für die Variablen der Menge } \bar{A}_{i1} \cup \ldots \cup \bar{A}_{in_i}, \\ \varrho \text{ für die Variablen der Menge } \bar{D}. \end{cases}$$

Dies kann als Definition für τ genommen werden, falls für die in beiden Bedingungen gemeinsam auftretenden Variablen dasselbe gefordert wird. Eine gemeinsame Variable ist eine Variable aus $\bar{A}_{ik} \cap \bar{D}$, also nach Voraussetzung (3) eine Variable aus $\bar{C} \cap \bar{A}_i$. Nun ist aber $C^\varrho = A_i^\sigma$. Daher stimmen nach Voraussetzung (4) die Einsetzungen ϱ und σ für diese Variablen überein.

Es ist nach dem Gang des Beweises einleuchtend, dass die Voraussetzungen nicht weiter eingeschränkt werden können. An einem *Beispiel* soll gezeigt werden, dass insbesondere Voraussetzung (4) erforderlich ist. K_0 sei ein Kalkül, in welchem genau alle aus der Konstanten | bildbaren Zeichenreihen ableitbar seien. a, b seien Variable, welche sich auf diese Zeichenreihen beziehen. K sei gegeben durch die beiden Regeln:

$$\begin{aligned} a, b &\to ab\,| && (i=1) \\ &\to || && (j=1). \end{aligned}$$

Es sei $C = ab\,|$, $D = a$. Die Voraussetzungen (1), (2), (3) sind erfüllt, (4) dagegen nicht, da die Einsetzung | für a, || für b und die umgekehrte Einsetzung dieselbe Spezialisierung von $ab\,|$ liefern. Die Regel $C \to D$ ist unzulässig in Bezug auf K. In K sind nämlich nur Aussagen ableitbar, welche aus mindestens zwei Strichen gebildet sind, während mit Hilfe von $C \to D$ die Aussage | gewonnen werden kann, wie der folgende Beweis zeigt:

$$\begin{aligned} &|| && (j=1) \\ &||||| && (i=1) \\ &| && (C \to D \text{ mit } | \text{ für } a, ||| \text{ für } b). \end{aligned}$$

5. Aus dem Inversionsprinzip erhält man leicht als *Korollar*: Gegeben sei ein Kalkül K mit den definierenden Regeln

$$\begin{aligned} &A_1, \ldots, A_n \to A && (i=1)\\ &B_{j1}, \ldots, B_{jm_j} \to B_j && (j=1, \ldots). \end{aligned}$$

Es mögen die folgenden Voraussetzungen gelten:

(a) $A^\varrho \neq B_j^\sigma$ für alle ϱ, σ, j,

(b) $A_l \subseteq A$ für ein festes l,

(c) Falls $A^\varrho = A^\sigma$, so $\varrho = \sigma$ für $\bar{A}$ für alle ϱ, σ.

Dann ist $A \to A_l$ zulässig in K.

Das Korollar ergibt sich aus dem Inversionsprinzip, wenn man $C=A$ und $D=A_l$ setzt. Die Voraussetzung (2) des Inversionsprinzips ergibt sich daraus, dass $A_1, \ldots, A_n \to A_l$ offenbar für beliebige Kalküle zulässig ist.

Man kann eine Formel *regulär* nennen, wenn sie die durch (c) ausgedrückte Eigenschaft hat, dass verschiedene Einsetzungen in die vorkommenden Variablen stets zu verschiedenen Spezialisierungen führen. Formeln mit höchstens einer Variablen sind trivialerweise regulär.

6. Zum Schluss soll noch eine Anwendung auf die Konjunktion besprochen werden. Vorgegeben sei ein beliebiger Kalkül K_0. Die Variable a soll sich auf die in K_0 ableitbaren Aussagen beziehen. $\wedge$ sei eine Konstante, welche nicht unter den zu K_0 gehörenden Konstanten auftritt. Wir bilden einen Kalkül K. Konstanten von K seien (1) die Konstanten von K_0, (2) das Symbol $\wedge$ und (3) die Klammern (,) (die auch schon Konstanten von K_0 sein dürfen). K werde mit Hilfe der Eigenvariablen p, q durch die folgenden Regeln definiert:

$$\begin{aligned} p, q \to (p \wedge q) \qquad & (i=1)\\ \to a \qquad & (j=1). \end{aligned}$$

Man erkennt, dass sich die Zulässigkeit der Regeln $(p \wedge q) \to p$ und $(p \wedge q) \to q$ nach dem Korollar ergibt. Dass $(p \wedge q)$ und a keine gemeinsamen Spezialisierungen besitzen, ergibt sich aus der Voraussetzung, dass $\wedge$ keine Konstante von K_0 sein soll. Die Regularität von $(p \wedge q)$ kann durch Induktion eingesehen werden.

Man beachte, dass in der ersten definierenden Regel Klammern auftreten. Bekanntlich schreibt man auf Grund des assoziativen Gesetzes die Konjunktion oft klammerfrei. Man könnte dies zum Anlass nehmen, die genannte Regel in der Form

$$p, q \rightarrow p \wedge q$$

zu schreiben [1]). Dies hätte jedoch zur Folge, dass die Conclusio die Eigenschaft der Regularität verlöre. Ist nämlich z.B. a_0 eine in K_0 ableitbare Zeichenreihe, so führt die Einsetzung $a_0 \wedge a_0$ für p und a_0 für q und die umgekehrte Einsetzung zu derselben Spezialisierung. Dann darf man sich nicht mehr in der geschilderten einfachen Weise auf das Inversionsprinzip berufen, wenn man die Zulässigkeit der beiden Umkehrregeln einsehen will.

---

[1]) So verfährt auch LORENZEN, [1], pag. 56.

BIBLIOGRAPHY

[1] P. LORENZEN, Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1955.

SOME REMARKS ON INTUITIONISM

A. HEYTING
Mathematisch Instituut der Universiteit van Amsterdam

1. There ought to be distinguished between

a) theories of the constructible;
b) constructive theories.

In a theory of the constructible, a certain class of mathematical objects is defined as that of constructible objects. Three points are essential here: (i) a mathematical theory is presupposed in which the class of constructible objects can de defined; (ii) the notion of constructibility is a defined notion, not a primitive notion; (iii) there is some liberty in the choice of a definition of the constructible, provided only it corresponds sufficiently to our intuitive notion of a mathematical construction.

The conferences of Prof. Mostowski and of Prof. Grzegorczyk dealt with theories of the constructible in this sense.

2. By a constructive theory I mean a theory in which an object is only considered as existing after it has been constructed. In other words, in a constructive theory there can be no mentioning of other than constructible objects.

Personally, I am attracted by constructive mathematics, because I am unable to give an intelligible sense to the assertion that a mathematical object which has not been constructed, exists. However, I feel that even those who believe in non-constructive existence, may be interested in intuitionistic mathematics. They will need an effort of their will to limit themselves to constructive methods as described here. The exigency that only constructible objects can be considered or mentioned, suffices to explain the particularities of intuitionistic mathematics.

3. It follows from the fact that only constructible objects are considered to exist, that they do not form a subclass of the class of all mathematical objects. In the constructive theory there can

be no reference to a preceding mathematical system; it must, by its nature, be self-contained. The notion of a constructible object must be a primitive notion in this sense that it must be clear what it means that a given operation is the construction of a certain object. It has been explained by Miss Péter in her conference in this colloquium that any attempt to define the notion of a constructive theory leads into a vicious circle, because the definition always contains an existential quantifier, which in its turn must be interpreted constructively. Also there can be nothing arbitrary in the notion of a constructible object.

4. Though mathematical constructions are originally mental operations, symbolization is necessary to a certain extent, for practical reasons. However, in a constructive theory the symbolic language will be considered to express mathematical constructions, so that every formula will admit an immediate and unique interpretation. For instance, the interpretation of the existential quantifier will be determined by the exigency of constructivity. A formula of the form $(\exists x)A(x)$ can have no other meaning than: "A mathematical object x satisfying the condition $A(x)$ has been constructed".

5. It is sometimes clarifying to formalize a chapter of constructive mathematics, but it is never necessary. Formalization is not an essential feature of constructive mathematics. For the formal system all that has been said about symbolization remains valid.

6. The interpretation of the generalizing quantifier gave rise to difficulties of another sort. Evidently $(\forall x)A(x)$ means: "Whenever a mathematical object has been constructed, it satisfies $A(x)$". In practically all cases $A(x)$ is of the form $B(x) \to C(x)$, where $B(x)$ expresses that x belongs to a previously defined class of mathematical objects (natural numbers, sequences of natural numbers, etc.), so that the quantifier is restricted to this class. Brouwer was led to the introduction of the so-called choice-sequences by the question what is the exact meaning of a generalizing quantifier ranging over all sequences of natural numbers (or, what comes to the same, over all real numbers). An individual sequence is defined if a law is given by which the components of

the sequence can be computed one after the other. Thus it would be natural to interpret $(\forall x)A(x)$, where x ranges over sequences, by "For every law which defines a sequence x, this sequence satisfies $A(x)$". However, when Brouwer gave his definition, general recursive functions had not yet been invented, so that the notion of an arbitrary law was not very clear. But even if we accept Church's thesis and thus identify the notion of an arbitrary law with that of an arbitrary general recrusive function, this interpretation of $(\forall x)A(x)$ is unsatisfactory because it contains a redundant exigency. Most theorems on all sequences are valid independently of the hypothesis that the sequence is determined by a law. It is sufficient to suppose that the components of the sequence are determined one after the other, no matter by which means, in other words, the theorems hold for choice-sequences. (The name "choice-sequence" is misleading, because it seems to imply that the components are determined by acts of choice; the only essential feature is that it does not matter by which means they are determined one after the other.) For choice-sequences $(\forall x)A(x)$ must be interpreted as follows: "Before the choices for the sequence x are made, we are sure that it will satisfy $A(x)$". In this way choice-sequences can be introduced in intuitionistic mathematics, though they are not constructible objects in the strict sense.

AN ARGUMENT AGAINST THE PLAUSIBILITY OF CHURCH'S THESIS

LÁSZLÓ KALMÁR
Bolyai Institute, The University, Szeged, Hungary

1. In his famous investigations on unsolvable arithmetical problems [1], Church used a working hypothesis, viz. the identification of the notion of effectively calculable functions with that of general recursive (or, equivalently, λ-definable) functions. This working hypothesis is known under the name Church's thesis. It has several equivalent forms – e.g. Turing's identification of the notion of effectively calculable functions with that of functions computable by means of a Turing machine [10], or Markov's principle of the normalizability of algorithms [6] or [7] – which are generally accepted in the investigations on unsolvable mathematical problems.

In the present contribution, I shall not disprove Church's thesis. Church's thesis is not a mathematical theorem which can be proved or disproved in the exact mathematical sense, for it states the identity of two notions only one of which is mathematically defined while the other is used by mathematicians without exact definition. Of course, Church's thesis can be masked under a definition: we call an arithmetical function effectively calculable if and only if it is general recursive, venturing however that once in the future, somebody will define a function which is on the one hand, not effectively calculable in the sense defined thus, on the other hand, its value obviously can be effectively calculated for any given arguments. Similarly, in defining a problem, containing a parameter which runs through the natural numbers, to be solvable if and only if its characteristic function [1]) is general recursive, one takes the risk that somebody in the future will solve a problem

---

[1]) The characterestic function of a problem with parameter is defined as the function taking the value 1 or 0 for a value of the parameter according as "yes" of "no" is the correct answer to the particular case of the problem corresponding to this value of the parameter.

which is unsolvable under this definition. For this reason, it seems me better to regard such statements as Church's thesis, or the identity of solvable problems with those having a general recursive characteristic function as propositions rather than definitions [1]), however, not mathematical but "pre-mathematical" ones. The more than two pages [2]) of CHURCH's paper [1] filled with plausibility (hence pre-mathematical) arguments for his thesis, show that his opinion about this question does not differ much from mine.

Now, I shall give some arguments, of course likewise pre-mathematical ones, *against* Church's thesis. In these arguments, I shall freely use the *tertium non datur*, hence, they do not claim to be accepted by adherents of contructivistic doctrines which reject the *tertium non datur*.

I do not discuss the question, dealt with by R. Péter [3]), whether every general recursive function can be regarded as effectively calculable. However, I disbelieve in the converse statement, viz. that every effectively calculable function is general recursive, provided we regard as effectively calculable any arithmetical function, the value of which can be effectively calculated for any given arguments in a finite number of steps, irrespective how these steps are and how they depend on the arguments for which the function value is to be calculated [4]). In particular, I do not suppose the calculation method to be "uniform". By the way, such an uniformity supposition seems to have no objective meaning. For a school-boy, the method for the solution of the diverse arithmetical problems he has to solve does not seem uniform until he learns to solve equations; and several methods in algebra, geometry and theory of numbers which are now regarded group-theoretic methods were not considered as uniform before group-theory has been discovered.

---

[1]) For a similar opinion, see [9], footnote 8 on p. 105. However, I do not agree in considering the really fundamental discovery of Church as a discovery in the (absolute) limitations of the mathematizing power of Homo Sapiens.

[2]) pp. 356–358.

[3]) In a lecture on the same conference [8].

[4]) Of course, the definition of the calculation steps is not allowed to require a previous knowledge of the function value to be calculated but it has to be based only on the definition of the function itself. Without this restriction, every arithmetical function would be "effectively calculable."

2. In order to confirm my disbelief in the general recursivity of every effectively calculable function, I shall not give an instance for an arithmetical function which is at the one hand, not general recursive, for which, on the other hand, an obvious method can be given for the effective calculation of its value in a finite number of steps for any given arguments. However, for Kleene's instance [1]) of a not general recursive function defined by

$$\psi(x)=\mu_y(\varphi(x,y)=0)=\begin{cases}\text{the least natural number } y \text{ for which}\\ \quad \varphi(x,y)=0 \text{ if there is such an } y,\\ 0 \quad \text{if there is no natural number } y \text{ such}\\ \quad \text{that } \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

with an appropriate general recursive function φ of two arguments, I shall show that the supposition that ψ is not effectively calculable – as a matter of fact, a corollary of Church's thesis – has strange consequences.

Indeed, on the one hand, for any natural number p for which a natural number y with $\varphi(p,y)=0$ exists, an obvious method for the calculation of the least such y, i.e. of $\psi(p)$ can be given: calculate in succession the values $\varphi(p,0)$, $\varphi(p,1)$, $\varphi(p,2)$, ... (each of which can be calculated, on account of the general recursivity of φ, in a finite number of steps), until we obtain a natural number q for which we have $\varphi(p,q)=0$ and take this q. On the other hand, for any natural number p for which we can prove, not in the frame of some fixed postulate system but by means of arbitrary – of course, correct – arguments that no natural number y with $\varphi(p,y)=0$ exists, we have also a method to calculate the value $\psi(p)$ in a finite number of steps: prove that no natural number y with $\varphi(p,y)=0$ exists, which requires in any case but a finite number of steps, and gives immediately the value $\psi(p)=0$. Hence, supposing that ψ is not effectively calculable and applying the *tertium non datur* – which has been utilized already in the definition of the function ψ – we infer the existence of a natural number p for which, on the one hand, *there is no natural number y such that* $\varphi(p,y)=0$, on the other hand, *this fact cannot be proved by any correct means* – a consequence of Church's thesis which seems very unplausible.

---

[1]) See [5], p. 741, Theorem XIV.

3. The proposition stating that, for this p, there is a natural number y such that $\varphi(p, y) = 0$, would be undecidable, with other words, the problem if this proposition holds or not, would be unsolvable, not in Gödel's sense of a proposition neither provable nor disprovable in the frame of a fixed postulate system, nor in Church's sense of a problem with a parameter for which no general recursive method exists to decide, for any given value of the parameter in a finite number of steps, which is the correct answer to the corresponding particular case of the problem, "yes" or "no". As a matter of fact, the problem, if the proposition in question holds or not, does not contain any parameter and, supposing Church's thesis, *the proposition itself can be neither proved nor disproved*, not only in the frame of a fixed postulate system, but *even admitting any correct means*. It cannot be proved for it is false and it cannot be disproved for its negation cannot be proved. According to my knowledge, this consequence of Church's thesis, viz. the existence of a proposition (without parameter) which is undecidable in this, *really absolute* sense, has not been remarked so far.

However, this "absolutely undecidable proposition" has a defect of beauty: we can decide it, for we know, it is false. Hence, *Church's thesis implies the existence of an absolutely undecidable proposition which can be decided viz., it is false, or*, in another formulation, *the existence of an absolutely unsolvable problem with a known definite solution*, a very strange consequence indeed.

4. Of course, this consequence of Church's thesis cannot be proved by any correct means, for its proof had to contain, on the one hand, a disproof of the proposition in question, on the other hand, a proof that it cannot be disproved (neither proved), which is impossible.

Taking into account the form of the proposition in question, viz. $\exists y\mathbf{P}(y)$ with a general recursive, hence effectively decidable property $\mathbf{P}$, we can show that even its absolute undecidability cannot be proved by any correct means. Indeed, if a proposition $\exists y\mathbf{P}(y)$ with an effectively decidable $\mathbf{P}$ is true, i.e. a natural number q with the property $\mathbf{P}$ exists, then this q can be found and the question if $\mathbf{P}(q)$ holds or not can be decided in a finite number of steps, of course, the latter with the result that $\mathbf{P}(q)$ holds. Hence, the

question whether $\exists y\mathbf{P}(y)$ holds can be decided, viz. with the result "yes", for $\exists y\mathbf{P}(y)$ is a consequence of $\mathbf{P}(q)$. By contraposition, if a proposition of the form $\exists y\mathbf{P}(y)$ with an effectively decidable $\mathbf{P}$ is undecidable, then it does not hold. Hence, if the undecibility of such a proposition $\exists y\mathbf{P}(y)$ could be proved, then the negation of that proposition could be proved too, thus, the proposition in question could be decided, hence it would not be really undecidable, which is impossible if only correct means are allowed.

The fact that some consequences of Church's thesis cannot be proved by any correct means can be regarded, I think, as arguments against its plausibility.

5. In another paper [2], Church has given a definition of the notion of constructivity of ordinals belonging to the second number class. In this paper, he utters as follows: "It is my present belief that the definition is absolute ... — towards those who do not find this convincing the definition may perhaps be allowed to stand as a challenge, to find either a less inclusive definition which cannot be shown to exclude some ordinal which ought reasonably to be allowed as constructive, or a more inclusive definition which cannot be shown to include some ordinal of the second number class which cannot be seen to be constructive." I agree with Church that, supposing Church's thesis, his definition is all right. Hence, his above words amount to declare his thesis as a challenge, to find, instead of the class of general recursive functions, either a less inclusive class which cannot be shown to exclude some function which ought reasonably to be allowed as effectively calculable, or a more inclusive class which cannot be shown to include some arithmetical function which cannot be seen to be effectively calculable. Now, I assert as an answer to this form of Church's challenge: by subjoining all arithmetical functions ψ defined by an equation of the form $\psi(x) = \mu_y(\varphi(x, y) = 0)$ with a general recursive function φ of two arguments to the class of the general recursive functions, we obtain a more inclusive class satisfying the above requirements; moreover, for any such function ψ and any given natural number p, the following method allows to calculate the value $\psi(p)$ in a finite number of steps. Calculate in succession the values $\varphi(p, 0)$, $\varphi(p, 1)$, $\varphi(p, 2)$, ... and simultaneously try to prove by all correct means that none of them equals 0, until we find

either a (least) natural number q for which $\varphi(p, q) = 0$ or a proof of the proposition stating that no natural number y with $\varphi(p, y) = 0$ exists; and consider in the first case this q, in the second case 0 as result of the calculation. I cannot prove my assertion, just as Church did not prove his thesis. However, if a challenge might be allowed as an argument, my above assertion may perhaps be allowed to stand as a challenge, to find a general recursive function φ and a natural number p and to prove that for this φ and p, the above method fails. I am in the agreable position of not to have to be afraid that somebody will do this. For he ought to prove, for his φ and p, amoung others that calculating in succession the values $\varphi(p, 0)$, $\varphi(p, 1)$, $\varphi(p, 2)$, ..., we never get 0, i.e., there is no y for which $\varphi(p, y) = 0$; if he can do this, than he cannot prove (by correct means) this proposition to be not provable.

6. In my arguments I used the somewhat vague concept of a proof by arbitrary correct means [1]); perhaps, this may be allowed in a pre-mathematical argumentation. However, in the argument of section 2, I can replace this concept by a more definite one. Indeed, let be S a system of equations serving as a general recursive definition of the function φ; let be $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ $(= \varphi)$ the function symbols occurring in S. Consider the postulate system P defined as follows [2]). The formulae of P are formed out of the constant symbol 0 as well as numerical variables by means of the function symbols $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ (with prescribed numbers of arguments), the equality symbol, further by means of predicate variables, truth-

---

[1]) At the Third All-Union Mathematical Congress of the Soviet Union, I got informed that Novikov proposed the hypothesis, known under the name Novikov's prognosis, that this concept can be defined exactly, in the same sense as that of effective calculability by its identification with general recursivity. As to my opinion about this hypothesis, see section 7 of the present paper.

[2]) In [5], loc. cit., φ has been proved to be primitive recursive. By refining the same arguments, φ can be replaced by an *elementary* function. Hence P can be replaced by the postulate system P' defined as follows. The formulae of P' are formed out of the symbol 0 as well as numerical variables by means of the function and operator symbols $\ldots'$, $(\ldots + \ldots)$, $|\ldots - \ldots|$, $(\ldots \cdot \ldots)$, $[\ldots/\ldots]$, $\sum_{\ldots \leqq \ldots} \ldots$, $\prod_{\ldots \leqq \ldots} \ldots$ (for ... before $\leqq$ always a numerical variable has to stand), the symbols for variable descriptive

functions and quantifiers. The postulates of P are the equations belonging to S as well as those of the lower predicate calculus with identity; also, the rules of inference of P are those of the lower predicate calculus. Moreover, consider the consistent extensions of P by means of some formulae of P as new postulates. Now, the arguments of section 2 can be repeated with the concept of a proof within such a consistent extension of P instead of that of a proof by arbitrary correct means. Indeed, if in such an extension of P, we can prove for a natural number p the formula which formalizes the proposition stating the non-existence of a natural number y with $\varphi(p, y)=0$, then this proposition is true indeed, hence we have $\psi(p)=0$. For in the opposite case we should have $\varphi(p, q)=0$ for some natural number q; hence by the definition of the general recursive functions, the formula of P formalizing this fact, therefore by the rules of the lower predicate calculus, the formula of P which formalizes the proposition stating the existence of a natural number y with $\varphi(p, y)=0$ could be proved in the same extension of P as well, contrarily to its consistency. Hence, the same argument as in section 2 shows that Church's thesis implies the existence of a natural number p for which, on the one hand, there is no natural number y such that $\varphi(p, y)=0$, on the other hand, the formula of P formalizing this fact cannot be proved in any consistent extension of P.

However, this consequence of Church's thesis can be easily disproved. Indeed, subjoining the formula of P which formalizes

---

functions and predicates, the equality symbol, the truth functions and quantifiers. The postulates of P' are the formulae

$$(a + 0) = a, \qquad (a \cdot 0) = 0,$$
$$(a + b') = (a + b)', \qquad (a \cdot b') = ((a \cdot b) + a),$$
$$|(a + b) - a| = b, \qquad [a/0] = 0,$$
$$|a - (a + b)| = b, \qquad [(((a + c') \cdot b) + a)/(a + c')] = b,$$
$$\sum_{x \leqq 0} f(x) = f(0) \qquad \prod_{x \leqq 0} f(x) = f(0),$$
$$\sum_{x \leqq a'} f(x) = \left(\sum_{x \leqq a} f(x) + f(a') \right), \qquad \prod_{x \leqq a'} f(x) = \left(\prod_{x \leqq a} f(x) \cdot f(a') \right)$$

as well as those of the lower predicate calculus with identity; the rules of inference of P' are those of the lower predicate calculus with variables for descriptive functions. In the abstract of my lecture on the Conference, I used this postulate system; however, it does not give any advantage.

the proposition stating that $\varphi(p, a) \neq 0$ (with a free variable a), we should get a consistent extension of P. This follows e.g. from Gentzen's proof for the consistency of the postulate system of arithmetic [1]). Indeed, we should have $\varphi(p, q) \neq 0$ for any natural number q, i.e., the new postulate is a verifiable formula of P. On the other hand, in this extension of P, by means of the rules of the lower predicate calculus, we can prove the formula of P which formalizes the proposition stating that there is no natural number y for which $\varphi(p, y) = 0$, contrarily to the above consequence of Church's thesis.

Formally, this argument seems like an indirect disproof of Church's thesis. However, in order to calculate the value $\psi(p)$ for a natural number p for which there is no natural number y with $\varphi(p, y) = 0$, we have to give a consistent extension of P in the frame of which the formula of P formalizing this fact can be proved. Now, it is easy to define such an extension by means of the subjunction mentioned above; however, in order to prove its consistency, we have to prove (by some correct means) the verifiability of the new postulate, i.e. that there is no natural number y for which we have $\varphi(p, y) = 0$. Hence, the calculation method, for any given p, of the value $\psi(p)$ refers still to the concept of an arbitrary correct proof. Therefore, the new form of my argument is as heuristic as the old one.

7. By the above arguments, I tried to show some motives of my opinion which can be summarized as follows. There are pre-mathematical concepts which must remain pre-mathematical ones, for they cannot permit any restriction imposed by an exact mathematical definition. Amoung these belong, I am convinced, such concepts as that of effective calculabity, or of solvability, or of provability by arbitrary correct means, the extension of which cannot cease to change during the development of Mathematics [2]).

---

[1]) See [3] or [4]. Of course, also a simpler proof is possible for the postulate system in question is but a rudiment of that of arithmetic.

[2]) Of course, from my above arguments other consequences can be drawn, if one wants to do so. For instance, one can insist upon Church's thesis and regard these arguments as quasi-refutations of the *tertium non datur*. So did Markov during the Third All-Union Mathematical Congress in Moscow 1956.

BIBLIOGRAPHY

[1] A. Church, An unsolvable problem of elementary number theory, American J. of Math., **58** (1936), 345–363.

[2] ————, The constructive second number class, Bulletin of the American Math. Soc., **44** (1938), 224–232.

[3] G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Annalen, **112** (1936), 493–565.

[4] ————, Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbewises für die reine Zahlentheorie, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge, **4** (1938), 19–44.

[5] S. C. Kleene, General recursive functions of natural numbers, Math. Annalen **112** (1936), 727–742.

[6] A. A. Markov, Teoriya algorifmov, Az Első Magyar Mat. Kongresszus Közl. (Proceedings of the First Hungarian Math. Congress), Budapest, 1950, 191–203.

[7] ————, Teoriya algorifmov, Trudy Mat. Inst. im. V. A. Steklova, **42** (1954), 1–375.

[8] R. Péter, Rekursivität und Konstruktivität. This volume, p. 226.

[9] E. L. Post, Finite combinatory processes—formulation I, Journal of symbolic logic, **1** (1936), 103–105.

[10] A. M. Turing, On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. of the London Math. Soc. (2) **42** (1937), 230–265, **43** (1937), 544–546.

COUNTABLE FUNCTIONALS

S. C. KLEENE
Department of Mathematics, University of Wisconsin

We call a functional "countable", if each value of it is determined by a finite amount of information about its function argument. For the items of information by which such a functional is given in its entirety are countable (and not of cardinality $2^{\aleph_0}$ as they are for an arbitrary functional of type 2, or $2^{2^{\aleph_0}}$ for type 3, etc.). Countable functionals have applications in discussing constructive interpretations of classical mathematics [1]).

We presuppose familiarity with some of the notation and terminology of [3] [2]), but not except in § 4 and 5.4–5.8 with our

---

[1]) They are so applied by Kreisel [6] in studies of an (unpublished) interpretation of intuitionism by Gödel. Our own interpretation of intuitionism using functionals, which is an unpublished extension (and modification) of [1] along the lines proposed in [2], uses only recursive functionals of type 2, which are all of them countable.

The present investigation of countable functionals arose as an offshoot from the work reported in [5], in response to a question raised (in 1956) by Kreisel whether a certain property of recursive functions (cf. [3] Theorem III p. 279) extends to recursive functionals. It does not with the arbitrary functional arguments used in [5] ([5] LII), but does for recursively countable functionals (Theorem 3 below).

Meanwhile Kreisel formulated a "continuity" property of functionals with the same aim as our countability property. Subsequently we learned, at the Summer Institute for Mathematical Logic, sponsored by the American Mathematical Society and held at Cornell University, July 1–August 2, 1957, of work by Martin Davis in this direction.

Publishers' note. Summaries of lectures at the Summer Institute dealing with Kleene's interpretation of intuitionism, Davis' work, and constructive functionals, appear in the Appendix of this volume on pages 281, 285, 290, respectively.

[2]) Cf. [3] pp. 538 ff. Also we use the notations

$$\bar{\psi}(x) = \prod_{i<x} p_i^{\psi(i)+1},\ \bar{\psi}(x;y) = \prod_{i<x} p_i^{\psi(i,y)+1},\ \bar{\psi}(x,y) =$$

$$= \prod_{i<x} \exp \prod_{j<y} p_i^{\psi(i,j)+1},\ \text{etc.};\ \mathrm{Seq}\,(w) \equiv w \neq 0\ \&\ (i)_{i<\mathrm{lh}(w)}[(w)_i \neq 0],$$

$$\mathrm{Ext}\,(w,u) \equiv \mathrm{Seq}\,(w)\ \&\ (Ex)_{x\leq \mathrm{lh}(w)}[u = \prod_{i<x} p^{(w)_i}].$$

current work [5] on primitive, general and partial recursive functionals which for types $\geqq 3$ take arbitrary 1-place functionals of lower types as arguments.

1. Countable functionals: definition

1.1. For a theory of arbitrary functionals (as in [5]), we take as *type*-0 objects the natural numbers 0, 1, 2, ... (using as variables $a, b, c, \ldots$ or $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \ldots$), and as *type-j* objects for $j>0$ the (completely defined) 1-place functions from type-j–1 objects to natural numbers (using as variables $\alpha^j, \beta^j, \gamma^j, \ldots$, or for type-1 simply $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$). Of course, only for $j \geqq 1$ ($j \geqq 2$) are the type-j objects functions (functionals).

1.2. We now specialize for $j \geqq 2$ from the type-j objects just described to those which $\in \mathscr{C}$ (or are *countable*). We begin with the case $j=2$.

A type-2 object $\alpha^2 \in \mathscr{C}$, if, for each α^1, $\alpha^2(\alpha^1)$ depends on $\alpha^1(a)$ for only finitely many values of a. In other words, $\alpha^2 \in \mathscr{C}$, if, to each 1-place number-theoretic function α^1, there exists a finite set $a_1, \ldots, a_k$ of natural numbers such that, whenever $\beta^1(a_i) = \alpha^1(a_i)$ for $i=1, \ldots, k$, then $\alpha^2(\beta^1)=\alpha^2(\alpha^1)$.

Now consider the number $\bar{\alpha}^1(x)$ [1]. For $\alpha^2 \in \mathscr{C}$, as x increases the value of $\bar{\alpha}^1(x)$ will eventually determine the value of $\alpha^2(\alpha^1)$, namely it will when $x \geqq 1+\max(a_1, \ldots, a_k)$ if $k>0$ ($x \geqq 0$ if $k=0$); for such x, $(\beta^1)[\bar{\beta}^1(x)=\bar{\alpha}^1(x) \rightarrow \alpha^2(\beta^1)=\alpha^2(\alpha^1)]$. The determination can be expressed by use of a type-1 function $\alpha^{(2)}(s)$, in the following way. As x increases, $\alpha^{(2)}(\bar{\alpha}^1(x))$ shall remain 0 as long as $\alpha^2(\alpha^1)$ is undetermined. However for some value of x (and maybe more than one) $\alpha^{(2)}(\bar{\alpha}^1(x))$ shall assume a value different from 0 (which makes it known that $\alpha^2(\alpha^1)$ is determined), and moreover such a value shall always be $\alpha^2(\alpha^1)+1$ (whence the value of $\alpha^2(\alpha^1)$ can be obtained). In symbols, for each α^1,

$$(1) \qquad (Ex)[\alpha^{(2)}(\bar{\alpha}^1(x))>0],$$

$$(2) \qquad (x)[\alpha^{(2)}(\bar{\alpha}^1(x))>0 \rightarrow \alpha^{(2)}(\bar{\alpha}^1(x))=\alpha^2(\alpha^1)+1].$$

Such a function $\alpha^{(2)}$ we call an *associated function* or *associate* of α^2. Each associate $\alpha^{(2)}$ of a type-2 function $\alpha^2 \in \mathscr{C}$ is a number-theoretic

---

[1]) See note 2 on page 81.

function which contains all the information contained in α^2; for indeed, by (1) and (2),

(3) $\qquad \alpha^2(\alpha^1) = \alpha^{(2)}(\bar{\alpha}^1(x_1)) \dot{-} 1$ for $x_1 = \mu x[\alpha^{(2)}(\bar{\alpha}^1(x)) > 0]$.

Conversely, if any type-2 function α^2 has an associate (i.e. a function satisfying (1) and (2) for each α^1), then $\alpha^2 \in \mathscr{C}$.

1.3. We can distinguish as the *principal associate* $\alpha_P^{(2)}$ of an $\alpha^2 \in \mathscr{C}$ that associate $\alpha_P^{(2)}$ such that $\alpha_P^{(2)}(\bar{\alpha}^1(x)) > 0$ exactly for $x = \mu x(\beta^1)[\bar{\beta}^1(x) = \bar{\alpha}^1(x) \to \alpha^2(\beta^1) = \alpha^2(\alpha^1)]$, i.e. for exactly the least x for which $\alpha^2(\alpha^1)$ is determined by $\bar{\alpha}^1(x)$ (or by $\alpha^1(0), \ldots, \alpha^1(x-1)$), and $\alpha_P^{(2)}(s) = 0$ when $\overline{\mathrm{Seq}}(s)$ [1]).

However we do not wish to confine ourselves to the use of principal associates, since we are particularly interested in those $\alpha^2 \in \mathscr{C}$ which have recursive associates $\alpha^{(2)}$ (cf. § 3). The functional

$$\alpha^2(\alpha^1) = \begin{cases} 0 \text{ if } \overline{T}_1(\alpha^1(0), \alpha^1(0), \alpha^1(1)), \\ \alpha^1(1)+1 \text{ if } T_1(\alpha^1(0), \alpha^1(0), \alpha^1(1)) \end{cases}$$

has the primitive recursive associate

$$\alpha^{(2)}(s) = \begin{cases} 1 \text{ if } T_1((s)_0 \dot{-} 1, (s)_0 \dot{-} 1, (s)_1 \dot{-} 1) \,\&\, \mathrm{lh}(s) = 2, \\ (s)_1 \text{ if } T_1((s)_0 \dot{-} 1, (s)_0 \dot{-} 1, (s)_1 \dot{-} 1) \,\&\, \mathrm{lh}(s) = 2, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

But its principal associate $\alpha_P^{(2)}$ is not general recursive, since $(x)\overline{T}_1(a, a, x) \equiv \alpha_P^{(2)}(2^{a+1}) = 1$ (cf. [3] p. 283).

1.4. Countability of higher-type functionals is defined by proceeding in the same way from the associated number-theoretic functions for the preceding type as we have just proceeded from the number-theoretic functions α^1 to the countable functionals α^2.

To minimize exceptions to the notation and terminology, let us say that for $j = 0$, 1 each type-j object $\alpha^j \in \mathscr{C}$ (or is *countable*) and has itself as (sole) *associate* $\alpha^{(j)}$.

Now for $j \geqq 2$ (including the case $j = 2$ already considered in 1.2, since $\alpha^{(1)} = \alpha^1$): A functional $\alpha^j \in \mathscr{C}$ (or is *countable*), if, for each $\alpha^{j-1} \in \mathscr{C}$ and each choice of an associate $\alpha^{(j-1)}$ of α^{j-1}, the value of $\alpha^j(\alpha^{j-1})$ depends on $\alpha^{(j-1)}(a)$ for only finitely many values of a. Equivalently, $\alpha^j \in \mathscr{C}$, if α^j has an *associated function* or *associate*

---

[1]) See note 2 on page 81.

$\alpha^{(j)}$, i.e. a type-1 function $\alpha^{(j)}$ such that, for each $\alpha^{j-1} \in \mathscr{C}$ and each choice $\alpha^{(j-1)}$ of an associate of α^{j-1},

$$(4) \qquad (Ex)[\alpha^{(j)}(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)) > 0],$$

$$(5) \qquad (x)[\alpha^{(j)}(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)) > 0 \rightarrow \alpha^{(j)}(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)) = \alpha^{j}(\alpha^{j-1}) + 1],$$

whence

$$(6) \qquad \alpha^{j}(\alpha^{j-1}) = \alpha^{(j)}(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x_1)) \dot{-} 1 \text{ for } x_1 = \mu x[\alpha^{(j)}(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)) > 0].$$

We may write $\mathscr{C}^j$ for the set of the type-j objects which $\in \mathscr{C}$.

The property of an α^j of belonging to $\mathscr{C}$ involves the behavior of $\alpha^j(\alpha^{j-1})$ only for $\alpha^{j-1} \in \mathscr{C}$, and (when $j \geqq 2$) for such α^{j-1} the value of $\alpha^j(\alpha^{j-1})$ depends only on values of $\alpha^{j-1}(\alpha^{j-2})$ for $\alpha^{j-2} \in \mathscr{C}$. An $\alpha^{(j)}$ contains all the information contained in α^j relative to arguments α^{j-1} which $\in \mathscr{C}$.

1.5. Here we have been supposing the objects of types 0, 1, ..., j for the j in question to be as in [5] and 1.1. For a theory of countable functionals by itself there is the obvious alternative for $j \geqq 3$ of taking the domain of each α^k to be simply $\mathscr{C}^{k-1}$, for each

$$k = (1, 2,) \; 3, \ldots, j,$$

each $\mathscr{C}^k$ being then defined in turn as a subset of the functions from the $\mathscr{C}^{k-1}$ already defined to the natural numbers.

1.6. Let $\mathfrak{a}$ be a list of variables, each of a given one of the types considered above (1.1 or 1.5), and let $\varphi(\mathfrak{a})$ be a function which is completely defined (at least for each variable α_i^j of the list $\mathfrak{a}$ ranging on $\mathscr{C}^j$). We then say $\varphi(\mathfrak{a}) \in \mathscr{C}$ (or is *countable*), if, for each $\mathfrak{a}$ made up of members of $\mathscr{C}$ and each choice $\mathfrak{a}^{(\,)}$ of respective associates of $\mathfrak{a}$, the value of $\varphi(\mathfrak{a})$ depends on only finitely many values of $\alpha_i^{(j)}$ in the case of each one α_i^j of $\mathfrak{a}$ which is a function, i.e. has $j > 0$. Then and only then $\varphi(\mathfrak{a})$ has an "associated function" or "associate" $\varphi^{(\,)}(\mathfrak{s})$ where $\mathfrak{s}$ are number-variables corresponding 1–1 to the variables $\mathfrak{a}$. Here, to illustrate, by an *associate* of a function $\varphi(a, \alpha_2^3, \alpha_3^3, \alpha^4)$, we mean a function $\varphi^{(\,)}(a, s_2, s_3, s_4)$ such that, for each $a, \alpha_2^3, \alpha_3^3, \alpha^4 \in \mathscr{C}$ and each choice $\alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}, \alpha^{(4)}$ of associates of $\alpha_2^3, \alpha_3^3, \alpha^4$, respectively,

$$(7) \qquad (Ex)[\varphi^{(\,)}(a, \bar{\alpha}_2^{(3)}(x), \bar{\alpha}_3^{(3)}(x), \bar{\alpha}^{(4)}(x)) > 0],$$

$$(8) \qquad \begin{cases} (x)[\varphi^{(\,)}(a, \bar{\alpha}_2^{(3)}(x), \bar{\alpha}_3^{(3)}(x), \bar{\alpha}^{(4)}(x)) > 0 \\ \qquad \rightarrow \varphi^{(\,)}(a, \bar{\alpha}_2^{(3)}(x), \bar{\alpha}_3^{(3)}(x), \bar{\alpha}^{(4)}(x)) = \varphi(a, \alpha_2^3, \alpha_3^3, \alpha^4) + 1], \end{cases}$$

whence

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi(a, \alpha_2^3, \alpha_3^3, \alpha^4) = \varphi^{(\ )}(a, \bar{\alpha}_2^{(3)}(x_1), \bar{\alpha}_3^{(3)}(x_1), \bar{\alpha}^{(4)}(x_1)) \dot{-} 1 \\ \qquad\qquad \text{for } x_1 = \mu x[\varphi^{(\ )}(a, \bar{\alpha}_2^{(3)}(x), \bar{\alpha}_3^{(3)}(x), \bar{\alpha}^{(4)}(x)) > 0]. \end{cases}$$

(When $\mathfrak{a}$ is number [variables only, $\varphi(\mathfrak{a}) \in \mathscr{C}$ and is] its own *associate.*)

1.7. When $\mathfrak{b}$ includes function variables: If $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{C}$, then for each fixed $\mathfrak{a}$ (each of which) $\in \mathscr{C}$, $\lambda\mathfrak{b}\,\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{C}$ with an associate $\varphi_{\mathfrak{a}}^{(\ )}(\mathfrak{F})$ which is primitive recursive uniformly in any associates $\varphi^{(\ )}, \mathfrak{a}^{(\ )}$ of $\varphi, \mathfrak{a}$.[1]) Thus, continuing from the example in 1.6, $\lambda\beta^3\beta^4\,\varphi(a, \alpha^3, \beta^3, \beta^4)$ has the associate $\lambda s_3 s_4\,\varphi^{(\ )}(a, \bar{\alpha}^{(3)}(\mathrm{lh}(s_3)), s_3, s_4)$. (When $\mathfrak{b}$ [$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$] is only number variables, $\lambda\mathfrak{b}\,\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{C}$ and is its own associate, and is general [primitive] recursive uniformly in $\varphi^{(\ )}, \mathfrak{a}^{(\ )}$.)

2. Construction of countable functionals

2.1. Theorem 1. *For each $j \geqq 1$, there are a primitive recursive predicate* $\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)$ ("r_0, r_1 are j-consistent") *and a primitive recursive function* $\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1)$ ("a j-extension of r_0 consistent with r_1") *with the following properties (where* $s_0 = \mathrm{lh}(r_0)$, $s_1 = \mathrm{lh}(r_1)$):

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{Cons}^j(r_0, r_1) \equiv \{\textit{there exist an } \alpha^j \in \mathscr{C}, \textit{ and two associates} \\ \qquad\qquad \alpha_0^{(j)}, \alpha_1^{(j)} \textit{ of } \alpha^j, \textit{ such that } r_0 = \bar{\alpha}_0^{(j)}(s_0), r_1 = \bar{\alpha}_1^{(j)}(s_1)\}. \end{cases}$$

When $\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)$, *then* $\alpha_0^{(j)}(s) = \mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1)$, $\alpha_1^{(j)}(s) = \mathrm{ext}^j(s, r_1, r_0)$ *are such associates.*

As soon as we have the theorem for a given j, we can infer the following corollary for that j. The proof of the theorem, by induction on j with a double basis, follows the corollary.

Corollary 1. *Define*

$$\mathrm{Cons}^j(r) \equiv \mathrm{Cons}^j(r, r), \qquad \mathrm{ext}^j(s, r) = \mathrm{ext}^j(s, r, r).$$

---

[1]) Statements of the form that $\varphi(\mathfrak{F})$ is primitive (general) recursive uniformly in Ψ mean that $\varphi(\mathfrak{F}) = \mathsf{F}(\mathfrak{F}, \Psi)$ for some functional F which is primitive recursive [3] p. 234 (partial recursive [3] p. 326 but defined for all $\mathfrak{F}$ and all the Ψ under consideration, or in other words general recursive under the restrictions on Ψ [3] p. 275); in this paper unlike [3] Ψ may include number variables (the $\mathfrak{F}$ is a list, possible empty, of number variables).

Then (putting $s_0 = \mathrm{lh}(r)$*):*

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{Cons}^j(r) \equiv \{\textit{there exist an } \alpha^j \in \mathscr{C}, \textit{ and an associate} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha^{(j)} \textit{ of } \alpha^j, \textit{ such that } r = \bar{\alpha}^{(j)}(s_0)\}. \end{cases}$$

When $\mathrm{Cons}^j(r)$*, then* $\alpha^{(j)}(s) = \mathrm{ext}^j(s, r)$ *is such an associate.*

Proof of theorem. First basis: $j = 1$. Let [1])

$$\mathrm{Cons}^1(r_0, r_1) \equiv \mathrm{Ext}(r_1, r_0) \vee \mathrm{Ext}(r_0, r_1),$$

$$\mathrm{ext}^1(s, r_0, r_1) = \max(r_0, r_1))_s \dot{-} 1.$$

(Then $\mathrm{Cons}^1(r) \equiv \mathrm{Seq}(r)$, $\mathrm{ext}^1(s, r) = (r)_s \dot{-} 1$.)

Induction step: $j \geqq 3$ (for $j = 2$ see below). Assume the right side of (10). Then $\mathrm{Seq}(r_i)$ $(i = 0, 1)$. Consider any pair (i, t) such that $i < 2$ & $t < \mathrm{lh}(r_i)$ & $\mathrm{Cons}^{j-1}(t)$ & $(r_i)_t > 1$ (call such (i, t) a *critical pair*). Using $\mathrm{Cons}^{j-1}(t)$ with (11) (available by the hypothesis of the induction), $t = \bar{\alpha}^{(j-1)}(x)$ for some $\alpha^{j-1} \in \mathscr{C}$ and associate $\alpha^{(j-1)}$ of α^{j-1} (with $x = \mathrm{lh}(t)$). By this with $r_i = \bar{\alpha}_i^{(j)}(s_i)$ and $t < \mathrm{lh}(r_i) = s_i$, $(r_i)_t = \alpha_i^{(j)}(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)) + 1$; so by $(r_i)_t > 1$, $\alpha_i^{(j)}(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)) > 0$. Hence by (5), since $\alpha_i^{(j)}$ is an associate of α^j, $(r_i)_t = \alpha^j(\alpha^{j-1}) + 2$. Hence for any two critical pairs (i, t), (i', t') which can go with the same α^{j-1} (i.e. by hyp. ind., such that $\mathrm{Cons}^{j-1}(t, t')$), $(r_i)_t = (r_{i'})_{t'}$. So, defining

$$\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1) \equiv (i)_{i<2}\, \mathrm{Seq}(r_i) \;\&\; (i)_{i<2}(t)_{t<\mathrm{lh}(r_i)}(i')_{i'<2}(t')_{t'<\mathrm{lh}(r_{i'})}$$
$$[(r_i)_t > 1 \;\&\; (r_{i'})_{t'} > 1 \;\&\; \mathrm{Cons}^{j-1}(t, t') \to (r_i)_t = (r_{i'})_{t'}],$$

we have the implication from right to left for (10).

To prove the implication from left to right, and the property of ext^j, assume $\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)$. First we pick the α^j.

Suppose (i, t), (i', t') are critical pairs with $(r_i)_t \neq (r_{i'})_{t'}$. By $\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)$, then $\overline{\mathrm{Cons}}^{j-1}(t, t')$. Now we use the fact that the definition of Cons^{j-1} is of the same form as that just given for $\overline{\mathrm{Cons}}^j$ (even for $j - 1 = 2$, as will be arranged below). Considering $\overline{\mathrm{Cons}}^{j-1}(t, t')$ with $\mathrm{Cons}^{j-1}(t)$, $\mathrm{Cons}^{j-1}(t')$, we have (under our supposition) the existence of $((i, t, u), (i', t', u'))$ such that (i, t), (i', t') are critical pairs, $u < \mathrm{lh}(t)$, $u' < \mathrm{lh}(t')$, $(t)_u > 1$, $(t')_{u'} > 1$, $\mathrm{Cons}^{j-2}(u, u')$ but $(t)_u \neq (t')_{u'}$ (call such $((i, t, u), (i', t', u'))$ a *test couple*).

Now take a given $\alpha^{j-1} \in \mathscr{C}$. Consider any test couple $((i, t, u),$

---

[1]) See note 2 on page 81.

$(i', t', u'))$. Since $\mathrm{Cons}^{j-2}(u, u')$, by hyp. ind. there is a particular $\alpha^{j-2} \in \mathscr{C}$ with the associates $\alpha_0^{(j-2)} = \lambda y\ \mathrm{ext}^{j-2}(y, u, u')$, $\alpha_1^{(j-2)} = \lambda y\ \mathrm{ext}^{j-2}(y, u', u)$ such that $\bar{\alpha}_0^{(j-2)}(y_0) = u$, $\bar{\alpha}_1^{(j-2)}(y_1) = u'$ (where $y_0 = \mathrm{lh}(u)$, $y_1 = \mathrm{lh}(u')$). If, for this α^{j-2}, $\alpha^{j-1}(\alpha^{j-2}) + 2 \neq (t)_u$ $(\neq (t')_{u'})$, we say (i, t) $((i', t'))$ is *excluded (for α^{j-1}) by* the test couple $((i, t, u), (i', t', u'))$. At least one of (i, t), (i', t') will be excluded, since $(t)_u \neq (t')_{u'}$.

When for the given α^{j-1} all test couples (if any) have been thus considered, all critical pairs (i, t) that remain unexcluded (if any) will go with one value of $(r_i)_t$. If any remain unexcluded, we take $\alpha^j(\alpha^{j-1}) = (r_i)_t \dot{-} 2$ for such an unexcluded critical pair (i, t); otherwise, we take $\alpha^j(\alpha^{j-1}) = 0$.

It remains to define a primitive recursive ext^j so that (when $\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)$) the functions $\alpha_0^{(j)} = \lambda s\ \mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1)$, $\alpha_1^{(j)} = \lambda s\ \mathrm{ext}^j(s, r_1, r_0)$ will be associates of α^j and

$$r_0 = \overline{\mathrm{ext}}^j(\mathrm{lh}(r_0); r_0, r_1),\quad r_1 = \overline{\mathrm{ext}}^j(\mathrm{lh}(r_1); r_1, r_0). \tag{12}$$

We assure (12) by defining (for all r_0, r_1)

$$\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1) = (r_0)_s \dot{-} 1 \text{ for } s < \mathrm{lh}(r_0).$$

We stop to verify that (when $\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)$) this gives our $\alpha_i^{(j)}$ the part of Property (5) for $\bar{\alpha}^{(j-1)}(x) < \mathrm{lh}(r_i)$. Take e.g. $i = 0$. Consider any $t < \mathrm{lh}(r_0)$ of the form $\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)$ such that $\alpha_0^{(j)}(t) > 0$, i.e. $(r_0)_t > 1$. Then $(0, t)$ is a critical pair. Consider any test couple $((0, t, u), (i', t', u'))$. Since $t = \bar{\alpha}^{(j-1)}(x)$, $u < \mathrm{lh}(t) = x$, $(t)_u > 1$ and $\mathrm{Cons}^{j-2}(u, u')$, we must by (5) have $(t)_u = \alpha^{j-1}(\alpha^{j-2}) + 2$ for any y, α^{j-2} and associate $\alpha^{(j-2)}$ of α^{j-2} such that $u = \bar{\alpha}^{(j-2)}(y)$, and thus in particular for the α^{j-2} (with $\alpha_0^{(j-2)} = \lambda y\ \mathrm{ext}^{j-2}(y, u, u')$) in the definition of exclusion. Thus the couple does not exclude $(0, t)$; so, by our definition of α^j, $\alpha^j(\alpha^{j-1}) + 1 = (r_0)_t \dot{-} 1 = \mathrm{ext}^j(t, r_0, r_1) = \alpha_0^{(j)}(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x))$.

Now consider values of $s \geqq \mathrm{lh}(r_0)$. For such s (and any r_0, r_1) we define $\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1) = 0$, except in case $\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)$, $\mathrm{Cons}^{j-1}(s)$, and for each test couple $((i, t, u), (i', t', u'))$ there is a y such that $(s)_{\overline{\mathrm{ext}}^{j-2}(y;\, u, u')} > 1$. In this case, by $\mathrm{Cons}^{j-1}(s)$ there is an $\alpha^{j-1} \in \mathscr{C}$ such that $\bar{\alpha}^{(j-1)}(x) = s$ for some x and associate $\alpha^{(j-1)}$ of α^{j-1}, and for any such α^{j-1} we can determine from s for each critical pair (i, t) whether (i, t) is excluded for this α^{j-1}; for, to each test couple $((i, t, u), (i', t', u'))$, each such y, and the α^{j-2} in the definition of exclusion (with $\alpha_0^{(j-2)} = \lambda y\ \mathrm{ext}^{j-2}(y, u, u')$), $\alpha^{j-1}(\alpha^{j-2}) + 2 = (s)_{\overline{\mathrm{ext}}^{j-2}(y;\, u, u')}$. If there

is an unexcluded critical pair (i, t) for such α^{j-1}, we take $\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1) = (r_i)_t \dot{-} 1$; otherwise, we take $\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1) = 1$. (We formulate this primitive recursively below.)

This definition of $\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1)$ for $s \geqq \mathrm{lh}(r_0)$ makes our $\alpha_i^{(j)}$ satisfy the remainder of Property (5) (when $\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)$); e.g. for $i = 0$, $\alpha_0^j(s) = \mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1) > 0$ only when $\mathrm{Cons}^{j-1}(s)$, i.e. when s is of the form $\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)$, in which case $\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1) = \alpha^j(\alpha^{j-1}) + 1$ by our definition of α^j.

Next we show that (when $\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)$) (4) is satisfied. Take e.g. $i = 0$. Consider any $\alpha^{j-1} \in \mathscr{C}$ and any associate $\alpha^{(j-1)}$ of α^{j-1}. We shall find an x such that $\bar{\alpha}^{(j-1)}(x) \geqq \mathrm{lh}(r_0)$ and $\mathrm{ext}^j(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x), r_0, r_1) > 0$. The test couples $((i, t, u), (i', t', u'))$ are finitely many; let them be indexed by $c = 1, \ldots, k$. Let $y_c = \mu y[\alpha^{(j-1)}(\overline{\mathrm{ext}}^{j-2}(y; u_c, u'_c)) > 0]$, which exists by (4) since $\alpha^{(j-1)}$, $\lambda y\ \mathrm{ext}^{j-2}(y, u_c, u'_c)$ are associates of functions $\in \mathscr{C}$ of types $j-1$, $j-2$, respectively; and let $x_0 = \mu x[\bar{\alpha}^{(j-1)}(x) \geqq \mathrm{lh}(r_0)]$. Now let $x = \max(x_0,\ 1 + \max_c \overline{\mathrm{ext}}^{j-2}(y_c; u_c, u'_c))$ if $k > 0$ ($x = x_0$ if $k = 0$).

Finally, we formulate the definition of $\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1)$ for $x \geqq \mathrm{lh}(r_0)$ primitive recursively. The condition (for $s \geqq \mathrm{lh}(r_0)$) under which $\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1) > 0$ can be stated thus:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)\ \&\ \mathrm{Cons}^{j-1}(s)\ \&\ (i)_{i<2}(t)_{t<\mathrm{lh}(r_i)}(i')_{i'<2}(t')_{t'<\mathrm{lh}(r_{i'})} \\
&\quad (u)_{u<\mathrm{lh}(t)}(u')_{u'<\mathrm{lh}(t')}\{\mathrm{Cons}^{j-1}(t)\ \&\ \mathrm{Cons}^{j-1}(t')\ \& \\
&\quad (r_i)_t > 1\ \&\ (r_{i'})_{t'} > 1\ \&\ (t)_u > 1\ \&\ (t')_{u'} > 1\ \& \\
&\quad \mathrm{Cons}^{j-2}(u, u')\ \&\ (t)_u \neq (t')_{u'} \to (Ey)_{y<s}[(s)_{\overline{\mathrm{ext}}^{j-2}(y; u, u')} > 1]\}.
\end{aligned}$$

When this condition is met, $\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1) = 1$, unless

$$\begin{aligned}
&(Ea)_{a<2\cdot 3^{r_0}+r_1} A(a, s, r_0, r_1) \text{ where (writing } i = (a)_0,\ t = (a)_1) \\
&A(a, s, r_0, r_1) \equiv i < 2\ \&\ t < \mathrm{lh}(r_i)\ \&\ \mathrm{Cons}^{j-1}(t)\ \&\ (r_i)_t > 1\ \& \\
&\quad (i')_{i'<2}(t')_{t'<\mathrm{lh}(r_{i'})}(u)_{u<\mathrm{lh}(t)}(u')_{u'<\mathrm{lh}(t')}(y)_{y<s}\{(r_{i'})_{t'} > 1\ \& \\
&\quad \mathrm{Cons}^{j-1}(t')\ \&\ (t)_u > 1\ \&\ (t')_{u'} > 1\ \&\ \mathrm{Cons}^{j-2}(u, u')\ \&\ (t)_u \neq (t')_{u'}\ \& \\
&\quad (s)_{\overline{\mathrm{ext}}^{j-2}(y; u, u')} > 1 \to (s)_{\overline{\mathrm{ext}}^{j-2}(y; u, u')} = (t)_u\},
\end{aligned}$$

in which case $\mathrm{ext}^j(s, r_0, r_1) = (r_{\mathrm{I}})_{\mathrm{T}} \dot{-} 1$ where $\mathrm{I} = (\mathrm{A})_0$, $\mathrm{T} = (\mathrm{A})_1$, $\mathrm{A} = \mu a_{a<2\cdot 3^{r_0}+r_1} A(a, s, r_0, r_1)$.

Second basis: $j = 2$. The definition of $\mathrm{Cons}^j(r_0, r_1)$, and the proof of the implication from right to left for (10), are the same as for $j \geqq 3$. Now assume $\mathrm{Cons}^2(r_0, r_1)$. Consider any given α^1 $(= \alpha^{(1)})$.

For any critical pair (i, t), and sufficiently big x, either (a) $\mathrm{Ext}(\bar{\alpha}^1(x),t)$ or (b) $\overline{\mathrm{Cons}}^1(\bar{\alpha}^1(x), t)$. If (a) holds for two critical pairs (i, t), (i', t'), then $\mathrm{Cons}^1(t, t')$, and by $\mathrm{Cons}^2(r_0, r_1)$ hence $(r_i)_t = (r_{i'})_{t'}$. Now take an x big enough so that for each of the finitely many critical pairs, either (a) or (b). If (a) holds for some, take $\alpha^2(\alpha^1) = (r_i)_t \dot{-} 2$ for any such critical pair (i, t); otherwise, take $\alpha^2(\alpha^1) = 0$. For $s < \mathrm{lh}(r_0)$ (for any r_0, r_1), let $\mathrm{ext}^2(s, r_0, r_1) = (r_0)_s \dot{-} 1$. For $s \geqq \mathrm{lh}(r_0)$, let $\mathrm{ext}^2(s, r_0, r_1) = 0$, unless $\mathrm{Cons}^2(r_0, r_1)$, $\mathrm{Seq}(s)$, and, for each critical pair (i, t), $\mathrm{Ext}(s, t) \vee \overline{\mathrm{Cons}}^1(s, t)$. In this case, if $\mathrm{Ext}(s, t)$ for some critical pair (i, t), take $\mathrm{ext}^2(s, r_0, r_1) = (r_i)_t \dot{-} 1$; otherwise, take $\mathrm{ext}^2(s, r_0, r_1) = 1$.

2.2. Corollary 2. *For each $j \geqq 2$: A type-1 function α is an associate $\alpha^{(j)}$ of some $\alpha^j \in \mathscr{C}$, if and only if*

(i) $(s)\mathrm{Cons}^j(\bar{\alpha}(s))$, (ii) $(\alpha^{(j-1)})(Ex)[\alpha(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)) > 0]$

where $(\alpha^{(j-1)})$ is a universal quantifier over all associates $\alpha^{(j-1)}$ of functions $\alpha^{j-1} \in \mathscr{C}$.

Proof. The necessity ("only if") is immediate from (11) and (4). To prove (5) for the sufficiency ("if"), consider any $\alpha^{j-1} \in \mathscr{C}$, any associates $\alpha_0^{(j-1)}$, $\alpha_1^{(j-1)}$ of α^{j-1}, and using (ii) any numbers x_0, x_1 such that $\alpha(\bar{\alpha}_0^{(j-1)}(x_0)) > 0$, $\alpha(\bar{\alpha}_1^{(j-1)}(x_1)) > 0$. Let $t = \bar{\alpha}_0^{(j-1)}(x_0)$, $t' = \bar{\alpha}_1^{(j-1)}(x_1)$. By (10), $\mathrm{Cons}^{j-1}(t, t')$. Let $s = 1 + \max(t, t')$. By (i), $\mathrm{Cons}^j(\bar{\alpha}(s))$. Thence by the definition of Cons^j for $j \geqq 2$ (in the proof of the theorem), $\alpha(t) = \alpha(t')$. So defining $\alpha^j(\alpha^{j-1}) = \alpha(t) \dot{-} 1 = \alpha(t') \dot{-} 1$, we will have $\alpha(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)) = \alpha^j(\alpha^{j-1}) + 1$ whenever $\alpha^j(\bar{\alpha}^{(j-1)}(x)) > 0$ for $\alpha^{(j-1)}$ an associate of α^{j-1}.

Corollary 3. *For $j = 2, 3, 4, \ldots$, the predicate $\{\alpha$ is an associate $\alpha^{(j)}$ of some $\alpha^j \in \mathscr{C}\}$ is expressible from recursive predicates by predicate calculus with quantification only of variables of types 0, 1 (i.e. is analytic, [4] 2.1), with classically the respective prenex form*

$$(\beta)(Ex)R(\alpha, \beta, x),\ (\beta)(E\gamma)(x)R(\alpha, \beta, \gamma, x),$$
$$(\beta)(E\gamma)(\delta)(Ex)R(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x), \ldots.$$

Proof is by induction on j, using Corollary 2 and [4] § 3.

3. Recursively countable functionals

3.1. We say a function $\varphi(\mathfrak{a}) \in \mathscr{RC}$ (or is *recursively countable*), if $\varphi(\mathfrak{a}) \in \mathscr{C}$ with a general recursive associate $\varphi^{(\,)}(\mathfrak{S})$. (Any natural

number $\in \mathscr{RC}$.) By 1.7, if $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathscr{RC}$, so does $\lambda\mathfrak{b}\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ for each fixed $\mathfrak{a} \in \mathscr{RC}$.

3.2. Theorem 2. *A function $\varphi(\mathfrak{a}) \in \mathscr{RC}$, if and only if there is a partial recursive function φ_1 such that, for each $\mathfrak{a} \in \mathscr{C}$ and each choice $\mathfrak{a}^{(\,)}$ of associates of $\mathfrak{a}$, $\varphi_1(\mathfrak{a}^{(\,)})$ is defined and*

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \varphi_1(\mathfrak{a}^{(\,)}). \tag{13}$$

In this case, if $\mathfrak{a}$ includes function variables, $\varphi(\mathfrak{a})$ has a primitive recursive associate $\varphi^{(\,)}(\mathfrak{S})$.

Proof. Say for illustration $\mathfrak{a} = (a, \alpha_2^3, \alpha_3^3, \alpha^4)$. The necessity ("only if") is immediate by (9). To prove the sufficiency ("if") and the possibility of taking $\varphi^{(\,)}$ to be primitive recursive, we have by the normal form theorem ([3] pp. 291–292, 330 with [4] Footnote 2)

$$\varphi_1(a, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}, \alpha^{(4)}) = U(\mu x T_1^{1,1,1}(\bar{\alpha}_2^{(3)}(x), \bar{\alpha}_3^{(3)}(x), \bar{\alpha}^{(4)}(x), e, a)) \tag{14}$$

with U, $T_1^{1,1,1}$ primitive recursive and the x unique. Let

$$\varphi^{(\,)}(a, s_2, s_3, s_4) = \begin{cases} U(\mathrm{lh}(s_2)) + 1 \text{ if } T_1^{1,1,1}(s_2, s_3, s_4, e, a), \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

3.3. Theorem 3. *Let $\mathfrak{a}, \beta^j$ be variables ranging in $\mathscr{C}$, with $j \geqq 1$. If $\varphi(\mathfrak{a}, \beta^j) \in \mathscr{RC}$, then there is a partial recursive function ψ such that, for each $\mathfrak{a}$: If*

$$(E\beta^j)[\varphi(\mathfrak{a}, \beta^j) = 0],$$

then, for each $\gamma^{j-1} \in \mathscr{C}$ and each choice $\mathfrak{a}^{(\,)}$, $\gamma^{(j-1)}$ of associates of $\mathfrak{a}, \gamma^{j-1}$, the quantity $\psi(\mathfrak{a}^{(\,)}, \gamma^{(j-1)})$ is defined with value depending only on $\mathfrak{a}^{(\,)}, \gamma^{j-1}$, and

$$\varphi(\mathfrak{a}, \lambda\gamma^{j-1}\, \psi(\mathfrak{a}^{(\,)}, \gamma^{(j-1)})) = 0.$$

Similarly, with variables $\mathfrak{b}$ in $\mathscr{C}$ of any types $\geqq 0$ instead of β^j.

Proof. Say for illustration $\mathfrak{a} = (a, \alpha^3)$, $\mathfrak{b} = (\beta^3, \beta^4)$. By hypothesis, $\varphi(a, \alpha^3, \beta^3, \beta^4)$ has a recursive associate $\varphi^{(\,)}(a, s_2, s_3, s_4)$. Consider any a, α^3 such that $(E\beta^3)(E\beta^4)[\varphi(a, \alpha^3, \beta^3, \beta^4) = 0]$, and take any such β^3, β^4 with associates $\beta^{(3)}, \beta^{(4)}$. By (7) and (8), to any associate $\alpha^{(3)}$ of α^3, there is an x such that $\varphi^{(\,)}(a, \bar{\alpha}^{(3)}(x), \bar{\beta}^{(3)}(x), \bar{\beta}^{(4)}(x)) = 1$, and hence

$$\varphi^{(\,)}(a, \bar{\alpha}^{(3)}(\mathrm{lh}(s_3)), s_3, s_4) = 1 \tag{a}$$

for $s_3=\bar{\beta}^{(3)}(x)$, $s_4=\bar{\beta}^{(4)}(x)$. Conversely, if (a) is true for any s_3, s_4 such that $s_3=\bar{\beta}^{(3)}(x)$, $s_4=\bar{\beta}^{(4)}(x)$ (with $x=\mathrm{lh}(s_3)=\mathrm{lh}(s_4)$) for some associates $\beta^{(3)}$, $\beta^{(4)}$ of functions $\beta^3, \beta^4 \in \mathscr{C}$, then those β^3, β^4 will make $\varphi(a, \alpha^3, \beta^3, \beta^4)=0$. So using Theorem 1 Corollary 1, and defining $\mathrm{S}=\mu s[\mathrm{Cons}^3((s)_3)$ & $\mathrm{Cons}^4((s)_4)$ & $\mathrm{lh}((s)_3)=\mathrm{lh}((s)_4)$ & $\varphi^{(\ )}(a, \bar{\alpha}^{(3)}(\mathrm{lh}((s_3), (s)_3, (s)_4)=1]$,
$\mathrm{Y}_j=\mu y[\mathrm{ext}^j(\bar{\gamma}^{(j-1)}(y), (\mathrm{S})_j)>0]$ $(j=3, 4)$,
and $\psi_j(a, \alpha^{(3)}, \gamma^{(j-1)})=\mathrm{ext}^j(\bar{\gamma}^{(j-1)}(\mathrm{Y}_j), (\mathrm{S})_j) \dot{-} 1$,
we have $\varphi(a, \alpha^3, \beta^3, \beta^4)=0$ for $\beta^j=\lambda y^{j-1}\, \psi_j(a, \alpha^{(3)}, \gamma^{(j-1)})$.

4. General recursive functionals for arguments restricted to be countable

4.1. For the notation, cf. [5] 2.1.

Lemma 1. *For each $j \geqq 1$ and $n \geqq 0$, let $\alpha^j=\langle \alpha^j_1, \ldots, \alpha^j_n\rangle$ and $\beta^j=\langle \alpha^j_1, \ldots, \alpha^j_n, \sigma^j\rangle$. If $\alpha^j, \sigma^j \in \mathscr{C}$, so does β^j. Indeed, there is a primitive recursive function θ such that, for any associates $\alpha^{(j)}$, $\sigma^{(j)}$ of α^j, σ^j and some associate $\beta^{(j)}$ of β^j,*

$$\bar{\beta}^{(j)}(t)=\theta(j, n, \bar{\alpha}^{(j)}(t), \bar{\sigma}^{(j)}(t)). \tag{15}$$

Proof. Case 1: $j>1$. We get an associate $\beta^{(j)}$ of β^j by taking $\beta^{(j)}(s)=0$, unless
$(Eq)_{q\leqq s}[\mathrm{Ext}(s,q)$ & $\alpha^{(j)}(q)>0]$ & $(Er)_{r\leqq s}[\mathrm{Ext}(s,r)$ & $\alpha^{(j)}(r)>0]$,
in which case $\beta^{(j)}(s)=[\alpha^{(j)}(q_1) \dot{-} 1]\cdot[p_n \exp(\sigma^{(j)}(r_1) \dot{-} 1)]+1$
where $q_1=\mu q_{q\leqq s}[\mathrm{Ext}(s,q)\,\&\, \alpha^{(j)}(q)>0]$, $r_1=\mu r_{r\leqq s}[\mathrm{Ext}(s,r)\,\&\, \alpha^{(j)}(r)>0]$.
In this definition of $\beta^{(j)}(s)$ we can replace $\alpha^{(j)}$, $\sigma^{(j)}$ by $\lambda q\ (\bar{\alpha}^{(j)}(t))_q \dot{-} 1$, $\lambda r\ (\bar{\sigma}^{(j)}(t))_r \dot{-} 1$ for any $t>s$, so that we obtain $\beta^{(j)}(s)=\psi(n, s, \bar{\alpha}^{(j)}(t), \bar{\sigma}^{(j)}(t))$ $(t>s)$ with ψ primitive recursive. Now let $\theta(j, n, a\ b)=$ $=\Pi_{s<\mathrm{lh}(a)}\, p_s^{\psi(n,s,a,b)+1}$. Case 2: $j=1$. Let $\theta(1, n, a, b)=\Pi_{s<\mathrm{lh}(a)}\, p_s$ $\exp([(a)_s \dot{-} 1]\cdot p_n^{(b)_s \dot{-} 1}+1)$.

Lemma 2. *For each $j \geqq 1$ and $n \geqq 0$: If $\alpha^j_1, \ldots, \alpha^j_n \in \mathscr{C}$, then $\alpha^j=\langle \alpha^j_1, \ldots, \alpha^j_n\rangle \in \mathscr{C}$. Indeed, there is a primitive recursive function χ for $n>0$ (χ_0 for $n=0$) such that, for any associates $\alpha^{(j)}_1, \ldots, \alpha^{(j)}_n$ of $\alpha^j_1, \ldots, \alpha^j_n$ and some associate $\alpha^{(j)}$ of α^j,*

$$\bar{\alpha}^{(j)}(t)=\chi(j, \bar{\alpha}^{(j)}_1(t), \ldots, \bar{\alpha}^{(j)}_n(t)) \quad (\bar{\alpha}^{(j)}(t)=\chi_0(j, t)). \tag{16}$$

Proof, by induction on n. Basis: $n=0$. Case 1: $j>1$. Then $\alpha^j=\lambda\tau^{j-1}\, 1$, and so we take $\alpha^{(j)}(s)=2$, $\chi_0(j, t)=\Pi_{s<t}p_s^3$. Case 2:

$j=1$. Then $\alpha^j=\alpha^{(j)}=\lambda s\ 1$, $\chi_0(1,t)=\Pi_{s<t}p_s^2$. Ind. step: $n>0$. Using the hyp. ind. and Lemma 1, we take $\chi(j,a)=\theta(j,0,\chi_0(j,\mathrm{lh}(a)),a)$ for $n=1$, $\chi(j,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n)=\theta(j,n-1,\chi(j,a_1,\ldots,a_{n-1}),a_n)$ for $n>1$.

Lemma 3. *For each $j\geqq 1$ and $i\geqq 0$: If $\alpha^j\in\mathscr{C}$, so does $\alpha_i^j=(\alpha^j)_i$. Indeed, there is a primitive recursive function η such that, for each associate $\alpha^{(j)}$ of α^j and some associate $\alpha_i^{(j)}$ of α_i^j,*

$$\alpha_i^{(j)}(s)=\eta(j,i,\alpha^{(j)}(s)). \tag{17}$$

Proof. For $j>1$, let $\eta(j,i,a)=0$, unless $a>0$, in which case $\eta(j,i,a)=(a\dot{-}1)_i+1$; and for $j=1$, let $\eta(j,i,a)=(a)_i$.

4.2. For the notation, cf. [5] 3.7, 3.8, 5.1.

Lemma 4. *For each $r\geqq 2$, there is a primitive recursive function $\zeta(z)$ such that, for each z,a,α^1 and $\alpha^2,\ldots,\alpha^r\in\mathscr{C}$ for which $\{z\}[a,\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^r]$ is defined, and each choice $\alpha^{(2)},\ldots,\alpha^{(r)}$ of associates of $\alpha^2,\ldots,\alpha^r$,*

$$\{z\}[a,\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^r]=\{\zeta(z)\}(a,\alpha^1,\alpha^{(2)},\ldots,\alpha^{(r)}). \tag{18}$$

Proof. We take $\zeta(z)=0$, unless $\mathrm{Ix}(z)$ & $\mathrm{tp}(z)\leqq r$ ([5] 4.1), when the appropriate following case shall apply. We give the more complicated cases first, and omit the simplest. Under the cases, it is shown by induction on $\{z\}(-)$ ([5] end 3.8) that, if $\{z\}[a,\alpha^1,\ldots,\alpha^r]$ is defined, the definition proposed for $\zeta(z)$ will give (18) in the case. In conclusion, we shall pick a ζ to satisfy all the case definitions.

Case 8: $(z)_0=8$. Subcase j ($j=3,\ldots,r$): $(z)_2=j$. We write $n_{j-2}=(z)_{1,j-2}$. Now (assuming $\alpha^2,\ldots,\alpha^r\in\mathscr{C}$ and $\{z\}[a,\alpha^1,\ldots,\alpha^r]$ is defined),

$$\begin{cases}\{z\}[a,\alpha^1,\ldots,\alpha^r]\\ \qquad=\alpha_1^j(\lambda\sigma^{j-2}\{(z)_3\}[a,\alpha^1,\ldots,\alpha^{j-3},\beta^{j-2},\alpha^{j-1},\ldots,\alpha^r])\end{cases} \tag{19}$$

where $\alpha_1^j=(\alpha^j)_0$ and $\beta^{j-2}=\langle\sigma^{j-2},\alpha_1^{j-2},\ldots,\alpha_{n_{j-2}}^{j-2}\rangle$ for $\alpha_i^{j-2}=(\alpha^{j-2})_{i-1}$. By Lemma 3, $\alpha_1^j,\alpha_i^{j-2}\in\mathscr{C}$. Let us consider values of σ^{j-2} which $\in\mathscr{C}$. By Lemma 2, $\beta^{j-2}\in\mathscr{C}$. Indeed, using Lemmas 1–3, let $\varkappa(j,n,b,a)$ be defined by the recursion

$$\begin{cases}\varkappa(j,0,b,a)=\theta(j,0,\chi_0(j,\mathrm{lh}(b)),b),\\ \varkappa(j,n+1,b,a)=\theta(j,n+1,\varkappa(j,n,b,a),\Pi_{s<\mathrm{lh}(a)}p_s^{\eta(j,n,(a)_s\dot{-}1)+1}).\end{cases}$$

Now β^{j-2} has an associate $\beta^{(j-2)}$ such that, for any choice of associates $\sigma^{(j-2)}$, $\alpha^{(j-2)}$ of σ^{j-2}, α^{j-2},

$$\bar{\beta}^{(j-2)}(t) = \varkappa(j-2, n_{j-2}, \bar{\sigma}^{(j-2)}(t), \bar{\alpha}^{(j-2)}(t)). \tag{20}$$

Using the hyp. ind., and the normal form theorem with indices ([5] XXXII), and writing T for $T_1^{1,\ldots,1}$ with r superscripts (and $\alpha^{(1)}$ for α^1),

$$\begin{cases} \{(z)_3\}[a, \alpha^1, \ldots, \alpha^{j-3}, \beta^{j-2}, \alpha^{j-1}, \ldots, \alpha^r] \\ = \{\zeta((z)_3)\}(a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(j-3)}, \beta^{(j-2)}, \alpha^{(j-1)}, \ldots, \alpha^{(r)}) \\ = U(\mu t T(\bar{\alpha}^{(1)}(t), \ldots, \bar{\alpha}^{(j-3)}(t), \bar{\beta}^{(j-2)}(t), \bar{\alpha}^{(j-1)}(t), \ldots, \bar{\alpha}^{(r)}(t), \zeta((z)_3), a)) \\ = U(\mu t T(\bar{\alpha}^{(1)}(t), \ldots, \bar{\alpha}^{(j-3)}(t), \varkappa(j-2, n_{j-2}, \\ \qquad \bar{\sigma}^{(j-2)}(t), \bar{\alpha}^{(j-2)}(t)), \bar{\alpha}^{(j-1)}(t), \ldots, \bar{\alpha}^{(r)}(t), \zeta((z)_3), a)) \\ = U(\mu t R_j(\bar{\sigma}^{(j-2)}(t), z, \zeta((z)_3), a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)})) \end{cases} \tag{21}$$

with a primitive recursive R_j, by replacing each t except in $\bar{\sigma}^{(j-2)}(t)$ by $\mathrm{lh}(\bar{\sigma}^{(j-2)}(t))$, and using $n_{j-2} = (z)_{1,j-2}$. Let

$$\psi_j(x, z, u, a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}) = \begin{cases} 0 \text{ if } \bar{R}_j(x, z, u, a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}), \\ U(\mathrm{lh}(x)) + 1 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Now $\lambda x\ \psi_j(x, z, \zeta((z)_3), a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)})$ is an associate of

$$\lambda\sigma^{j-2}\ \{(z)_3\}[a, \alpha^1, \ldots, \alpha^{j-3}, \beta^{j-2}, \alpha^{j-1}, \ldots, \alpha^r].$$

Hence using (19) and (6),

$$\{z\}[a, \alpha^1, \ldots, \alpha^r] = \alpha_1^{(j)}(\bar{\psi}_j(x_1; z, \zeta((z)_3), a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)})) \dot{-} 1 \tag{22}$$

where $x_1 = \mu x[\alpha_1^{(j)}(\bar{\psi}_j(x; z, \zeta((z)_3), a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)})) > 0]$ and (using (17)) $\alpha_1^{(j)} = \lambda s\ \eta(j, 0, \alpha^{(j)}(s))$. If in the right side of (22) we replace $\zeta((z)_3)$ by u, we obtain a partial recursive function of $z, u, a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}$ with index $q_{8,j}$. For this case and subcase, let $\zeta(z) = S^2(q_{8,j}, z, \zeta((z)_3))$ ([5] XIII). Subcase 2: $(z)_2 = 2$. Let $a_t = 2^t \cdot \Pi_{i<a} p_{i+1}^{(a)_i}$ (cf. [5] 5.4), $\alpha_1^2 = (\alpha^2)_0$. Now

$$\begin{aligned} \{z\}[a, \alpha^1, \ldots, \alpha^r] &= \alpha_1^2(\lambda t\ \{(z)_3\}[a_t, \alpha^1, \ldots, \alpha^r]) \\ &= \alpha_1^2(\lambda t\ \{\zeta((z)_3)\}(a_t, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)})) \text{ (by hyp. ind.)} \\ &= \alpha_1^{(2)}(\{\overline{\lambda t}\ \{\zeta((z)_3)\}(a_t, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)})\}(x_1)) \dot{-} 1 \end{aligned}$$

where $x_1 = \mu x[\alpha_1^{(2)}(\{\overline{\lambda t}\ \{\zeta((z)_3)\}(a_t, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)})\}(x)) > 0]$ and $\alpha_1^{(2)} = \lambda s\ \eta(2, 0, \alpha^{(2)}(s))$. Consider the last expression as $\{q_{8,2}\}(\zeta((z)_3), a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)})$ and take $\zeta(z) = S^1(q_{8,2}, \zeta((z)_3))$.

Case 9: $(z)_0 = 9$. Write $b = \Pi_{i<a} p_i^{(a)_{i+1}}$. Now

$$\{z\}[a, \alpha^1, \ldots, \alpha^r] = \{(a)_0\}[b, \alpha^1, \ldots, \alpha^r] = \{\zeta((a)_0)\}(b, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}).$$

Replace ζ by $\{p\}$, and let q_9 be an index of the result as a function of $p, a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}$, and take $\zeta(z) = S^1(q_9, p)$ for p an index of ζ.

Case 5: $(z)_0 = 5$. Write $b = \Pi_{i<a} p_i^{(a)_{i+1}}$. Now

$$\{z\}[a, \alpha^1, \ldots, \alpha^r] = \begin{cases} \{\zeta((z)_2)\}(b, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}) & \text{if } (a)_0 = 0, \\ \{\zeta((z)_3)\}(c, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}) & \text{if } (a)_0 \neq 0 \end{cases}$$

where $c = 2^{(a)_0 \dot{-} 1} \cdot 3^{\{\zeta(z)\}([a/2], \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)})} \cdot \Pi_{i<a} p_{i+2}^{(a)_{i+1}}$.
Complete as in Case 9.

Case 6: $(z)_0 = 6$. Subcase j $(j = 2, \ldots, r)$: $(z)_2 = j$. Write $k = (z)_3$. Now

$$\begin{aligned} &\{z\}[a, \alpha^1, \ldots, \alpha^r] = \{(z)_4\}[a, \alpha^1, \ldots, \alpha^{j-1}, \ \lambda\sigma^{j-1} 2^{(\alpha^j(\sigma^{j-1}))_k} \\ &\cdot \Pi_{i<k} p_{i+1}^{(\alpha^j(\sigma^{j-1}))_i} \cdot \Pi_{k<i<(z)_{1,j}} p_i^{(\alpha^j(\sigma^{j-1}))i}, \alpha^{j+1}, \ldots, \alpha^r] \\ &= \{\zeta((z)_4)\}(a, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(j-1)}, \lambda s\, \varrho_j(z, \alpha^{(j)}, s), \alpha^{(j+1)}, \ldots, \alpha^{(r)}) \end{aligned}$$

where $\varrho_j(z, \alpha^{(j)}, s) = 0$ if $\alpha^{(j)}(s) = 0$, otherwise $\varrho_j(z, \alpha^{(j)}, s) =$

$$1 + 2^{(\alpha^{(j)}(s) \dot{-} 1)_k} \cdot \Pi_{i<k} p_{i+1}^{(\alpha^{(j)}(s) \dot{-} 1)_i} \cdot \Pi_{k<i<(z)_{1,j}} p_i^{(\alpha^{(j)}(s) \dot{-} 1)_i}.$$

Complete as in Case 8. Subcases 0, 1: $(z)_2 = 0, 1$. Similar but simpler.

Conclusion. After combining the definitions of $\zeta(z)$ for the various cases, we can pick a partial recursive function ζ with index p which satisfies the resulting recursion, by the recursion theorem [5] XIV. But then by the form of the recursion (after thus fixing p), ζ is primitive recursive.

4.3. Theorem 4. *If $\varphi(\mathfrak{a})$ is general recursive for $\mathfrak{a} \in \mathscr{C}$ (i.e. $\varphi(\mathfrak{a})$ is partial recursive* [5] § 3 *and completely defined for arguments $\mathfrak{a}$ each of which $\in \mathscr{C}$), then $\varphi(\mathfrak{a}) \in \mathscr{RC}$.*

Proof. For illustration, say $\mathfrak{a} = (a, \alpha_2^3, \alpha_3^3, \alpha_4^4)$. Let $a = \langle a \rangle$, $\alpha^1 = \langle\ \rangle$, $\alpha^2 = \langle\ \rangle$, $\alpha^3 = \langle \alpha_2^3, \alpha_3^3 \rangle$, $\alpha^4 = \langle \alpha_4^4 \rangle$. Since $\varphi(\mathfrak{a})$ is partial recursive, it has an index z. By [5] § 3 and 5.1, and Lemma 4,

$$\varphi(a, \alpha_2^3, \alpha_3^3, \alpha_4^4) = \{z\}[a, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4] = \{\zeta(z)\}(a, \alpha^1, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}).$$

Using Lemma 2 to express $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(4)}$ in terms of $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$, $\alpha_4^{(4)}$, the condition of Theorem 2 is met.

4.4. Theorem 5. *Each predicate* $P(\mathfrak{a})$ *of variables* $\mathfrak{a}$ *of types* 0, 1 *expressible by applying to general recursive predicates the symbolism of the predicate calculus with quantification of variables* $\in \mathscr{C}$ *of all finite types is analytic, i.e. is so expressible with quantification only of variables of types* 0, 1 (in contrast to [5] XL with $r > 1$ for quantification of variables not restricted to $\mathscr{C}$).

Proof. Each general recursive predicate $Q(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ occurring as a prime part of a given such expression for $P(\mathfrak{a})$ can by Theorems 4 and 2 be replaced by $Q_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^{(\,)})$ where $\mathfrak{b}^{(\,)}$ are associates of $\mathfrak{b}$ (while $\mathfrak{a}$ being of types $\leqq 1$ are their own associates) and Q_1 is recursive. Thereby the quantifiers on $\mathfrak{b}$ become quantifiers on the respective variables of $\mathfrak{b}^{(\,)}$. But by Theorem 1, Corollary 3, quantification of variables ranging over associates is translatable into quantification of type-0 and type-1 variables; e.g. classically $(\alpha^{(3)})A(\alpha^{(3)}) \equiv (\alpha)[(\beta)(E\gamma)(x)R(\alpha, \beta, \gamma, x) \to A(\alpha)]$.

5. Finite type structure

5.1. In the above and [5] we have (with few exceptions) restricted ourselves to the use of functions of variables of our types 0, 1, 2, ... (cf. 1.1), besides which there occur those functions themselves and objects formed thence by using the λ-operator. The notation and discussions are thereby tidier.

In 5.2–5.4 we shall consider objects of finite types formed without restriction, and show that in a certain manner one can always work within the restriction.

5.2. We define all (finite) types inductively, thus. 1. Natural numbers are of *type* 0. 2. For $n \geqq 1$[1]), an n-place function taking arguments of *types* $t_1, \ldots, t_n$ respectively and with value of *type* s is of *type* $(s : t_1, \ldots, t_n)$. The only (*finite*) *types* are those given by 1 and (repeated use of) 2.

The types introduced in 1.1, namely $0, 1 = (0 : 0), 2 = (0 : 1), 3 = (0 : 2), \ldots,$ are *pure* types.

The types of the functions considered in 1.6, namely $(0 : t_1, \ldots, t_n)$ where $t_1, \ldots, t_n$ are pure types, and also 0, are *special* types.

[1]) An n-place function for $n = 0$ we take to have the same type s as its value.

The types obtainable when the s for Clause 2 of the definition of finite types is restricted to be always 0 are *numerical* types.

5.3. Consider a function $\mathbf{y}^{(\mathrm{r}:\mathrm{s}_1,\ldots,\mathrm{s}_m)} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_1^{\mathrm{t}_1}, \ldots, \mathbf{x}_n^{\mathrm{t}_n})$ where the superscripts indicate the types of the dependent and independent variables. To this we can correlate the function

$$\mathbf{y}^{\mathrm{r}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{z}_1^{\mathrm{s}_1}, \ldots, \mathbf{z}_m^{\mathrm{s}_m}, \mathbf{x}_1^{\mathrm{t}_1}, \ldots, \mathbf{x}_n^{\mathrm{t}_n})$$

such that $\mathbf{y}^{(\mathrm{r}:\mathrm{s}_1,\ldots,\mathrm{s}_m)} = \lambda \mathbf{z}_1^{\mathrm{s}_1} \ldots \mathbf{z}_m^{\mathrm{s}_m}\, \mathbf{f}_1(\mathbf{z}_1^{\mathrm{s}_1}, \ldots, \mathbf{z}_m^{\mathrm{s}_m}, \mathbf{x}_1^{\mathrm{t}_1}, \ldots, \mathbf{x}_n^{\mathrm{t}_n})$. The types of $\mathbf{f}_0$ and $\mathbf{f}_1$ are $((\mathrm{r} : \mathrm{s}_1, \ldots, \mathrm{s}_m) : \mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n)$ and $(\mathrm{r} : \mathrm{s}_1, \ldots, \mathrm{s}_m, \mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n)$, respectively.

By repeated steps of this sort, to any object $\mathbf{e}$ of any finite type t we correlate an object $\mathbf{e}'$ of a numerical type t′, and inversely to any object f of the type t′ an object $\mathbf{f}^{\mathrm{t}}$ of the type t, so that

$$\mathbf{e}'^{\mathrm{t}} = \mathbf{e}. \tag{23}$$

The correlations are defined by recursion, thus. If $\mathrm{t} = 0$, let $\mathrm{t}' = \mathrm{t}$, $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$, $\mathbf{f}^{\mathrm{t}} = \mathbf{f}$. Otherwise $\mathrm{t} = (\mathrm{s} : \mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n)$. If $\mathrm{s} = 0$, let $\mathrm{t}' = (0 : \mathrm{t}_1', \ldots, \mathrm{t}_n')$, $\mathbf{e}' = \lambda \mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n\, \mathbf{e}(\mathbf{y}_1^{\mathrm{t}_1}, \ldots, \mathbf{y}_n^{\mathrm{t}_n})$, $\mathbf{f}^{\mathrm{t}} = \lambda \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_1', \ldots, \mathbf{x}_n')$. If $\mathrm{s} \neq 0$, say $\mathrm{s}' = (0 : \mathrm{r}_1', \ldots, \mathrm{r}_m')$, and let $\mathrm{t}' = (0 : \mathrm{r}_1', \ldots, \mathrm{r}_m', \mathrm{t}_1', \ldots, \mathrm{t}_n')$, $\mathbf{e}' = \lambda \mathbf{z}_1 \ldots \mathbf{z}_m \mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n \{\mathbf{e}(\mathbf{y}_1^{\mathrm{t}_1}, \ldots, \mathbf{y}_n^{\mathrm{t}_n})\}'(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m)$, $\mathbf{f}^{\mathrm{t}} = \lambda \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n$ $(\lambda \mathbf{z}_1 \ldots \mathbf{z}_m\, \mathbf{f}(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m, \mathbf{x}_1', \ldots, \mathbf{x}_n'))^{\mathrm{s}}$. Now by induction, (23) holds, and if t is numerical then $\mathrm{t}' = \mathrm{t}$, $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$, $\mathbf{f}^{\mathrm{t}} = \mathbf{f}$.

5.4. Next, to any object f of any numerical type t we correlate an object $\mathbf{f}^\circ$ of a pure type t°, and inversely to any object g of the type t° an object $\mathbf{g}^{\mathrm{t}}$ of type t, so that

$$\mathbf{f}^{\circ\mathrm{t}} = \mathbf{f}. \tag{24}$$

The correlations are defined by recursion, thus. If $\mathrm{t} = 0$, let $\mathrm{t}^\circ = \mathrm{t}$, $\mathbf{f}^\circ = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}^{\mathrm{t}} = \mathbf{g}$. Otherwise $\mathrm{t} = (0 : \mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n)$. If $n = 1$, let $\mathrm{t}^\circ = 1 + \mathrm{t}_1^\circ$, $\mathbf{f}^\circ = \lambda \mathbf{u}\, \mathbf{f}(\mathbf{u}^{\mathrm{t}_1})$, $\mathbf{g}^{\mathrm{t}} = \lambda \mathbf{z}\, \mathbf{g}(\mathbf{z}^\circ)$.

If $n > 1$, write $s_1, \ldots, s_n$ for $\mathrm{t}_1^\circ, \ldots, \mathrm{t}_n^\circ$. Let $\mathrm{t}^\circ = 1 + \max(s_1, \ldots, s_n)$. Using [5] 2.4, let $\mathbf{f}^\circ = \lambda \mathbf{u}\, \mathbf{f}(((\mathbf{u})_0^{s_1})^{\mathrm{t}_1}, \ldots, ((\mathbf{u})_{n-1}^{s_n})^{\mathrm{t}_n})$ if $s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots \leqq s_n$; otherwise let $\mathbf{f}^\circ = \mathbf{f}_1^\circ$ as just defined where $\mathbf{f}_1(\mathfrak{a}_1) = \mathbf{f}(\mathfrak{a})$ where $\mathfrak{a}_1$ comes from $\mathfrak{a}$ by the permutation which brings $s_1, \ldots, s_n$ to order of non-decreasing type preserving the existing order within each type. Again using [5] 2.4, let $\mathbf{g}^{\mathrm{t}} = \lambda \mathbf{z}_1 \ldots \mathbf{z}_n\, \mathbf{g}(\langle \mathbf{z}_1^\circ, \ldots, \mathbf{z}_n^\circ \rangle)$.

Now by induction (using [5] (9) in the last case), (24) holds, and also if t is pure then $\mathrm{t}^\circ = \mathrm{t}$, $\mathbf{f}^\circ = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}^{\mathrm{t}} = \mathbf{g}$.

5.5. We now have a choice whether to rely on the correlations of 5.4 and 5.3 in extending concepts from pure to more general types, or to define the concepts directly. We follow the latter course in defining countability for numerical types (consistently with § 1) in 5.6, and prove in Theorem 6 of 5.7 that the definition is equivalent to taking $\mathbf{f}$ to be countable if $\mathbf{f}^\circ$ is. But in further extending the notion to non-numerical types in 5.8, we shall simply apply the correlation $'$ of 5.3.

5.6. Objects of type 0 or $(0 : 0, \ldots, 0)$ all $\in \mathscr{C}$ and are their own *associates*. When $t_1, \ldots, t_n$ are numerical types not all 0, an object of type $(0 : t_1, \ldots, t_n) \in \mathscr{C}$ if it has an associate, in the sense we illustrate. Say e.g. the object is $\mathbf{f}(a, \mathbf{g}, \mathbf{h})$, where a is a natural number variable, and $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ are variables for 2- and 1-place functions (of some numerical types) respectively. By the hypothesis of an induction over the numerical types, $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ have associates $\mathbf{g}^{(\,)}, \mathbf{h}^{(\,)}$, which are respectively 2- and 1-place number-theoretic functions. An *associate* $\mathbf{f}^{(\,)}$ of $\mathbf{f}(a, \mathbf{g}, \mathbf{h})$ is a 3-place number-theoretic function such that, for all $a, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ (of the types in question) and all choices of associates $\mathbf{g}^{(\,)}, \mathbf{h}^{(\,)}$ of $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ [1]),

$$(25) \qquad (Ex)[\mathbf{f}^{(\,)}(a, \bar{\mathbf{g}}^{(\,)}(x, x), \bar{\mathbf{h}}^{(\,)}(x)) > 0],$$

$$(26) \qquad \begin{cases} (x)[\mathbf{f}^{(\,)}(a, \bar{\mathbf{g}}^{(\,)}(x, x), \bar{\mathbf{h}}^{(\,)}(x)) > 0 \\ \qquad\qquad \rightarrow \mathbf{f}^{(\,)}(a, \bar{\mathbf{g}}^{(\,)}(x, x), \bar{\mathbf{h}}^{(\,)}(x)) = \mathbf{f}(a, \mathbf{g}, \mathbf{h}) + 1]. \end{cases}$$

An object $\in \mathscr{RC}$ if it $\in \mathscr{C}$ with a general recursive associate. (Any object of type $0 \in \mathscr{RC}$.)

5.7. Theorem 6. *Under the correlations of* 5.4 *between numerical- and pure-type objects, the property of belonging to* $\mathscr{C}$ *is preserved, and the correlated object has an associate primitive recursive uniformly in any associate of the given object (so the property of belonging to* $\mathscr{RC}$ *is also preserved).*

Proof. For $t = 0$ or $t = (0 : 0, \ldots, 0)$ this is immediate. Now say e.g. $t = (0 : 0, u, v)$ where $u^\circ = 1$, $v^\circ = 3$. Then $t^\circ = 4$, $\mathbf{f}^\circ = \lambda\beta^3\, \mathbf{f}(\alpha^0, \alpha^{1u}, \alpha^v)$ where $\alpha^0 = (\beta^3)^0_0$, $\alpha^1 = (\beta^3)^1_1$, $\alpha^3 = (\beta^3)_2$. Suppose $\mathbf{f} \in \mathscr{C}$. We aim to show next that, for any $\beta^3 \in \mathscr{C}$, $\mathbf{f}(\alpha^0, \alpha^{1u}, \alpha^{3v})$ is general recursive

---

[1]) See note 2 on page 81.

uniformly in any associates $\mathbf{f}^{(\,)}$, $\beta^{(3)}$ of $\mathbf{f}, \beta^3$. By [5] § 2, $\alpha^0 = \varphi_0(\beta^3)$, $\alpha^1 = \alpha^{(1)} = \lambda x\ \varphi_1(\beta^3, x)$, $\alpha^3 = \lambda\tau^2\ \varphi_2(\beta^3, \tau^2)$ with primitive recursive $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$. By Theorem 4, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{RC}$. Hence by Theorem 2, $\varphi_0(\beta^3) = \varphi_{01}(\beta^{(3)})$, $\varphi_1(\beta^3, x) = \varphi_{11}(\beta^{(3)}, x)$ with $\varphi_{01}, \varphi_{11}$ partial recursive; and also by 1.7, $\alpha^3 = \lambda\tau^2\ \varphi_2(\beta^3, \tau^2)$ has an associate $\alpha^{(3)}$ general recursive uniformly in $\beta^{(3)}$. By the hypothesis of an induction over the numerical types, $\alpha^{1u}, \alpha^{3v} \in \mathscr{C}$ with associates $\alpha^{1u}, \alpha^{3v(\,)}$ primitive recursive uniformly in $\alpha^1, \alpha^{(3)}$. Finally, using (25)–(26) (cf. (7)–(9)), $\mathbf{f}(\alpha^0, \alpha^{1u}, \alpha^{3v})$ is general recursive uniformly in $\mathbf{f}^{(\,)}, \alpha^0, \alpha^{1u}, \alpha^{3v(\,)}$. Our aim now being realized, we can apply the normal form theorem ([3] pp. 292, 330 with [4] Footnote 2) to obtain that $\mathbf{f}(\alpha^0, \alpha^{1u}, \alpha^{3v}) = U(\mu y T_0^{3,1}(\bar{\mathbf{f}}^{(\,)}(y, y, y), \bar{\beta}^{(3)}(y), e))$ for some e. Thence an associate $\mathbf{f}^{\circ(\,)}$ of $\mathbf{f}^\circ = \lambda\beta^3\, \mathbf{f}(\alpha^0, \alpha^{1u}, \alpha^{3v})$ primitive recursive uniformly in $\mathbf{f}^{(\,)}$ is forthcoming by the methods of 3.2 and 1.7. The treatment of the inverse correlation is similar.

Theorem 7. *Let* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *be lists of variables of given numerical types ranging in* $\mathscr{C}$, *and let the function* $\mathbf{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ *with type-0 values* $\in \mathscr{C}$ $(\in \mathscr{RC})$. *Then there is a function* $\mathbf{g}(\mathfrak{a}, \beta^j, \gamma^k)$ *with type-0 values which* $\in \mathscr{C}$ $(\in \mathscr{RC})$, *where* $j = \max(\mathfrak{b}^\circ)$, $k = \max(\mathfrak{c}^\circ)$, *such that*

$$(27) \qquad (\mathfrak{b})(E\mathfrak{c})[\mathbf{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = 0] \equiv (\beta^j)(E\gamma^k)[\mathbf{g}(\mathfrak{a}, \beta^j, \gamma^k) = 0].$$

Similarly with more groups of quantifiers.

Proof. Take for illustration $\mathbf{f}(\mathbf{a}, b_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c})$ where $b_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}$ are of types 0, u, v, w with $\mathrm{u}^\circ = 1$, $\mathrm{v}^\circ = 3$, $\mathrm{w}^\circ = 2$. Let

$$\mathbf{g} = \lambda\mathbf{a}\beta^3\gamma^2\, \mathbf{f}(\mathbf{a}, \alpha^0, \alpha^{1u}, \alpha^{3v}, \gamma^{2w})$$

where $\alpha^0 = (\beta^3)_0^0$, $\alpha^1 = (\beta^3)_1^1$, $\alpha^3 = (\alpha^3)_2$. By arguments used in the proof of Theorem 6, $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \alpha^0, \alpha^{1u}, \alpha^{3v}, \gamma^{2w})$ is general recursive uniformly in any associates $\mathbf{f}^{(\,)}, \mathbf{a}^{(\,)}, \beta^{(3)}, \gamma^{(2)}$ of $\mathbf{f}, \mathbf{a}, \beta^3, \gamma^2$, and hence $\mathbf{g}$ has an associate $\mathbf{g}^{(\,)}$ primitive recursive uniformly in $\mathbf{f}^{(\,)}$; so $\mathbf{g} \in \mathscr{C}$, and $\in \mathscr{RC}$ if $\mathbf{f}$ does. For a given $\mathbf{a}$, assume

$$(b_1)(\mathbf{b}_2)(\mathbf{b}_3)(E\mathbf{c})[\mathbf{f}(\mathbf{a}, b_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}) = 0],$$

consider any β^3, choose $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^3$ from it as above, apply the assumption to $\alpha^0, \alpha^{1u}, \alpha^{3v}$ as the $b_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ to obtain a $\mathbf{c}$, and take $\gamma^2 = \mathbf{c}^\circ$, whereupon (using (24)), $\mathbf{g}(\mathbf{a}, \beta^3, \gamma^2) = 0$; thus

$$(\beta^3)(E\gamma^2)[\mathbf{g}(\mathbf{a}, \beta^3, \gamma^2) = 0].$$

Conversely, assume the latter, consider any $b_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$, choose $\beta^3 = \langle b_1, \mathbf{b}_2^\circ, \mathbf{b}_3^\circ \rangle$, obtain a γ^2 by the assumption, and take $\mathbf{c} = \gamma^{2w}$, whereupon $\mathbf{f}(\mathbf{a}, b_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}) = 0$.

Theorem 8 (= Theorem 3 extended to numerical types). *Let* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *be variables ranging in* $\mathscr{C}$ *of numerical types* s, t. *Say e.g.* $s^\circ = 2$, $t = (0 : 0, u, v)$, $u^\circ = 1$, $v^\circ = 3$. *If* $\mathbf{f}$ *of type* $(0 : s, t) \in \mathscr{RC}$, *then there is a partial recursive functional* G ([3] pp. 234, 275, 326) *such that, for each* $\mathbf{a}$: *If*

$$(E\mathbf{b})[\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0],$$

then, for each $x, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathscr{C}$ *of types* 0, u, v, *and each choice of associates* $\mathbf{a}^{(\,)}, \mathbf{z}^{(\,)}$ *of* $\mathbf{a}, \mathbf{z}$ (*but* $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(\,)}$), *the quantity* $\mathsf{G}(\mathbf{a}^{(\,)}, \mathbf{y}, \mathbf{z}^{(\,)}; x)$ *is defined with value depending only on* $\mathbf{a}^{(\,)}, x, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, *and*

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}, \lambda x\mathbf{y}\mathbf{z}\, \mathsf{G}(\mathbf{a}^{(\,)}, \mathbf{y}, \mathbf{z}^{(\,)}; x)) = 0.$$

Similarly, with lists $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *of variables in* $\mathscr{C}$ *of any numerical types instead of* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Proof. Assume $(E\mathbf{b})[\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0]$. Then by the proof of Theorem 7, $(E\beta^4)[\mathbf{f}(\mathbf{a}, \beta^{4t}) = 0]$. Putting $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\circ s}$ by (24), and applying Theorem 3 to $\varphi = \lambda\alpha^2\beta^4\, \mathbf{f}(\alpha^{2s}, \beta^{4t})$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \beta_1^{4t}) = 0$ for $\beta_1^4 = \lambda\gamma^3\, \psi(\mathbf{a}^{\circ(2)}, \gamma^{(3)})$. By Theorem 4 with 1.7, when $\gamma^3 = \langle x, \alpha^1, \alpha^3 \rangle$ then we can take $\gamma^{(3)}(s) = \varphi_1(x, \alpha^1, \alpha^{(3)}, s)$ with a general recursive φ_1; and by Theorem 6, $\mathbf{a}^{\circ(2)} = \mathsf{F}_1(\mathbf{a}^{(\,)})$, $\mathbf{y}^\circ = \mathsf{F}_2(\mathbf{y})$, $\mathbf{z}^{\circ(3)} = \mathsf{F}_3(\mathbf{z}^{(\,)})$ with primitive recursive $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \mathsf{F}_3$. Now $\beta_1^{4t} = \lambda x\mathbf{y}\mathbf{z}\, \beta_1^4(\langle x, \mathbf{y}^\circ, \mathbf{z}^\circ \rangle) = \lambda x\mathbf{y}\mathbf{z}\, \psi(\mathbf{a}^{\circ(2)}, \lambda s\, \varphi_1(x, \mathbf{y}^\circ, \mathbf{z}^{\circ(3)}, s))$. So let $\mathbf{G}(\mathbf{a}^{(\,)}, \mathbf{y}, \mathbf{z}^{(\,)}; x) = \psi(\mathsf{F}_1(\mathbf{a}^{(\,)}), \lambda s\, \varphi_1(x, \mathsf{F}_2(\mathbf{y}), \mathsf{F}_3(\mathbf{z}^{(\,)}), s))$.

5.8. An object $\mathbf{e}$ of non-numerical type shall $\in \mathscr{C}$ ($\in \mathscr{RC}$) if the correlated object $\mathbf{e}'$ of numerical type under $5.3 \in \mathscr{C}$ ($\in \mathscr{RC}$) under 5.6, and by an *associate* of $\mathbf{e}$ we shall mean one of $\mathbf{e}'$. This definition makes the extension of Theorems 6–8 from numerical to any finite types automatic.

(For the example in Theorem 8, now say $s'^\circ = 2$, $t' = (0:0, u, v)$, and the concluding formula becomes $\mathbf{f}(\mathbf{a}, (\lambda x\mathbf{y}\mathbf{z}\, \mathsf{G}(\mathbf{a}^{(\,)}, \mathbf{y}, \mathbf{z}^{(\,)}; x))^t) = 0$.)

BIBLIOGRAPHY

[1] S. C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory, Journal of Symbolic Logic, **10** (1945), 109–124.

[2] ————, Recursive functions and intuitionistic mathematics, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U.S.A., Aug. 30–Sept. 6, 1950), 1952, **1**, 679–685.

Univ. of Arizona Library

[3] S. C. KLEENE, Introduction to metamathematics, Amsterdam (North-Holland), Groningen (Noordhoff), New York and Toronto (Van Nostrand) 1952, X + 550 pp.

[4] ———, Arithmetical predicates and function quantifiers, Transactions of the American Mathematical Society, **79** (1955), 312–340.

[5] ———, Recursive functionals and quantifiers of finite types I, Transactions Am. Math. Society (to appear).

[6] G. KREISEL, Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types, this volume, p. 101.

INTERPRETATION OF ANALYSIS BY MEANS OF CONSTRUCTIVE FUNCTIONALS OF FINITE TYPES

GEORG KREISEL

Department of Mathematics, The University, Reading

1. Introduction

The theory of recursive functions provides a notion of constructivity within the framework of classical mathematics. Roughly speaking, it is concerned with the constructive character of *results* rather than of *proofs*, while the latter are considered in intuitionistic mathematics. The application of the notion of a constructive result to computing procedures is familiar, where a notion of constructive proof has no application. [1])

A constructive result of arithmetic is taken to be a true recursive statement (where here and below all recursive statements are quantifier-free): the variables range over the natural numbers and the non-logical constants are recursive functions and predicates. This notion is easily extended to the case where a second type of variable is introduced which ranges over functions (from the natural numbers into the natural numbers): in the recursive statements of this type we have individual variables ranging over the natural numbers and variables of the next type ranging over functions; the non-logical constants are functionals and predicates which are uniformly recursive in the function variables which occur in the statement considered. We remark in passing that here (and even at higher types) the arbitrary character of the functions is not essential since the recursive functionals and predicates are continuous, and there is a simple denumerable set of functions, namely those zero except at a finite number of arguments, which are dense in the space of all the functions considered: so the truth

---

[1]) Suppose we want to compute $\mu_y A(n, y)$ and have a *non-constructive* proof showing (i) $\mu_y A(n, y) \leqslant n$ and (ii) $\mu_y A(n, y)$ is even. Then we shall set the computer to calculate $\mu_y[A(n, 2y) \;\&\; 2y \leqslant n]$. We should do exactly the same with the computer if we had a *constructive proof* of (i) and (ii).

of a recursive statement is equivalent to its truth when the function variables range over the subset.

We shall now review briefly some applications of the theory of recursive functions and functionals to problems of constructivity, and indicate significant gaps in these applications.

1.1. *Effectiveness and non-effectiveness of solutions to mathematical problems.* If a mathematical problem has a prenex form, e.g. $(n)(Em)(p)A(n, m, p)$, A recursive, it is said to be effectively or recursively solved if there is a recursive function $M(n)$ such that $A[n, M(n), p]$ is true for all n and p. It is known that several mathematical problems, which have (classical) solutions, are not effectively solvable; e.g. there are primitive recursive sequences of rationals a_r which converge, but there is no recursive function $M(n)$ such that, for $p > M(n)$, $|a_p - a_{M(n)}| < n^{-1}$. At the next level instead of recursive functions, recursive functionals are used to replace the existence symbols.

1.11. Thus the fundamental theorem of algebra is effectively true in the following sense: if the coefficients $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ are given by free choices of intervals, and one of them $> \epsilon > 0$ in absolute value, we have a recursive method of obtaining nested squares ζ_m of diameter $< 2^{-m}$, such that for z in ζ_m, $|\alpha_0 z^n + \ldots + \alpha_n| < 2^{-m}$. This can be asserted on the basis of a finite amount of information about the α since a recursive functional depends only on a finite number of values of the argument. In other words the constructive statement does not only assert the existence of a zero, but its *continuous dependence* on the coefficients. A trivial consequence is that if the α are themselves recursive complex numbers, the limit of the ζ_m is also recursive.

A constructive proof of the fundamental theorem of algebra was given in [10]. A non-constructive proof of the *constructive* version of this theorem was given in [6].

1.12. Conversely, the theorem that a continuous function in a closed interval attains its extremal values, is strongly non-constructive. For we know a uniformly continuous function with a recursive modulus of continuity, whose values at the rationals are recursive functions of the arguments, and all its extremal values are attained at non-recursive points. So there is certainly no recursive method of obtaining the position of a maximum from the values of a continuous function at a finite number of arguments.

1.13. So, by 1.1 in the special case of prenex formulae it is clear what it means to say that a formula $\mathfrak{A}$ of analysis is constructively true. But this is no longer so with negations of such formulae, implications, and particularly iterated implications $(A \to B) \to C$, except in special cases such as 1.12. Thus we cannot find a recursive example of a continuous function in [0,1] which changes sign, but does not have a recursive zero; on the other hand there is no recursive functional which calculates a zero of every such function: is it constructively true that not every continuous function which changes sign, has a zero?

Evidently, (one or more) *definitions are required of what it means to say that an arbitrary formula of analysis is constructively true.* – The same applies to non-prenex formulae of arithmetic. –

1.2. *Analysis of intuitionist proofs and independence results.* Kleene has applied the theory of recursive functions to an analysis of Heyting's arithmetic. [1]) If a prenex formula

$$(x_1)(Ey_1)\ldots(x_n)(Ey_n)A(x_1\ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{(i)}$$

is provable in this system then it is recursively satisfiable, i.e. there are recursive functions $Y_1(x_1), \ldots, Y_n(x_1, \ldots, x_n)$ such that the (recursive) statement

$$A[x_1, \ldots, x_n, Y_1(x_1), \ldots, Y_n(x_1, \ldots, x_n)]$$

is true for all $x_1, \ldots, x_n$. Thus, if some such formula (i) is classically true, but not recursively satisfiable then it is independent in Heyting's arithmetic. Kleene made further use of recursive functions in the theory of recursive realizability, but here the theorems are in general not analyzed by means of (quantifier-free) recursive statements; e.g. for recursive A and B, the realizability of $(x)A(x) \to (y)B(y)$ is expressed essentially by the statement $(x)A(x) \to (y)B(y)$ itself. (For details, see section 3.)

If one's interest is to exploit intuitionist mathematics from a classical point of view, and to get true constructive results in the sense described above, one will aim to eliminate such quantified statements altogether.

---

[1]) HEYTING's arithmetic is described in [2]: it consists of Heyting's predicate calculus, schemata for primitive recursive functions, and the non-logical axioms and axiom schemata of classical arithmetic.

1.3. *Analysis of classical proofs and independence results.* It has been noticed that a prenex formula (i) of 1.2 is classically true if and only if a recursive statement of the following form is true:

$$A[x_1, f_2(\varphi_1), \ldots, f_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$$

when f_{r+1} is a function variable with r arguments, and $\varphi_i(x_1, f_2, \ldots, f_n)$ are recursive functionals (no-counterexample-interpretation): more succinctly, if φ ranges over *recursive* functionals, f over *arbitrary* functions, (i) is classically equivalent to:

$$(E\varphi_1)\ldots(E\varphi_n)(x_1)(f_2)\ldots(f_n)A[x_1, f_2(\varphi_1), \ldots, f_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \varphi_1, \ldots, \varphi_n] \quad \text{(ii)}$$

Since, classically, an arbitrary formula $\mathfrak{A}$ is equivalent to a prenex one, to each $\mathfrak{A}$ we find an equivalent formula of form (ii). Now, if $\mathfrak{A}$ is provable in some prescribed system, the φ are not only recursive, but belong to some subclass depending on the system considered, and this leads to independence proofs. (For details, see [7].)

A similar treatment seems desirable for formulae of analysis, say the system K of Hilbert–Bernays II, p. 480. Essentially, K is obtained by starting with predicates which are uniformly primitive recursive in the function variables, and using logical connectives and quantifiers in the usual way.

2. To treat the problems indicated above, we first extend the notion of recursiveness to *higher types*. Now the variables range over *continuous functionals* and the non-logical constants are *recursively continuous* functionals and predicates (section 4 or KLEENE's paper [4], which was developed independently). The development is related to Brouwer's reduction of higher types to functions [1]. – For comparison, two other notions of recursiveness are considered, one based on *effective operations*, and one on *general recursive functionals* of higher type which were introduced by KLEENE [5]. Arguments are given against using these two notions as a complete formulation of the idea of *computation*, namely these: effective operations operate only on recursive objects, e.g. recursive functions, while it is constructively meaningful to operate on free choice sequences; general recursive functionals operate on completely arbitrary functionals, in such a way that a 'computation' consists of infinitely many steps, and this is not constructively meaningful.

2.1. Using Gödel's interpretation of Heyting's arithmetic, described in section 3, we define what it means to say that a formula $\mathfrak{A}$ of analysis is constructively true. We express this by forming a formula $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$, φ and ψ variables of higher type, and calling $\mathfrak{A}$ constructively true if the associated formula $(E\varphi)(\psi)A(\varphi,\psi)$ is true when ψ ranges over continuous and φ over recursively continuous functionals: we call this $\mathfrak{A}_3'$. (There are two rival interpretations with the rival notions of recursive functional, described above. We let $\mathfrak{A}_1'$ denote $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$ when φ and ψ range over effective operations, and $\mathfrak{A}_2'$ denote $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$ when ψ range over arbitrary functionals and φ over general recursive ones. Neither of these seems to be a reasonable formulation of constructivity, but they are of interest because $\mathfrak{A}_1'$ is closely related to Kleene's original notion of recursive realizability and $\mathfrak{A}_2'$ is very efficient for independence proofs.)

2.11. The crucial step in the interpretation concerns implication.

$(\varphi)A(\varphi, \tau) \to (E\psi)(\chi)B(\psi, \chi)$ is replaced by $(E\psi)\{(\varphi)A(\varphi, \tau) \to \to (\chi)B(\psi, \chi)\}$, for recursive A and B.

This rule leads to $(E\psi)(\chi)(E\varphi)\{A[\varphi(\chi), \tau] \to B(\psi, \chi)\}$, when combined with the rule $\neg(\varphi)A(\varphi) \to (E\varphi)\neg A(\varphi)$ (which may be a consequence of the former rule). This principle is not plausible on the interpretation of intuitionist mathematics put forward by Heyting. For, a proof of $(\varphi)A(\varphi, \tau) \to (E\psi)(\chi)B(\psi, \chi)$ might conceivably use the *proof* of $(\varphi)A(\varphi, \tau)$ in the construction of ψ while after the transformation ψ depends only on τ and not on the hypothetical proof which shows that τ satisfies $(\varphi)A(\varphi, \tau)$. — The justification for this interpretation is that (i) as shown by Gödel, it is consistent with Heyting's arithmetic, (ii) it is intuitionistically meaningful even if it is not the one intended by Heyting, (iii) no example is known where a proof of an implication $(\varphi)A(\varphi, \tau) \to (E\psi)(\chi)B(\psi, \chi)$ actually makes use of the hypothetical proof of the premis in the construction of ψ.

2.2. On the new interpretation every theorem of Heyting's arithmetic is analyzed by means of a recursive formula without a residue of quantified expressions. New methods for getting independence proofs become available.

2.3. The analysis of classical systems can now be extended in

several directions beyond the no-counterexample-interpretation.

2.31. If $\mathfrak{A}$ is a formula of analysis, and existential and disjunction symbols are defined in terms of the other logical constants to yield $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A} \leftrightarrow (\mathfrak{A}_1)'_3$ classically, i.e. $(\mathfrak{A}_1)'_3$ replaces the no-counterexample-interpretation of $\mathfrak{A}$.

2.32. In arithmetic, $\mathfrak{A} \leftrightarrow (\neg\neg\mathfrak{A})'_3$, too.

2.33. The results of 2.31 and 2.32 are best possible insofar as 2.31 does not hold for $(\mathfrak{A}_1)'_1$ or $(\mathfrak{A}_1)'_2$ instead of $(\mathfrak{A}_1)'_3$, and 2.32 does not hold for analysis nor for $(\neg\neg\mathfrak{A})'_1$ or $(\neg\neg\mathfrak{A})'_2$ instead of $(\neg\neg\mathfrak{A})'_3$.

2.34. The no-counterexample-interpretation of $\mathfrak{A}$ is $(\neg\mathfrak{A}^*)'$ where $\mathfrak{A}^*$ is the prenex form of $\neg\mathfrak{A}$, $(\neg\mathfrak{A}^*)'_2 \leftrightarrow (\neg\mathfrak{A}^*)'_3 \leftrightarrow \mathfrak{A}$ for arithmetic $\mathfrak{A}$; but while $\mathfrak{A} \rightarrow (\neg\mathfrak{A}^*)'_3$ and $(\neg\mathfrak{A}^*)'_2 \rightarrow \mathfrak{A}$ also for analytic $\mathfrak{A}$, the converses are not generally true.

2.35. Mathematically, the main results of this paper are 2.31 and 2.32 which are proved in 5.1 and 5.2 below. The main tool in the proof is the result 4.141 whose proof depends on the density theorem in the appendix.

2.4. *Relation between classical and intuitionist mathematics.* From a classical point of view, the *problems raised in* 1.13, 1.2, 1.3, *are solved satisfactorily by means of the interpretation using continuous functionals* (the third interpretation of 2.1 above).

Using the notion of interpretation of [7] para. 2 the **principal result** of the present paper is expressed by the

Theorem. *There is an interpretation of classical analysis in the (classical) quantifier-free theory of continuous functionals of finite type whose constants are the recursively continuous functionals.*

This is an analogue of Herbrand's theorem because it relates quantified expressions (of analysis) with quantifier-free ones.

But from an intuitionistic point of view the interpretation is problematical. General objections were described in 2.11, and the difference between the intended meaning of the logical constants and the interpretation is further illustrated by the fact that the *interpretation is not complete with respect to Heyting's predicate calculus* (footnote to 3.52). The following comments are intended to formulate our results in a manner which does justice both to the classical and to the intuitionistic point of view.

2.41. The no-counterexample-interpretation is unobjectionable. Intuitionistically, $(\neg\mathfrak{A}^*)'_3 \rightarrow \neg\mathfrak{A}^*$, i.e. the interpretation $(\neg\mathfrak{A}^*)'_3$

of $\neg \mathfrak{A}^*$ *expresses the full content* of $\neg \mathfrak{A}^*$ from an intuitionistic point of view. For arithmetic $\mathfrak{A}$ we have $(\neg \mathfrak{A}^*)'_2 \leftrightarrow (\neg \mathfrak{A}^*)'_3$; also, since $(\neg \mathfrak{A}^*)'$ uses only functionals of lowest order, from the meaning of the symbols it follows that *if* $(\neg \mathfrak{A}^*)'_3$ *is intuitionistically provable then it is classically true*; for if $(\neg \mathfrak{A}^*)'_3$ is proved intuitionistically, we have an explicit determination of a functional φ for which $(\psi)A(\varphi, \psi)$ is provable, where ψ ranges over free choices with numerical values. If this is intuitionistically provable, it must be classically true: for, if it were classically false, e.g. when $\psi = \psi_0$, we should even get a function $\bar{\psi}_0$, zero except for a finite number of arguments, such that $\neg A(\varphi, \bar{\psi}_0)$, and this would lead to an intuitionistic proof of $\neg (\psi)A(\varphi, \psi)$. For general arithmetic (and *a fortiori* analytic) formulae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'_3 \rightarrow \mathfrak{A}$ has not been established intuitionistically. Also with more general formulae the relation between 'intuitionistically provable' and 'true' is less clear. For instance, on Heyting's interpretation we have $\neg (x)(Ey)(z)A(x,y,z)$ if it is provable that $(x)(Ey)(z)A(x, y, z)$ cannot have an intuitionistic proof; so if there are true formulae of this form which are (provably) not intuitionistically provable, we should have a classically false formula of the form $\neg (x)(Ey)(z)A(x, y, z)$ which is intuitionistically provable.

2.411. *The relation discussed in* 2.41 *between intuitionistic provability and classical truth* which holds for quantifier-free formulae and which seems to fail for more general formulae, is perhaps the strongest reason for wanting an interpretation without quantifiers (cf. 1.2 above). – The relation is obvious if the variables range over numbers and functions; by 4.141, 4.15, it also holds when the (free) variables range over continuous functionals of higher type (but the necessary details are not given in the present paper).

2.412. So we have the following relations between classical and intuitionistic arithmetic (3.53): if $\mathfrak{A}$ is provable in classical arithmetic, $(\neg \mathfrak{A}^*)'_3$ is provable in a very simple intuitionist system (3.1), which is free of quantifiers. By 2.41, the (weaker) result follows that $\neg \mathfrak{A}^*$ is intuitionistically valid.

2.42. For our interpretation of analysis, cf. 2.31 above, we have much less: the equivalence $\mathfrak{A} \leftrightarrow (\mathfrak{A}_1)'_3$ is established classically, but, in contrast to the no-counterexample-interpretation, we have not established $(\mathfrak{A}_1)'_3 \rightarrow \mathfrak{A}_1$ intuitionistically. To get intuitionistically

significant results along the line of 2.412 further developments are necessary. Two possibilities are promising:

2.421. We may try to show:

If $\mathfrak{A}$ is provable in some given classical system then $\mathfrak{A}_1$ is provable intuitionistically. This would of course constitute an intuitionistic consistency proof of classical analysis. *This problem is open.* What is known at present is this.

If $\mathfrak{A}$ *is provable classically then* $\mathfrak{A}_1$ *is provable intuitionistically from a finite set of axioms of the form* $\neg\neg(x)[\mathfrak{R}(x) \vee \neg \mathfrak{R}(x)]$, where x ranges over the natural numbers, and $\mathfrak{A}_1$ is got from $\mathfrak{A}$ as in 2.31.

For, the essential step in classical analysis is the comprehension axiom

$$(E\alpha)(x)[\alpha(x)=0 \leftrightarrow \mathfrak{R}(x)].$$

By 3.52 below, intuitionistically,

$$(x)[\mathfrak{R}(x) \vee \neg \mathfrak{R}(x)] \leftrightarrow (x)(Ey)[y=0 \leftrightarrow \mathfrak{R}(x)]$$

and, by the intuitionistic meaning of the existential operator for functions (not free choice sequences!) α

$$(x)(Ey)[y=0 \leftrightarrow \mathfrak{R}(x)] \leftrightarrow (E\alpha)(x)[\alpha(x)=0 \leftrightarrow \mathfrak{R}(x)].$$

Hence

$$\neg\neg\ (E\alpha)(x)[\alpha(x)=0 \leftrightarrow \mathfrak{R}(x)] \leftrightarrow \neg\neg\ (x)[\mathfrak{R}(x) \vee \neg\ \mathfrak{R}(x)].$$

Now if disjunction and existence symbols are eliminated in terms of the other symbols, $\neg\neg\ \mathfrak{R}_1 \leftrightarrow \mathfrak{R}_1$, and we have

$$\neg\neg\ (x)[\mathfrak{R}(x) \vee \neg\ \mathfrak{R}(x)] \rightarrow \{(E\alpha)(x)[\alpha(x)=0 \leftrightarrow \mathfrak{R}(x)]\}_1.$$

By the familiar translation [2] of classical logic into intuitionistic logic we get the theorem.

The theorem can be formulated as follows:

If intuitionistic analysis is ω*-consistent then classical analysis is consistent,* where we call intuitionistic analysis ω-consistent if it is absurd that $\neg(x)\mathfrak{A}(x)$ and $\neg\neg\ \mathfrak{A}(0)$, $\neg\neg\ \mathfrak{A}(0^{(1)})$, ..., $\neg\neg\ \mathfrak{A}(0^{(n)})$, ... are all provable.

For, if classical analysis were inconsistent we should have an intuitionistic proof of

$$\neg\{\neg\neg(x_1)[\mathfrak{R}^{(1)}(x_1) \vee \neg\ \mathfrak{R}^{(1)}(x_1)] \,\&\, \ldots \,\&\, \neg\neg(x_p)[\mathfrak{R}^{(p)}(x_p) \vee \neg\ \mathfrak{R}^{(p)}(x_p)]\}, \text{ i.e.}$$
$$\neg(x_1)\ldots(x_p)\{[\mathfrak{R}^{(1)}(x_1) \vee \neg\ \mathfrak{R}(x_1)] \,\&\, \ldots \,\&\, [\mathfrak{R}^{(p)}(x_p) \vee \neg\ \mathfrak{R}^{(p)}(x_p)]\}$$

while for each set of numerals $n_1, \ldots, n_p$ we have

$$\neg\neg\{[\mathfrak{A}^{(1)}(n_1) \vee \neg\, \mathfrak{A}^{(1)}(n_1)] \;\&\; \ldots \;\&\; [\mathfrak{A}^{(p)}(n_p) \vee \neg\, \mathfrak{A}^{(p)}(n_p)]\}.$$

2.422. There is a second possibility:

Even if $\mathfrak{A}_1$ is not provable in intuitionistic analysis ([11] pp. 100–105) when it is provable classically, $(\mathfrak{A}_1)_3'$ might be intuitionistically provable.

For the reason given in 1.3 and 2.411 this would in any case be more informative than work on 2.421. (The same reason explains the advantage of Gödel's interpretation described below and his translation in [2].) Furthermore, the ω-consistency of intuitionistic analysis is not evident for Heyting's interpretation of the logical constants.

2.43. Whatever formal relations of the type described in 2.421, 2.422 may be established, they do not express the full content of an intuitionist statement from the classical point of view, nor the full content of a classical statement from the intuitionist point of view. The primitive concept of intuitionism, as expounded by Heyting, is the notion of *constructive proof*. Properties of this notion are laid down in Heyting's axioms just as classical analysis takes the notion of *arbitrary function* as primitive and lays down properties of this notion. It is not to be expected that either notion in its full generality comes within the scope of the other; for this reason such analyses of intuitionist systems as Kleene's recursive realizability or Gödel's treatment in section 3 are needed to verify from a classical point of view that an intuitionistically provable formula is constructively true. Note in passing that the interests of classical and intuitionist mathematics are independent of criticisms of the other.

I thank Professor Kurt Gödel for many illuminating discussions on the subject of this paper; particularly for suggestions in connection with paras. 2.421 and 2.422 above and for telling me his interpretation described below.

3. Gödel's interpretation of Heyting's arithmetic

Gödel establishes a proof theoretical relation between Heyting's arithmetic and the following quantifier-free system (which is neutral between intuitionistic and classical mathematics).

3.1. The notation is that of primitive recursive arithmetic of finite type. Each variable is given a *type*, (0) for the natural numbers $(\beta\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to functions whose value is of type β and whose n arguments are of type $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. All types obtained by finite iteration in this way from (0) are included.

The rules of proof are those of the intuitionist propositional calculus, which in the present context is equivalent to the classical one, since all formulae are quantifier-free; and substitution.

The axioms for equality and the successor function are included.

Finally, there are axioms which are 'defining equations' for the so-called primitive recursive functionals, where $\mathfrak{B}$ denotes an arbitrary set of variables for functionals, n ranges over the natural numbers, $\mathfrak{B}_1$ is a permutation of $\mathfrak{B}$, and the types are so chosen that the equations make sense on the theory of types:

$$\varphi(\psi, \mathfrak{B}) = \psi$$
$$\varphi(\psi, \mathfrak{B}) = 0$$
$$\varphi(n, \mathfrak{B}) = n + 1$$
$$\varphi(\psi, \mathfrak{B}) = \chi[\varrho(\psi, \mathfrak{B}), \mathfrak{B}]$$
$$\varphi(\mathfrak{B}) = \psi(\mathfrak{B}_1)$$
$$\varphi(\psi, \chi_1, \ldots, \chi_n, \mathfrak{B}) = \psi(\chi_1, \ldots, \chi_n)$$
$$\varphi(0, \mathfrak{B}) = \chi(\mathfrak{B}),\ \varphi(n+1, \mathfrak{B}) = \psi[n, \varphi(n, \mathfrak{B}), \mathfrak{B}].$$

The schema of induction takes the following form:
If $A(0, \psi)$ and $A[n, \varphi(n, \psi)] \to A(n+1, \psi)$ then $A(n, \psi)$.

3.11. These functionals differ from Kleene's primitive recursive functionals [5] or [11], pp. 148–154, because the last schema is here applied to φ which take functionals as values while Kleene considers only functionals with numerical values. The present ones are a proper extension because the functions definable by this schema include all ordinal recursive ones of order $< \in_0$ (cf. 3.4) while Kleene's are all primitive recursive.

3.2. With every formula $\mathfrak{A}$ of arithmetic is associated a formula $(E\varphi_1) \ldots (E\varphi_m)(\psi_1) \ldots (\psi_n)A(\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \ldots, \psi_n)$, or, for short, $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$, A quantifier free.

Quantifier-free formulae are unchanged.

If $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$ is associated with $\mathfrak{A}$, $(E\varphi_1)(\psi_1)B(\varphi_1, \psi_1)$ with $\mathfrak{B}$ then we associate

$(E\varphi)(E\varphi_1)(\psi)(\psi_1)[A(\varphi, \psi)\ \&\ B(\varphi_1, \psi_1)]$ with $\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}$

$(Ez)(E\varphi)(E\varphi_1)(\psi)(\psi_1)[z=0\ \&\ A(\varphi, \psi)\cdot \vee \cdot z\neq 0\ \&\ B(\varphi_1, \psi_1)]$ with $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

$(E\Phi_1)(E\Psi)(\varphi)(\psi_1)\{A[\varphi, \Psi(\varphi, \psi_1)] \to B[\Phi_1(\varphi), \psi_1]\}$ with $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$

(where the types of Φ_1 and Ψ are chosen so as to make sense), in particular

$$(E\Psi)(\varphi) \neg A[\varphi, \Psi(\varphi)] \text{ with } \neg \mathfrak{A}.$$

If $(E\varphi)(\psi)A(x, \varphi, \psi)$ is associated with $\mathfrak{A}(x)$, we associate

$$(Ex)(E\varphi)(\psi)A(x, \varphi, \psi) \text{ with } (Ex)\mathfrak{A}(x)$$
$$(E\varphi)(x)(\psi)A[x, \varphi(x), \psi] \text{ with } (x)\mathfrak{A}(x).$$

3.21. If $\mathfrak{A}$ contains function variables, and $(E\varphi)(\psi)A(f, \varphi, \psi)$ is associated with $\mathfrak{A}(f)$ then $(Ef)(E\varphi)(\psi)A(f, \varphi, \psi)$ is associated with $(Ef)\mathfrak{A}(f)$ and $(E\varphi)(f)(\psi)A[f, \varphi(f), \psi]$ with $(f)\mathfrak{A}(f)$.

3.3. Gödel has shown that *if a formula* $\mathfrak{A}$ *is provable in Heyting's arithmetic there is a primitive recursive* φ_0 *such that* $A(\varphi_0, \psi)$, *with free variable* ψ, *is provable in the system* 3.1.

The proof proceeds by showing that each of Heyting's axioms is satisfied identically under the interpretation 3.2 when formulae of the form $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$ are substituted for the propositional and predicate variables; the axioms of the propositional calculus are the crucial ones. Each axiom gives rise to one or more schemata for introducing functionals. The induction principle gives rise to the last scheme.

Example: $\mathfrak{A} \to (\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$. Put $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$ for $\mathfrak{A}$, $(E\varphi_1)(\psi_1)B(\varphi_1, \psi_1)$ for $\mathfrak{B}$. Then $\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ is replaced by

$$(E\Phi_1)(E\varphi)(\Psi)(\psi_1)\{\neg A\{\varphi(\Psi, \psi_1), \Psi[\varphi(\Psi, \psi_1)]\} \to B[\Phi_1(\Psi), \psi_1]\}$$

where the type of the value of Ψ is that of ψ, and of its argument is that of φ, the type of the value of Φ is that of φ.

To satisfy $\mathfrak{A} \to (\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, i.e.

$$(E\Phi_1)(E\Phi)(E\psi')(\varphi')(\Psi)(\psi_1)\{A[\varphi', \psi'(\varphi', \Psi, \psi_1)] \to \to \{\neg A[\Phi(\Psi, \psi_1, \varphi'), \Psi(\Phi(\Psi, \psi_1; \varphi'))] \to B[\Phi_1(\Psi; \varphi'), \psi_1]\}\}$$

take $\Phi(\Psi, \psi_1, \varphi') = \varphi'$, $\psi'(\varphi', \Psi, \psi_1) = \Psi(\varphi')$, Φ_1 arbitrary. (These definitions are included in the schema of 3.1.)

The rules of inference are also satisfied, e.g. modus ponens (from $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ follows $\mathfrak{B}$): suppose $(\psi)A(\varphi_0, \psi)$ and

$$(\varphi)(\psi_1)\{A[\varphi, \Psi_0(\varphi, \psi_1)] \to B[\Phi_0(\varphi), \psi_1]\}, \text{ then } A[\varphi_0, \Psi_0(\varphi_0, \psi_1)] \to \\ \to B[\Phi_0(\varphi_0), \psi_1], \text{ and so } (\psi_1)B[\Phi_0(\varphi_0), \psi_1].$$

3.4. A consistency proof for classical arithmetic is obtained by first applying Gödel's translation [2] and then the present interpretation. Though the first $\in$-number is not mentioned explicitly, the proof which shows that there are functionals which satisfy the recursion equations of 3.1 uses well-orderings up to the first $\in$-number. Since the interpretation of $(x)(Ey)A(x, y)$ is

$$(Ef)(x)A[x, f(x)],$$

all functions which are provably recursive in Heyting's arithmetic are primitive recursive functionals. Since exactly the same functions are provably recursive in Heyting's and in classical arithmetic, all so-called ordinal recursive functions of order $< \in_0$, with respect to the usual standard ordering of order $\in_0$, are primitive recursive functionals.

3.5. We have a number of comments on this interpretation which will be used below.

3.51. To verify that the interpretation follows from principle 2.11, observe that if $(\varphi)A(\varphi, \tau) \to (E\psi)(\chi)B(\psi, \chi)$, then, by 2.11, $(E\psi)[(\varphi)A(\varphi, \tau) \to (\chi)B(\psi, \chi)]$, and so $(E\psi)(\chi)[(\varphi)A(\varphi, \tau) \to B(\psi, \chi)]$. Since $B(\psi, \chi)$ is quantifier-free, it is decidable, and so, by the second principle of 2.11, from $(\varphi)A(\varphi, \tau) \to B(\psi, \chi)$ follows $(E\varphi)[A(\varphi, \tau) \to \\ \to B(\psi, \chi)]$, i.e. we have $(\tau)(E\psi)(\chi)(E\varphi)[A(\varphi, \tau) \to B(\psi, \chi)]$, i.e. $(E\psi)(E\varphi)(\tau)(\chi)\{A[\varphi(\tau, \chi), \tau] \to B[\psi(\tau), \chi]\}$.

3.52. There is an alternative interpretation which is closely related to Kleene's realizability. With each $\mathfrak{A}$ is associated a formula $(E\varphi_1)\ldots(E\varphi_n)A(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ where A does contain quantifiers, but no existence symbols and no undecided disjunctions; as a result A can be written without disjunctions altogether since in Heyting's arithmetic $z = 0 \vee z \neq 0$ and hence $(z = 0 \;\&\; \mathfrak{N} \cdot \vee \cdot z \neq 0 \;\&\; \mathfrak{M}) \leftrightarrow [(z = 0 \to \\ \to \mathfrak{N}) \;\&\; (z \neq 0 \to \mathfrak{M})]$. The essential modification applies to implication where $(E\varphi)A(\varphi) \to (E\psi)\mathfrak{B}(\psi)$ is replaced by $(E\psi)\{(\varphi)[A(\varphi) \to \\ \to \mathfrak{B}(\psi(\varphi))]\}$. The objections of 2.11 apply to this interpretation too.

The modification is of use in independence proofs in Heyting's predicate calculus, e.g. of the formula

$$(x)[S(x) \vee \neg S(x)] \;\&\; \neg(Ex)S(x) \cdot \rightarrow (Ex)S(x).\ ^{1})$$

(Take for $S(x)$ the formula $(y)[\neg T_1(n, n, y) \vee T_1(n, n, x)]$ where T_1 is the normal form predicate of [3], p. 288.)

3.53. The no-counterexample-interpretation follows as a consequence of 3.3. By [2], if $(x_1)(Ey_1) \ldots (x_n)(Ey_n)A(x_1, \ldots, x_n y_1, \ldots, y_n)$ is provable classically then $(x_1) \neg (y_1) \neg \ldots \neg (x_n) \neg (y_n) \neg A(x_1, \ldots \ldots, x_n y_1, \ldots, y_n)$ is provable in Heyting's arithmetic. Also, in Heyting's predicate calculus $(Ex_1)(y_1)\ldots(Ex_n)(y_n) \neg A(x_1, \ldots, x_n y_1, \ldots, y_n) \rightarrow \rightarrow \neg (x_1) \neg (y_1) \neg \ldots \neg (x_n) \neg (y_n) \neg A(x_1, \ldots, x_n y_1, \ldots, y_n)$, and so

$$\neg (Ex_1)(y_1)\ldots(Ex_n)(y_n) \neg A(x_1, \ldots, x_n y_1, \ldots, y_n)$$

is provable in Heyting's arithmetic. Its interpretation is that of

$$\neg (Ex_1)(Ef_2)\ldots(Ef_n)(y_1)\ldots(y_n) \neg A[x_1 f_2(y_1)\ldots f_n(y_1, \ldots, y_{n-1})y_1, \ldots, y_n]$$

i.e.

$$(E\varphi_1)\ldots(E\varphi_n)(x_1)(f_2)\ldots(f_n)A[x_1 f_2(\varphi_1)\ldots f_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$$

namely (ii) of 1.3.

3.54. The interpretation is easily extended to several extensions of Heyting's arithmetic. Let $\prec$ be a (recursive) well-ordering of the natural numbers, whose first element is 0. Let $\mathfrak{A}(n)$ be an arbitrary formula of arithmetic which does not contain existence or disjunction symbols. Then the axiom schema

$$\text{If } \mathfrak{A}(0) \text{ and } (x)\{(y)[y \prec x \rightarrow \mathfrak{A}(y)] \rightarrow \mathfrak{A}(x)\} \text{ then } (x)\mathfrak{A}(x)$$

may be added to Heyting's arithmetic and the theorem of 3.3 applies if the schema of primitive recursive functionals is extended

---

[1]) The independence of this formula cannot be shown by means of Gödel's interpretation, since the interpretation of every substitution instance of this formula is even intuitionistically valid. In other words, *Gödel's interpretation is not complete for Heyting's predicate calculus.* — For, replace $S(x)$ by the formula $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi, x)$; then the translation of our formula is $(E\alpha)(E\varphi)(E\Psi_1)(x)(\psi)(\varphi_1)\{\alpha(x) = 0 \;\&\; A[\varphi(x), \psi, x] \cdot \vee \cdot \alpha(x) \neq 0 \;\&\; \neg A[\varphi_1, \Psi_1(\varphi_1, x), x]\} \;\&\; (EN^*)(E\Phi^*)(\Psi)A\{\Phi^*(\Psi), \Psi[\Phi^*(\Psi), N^*(\Psi)], N^*(\Psi)\} \cdot \rightarrow \rightarrow (E\bar{n})(E\bar{\varphi})(\bar{\psi})A(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{n})$ where x and n range over the natural numbers, and the types of the other variables are chosen so as to make sense. Now $\bar{n}, \bar{\varphi}$ should depend on $\alpha, \varphi, \Psi_1, N^*, \Phi^*$ and x, ψ, φ_1, Ψ should depend on $\alpha, \varphi, \Psi_1, N^*, \Phi^*, \bar{\psi}$. Take $\bar{n} = N^*(\Psi_1), \bar{\varphi} = \varphi(\bar{n}), x = \bar{n}, \psi = \bar{\psi}, \varphi_1 = \Phi^*(\Psi_1), \Psi = \Psi_1$.

in the obvious manner to ordinal recursive functionals defined with respect to $\prec$.

3.55. *We now wish to use the formula* $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$ *as a definition of the constructive truth of* $\mathfrak{A}$. For this it is necessary to specify the ranges of φ and ψ.

4. Functionals of higher type

We shall consider here only functionals of pure type, with numerical values; in the notation of 3.1, ((0), (0)), ((0), ((0), (0))), and generally if α_n is the nth type, α_{n+1} is $((0)\alpha_n)$. KLEENE [4] describes how these functionals can be used to represent functionals of arbitrary finite type. We confine ourselves mainly to definitions, the proof of the basic 'density' or 'separability' theorem being given in the appendix, other proofs being found in [4].

4.1. *Continuous functionals.* We here generalize the property of uniformly continuous functionals $\varphi(f)$ where only a *finite set of values* of the argument f is used to calculate φ; in other words φ operates not on f itself, but on a whole neighbourhood of f.

4.11. The formal expression $\{\ldots <n_i p_i> \ldots\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, n_i, p_i natural numbers, is called a *neighbourhood* of type 1 and denoted by $U^{(1)}$ (or U if confusion is not unduly likely).

$\{\ldots <U^{(n)}_{q_i} p_i> \ldots\}$ is called a neighbourhood of type $(n+1)$.

The *formal intersection* of $\{\ldots <U^{(n)}_{q_i} p_i> \ldots\}$, say U, and $\{\ldots <U^{(n)}_{q'_j} p'_j> \ldots\}$, $1 \leqslant j \leqslant k'$, say U', is $U \cap U'$, i.e.

$$\{\ldots <U^{(n)}_{q_i} p_i> \ldots, \ \ldots <U^{(n)}_{q'_j} p'_j> \ldots\}, \ 1 \leqslant i \leqslant k, \ 1 \leqslant j \leqslant k'.$$

U and U' are *formally identical*, if to each $U^{(n)}_{q_i}$ there is a $U^{(n)}_{q'_j}$ which is formally identical, $p_i = p'_j$, and conversely. And two natural numbers are formally identical if they are equal.

4.12. Let $\mathfrak{F}_1$ be a class of (totally defined) number theoretic functions, $\mathfrak{F}_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, be a class of functions defined on $U^{(i)}$.

We introduce simultaneously two notions:

The function $\tau^{(n)}$ *defined on* $U^{(n-1)}$ *is in* $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$.

$$\tau^{(n)} \in U^{(n)}.$$

We say that $U^{(n)}$ is *empty* [with respect to $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$] if there is no $\tau^{(n)}$ of $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$ such that $\tau^{(n)} \in U^{(n)}$.

Definition:

$\tau^{(1)}$ in $C(\mathfrak{F}_1)$ means: $\tau^{(1)}$ in $\mathfrak{F}_1$.

$\tau^{(1)} \in \{\ldots <n_i p_i> \ldots\}$ means: for $1 \leqslant i \leqslant k$, $\tau^1(n_i) = p_i + 1$

$\tau^{(n+1)}$ in $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1})$ means:

(a) $\tau^{(n+1)}$ in $\mathfrak{F}_{n+1}$

(b) If $\tau^{(n+1)}(U^{(n)}) \neq 0$, $U \cap U'$ not empty then

$$\tau^{(n+1)}(U \cap U') = \tau^{(n+1)}(U).$$

(c) For each $\tau^{(n)}$ in $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$ there is a $U^{(n)}$ such that

$\tau^{(n)} \in U^{(n)}$ and $\tau^{(n+1)}(U^{(n)}) \neq 0$.

$\tau^{(n+1)} \in \{\ldots <U_i^{(n)} p_i> \ldots\}$ means: $\tau^{(n+1)}(U_i^{(n)}) = p_i + 1$.

4.121. Condition (b) ensures single valuedness, (c) ubiquity of definition.

4.122. *Equivalence classes* can be introduced as follows:

$E_1(\tau^{(1)}, \sigma^{(1)})$ means: for all n, $\tau^{(1)}(n) = \sigma^{(1)}(n)$.

$E_{n+1}(\tau^{(n+1)}, \sigma^{(n+1)})$ means: for all *non-empty* $U^{(n)}$, where both $\tau^{(n+1)}(U^{(n)})$ and $\sigma^{(n+1)}(U^{(n)})$ are *different from zero*, $\tau^{(n+1)}(U^{(n)}) = \sigma^{(n+1)}(U^{(n)})$.

An equivalence class of $\tau^{(n)}$ can be regarded as a *functional* τ^n of $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$ with the usual conditions of extensionality.

Every equivalence class contains a *maximal* function. If only maximal functions are considered there is an obvious relation between our topology on representing functions and the (natural) product topology on continuous functionals defined on continuous functionals (continuity in the sense of the product topology). We do not adopt the restriction because first, evidently, the maximal function equivalent to a recursive $\tau^{(2)}$ is not necessarily recursive; in fact, it does not seem possible to define the maximal equivalent function to a given $\tau^{(n)}$ without recourse to quantification over functions.

4.123. The intuitive meaning of the relation $\tau^{(n+1)}(U^{(n)}) = p + 1$ is this: for all functionals τ^n with *representing functions* $\tau^{(n)}$, $\tau^{(n)} \in U^{(n)}$, $\tau^{n+1}(\tau^n) = p$.

4.124. Following Kleene we here use the convention that $\tau^{(n)}$ is defined on *all* $U^{(n)}$, though only its non-zero values on non-empty $U^{(n)}$ count. It would be equally or more natural to have $\tau^{(n)}$ undefined on such $U^{(n)}$; but for the classes of functions which we consider,

namely arbitrary functions and recursive functions this is no restriction.

4.13. *Definitions.* $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1})$ is called the class of (representing functions of) *arbitrary continuous functionals* if each $\mathfrak{F}_{i+1}$ consists of *all* functions on the neighbourhoods $U^{(i)}$, and $\mathfrak{F}_1$ consists of *all* functions on the natural numbers.

$C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1})$ is called the class of *recursively continuous functionals* if $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ each consists of all functions on the relevant arguments and $\mathfrak{F}_{n+1}$ of all recursive functions on $U^{(n)}$.

If each of the $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1}$ consists of the recursive functions, $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1})$ is coextensive with the effective operations introduced below.

As pointed out in the appendix, the crucial density theorem is not affected by the precise extent of the classes $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$. — However, it seems worthwhile to indicate here the effect of restrictions of $\mathfrak{F}_i$ on the domain of definition of the (extensional) functionals which are represented by functions of $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$. Thus if $\mathfrak{F}_2$ is large, $C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ contains many equivalent functions; thus a $\tau_0^{(3)}$ may satisfy condition (*c*) of 4.12 for all maximal functions of $C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$, but not for all functions of $C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$; this $\tau_0^{(3)}$ represents a mapping of continuous τ^2 into the natural numbers, though this mapping may have no representative in $C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3)$. If $\mathfrak{F}_2^M$ denotes the class of maximal functions, the functionals of $C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3)$ may then be properly included among those of $C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2^M, \mathfrak{F}_3)$. In this case condition (*c*) of 4.12 on $C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4)$ is weaker than the corresponding condition on $C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2^M, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4)$, and may fail to ensure that the functions of $C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4)$ represent functionals τ^4 whose domain of definition includes all τ^3 of $C(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2^M, \mathfrak{F}_3)$.

I have not analyzed the minimal conditions on $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ needed for the proofs of 5.1 and 5.2.

4.14. The density theorem of the appendix allows us to prove:

4.141. If the non-logical constants of $A(\tau^{(n)}, a)$ are recursively continuous, there is a recursive A_1 such that

$$(\tau^{(n)})A(\tau^{(n)}, a) \leftrightarrow (x)A_1(x, a)$$

when $\tau^{(n)}$ range over arbitrary continuous functionals.

And if, for arbitrary continuous $\tau^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$, $(\tau^{(n)})(E\sigma^{(n)})A(\tau^{(n)}, \sigma^{(n)})$ then there exists a *recursively continuous* Ψ, such that $(\tau^{(n)})A[\tau^{(n)}, \Psi(\tau^{(n)})]$.

4.1411. For the statement of this theorem one needs a definition

of recursively continuous functionals which take continuous functionals as values, i.e. functionals with 2 arguments.

4.1412. Intuitionistically speaking the second half of 4.141 is clear.

4.15. The whole treatment of continuous functionals can be carried over to intuitionist mathematics provided all the definitions are interpreted intuitionistically. The recursive definition of 4.12 is such that the property $\tau^{(n)}$ in $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$ is expressed by means of quantification over functions only using n-fold iterated implications. The proof of this depends on the fact established in the appendix, that there is a recursive procedure for deciding whether a given $U^{(n)}$ is empty.

4.2. *Effective operations.* Let $p(e, x)$ be a universal partial recursive function. We define

$e \in E_n$ (e is the number of an effective operation of type n)

$\mathrm{I}_n(e, e')$ (the effective operations e, e' are extensionally equivalent):

Each (natural number) e, $e \in E_0$.

$I_0(e, e')$: $e = e'$.

$e \in E_{n+1}$: for all $x \in E_n$, $p(e, x)$ is defined, and if $I_n(x, x')$ then $p(e, x) = p(e, x')$.

$I_{n+1}(e, e')$: $e \in E_{n+1}$, $e' \in E_{n+1}$, and for all $x \in E_n$, $p(e, x) = p(e', x)$.

E_2 and I_2 were introduced by MYHILL and SHEPHERDSON [9].

For each fixed n, the set $\hat{e}(e \in E_n)$ is arithmetically definable, but probably the set $(\hat{e}, \hat{n})(e \in E_n)$ is not.

4.21. The argument of an effective operation is 'given' by a Gödel number which enables one to calculate *all* its values; in contrast the arguments of a continuous functional are given only at a finite set of values. It is therefore of interest to observe this: *given any effective operation of type n, we obtain by a uniform method an equivalent functional τ^n with a representing function $\tau^{(n)}$ in $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$ where all $\mathfrak{F}_i$ consist of just the recursive functions on the appropriate neighbourhoods.*

The proof goes by induction. The case $n = 2$ was proved in [8]. To treat $n+1$, one uses the induction hypothesis for n and the density theorem of the appendix together with Theorem 1 of [8a] in the present volume.

4.3. For reference below, we state two properties of Kleene's general recursive functionals (g.r.f.).

4.31. If the arguments are restricted to arbitrary continuous functionals, a g.r.f. is recursively continuous (KLEENE [4]).

4.32. If the arguments are restricted to effective operations, a g.r.f. is an effective operation.

For the proof consider a primitive recursive $\varphi^3(\varphi^2)$ in the sense of [5] or [11], p. 148 (schemata S1–S8). Let φ_0^2 be an effective operation. By 4.21, $\varphi_0^2 = \lambda f U\{\mu_y T_0[e, f(y)]\}$ where, for recursive f, $(Ey)T_0[e, f(y)]$. Then, for primitive recursive $\psi(n, \varphi^2)$, $\psi(n, \varphi_0^2)$ is a recursive function and so S8 is always effective. To deal with S9 one can appeal to Church's thesis or, as Kleene has done, give a detailed proof by means of the recursion theorem.

4.4. The results of 4.2 and 4.3, together with the obvious equivalence between Kleene's countable functionals and the continuous ones, provide a complete set of inclusion relations except for the following *open problem*:

Does there exist a recursively continuous functional of type $\geqslant 3$ *which is not the restriction of a partial recursive functional of* [5] *to continuous arguments*?

For types 1 and 2 the corresponding classes are identical.

4.5. Before going on to applications it is necessary to consider which of the three classes of functionals can be used meaningfully in constructive mathematics. Effective operations are certainly meaningful, but do not exhaust all constructive operations of higher type: inspection of the notion of an arbitrary continuous functional (with free choices instead of arbitrary functions) shows that this is constructively meaningful, and further that one can operate constructively on such objects by means of recursively continuous functionals. – The notion of g.r.f., which operate on arbitrary functionals, seems devoid of constructive sense (though important for a non-constructive classification of sets of integers). To calculate so simple a τ^3 as $\lambda\tau^2\{\lambda n[\tau^2\lambda m g(n, m)]\}$ with a recursive g, which is a g.r.f., the values of τ^2 at $\omega + 1$ arguments are needed, namely at $\lambda m g(n, m)$ for $n = 0, 1, \ldots$ and then at $\lambda n[\tau^2\lambda m g(n, m)]$ [1]). Moreover, suppose we regard all functionals as constructively meaningful and g.r.f. as constructive operations on these objects; then we get into conflict with the following two principles.

---

[1]) Of course we only need the value of τ^2 at *one function*, namely $\lambda n[\tau^2\lambda m\, g\,(n, m)]$; but here τ^2 occurs in the structure itself.

(1) If φ and ψ range over constructively meaningful objects and $\Theta(\varphi, \psi)$ is a constructive predicate and if $(\varphi)(E\psi)\Theta(\varphi, \psi)$ then there is a constructive operation $\Psi(\varphi)$ such that $(\varphi)\Theta[\varphi, \Psi(\varphi)]$.

(2) If $\Psi(\varphi)$ is constructive then it is recursively continuous when restricted to continuous arguments.

We shall show that g.r.f. do not satisfy (1) though, by 4.31, they satisfy (2). We note in passing that arbitrary continuous functionals satisfy (1) by 4.141, and (2) trivially.

Consider $(\alpha)(Ex)(y)[\alpha(x)=0 \vee \alpha(y)\neq 0]$, i.e.

$$(E\varphi^2)(\alpha)(y)\{\alpha[\varphi^2(\alpha)]=0 \vee \alpha(y)\neq 0]\} \qquad \text{(i)}$$

Let β denote a variable ranging over functionals with the two arguments n and φ^2, and consider

$$(\beta)(\nu^3)(E\varphi^2)[\beta\{\varphi^2[\lambda n\beta(n, \varphi^2)], \varphi^2\}=0 \vee \beta[\nu^3(\varphi^2), \varphi^2]\neq 0].$$

This is true if β, ν, φ range over arbitrary functionals, but false if β, ν, φ range over arbitrary continuous functionals.

For, (i) is false for continuous φ^2. Let $\alpha_0(n)=1$ for all n. $\varphi^2(\alpha_0)=N_0$, say, and depends only on the first M_0 values of α. If $\alpha(n)=1$, $n\leqslant \max(N_0, M_0)$, $\alpha(n)=0$ otherwise, $\varphi^2(\alpha)=N_0$, $\alpha[\varphi^2(\alpha)]=1$, $\alpha(N_0+M_0+1)=0$. So if $\beta(n, \varphi^2)=\alpha_0(n)$ for all n and φ^2 and $\nu^3(\varphi^2)=N_0+M_0+1$ we have a counterexample to (i).

4.51. *Remark.* A counterexample of the form $(\alpha^2)(E\beta^1)A(\alpha^2, \beta^1)$ is not possible since all β^1 are continuous.

If condition (2) of 4.5 is replaced by

(2′) If $\Psi(\varphi)$ is constructive then it is an effective operation when φ is restricted to effective operations, we get such a counter-example. For, let $(x)(Ey)(z)A(x, y, z)$ be true but not recursively satisfiable. Then

$$(\alpha^2)(\beta^2)(E\gamma^1)A\{\alpha^2(\gamma^1),\ \gamma^1[\alpha^2(\gamma^1)],\ \beta^2(\gamma^1)\}$$

is true if $\alpha^2, \beta^2, \gamma^1$ are arbitrary. But there cannot be a g.r.f. $\lambda n\gamma(\alpha^2, \beta^2, n)$ to replace γ^1: for $<\alpha_0^2, \beta_0^2>=\lambda f\,\mu_{<x, z>}\neg A[x, f(x), z]$ is an effective operation, when $<x, z>$ is an enumeration of pairs of natural numbers, since no recursive f satisfies $(x)(z)A[x, f(x), z]$. So, by 4.32, $\gamma(\alpha_0^2, \beta_0^2, n)$ would be a recursive function, contrary to the hypothesis.

4.52. In the next sections we shall apply our definitions of functionals of higher type to the problem raised in 3.55. As is to be expected from the discussion above, the most satisfactory theory

is obtained if the universal variables range over arbitrary continuous functionals and existential variables range over recursively continuous functionals. However it will turn out that for formal independence results also the other classes of functionals can be useful.

5. Interpretation by means of continuous functionals

The primitive recursive functionals of 3.1 are evidently recursively continuous and so the present interpretation is consistent with Heyting's arithmetic. We investigate *which formulae of analysis and arithmetic are (classically) equivalent to their constructive interpretation.*

5.1. *If a formula* $\mathfrak{A}$ *of analysis does not contain existence nor disjunction symbols then* $\mathfrak{A} \leftrightarrow (\mathfrak{A})'_3$.

By induction with respect to the number of logical symbols. The induction hypothesis is that, in the interpretation of 3.2, the formula associated with $\mathfrak{A}$ has the form $(E\varphi)(\psi)A[\varphi(\psi), \psi]$, and

$$\mathfrak{A} \leftrightarrow (E\varphi)(\psi)A[\varphi(\psi), \psi] \leftrightarrow (\psi)(E\varphi)A(\varphi, \psi)$$

where φ and ψ range over arbitrary continuous functionals.

By 3.2, the result is trivial for quantifier-free $\mathfrak{A}$, and for $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ if it holds for $\mathfrak{A}$ and for $\mathfrak{B}$. Next, suppose $\mathfrak{A}(f) \leftrightarrow (\psi)(E\varphi)A(f, \varphi, \psi)$; then $(f)\mathfrak{A}(f) \leftrightarrow (f)(\psi)(E\varphi)A(f, \varphi, \psi)$. So, if $(f)\mathfrak{A}(f)$, by 4.141, $(E\varphi)(f)(\psi)A[f, \varphi(f, \psi), \psi]$ (even with a recursive φ); if $\neg (f)\mathfrak{A}(f)$, then $(f)(\psi)(E\varphi)A(f, \varphi, \psi)$ and $(E\varphi)(f)(\psi)A[f, \varphi(\psi), \psi]$ are evidently false. Suppose $\mathfrak{B} \leftrightarrow (\psi_1)(E\varphi_1)B(\varphi_1, \psi_1) \leftrightarrow (E\varphi_1)(\psi_1)B[\varphi_1(\psi_1), \psi_1]$, and consider $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, i.e. $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi) \to (\psi_1)(E\varphi_1)B(\varphi_1, \psi_1)$, i.e. $(\psi_1)(\varphi)(E\psi)(E\varphi_1)[A(\varphi, \psi) \to B(\varphi_1, \psi_1)]$. By 4.141, this is equivalent to $(E\Psi)(E\Phi_1)(\psi_1)(\varphi)\{A[\varphi, \Psi(\varphi, \psi_1)] \to B[\Phi_1(\varphi, \psi_1), \psi_1]\}$. Since the interpretation of $\mathfrak{B}$ by 3.2 is $(E\varphi_1)(\psi_1)B[\varphi_1(\psi_1), \psi_1]$, the appearance of ψ_1 as an argument of Φ_1 is consistent with 3.2. Thus if $\mathfrak{A}$ is true then, for arbitrary continuous φ and ψ, $(\psi)(E\varphi)A(\varphi, \psi)$ is true, and, by 4.141, there is a recursively continuous $\Phi(\psi)$ such that $(\psi)A[\Phi(\psi), \psi]$. Conversely, if $\mathfrak{A}$ is false, $\neg (E\Phi)(\psi)A[\Phi(\psi), \psi]$.

5.11. In particular, if $\mathfrak{A}$ is free of disjunctions and existence symbols, $(\neg\neg\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})'_3$.

5.2. *If* $\mathfrak{A}$ *does not contain universal function quantifiers, in particular if* $\mathfrak{A}$ *is a formula of arithmetic, then* $\neg\mathfrak{A} \leftrightarrow (\neg\mathfrak{A})'_3$.

The induction hypothesis now is this: if $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$ is

associated with $\mathfrak{A}$, and φ and ψ range over arbitrary continuous variables then $\mathfrak{A} \leftrightarrow (E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$.

The result is trivial for quantifier-free $\mathfrak{A}$, holds for $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ if it holds for $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ separately, and also for $(Ef)\mathfrak{A}(f)$, $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ if it holds for $\mathfrak{A}(f)$ and $\mathfrak{A}(x)$ since every f is continuous. Further, if it holds for $\mathfrak{A}(x)$ it also holds for $(x)\mathfrak{A}(x)$ since if $(E\varphi)(\psi)A(x, \varphi, \psi)$ holds for each x there is a (not necessarily recursively) continuous $\varphi(x)$ such $(x)(\psi)A[x, \varphi(x), \psi]$. Finally, consider implication: if $\mathfrak{B}$ is true, i.e. $(\psi_1)B(\varphi_1, \psi_1)$ then

$$(E\Psi)(E\Phi_1)(\varphi)(\psi_1)\{A[\varphi, \Psi(\varphi, \psi_1)] \rightarrow B[\Phi_1(\varphi), \psi_1]\}$$

is true by taking $\Phi_1(\varphi) = \varphi_1$, independent of φ; if $\mathfrak{A}$ is false then $(\varphi)(E\psi) \neg A(\varphi, \psi)$ and, by 4.141, there is even a recursively continuous $\Psi_0(\varphi)$ independent of ψ_1 such that $\neg A[\varphi, \Psi_0(\varphi)]$ and so, again, $(E\Psi)(E\Phi_1)(\varphi)(\psi_1)\{A[\varphi, \Psi(\varphi, \psi_1)] \rightarrow B[\Phi_1(\varphi), \psi_1]\}$ is true if $\Psi = \Psi_0$. Conversely, if the interpretation of $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ is true and $(\psi)A(\varphi_0, \psi)$ then $(\psi_1)B[\Phi_1(\varphi_0), \psi_1]$ and hence $(E\varphi_1)(\psi_1)B(\varphi_1, \psi_1)$.

Now, if $\mathfrak{A} \leftrightarrow (E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$ with continuous φ and ψ, then $\neg\mathfrak{A} \leftrightarrow (\varphi)(E\psi) \neg A(\varphi, \psi)$ and, by 4.141, $\neg A \leftrightarrow (E\Psi)(\varphi) \neg A[\varphi, \Psi(\varphi)]$ where φ is arbitrary continuous and Ψ is recursively continuous.

5.21. It follows from 5.2 that if the formula $\mathfrak{A}$ does not contain universal function quantifiers, $(E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$ has the same truth value whether arbitrary or arbitrary continuous functionals are used. Only the requirement of recursiveness on φ introduces a restriction.

5.22. It follows from 5.2 that, *for arithmetic* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \leftrightarrow (\neg\neg\mathfrak{A})'_3$.

For, by 5.2, $(\neg\neg\mathfrak{A})'_3 \leftrightarrow \neg\neg\mathfrak{A}$, and since we are arguing classically, $\neg\neg\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}$.

5.221. The proof of 5.2 is not intuitionistically valid. I do not even know how to prove intuitionistically

$$\{\neg\neg(x)(Ey)(z)[T_1(x, x, y) \vee \neg T_1(x, x, z)]\}'_3$$

when T_1 is the predicate of [3], p. 281.

5.23. Also, *for arithmetic* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'_3 \rightarrow \mathfrak{A}$, i.e. *the constructive version of* $\mathfrak{A}$ *is not weaker than* $\mathfrak{A}$ *itself*, judged by classical logic.

For, since $\mathfrak{A} \rightarrow \neg\neg\mathfrak{A}$ holds intuitionistically, by 3.2, $\mathfrak{A}'_3 \rightarrow (\neg\neg\mathfrak{A})'_3$; apply 5.22.

5.3. We shall now show that several of the results above are

best possible including the no-counterexample-interpretation of 3.53.

5.31. The analogues of the *statements* 5.2, 5.22, 5.23 *are false for analysis.*

Consider the formula $(\alpha)(Ex)(y)[\alpha(x)=0 \vee \alpha(y)\neq 0]$. Its negation is classically false, but, by 4.5, $\{\neg(\alpha)(Ex)(y)[\alpha(x)=0 \vee \alpha(y)\neq 0]\}_3'$ is true (and even intuitionistically provable). If the restriction on $\mathfrak{A}$ were dropped, 5.2 would be false: for $\mathfrak{A}$ take

$$(\alpha)(Ex)(y)[\alpha(x)=0 \vee \alpha(y)\neq 0];$$

similarly 5.22 since $\{\neg\neg(\alpha)(Ex)(y)[\alpha(x)=0 \vee \alpha(y)\neq 0]\}_3'$ is false; and also 5.23 since $\{\neg(\alpha)(Ex)(y)[\alpha(x)=0 \vee \alpha(y)\neq 0]\}_3'$ is true, but $\neg(\alpha)(Ex)(y)[\alpha(x)=0 \vee \alpha(y)\neq 0]$ is false.

5.32. The situation with the no-counterexample-interpretation is a little more complicated. First, if $\mathfrak{A}$ is the true prenex formula

$$(\alpha_1)(E\beta_1)\ldots(\alpha_n)(E\beta_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

then, for arbitrary functions α_1, and functionals $\varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_{i+1}$ depending on $\beta_1, \ldots, \beta_i$,

$$(\alpha_1)(\varphi_2)\ldots(\varphi_n)(E\beta_1)\ldots(E\beta_n)A[\alpha_1, \varphi_2(\beta_1), \ldots, \varphi_n(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}), \beta_1, \ldots, \beta_n].$$

In particular, for continuous $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ this holds, and so $(\neg\mathfrak{A}^*)_3'$ of 2.34 holds, too. However $(\neg\mathfrak{A}^*)_3'$ does not generally imply $\mathfrak{A}$: Take for $\mathfrak{A}$ the formula $(E\alpha)(x)(Ey)\neg[\alpha(x)=0 \vee \alpha(y)\neq 0]$. Here $(\neg\mathfrak{A}^*)_3'$ is true, but not $\mathfrak{A}$ itself.

5.4. Note that under the present interpretation we have, classically, $(\neg\mathfrak{A})_3' \vee (\neg\neg\mathfrak{A})_3'$; for, since $(\neg\mathfrak{A})_3'$ is equivalent to $(\varphi)(E\psi)\neg A(\varphi, \psi)$ where φ and ψ range over arbitrary continuous functionals, so $(\varphi)\neg A[\varphi, \Psi(\varphi)]$ is true for a recursively continuous Ψ if and only if it is true for an arbitrary continuous Ψ. So if $(\neg\mathfrak{A})_3'$ is false, $(\Psi)(E\varphi)A[\varphi, \Psi(\varphi)]$ is true for arbitrary continuous φ and Ψ, and so, by 4.141, $(\neg\neg\mathfrak{A})_3'$ is true. However, $\mathfrak{A}_3' \vee (\neg\mathfrak{A})_3'$ is not generally true; take e.g. for $\mathfrak{A}$ a true formula $(x)(Ey)(z)A(x,y,z)$ which is not recursively satisfiable.

5.5. In the present connection the following open problem seems of interest.

Let us call $P(n)$ a predicate of constructive arithmetic if there is a formula $\mathfrak{A}(n)$ of arithmetic such that, classically, $P(n) \leftrightarrow [\mathfrak{A}(n)]_3'$.

We know that every arithmetic predicate is one of constructive arithmetic since $\mathfrak{A}(n) \leftrightarrow [\neg\neg\, \mathfrak{A}(n)]'_3$. *Is the converse true?*

A negative answer would be interesting. In classical mathematics, the logical connectives $\vee$, $\rightarrow$, (E) are definable in terms of the others, in constructive mathematics they are given an independent use. It would not be surprising if in this way one could express predicates at the level of arithmetic which classically are only expressible in analysis. (By 4.15 all predicates of constructive analysis are also expressible in classical analysis itself.)

6. Interpretation by means of effective operations

Again, the primitive recursive functionals of 3.1 are also effective operations, and so we get a consistent interpretation of Heyting's arithmetic if we let both φ and ψ of 3.55 range over effective operations. The interpretation is quite unreasonable for analysis because it corresponds to a restriction of the functions (or real numbers) to recursive ones; we then do not have completeness nor compactness. The counterexamples obtained will be quite easy.

6.1. *There is a formula $\mathfrak{A}$ of analysis without existence, disjunction or implication symbols such that $\neg\, \mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}'_1$, in contrast to* 5.1.

There is a recursive binary tree $A(s)$ with the following properties; if the branch determined by the function $\alpha(n)$, $\alpha(n)=0$ or $\alpha(n)=1$ is of length $\leqslant y$ then $A[\bar{\alpha}(y)]$ where $\bar{\alpha}(y)=2^{\alpha(0)+1}\, 3^{\alpha(1)+1} \ldots p^{\alpha(y)+1}$, $p(y)$ being the yth prime; for every recursive α, $(Ey)A[\bar{\alpha}(y)]$, but not for all α. Consider the formula

$$(\alpha) \neg (y) \neg A[\bar{\alpha}(y)] \;\&\; (n) \neg (\alpha) A[\bar{\alpha}(n)],\ \alpha(n) \leqslant 1.$$

This statement is false if α is allowed to range over all functions with values $\leqslant 1$, but it is true on the interpretation by effective operations. — The reason is evident because of the different ranges of the function variable.

6.11. I do not know whether there is a formula of arithmetic which satisfies 6.1.

6.2. There is a formula of arithmetic such that $\neg\, \mathfrak{A} \leftrightarrow (\neg\neg\, \mathfrak{A})'_1$, in contrast to 5.2, 5.22, 5.23.

By 4.52, if $(x)(Ey)(z)A(x, y, z)$ is true, but not recursively satisfiable, $[\neg\, (x)(Ey)(z)A(x,y,z)]'_1$ is true and $[\neg\neg\, (x)(Ey)(z)A(x,y,z)]'_1$ is false.

6.3. In the case of the no-counterexample-interpretation, $\mathfrak{A} \to (\neg \mathfrak{A}^*)'_1$ but, in general, $(\neg \mathfrak{A}^*)'_1$ does not imply $\mathfrak{A}$.

The former is obvious since, if $\mathfrak{A}$ is

$$(x_1)(Ey_1) \ldots (x_n)(Ey_n)A(x_1, \ldots, x_n y_1, \ldots, y_n)$$

then

$$(x_1)(f_2) \ldots (f_n)(Ey) \ldots (Ey_n)A[x_1, f_2(y_1), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_{n-1}), y_1, \ldots, y_n],$$

and, in particular, for recursive f: so the y are effective operations of x and the f. But if $\mathfrak{A}$ is $(Ex)(y)(Ez) \neg A(x, y, z)$, A as in 6.3, then we have $(\neg \mathfrak{A}^*)'_1$ and $\neg \mathfrak{A}$.

7. Interpretation by means of general recursive functionals

In 3.55 we let φ range over g.r.f. and ψ over arbitrary functionals. We have the following results:

7.1. $\mathfrak{A}'_2 \to \mathfrak{A}$.

The proof follows from the fact that in the interpretation of 3.2, $\mathfrak{A} \leftrightarrow (E\varphi)(\psi)A(\varphi, \psi)$ if φ and ψ range over arbitrary functionals. In $\mathfrak{A}'_2$ the existential variables are further restricted, hence the result.

7.2. By 4.32, $\mathfrak{A}'_2 \to \mathfrak{A}'_1$.

7.3. By 4.31, $\mathfrak{A}'_2 \to \mathfrak{A}'_3$.

7.4. By 7.3, the examples of 6.1 and 6.2 show also that 5.1, 5.2, 5.22, 5.23 do not have an analogue in the present interpretation.

7.5. For arithmetic $\mathfrak{A}$, the no-counterexample-interpretation holds because $(\neg \mathfrak{A}^*)'$ contains only functionals of lowest type, and so $(\neg \mathfrak{A}^*)'_2 \leftrightarrow (\neg \mathfrak{A}^*)'_3$.

In analysis $(\neg \mathfrak{A}^*)'_2 \to \mathfrak{A}$, by 7.1, but, in general, the converse is false: take for $\mathfrak{A}$ a true formula $(E\alpha)(x)(z)A[x, \alpha(x), z]$ which is not satisfiable by a recursive α. Then $\neg \mathfrak{A}^*$ is $(\alpha)(Ex)(Ez) \neg A[x, \alpha(x), z]$, and $(\neg \mathfrak{A}^*)'$ is $(E\varphi^2)(E\psi^2)(\alpha) \neg A[\varphi^2, \alpha(\varphi^2), \psi^2]$. But this is not true for g.r.f. φ^2 and ψ^2, by 7.3.

7.51. The breakdown of this interpretation for analysis is complementary, so to speak, to the breakdown noted in 5.32.

7.6. Since the system 3.1 is valid when the variables are interpreted as arbitrary functionals, the present interpretation is consistent with Heyting's arithmetic. It is an elegant method for independence proofs because, by 7.2 and 7.3, it includes any

independence proof given by means of the interpretations of sections 5 and 6, and by 7.1 it shows that a classically unprovable formula of arithmetic is also unprovable in Heyting's systems. — On the other hand the latter fact is obvious from Heyting's rules too, and so far all the independence results obtained by the present interpretation can also be obtained by one of the others, which are constructively more meaningful. Perhaps the most serious objection to it is that $\neg(\alpha)(Ex)(y)[\alpha(x)=0 \vee \alpha(y)\neq 0]$ is not true on it, though it seems to be clearly constructively true.

7.61. In contrast to 5.4 we have a closed formula $\mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{A}'_2$, $(\neg\mathfrak{A})'_2$, $(\neg\neg\mathfrak{A})'_2$ are all false, namely with $\mathfrak{A}$ of 6.2: $\mathfrak{A}'_2$ is false by 7.2 or 7.3, $(\neg\mathfrak{A})'_2$ by 7.1 or 7.2, $(\neg\neg\mathfrak{A})'_2$ by 7.3.

Appendix

For notation, refer to section 4.1.

Theorem. If $\mathfrak{F}_1$ includes all primitive recursive functions, and $\mathfrak{F}_{i+1}$, $1\leqslant i\leqslant n$, includes all primitive recursive functions defined on neighbourhoods $U^{(i)}$ then there is a recursive, recursively dense subset of the functions $\tau^{(n)}$ in $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$, i.e.

(i) there is a recursive method of deciding whether a neighbourhood is empty,

(ii) there is a uniform method of finding, for each non-empty $U^{(n)}$, a $\tau^{(n)}$ of the subset such that $\tau^{(n)} \in U^{(n)}$.

Intuitive statement. A neighbourhood $U^{(n+1)}$ of the form

$$\{\ldots<U_i^{(n)}p_i>\ldots\},\ 1\leqslant i\leqslant k$$

is empty if and only if, for some $i, j\leqslant k$, $U_i^{(n)} \cap U_j^{(n)}$ is not empty, but $p_i\neq p_j$. — The 'if' part follows from condition (b) of 4.11. We prove the theorem for types 1 and 2, and then proceed by induction.

Type 1. A neighbourhood $U^{(1)}$, i.e. $\{\ldots<n_ip_i>\ldots\}$ is empty if and only if, for some i, j, $n_i=n_j$ and $p_i\neq p_j$. Otherwise $\tau^{(1)} \in U^{(1)}$, where $\tau^{(1)}(n)=0$ except for $n=n_i$ and $\tau^{(1)}(n_i)=p_{i+1}$. This $\tau^{(1)}$ is evidently primitive recursive.

Our subset of $\tau^{(1)}$ consists of all functions which are zero except at a finite number of arguments.

Type 2. Consider a neighbourhood $U^{(2)}$, $\{\ldots<U_i^{(1)}p_i>\ldots\}$ $1\leqslant i\leqslant k$ where $U_i^{(1)}$ is $\{\ldots<n_{ir}q_{ir}>\ldots\}$ $1\leqslant r\leqslant k(i)$.

Let us suppose that if $U_i^{(1)} \cap U_j^{(1)}$ is not empty, $p_i=p_j$.

Consider all pairs i, j such that $U_i^{(1)} \cap U_j^{(1)}$ is empty. This is

decidable by the argument for type 1, and, in fact, there will then be numbers r and s such that $n_{ir}=n_{js}$, $q_{ir}\neq q_{js}$. Let $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_t$ be all the numbers n_{ir} obtained in this way. Then if $\{\ldots<\bar{n}_h q_h>\ldots\}$, $1\leqslant h\leqslant t$ overlaps with both $U_i^{(1)}$ and $U_j^{(1)}$ then $U_i^{(1)}$, $U_j^{(1)}$ also overlap, and hence $p_i=p_j$. For, if $U_i^{(1)}\cap U_j^{(1)}$ were empty, the $n_{i\cdot}$ above would occur among the $\bar{n}$, say $\bar{n}_u$, and either $q_{ir}\neq\bar{n}_u$ or $q_{js}\neq\bar{n}_u$, and so, by the argument for type 1, $\{\ldots<\bar{n}_h\, q_h>\ldots\}$ would not overlap with both $U_i^{(1)}$ and $U_j^{(1)}$.

We define a $\tau^{(2)}\in\{\ldots<U_i^{(1)}\, p_i>\ldots\}$.

(i) If $\{\ldots<\bar{n}_h q_h>\ldots\}$, say $U^{(1)}$, overlaps with $U_i^{(1)}$, $1\leqslant i\leqslant k$, then $\tau^{(2)}(U^{(1)})=p_i+1$, and $\tau^{(2)}(U_i^{(1)})=p_i+1$. This ensures that $\tau^{(2)}\in\{\ldots<U_i^{(1)}\, p_i>\ldots\}$.

(ii) If $U^{(1)}$ does not overlap with any $U_i^{(1)}$, $1\leqslant i\leqslant k$, then $\tau^{(2)}(U^{(1)})=\lambda(q_1, \ldots, q_t)+1$.

(iii) If $U_*^{(1)}\cap U_i^{(1)}$ is not empty, $\tau^{(2)}(U_*^{(1)}\cap U_i^{(1)})=p_i+1$.

(iv) If $U_*^{(1)}\cap\{\ldots<\bar{n}_h q_h>\ldots\}$ is not empty, $\tau^{(2)}(U_*^{(1)}\cap U^{(1)})=$ $=\lambda(q_1, \ldots, q_t)+1$.

(v) On all other neighbourhoods, $\tau^{(2)}=0$.

$\tau^{(2)}$ is single-valued, and it is a primitive recursive function because there is a primitive recursive method of deciding for any given $U^{(1)}$ to which of the classes (i)–(v) it belongs.

Condition (b) of 4.1 is satisfied by (iii) and (iv).

Condition (c) is satisfied because, for each $\tau^{(1)}$, there is a neighbourhood, namely $\{\ldots<\bar{n}_h\tau^{(1)}(\bar{n}_h)>\ldots\}$, to which $\tau^{(1)}$ belongs and on which $\tau^{(2)}\neq 0$.

For generalization it is convenient to use the language of equivalence classes: $\tau^2(\tau^1)$ is defined if we know the value of τ^1 at $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_t$.

The dense subset consists of all the $\tau^{(2)}$ which are obtained from non-empty $U^{(2)}$ by the method described when $\lambda(q_1, \ldots, q_t)=0$.

Induction argument. Consider a neighbourhood $U^{(n+1)}$, $\{\ldots<U_i^{(n)}\, p_i>\ldots\}$ where $U_i^{(n)}$ is $\{\ldots<U_{ir}^{(n-1)}\, q_{ir}>\ldots\}$, $1\leqslant r\leqslant k(i)$.

We apply the argument for type 2 with this difference. If $U_i^{(n)}\cap U_j^{(n)}$ is empty, we only have $U_{ir}^{(n-1)}$, $U_{js}^{(n-1)}$ which *overlap*, $q_{ir}\neq q_{js}$ while for $n=2$ we had n_{ir}, n_{js} which were *equal*. We now apply our theorem to type $(n-1)$, to find a $\bar{\tau}_h^{(n-1)}$, $1\leqslant h\leqslant t$, $\bar{\tau}_h^{(n-1)}\in U_{ir}^{(n-1)}\cap U_{js}^{(n-1)}$. The $\tau^{(n+1)}$ constructed assigns to $\tau^{(n)}$ values depending only on the numbers $\tau^n(\bar{\tau}_h^{n-1})$, $1\leqslant h\leqslant t$.

Note that $\lambda(q_1, \ldots, q_t)$ can be chosen quite arbitrarily. This

shows on the one hand that there are $2^{\aleph_0}$ continuous functionals at every type. On the other it means that the functionals can be introduced by free choices.

The purpose of this theorem is not merely to construct a dense base for functionals in the extensional sense. For it is obvious that the finite functionals (f.f.) are dense on the proper topology, where an f.f. of type 1 is a number theoretic function which is zero except for a finite number of arguments, and an f.f. $\varphi^{n+1}(\tau^n)$ of type $n+1$ is of the form $\varphi^1[\tau^n(\varphi_1^{n-1}), \ldots, \tau^n(\varphi_k^{n-1})]$ where φ^1 and φ_i^{n-1}, $1 \leqslant i \leqslant k$, are f.f. – The proof sketched above provides *particular representing functions* of such functionals with the following property: if they are included in the appropriate class $\mathfrak{F}_i$, they automatically belong to $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_i)$ and thus constitute a dense base (even for the representing functions of this class.) The construction is independent of the precise extent of $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_i, \ldots$ and applies even if the $\mathfrak{F}$ are so chosen that comparison with extensional functionals is not possible; cf. 4.13. (Naturally, in the statement of the theorem it is not necessary to require the inclusion of all primitive recursive functions in $\mathfrak{F}_i$, but only of these representing functions.)

Remark. The functionals which are continuous on the 'proper' topology on τ^n, are just those represented by $\tau^{(n+1)}$ of $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1})$: each basic open set B is determined by a $U_0^{(n)}$ and a $\tau_0^{(n+1)}$ of $C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_{n+1})$; B is the least class of τ^n such that $(\tau^{(n)} \in U_0^{(n)} \to \tau^n \in B) \,\&\, \{[\tau^{(n)} \in U^{(n)} \,\&\, \sigma^{(n)} \in U^{(n)} \,\&\, \sigma^{(n)} \in B \,\&\, \tau_0^{(n+1)}(U^{(n)}) \neq 0] \to \tau^n \in B\}$ for all $U^{(n)}$ and $\tau^{(n)}, \sigma^{(n)} \in C(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$.

BIBLIOGRAPHY

[1] L. E. J. Brouwer, Beweis, dass des Begriff der Menge höherer Ordnung nicht als Grundbegriff der intuitionistischen Mathematik in Betracht kommt, Proceedings of the Dutch Academy of Sciences A, **45** (1942), 791–795.

[2] K. Gödel, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 1932.

[3] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, Amsterdam, 1952.

[4] ———, Countable Functionals, this volume.

[5] ———, Recursive Functionals and Quantifiers of Finite Type I, Transactions of the American Mathematical Society (to appear).

[6] G. Kreisel, Some elementary inequalities, Proceedings of the Dutch Academy of Sciences A, **55** (1952).

[7] ———, Mathematical Significance of Consistency Proofs, Journal of Symbolic Logic (to appear).

[8] G. Kreisel, D. Lacombe, J. R. Shoenfield, Fonctionelles récursivement définissables et fonctionelles récursives, Comptes Rendus 245, **4** (1957).

[8a] ———, Partial recursive functionals and effective operations, this volume.

[9] J. R. Myhill and J. C. Shepherdson, Effective Operations on Partial recursive Functions, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik **1** (1955).

[10] H. Weyl, Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik, Mathematische Zeitschrift **20** (1924).

[11] Notes of lectures presented at the Summer Institute for Symbolic Logic of the American Mathematical Society at Cornell University, July 1957.

QUELQUES PROCEDES DE DEFINITION EN TOPOLOGIE RECURSIVE

DANIEL LACOMBE

Faculté des Sciences de Paris

1. Les problemes fondamentaux de la topologie recursive

1.1. Au cours de ces dernières années, le champ d'application de la "récursivité" [1]) (ou de l'"effectivité") a été étendu à des ensembles de nature très variée: ensembles de nombres, de points, de fonctions, de fonctionnelles, etc.

Mais pour entamer l'étude récursive d'un ensemble **E**, il faut toujours supposer – implicitement ou explicitement – l'existence d'une structure topologique sur **E**. Ainsi, par exemple, un élément *récursif* de **E** est un élément dont on peut déterminer "effectivement" des "approximations" aussi serrées qu'on le désire.

Le problème initial, c'est de donner une forme mathématique précise à des mots comme "approximation", "effectif", etc.

1.2. En fait, les espaces topologiques qui ont été étudiés (explicitement ou virtuellement) au point de vue "effectif" constituent déjà une liste assez longue. En voici quelques uns, parmi les plus importants:

l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels,
l'ensemble $\mathbf{F}_p$ des applications de $\mathbf{N}^p$ dans $\mathbf{N}$,
l'ensemble $\mathbf{F}'_p$ des applications de $\mathbf{N}^p$ dans l'ensemble $\{0, 1\}$
l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels,
le segment réel $[\![0, 1]\!]$ (que nous désignerons par $\mathbf{S}$),
l'ensemble $\mathbf{C}_p$ des applications continues de $\mathbf{S}^p$ dans $\mathbf{R}$,
l'ensemble $\mathbf{D}_p$ des applications continues de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$,
l'ensemble $\mathbf{K}_{p,q}$ des applications continues de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathbf{F}_q$,
l'ensemble $\mathbf{K}'_{p,q}$ des applications continues de $\mathbf{F}'_p$ dans $\mathbf{F}_q$,

---

[1]) Dans tout cet exposé, "récursif" sera pris au sens de "récursif général" (*general recursive*).

l'ensemble $\mathbf{J}_p$, des applications continues de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathbf{R}$,
l'ensemble $\mathbf{J}'_p$ des applications continues de $\mathbf{F}'_p$ dans $\mathbf{R}$,
l'espace de Hilbert $\mathbf{H}$.

Nous préciserons plus loin les structures topologiques (voire uniformes ou métriques) dont ces ensembles sont supposés munis.

1.3. A l'heure actuelle, on sait mettre chacune de ces structures sous une forme "récursive" (ou "récursivisable").

Il en résulte que, si $\mathbf{E}$ est un des espaces de cette liste, on sait définir l'ensemble $\mathbf{E}^*$ des éléments *récursifs* de $\mathbf{E}$ (ces définitions s'accompagnant, bien entendu, d'un certain nombre de théorèmes fondamentaux).

Notre liste peut d'ailleurs être allongée indéfiniment. En effet, lorsqu'on sait récursiviser deux espaces topologiques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}_1$, on en déduit aussitôt une récursivisation de l'espace produit $\mathbf{E} \times \mathbf{E}_1$.

1.4. D'autre part, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}_1$ sont deux espaces récursifs déjà obtenus, on peut essayer de définir la classe des *applications récursives* de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}_1$ (classe que nous désignerons dans la suite par $(\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1)^*$).

Considérons la classe de toutes les applications *continues* de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}_1$, et désignons-la par $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$. Il est possible, à partir des structures topologiques récursives de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{E}_1$, de définir une structure topologique récursive sur $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$. On peut alors considérer $(\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1)^*$ comme l'ensemble des éléments récursifs de $\mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{E}_1$.

Nous verrons que cette définition est susceptible de revêtir plusieurs formes, qui ne sont équivalentes que dans certains cas. Par ailleurs, il peut arriver que $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$ appartienne déjà à notre liste, c'est à dire qu'on ait défini antérieurement une structure topologique récursive sur $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$. Il faut alors vérifier que les deux structures, l'ancienne et la nouvelle, sont "récursivement équivalentes".

1.5. Une question analogue (mais un peu plus compliquée) se pose lorsqu'on convient de restreindre les définitions fonctionnelles aux ensembles $\mathbf{E}^*$ et $\mathbf{E}_1^*$ constitués respectivement par les éléments récursifs de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{E}_1$.

Il existe en effet plusieurs définitions possibles pour la classe des applications "effectives" de $\mathbf{E}^*$ dans $\mathbf{E}_1^*$. Nous verrons plus loin

que le nombre total de ces définitions est au moins égal à sept. Nous constaterons d'ailleurs que les sept classes correspondantes se ramènent en général à cinq, et nous examinerons les relations d'inclusion entre ces cinq classes.

1.6. L'exposé qui va suivre ne prétend nullement apporter à toutes ces questions des solutions complètes et définitives. Son but est seulement de proposer quelques méthodes et d'indiquer certains problèmes importants.

Parmi les nombreux points de cette communication qui demanderaient à être complétés, signalons les suivants:

1⁰) Nous indiquerons des méthodes pour "récursiviser" d'une part la notion d'*espace métrique*, et d'autre part la notion d'*espace topologique* (en utilisant, dans ce dernier cas, des bases d'ouverts particulières). Mais il serait sans doute d'une importance capitale de récursiviser la notion d'*espace uniforme* qui, au point de vue de la richesse, est intermédiaire entre les deux notions récédentes.

2⁰) Nous ne donnerons pas la définition complète des "espaces basés récursifs". On pourrait d'ailleurs proposer plusieurs définitions, de forces différentes. Et le problème fondamental est précisément de savoir quelles conditions il faut imposer pour obtenir chacun des principaux théorèmes généraux.

3⁰) En conséquence, nous n'énoncerons la plupart de ces théorèmes généraux que pour des espaces particuliers. Et nous laisserons en suspens la question de savoir à quels cas exactement ces théorèmes se généralisent.

4⁰) D'autre part, faute de temps, nous ne fournirons à peu près aucune démonstration.

5⁰) Par ailleurs nous laisserons entièrement de côté la question de l'"équivalence récursive" entre plusieurs structures de même espèce définies sur le même ensemble (structures d'espace métrique récursif, ou d'espace basé récursif).

6⁰) Enfin, également faute de temps, nous n'aborderons pas certaines notions topologico-récursives dont de nombreux auteurs ont pourtant déjà révélé l'utilité: par exemple les notions fondamentales d'ensemble *récursivement ouvert* et d'*ensemble récursivement fermé* dans un espace basé récursif [1]).

---

[1]) Après la communication, M. A. Grzegorczyk a suggéré d'étudier, au point de vue de la récursivité, l'*espace métrique des sous-ensembles fermés*

1.7. Il est déjà utile de pouvoir définir et étudier la récursivité, en employant des procédés uniformes, sur des espaces particuliers aussi variés que ceux dont nous avons précédemment dressé une liste. Mais le principal intérêt des méthodes générales, c'est qu'elles doivent permettre l'étude récursive de tous les autres espaces topologiques définis (ou à définir) en Analyse.

Car l'Analyse récursive réclame, dès maintenant, une définition des "espaces de Banach récursifs", des "mesures récursives", des "distributions récursives", etc.

On sait, d'autre part, qu'il est possible d'"arithmétiser" une grande partie de la Topologie algébrique, et d'en "récursiviser" certains théorèmes. Mais il parait difficile de poursuivre cette arithmétisation et cette récursivisation sans une étude préalable de la récursivité en Topologie générale.

1.8. Pour autant que les travaux déjà effectués permettent d'en juger, la récursivisation d'une branche de la Topologie ou de l'Analyse comporte, en gros, les étapes suivantes:

1°) Mettre les notions classiques sous une forme "récursivisable". Un exemple élémentaire est fourni par la notion d'"espace basé", forme récursivisable – parmi d'autres, sans doute – de la notion d'espace topologique.

2°) *a*) Donner une forme récursive précise aux notions ainsi aménagées.

b) Lorsque le *a*) peut s'effectuer de plusieurs façons différentes, il faut classifier les définitions ainsi obtenues, c'est à dire démontrer – suivant les cas – leur équivalence ou (par des contre-exemples) leur non-équivalence.

3°) Ayant fait choix d'un mode de récursivisation déterminé, on peut donner une "traduction récursive" de chaque théorème appartenant à la branche considérée. Il faut alors, suivant les cas,

a) soit démontrer que cette traduction est vraie,

b) soit démontrer (par des contre-exemples) qu'elle est fausse.

---

d'un espace métrique compact (par exemple $\mathbf{S}^p$), relativement à la *distance symétrique* entre sous-ensembles. On peut en général munir cet espace d'une structure récursive (cf. ci-dessous, Partie 4). On peut donc définir les éléments récursifs de cet espace. Et on montre que ces *ensembles fermés récursifs* constituent un cas particulier important des ensembles récursivement fermés.

Or on peut faire les remarques pratiques suivantes:

D'une part, les considérations "arithmétiques" "fines" n'interviennent que dans le $2^0\,b$) et le $3^0\,b$).

D'autre part, lorsque le $2^0\,a$) a été effectué de façon adéquate, le $3^0\,a$) est souvent trivial, même lorsqu'il s'agit de théorèmes compliqués. En fait, lorsqu'on a reconnu qu'une démonstration d'Analyse classique est "effective" au sens pragmatique du terme, on la met en général sans aucune dfficulté sous forme récursive [1]).

1.9. Le point le plus intéressant est peut être, au fond, le 1^0) ci-dessus (1.9). Car en recherchant des formes récursivisables pour les notions mathématiques essentielles, il est possible qu'on rencontre un jour des problèmes assez profonds, et peut être aussi qu'on rejoigne certaines préoccupations de la Physique mathématique.

Par ailleurs, il est évident que ce domaine "constructiviste" constitue un des terrains d'entente entre la mathématique classique et la mathématique intuitionniste [2]).

La topologie récursive apparaît ainsi comme la base (ou l'une des bases) d'une *Mathématique constructive*. Certes, il n'y a (me semble-t-il) aucune raison de considérer cette mathématique constructive comme "plus valable" que toute autre (je ne vois même pas quel sens exact aurait cette assertion). Mais il est possible que son édification revête un intérêt relativement considérable.

Bien entendu, en raison même du développement que cette mathématique constructive semble amenée à recevoir, il n'est pas possible de fonder la Topologie récursive sur un certain nombre de procédés définis une fois pour toutes, si généraux que soient ces procédés [3]). Aussi les méthodes que nous allons indiquer ne constituent-elles

---

[1]) C'est ainsi, par exemple, qu'on met trivialement sous forme récursive le théorème classique sur l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle satisfaisant à la condition de Lipschitz: il suffit de récursiviser "canoniquement" la méthode d'approximation de Cauchy ou celle de Picard.

[2]) Un autre terrain d'entente est constitué par l'étude de certains systèmes formels. Les correspondances entre ces deux domaines sont donc extrêmement intéressantes (cf. la communication de G. Kreisel à ce Colloque).

[3]) Il s'agirait plutôt de "repenser" la Mathématique en se plaçant à un point de vue "effectif". C'est en cela que l'Analyse récursive rejoint l'Intuitionnisme, malgré leurs positions de départ différentes.

qu'un échelon tout à fait élémentaire (et fragmentaire) de la récursivisation.

2. Définitions préalables

2.1. Il nous faut tout d'abord définir la structure topologique de chacun des espaces particuliers dont nous avons dressé la liste et que nous étudions à titre d'exemples. Certaines de ces structures topologiques sont déduites d'une structure métrique ou uniforme.

2.2. L'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels sera muni de la topologie discrète.

2.3. $\mathbf{F}_p$ est l'ensemble des applications de $\mathbf{N}^p$ dans $\mathbf{N}$ (ces applications sont toutes continues puisque $\mathbf{N}^p$ est discret). Nous conviendrons d'identifier $\mathbf{F}_0$ et $\mathbf{N}$ (ce qui est cohérent, si l'on admet que, pour tout ensemble E, E^0 est un ensemble réduit à un seul élément).

Soit M une partie finie quelconque de $\mathbf{N}^p$. Nous dirons que deux éléments φ et ψ de $\mathbf{F}_p$ sont *voisins d'ordre* M s'ils coïncident sur M (c'est à dire si $x \in M \rightarrow \varphi(x) = \psi(x)$). En prenant toutes les parties finies, nous déterminons ainsi une structure uniforme (classique) sur $\mathbf{F}_p$. Nous munirons $\mathbf{F}_p$ de la topologie déduite de cette structure uniforme.

Pour $p = 0$, on retrouve la topologie discrète.

2.4. Pour $p = 1$, on peut munir $\mathbf{F}_1$ d'une métrique compatible avec la structure uniforme qui vient d'être définie. Il suffit de poser:

$$(1) \qquad \textit{distance de } (\varphi, \psi) = \frac{1}{\mu x[\varphi(x) \neq \psi(x)]}$$

(avec *distance de* $(\varphi, \psi) = 0$ si $\varphi = \psi$).

2.5. Nous appellerons *semi-fonction* de p variables (en anglais "partial function") toute application φ d'un sous-ensemble quelconque M de $\mathbf{N}^p$ dans $\mathbf{N}$. M sera dit le *domaine de définition* de φ. Si $M = \mathbf{N}$, φ est un élément de $\mathbf{F}_p$.

A toute semi-fonction φ de p variables nous pouvons associer l'ensemble de tous les éléments de $\mathbf{F}_p$ qui coïncident avec φ sur le domaine de définition de φ.

---

[1]) μx signifie "le plus petit x tel que ...".

Nous désignerons par $\mathscr{F}_p$ la famille constituée par les sous-ensembles de $\mathbf{F}_p$ ainsi associés à toutes les semi-fonctions de p variables dont les domaines de définition sont *finis*.

2.6. Nous désignons par $\mathbf{F}'_p$ l'ensemble de toutes les *fonctions binaires* de p variables, c'est à dire l'ensemble de toutes les applications de $\mathbf{N}^p$ dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$. Pour $p=0$, on pose $\mathbf{F}'_0=\{0, 1\}$.

En procédant comme pour $\mathbf{F}_p$, on définit sur $\mathbf{F}'_p$ une structure uniforme, d'où une topologie. Et on définit une métrique sur $\mathbf{F}'_1$.

Nous définirions de même l'ensemble des *semi-fonctions binaires* de p variables. Et nous désignerons par $\mathscr{F}'_p$, la famille constituée par les sous-ensembles de $\mathbf{F}'_p$ associés à toutes les semi-fonctions binaires dont les domaines de définition sont finis.

2.7. Sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, et sur le segment $\mathbf{S}=[\![0, 1]\!]$, nous mettons la métrique ordinaire et la topologie qui s'en déduit.

De même pour $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{S}^p$.

2.8. Sur l'ensemble $\mathbf{C}_p$ des applications continues de $\mathbf{S}^p$ dans $\mathbf{R}$, nous mettons la métrique de la *convergence uniforme*:

$$\textit{distance de } (f, g)=\textit{maximum de } |f(x)-g(x)| \textit{ pour } x\in\mathbf{S}^p$$

et la topologie qui s'en déduit.

Nous conviendrons de poser $\mathbf{C}_0=\mathbf{R}$; cette convention est cohérente (cf. 2.3) et redonne la métrique de $\mathbf{R}$.

2.9. Sur l'ensemble $\mathbf{D}_p$ des applications continues de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$, nous mettrons la structure uniforme de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de $\mathbf{R}^p$, et la topologie associée à cette structure uniforme.

Nous posons $\mathbf{D}_0=\mathbf{R}$ (mêmes remarques qu'en 2.8).

2.10. Sur l'ensemble $\mathbf{K}'_{p,q}$ des applications continues de $\mathbf{F}'_p$ dans $\mathbf{F}_q$, nous mettons la structure uniforme de la *convergence uniforme* (ce qui est possible, puisque $\mathbf{F}_q$ possède une structure uniforme et que $\mathbf{F}'_p$ est compact) et la topologie associée.

Nous procéderons de même pour l'ensemble $\mathbf{J}'_p$ des applications continues de $\mathbf{F}'_p$ dans $\mathbf{R}$ [1]).

---

[1]) Un des éléments de $\mathbf{J}'_1$ joue un certain rôle en Analyse: la correspondance (continue, mais ni biunivoque ni bi-continue) qui à tout élément φ de $\mathbf{F}'_1$ associe l'élément de $\mathbf{S}$ dont φ constitue une *représentation binaire*.

2.11. Nous définirons plus loin (cf. 5.6) la topologie dont nous munirons l'ensemble $\mathbf{K}_{p,q}$ des applications continues de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathbf{F}_q$, et celle dont nous munirons l'ensemble $\mathbf{J}_p$ des applications continues de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathbf{R}$.

2.12. Nous considérerons l'ensemble des applications continues de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathbf{F}'_q$ comme un sous-espace de $\mathbf{K}_{p,q}$, l'ensemble des applications continues de $\mathbf{F}_p$ dans $\mathbf{S}$ comme un sous-espace de $\mathbf{J}_p$, etc.

D'autre part, il est inutile de considérer l'ensemble des applications continues de $\mathbf{R}^p$ ou $\mathbf{S}^p$ dans $\mathbf{F}_q$ ou $\mathbf{F}'_q$. En effet, comme $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{S}^p$ sont connexes alors que $\mathbf{F}_q$ et $\mathbf{F}'_q$ sont totalement discontinus, ces applications sont réduites à des constantes.

2.13. Enfin nous munissons l'espace de Hilbert $\mathbf{H}$ de sa métrique classique et de la topologie associée.

2.14. Avec ces définitions, les espaces $\mathbf{F}'_p$ et $\mathbf{S}_p$ sont *compacts*. Les espaces $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}^p$ sont *localement compacts*, mais non compacts. Les autres espaces ne sont ni compacts, ni localement compacts.

2.15. Les espaces $\mathbf{N}$, $\mathbf{F}_p$, $\mathbf{F}'_p$, $\mathbf{K}_{p,q}$, $\mathbf{K}'_{p,q}$ sont *totalement discontinus*. Par contre, $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{S}^p$, $\mathbf{C}_p$, $\mathbf{D}_p$, $\mathbf{J}_p$, $\mathbf{J}'_p$ sont *connexes*.

2.16. Nous supposons connue la définition des *fonctions récursives*. Nous désignerons respectivement par $\mathbf{F}^*_p$ et $\mathbf{F}'_p{}^*$ l'ensemble des éléments, récursifs de $\mathbf{F}_p$ et de $\mathbf{F}'_p$.

3. Conventions terminologiques

3.1. Soit E un ensemble quelconque. Pour abréger, nous appellerons *E-suite* toute suite infinie d'éléments de E (c'est à dire toute application de $\mathbf{N}$ dans E).

3.2. Soit E un ensemble dénombrable. Nous appellerons *numérotation* de E toute application de $\mathbf{N}$ sur E.

On définit facilement la notion d'*équivalence récursive* entre deux numérotations *biunivoques* d'un même ensemble E.

De même, on définit sans difficulté les notions de *E-suite récursive*, de *sous-ensemble récursif* et de *sous-ensemble récursivement énumérable* d'un ensemble E *relativement à* une numérotation *biunivoque* de E. Ces notions restent invariantes lorsqu'on remplace la

numérotation considérée par une autre numérotation biunivoque qui lui est récursivement équivalente.

Malheureusement, on est souvent contraint d'utiliser des numérotations non biunivoques. Pour de telles numérotations, l'"équivalence récursive" peut se définir de plusieurs façons, ainsi que les notions de suite récursive et de sous-ensemble récursif ou récursivement énumérable [1]). Mais, de toute façon, la notion de sous-ensemble récursif ne reste pas invariante par le changement d'une numérotation non biunivoque en une autre récursivement équivalente (sauf dans les cas où on peut trivialement se ramener à des numérotations biunivoques). Seules subsistent les notions de suite récursive et de sous-ensemble récursivement énumérable.

3.3. Soient E et E_1 deux ensembles dénombrables munis respectivement des numérotations biunivoques ν et ν_1. Soit M un sous-ensemble de E. Soit S l'ensemble de toutes les séquences finies d'éléments de E. Soient respectivement α, β, γ des numérotations biunivoques de M, S, $E \times E_1$. On définit sans difficulté le fait, pour α ou β, d'être *récursivement compatible* avec ν, et le fait, pour γ, d'être *récursivement compatible* avec ν et ν_1. Si α est récursivement compatible avec ν, cela entraîne d'ailleurs nécessairement que M est récursif relativement à ν.

Considérons alors tous les sous-ensembles qu'on peut obtenir à partir de **N** en appliquant un nombre quelconque de fois les trois opérations suivantes: produit direct, passage à l'ensemble des séquences finies, restriction à un sous-ensemble récursif. Si ν est une numérotation biunivoque d'un de ces ensembles, nous pouvons définir le fait, pour ν, d'être récursivement compatible avec la numérotation canonique de **N**. Nous dirons, pour abréger, qu'une telle numérotation ν est *récursive*.

---

[1]) On peut prendre les définitions suivantes:

Deux numérotations (non nécessairement biunivoques) ν et ν' de E sont *récursivement équivalentes* s'il existe deux éléments θ et θ' de F_1^* tels qu'on ait, pour tout n de **N**, $\nu(n)=\nu'[\theta(n)]$ et $\nu'(n) = \nu[\theta'(n)]$.

Une E-suite $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ sera dite *récursive relativement à* ν s'il existe un élément θ de F_1^* tel que $x_n = \nu[\theta(n)]$. Un sous-ensemble F de E sera dit *récursivement énumérable relativement à* ν s'il existe un sous-ensemble récursivement énumérable M de **N** tel qu'on ait $F = \nu(M)$ (ce qui ne signifie pas nécessairement que $M = \nu^{-1}(F)$. Ces deux dernières notions restent invariantes lorsqu'on remplace ν par une numérotation ν' récursivement équivalente à ν.

3.4. Nous désignerons par **Q** l'ensemble des nombres rationnels.

Les remarques qui précèdent nous indiquent ce qu'il faut entendre par *numérotation récursive de* **Q**.

4. Espaces métriques récursifs

4.1. Soit **M** un espace métrique, et soit **d** la distance sur **M** (**d** est une application de $\mathbf{M}^2$ dans **R** satisfaisant à certaines conditions classiques).

Considérons une **M**-suite (cf. 3.1) $(x_0, \ldots, x_n, \ldots)$. Cette **M**-suite sera dite *récursivement convergente* s'il existe une application récursive φ de **N** dans **N** (c'est à dire un élément de F_1^*) telle qu'on ait, quels que soient les entiers p, n, n':

$$[n > \varphi(p) \ \& \ n' > \varphi(p)] \rightarrow \mathbf{d}(x_n, x_{n'}) < 2^{-p}.$$

Il est évident que rien ne serait changé à cette définition si l'on remplaçait 2^{-p} par $1/\alpha(p)$, où α serait un élément strictement croissant de F_1^*.

4.2. Nous appellerons *espace métrique récursif* le triplet constitué par un espace métrique **M** (avec sa distance **d**), un sous-ensemble dénombrable D de **M**, et une numérotation biunivoque ν de D, le tout satisfaisant aux conditions suivantes:

(a) **M** est *complet*;

(b) D est *dense* sur **M**;

(c) la fonction δ définie par $\delta(n, n') = \mathbf{d}[\nu(n), \nu(n')]$ est une application *récursive* de $\mathbf{N}^2$ dans **R**.

Remarque. La condition (c) suppose qu'on a préalablement défini la notion d'"application récursive de $\mathbf{N}^2$ dans R", c'est à dire de "suite (double) récursive de nombres réels". Cette notion est classique, et nous la définirons un peu plus loin. Pour définir **R** comme espace métrique récursif sans tomber dans un cercle vicieux, il suffirait d'introduire la notion d'*espace métrique récursif rationnel*, où la condition (c) serait remplacée par la condition (c') suivante:

(c') la fonction δ est une application *récursive* de $\mathbf{N}^2$ dans **Q** (cf. 3.3 et 3.4).

4.3. Soit $(\mathbf{M}, D, \nu)$ un espace métrique récursif. Un élément x

de **M** sera dit *récursif* s'il existe une D-suite récursive relativement à ν (cf. 3.2) qui converge récursivement (cf. 4.1) vers x.

Nous désignerons par $\mathbf{M}^*$ l'ensemble des éléments récursifs de **M**.

4.4. Un élément x de $\mathbf{M}^*$ est donc déterminé par la donnée de deux éléments de $\mathbf{F}_1^*$: la fonction θ qui énumère la D-suite récursive convergeant vers x, et la fonction φ qui définit la convergence récursive de cette D-suite.

En remplaçant θ et φ par des éléments de $\mathbf{F}_2^*$ (c'est à dire en ajoutant récursivement une variable de **N** supplémentaire) on définit sans peine la notion de **M**-*suite récursive* (les éléments d'une telle suite appartiennent nécessairement à $\mathbf{M}^*$, d'après la définition).

On a le théorème fondamental suivant (dont la démonstration est immédiate):

Théorème I. *La limite d'une* **M**-*suite récursive et récursivement convergente appartient à* $\mathbf{M}^*$.

4.5. Pour chacun des espaces métriques de notre liste d'exemples (cf. Partie 2), c'est à dire pour $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_1'$, **R**, **S**, $\mathbf{C}_p$, **H**, nous allons choisir un sous-ensemble D et une numérotation ν de D de façon à obtenir un espace métrique récursif.

Pour $\mathbf{M}=\mathbf{F}_1$, nous prendrons comme sous ensemble D l'ensemble de tous les éléments de $\mathbf{F}_1$ qui sont nuls à partir d'un certain rang (dépendant de l'élément considéré).

De même pour $\mathbf{M}=\mathbf{F}_1'$.

Pour $\mathbf{M}=\mathbf{R}$, nous prendrons $D=\mathbf{Q}$ (cf. 3.4).

Pour $\mathbf{M}=\mathbf{S}$, nous prendrons $D=\mathbf{Q}\cap\mathbf{S}$.

Pour $\mathbf{M}=\mathbf{C}_1$, nous prendrons pour D l'ensemble de toutes les "fonctions polygonales rationnelles" (c'est à dire les fonctions représentées par des lignes brisées dont les points anguleux sont en nombre fini et ont des coordonnées rationnelles).

De même, pour $\mathbf{M}=\mathbf{C}_p$, nous prendrons pour D l'ensemble des "fonctions polyédrales rationnelles".

Pour $\mathbf{M}=\mathbf{H}$, nous prendrons pour D l'ensemble des points à coordonnées rationnelles nulles à partir d'un certain rang.

Dans chacun de ces cas, nous prendrons pour ν une numérotation biunivoque et récursive quelconque (cf. 3.3).

On voit facilement que le triplet (**M**, D, ν) ainsi obtenu constitue chaque fois un espace métrique récursif.

On peut donc définir, pour chacun de ces ensembles **M** particuliers, l'ensemble $\mathbf{M}^*$ des éléments récursifs de **M**.

Pour $\mathbf{F}_1^*$ et $\mathbf{F}_1'^*$, on retrouve la définition classique des fonctions récursives.

Pour $\mathbf{R}^*$ et $\mathbf{S}^*$, on retrouve la définition classique des nombres réels récursifs.

Pour $\mathbf{C}_p^*$ on retrouve la définition des *fonctions réelles récursives* ([1], [4], [8]).

Remarque. Dans le cas $\mathbf{M}=\mathbf{F}_1$, nous pourrions évidemment remplacer le sous-ensemble D choisi par l'ensemble des fonctions "constantes à partir d'un certain rang". De même, dans le cas $\mathbf{M}=\mathbf{R}$, nous pourrions remplacer $\mathbf{Q}$ par l'ensemble des rationnels de la forme $\pm p/a^q$, avec $p, q, a \in \mathbf{N}$ et a fixe >1. Enfin, pour $\mathbf{M}=\mathbf{C}_1$, nous pourrions prendre, par exemple, pour ensemble D l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels. Etc.

4.6. La terminologie que nous avons adoptée contient une ambiguïté, marquée par le théorème suivant:

Théorème II. *Pour chacun des espaces métriques récursifs définis, en* 4.5, *il existe une* **M***-suite récursive dont tous les éléments appartiennent à* D, *mais qui n'est pas une* D*-suite récursive.*

Cela provient simplement du fait que la définition des D-suites récursives repose sur la numérotation de D. Or, si une D-suite récursive converge récursivement vers un élément x de D, le numéro de cet élément existe, mais ne peut pas s'obtenir "récursivement" à partir des deux éléments de $\mathbf{F}_1^*$ (cf. 4.4) qui définissent x.

4.7. En plus de sa structure métrique, l'espace $\mathbf{C}_p^*$ possède une structure d'*ordre partiel* ainsi définie: $f \leqslant g \rightleftarrows (x)[f(x) \leqslant g(x)]$. Cet ordre est *total* pour $p=0$ (car $\mathbf{C}_0=\mathbf{R}$, cf. 2.8).

Comme exemple des rapports "récursifs" entre la structure d'ordre et la structure métrique sur $\mathbf{C}_p$, indiquons le résultat suivant (qui est classique pour $p=0$, et qui constitue dans les autres cas une forme "récursive" du Théorème de Dini):

Théorème III. *Si une* $\mathbf{C}_p$*-suite récursive croissante converge vers un élément de* $\mathbf{C}_p^*$, *cette* $\mathbf{C}_p$*-suite est récursivement convergente.*

4.8. Toujours à titre d'exemple, indiquons le résultat élémentaire suivant, concernant l'espace de Hilbert:

Théorème IV. *Pour qu'un élément x de* **H** *appartienne à* **H***, il faut et il suffit que la* **R***-suite* $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ *de ses coordonnées soit récursive et que la série* $\Sigma|x_n|^2$ *soit récursivement convergente.*

D'après le Théorème III, la seconde condition peut être remplacée par celle-ci: $\Sigma|x_n|^2 \in \mathrm{R}^*$.

5. Espaces basés

5.1. Soit **E** un ensemble, et soit $\mathscr{B}$ une famille de parties de **E**. Considérons la famille $\mathscr{O}$ constituée par toutes les réunions d'un nombre quelconque (fini ou infini) d'éléments de $\mathscr{B}$. Autrement dit:

$$(1) \qquad A \in \mathscr{O} \rightleftarrows (E\mathscr{A})(\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \;\&\; A = \bigcup_{X \in \mathscr{A}} X$$

Pour que cette famille $\mathscr{O}$ satisfasse aux axiomes des ouverts, il faut et il suffit que $\mathscr{B}$ vérifie la condition (2) suivante:

$$(2) \qquad \begin{cases} (X)(X')(x)[(X \in \mathscr{B} \;\&\; X' \in \mathscr{B} \;\&\; x \in X \cap X') \rightarrow \\ \qquad \rightarrow (EY)(Y \in \mathscr{B} \;\&\; Y \subset X \cap X' \;\&\; x \in Y)]. \end{cases}$$

Si nous munissons alors **E** de la topologie définie par $\mathscr{O}$, on sait que $\mathscr{B}$ s'appelle une *base d'ouverts* de E.

La condition (2) est vérifiée en particulier lorsque la famille $\mathscr{B}$ est *close par rapport à l'intersection*, c'est à dire lorsque l'intersection de deux éléments quelconques de $\mathscr{B}$ appartient aussi à $\mathscr{B}$.

5.2. Nous appellerons *espace basé* tout couple (**E**, $\mathscr{B}$) constitué par un ensemble **E** et une famille $\mathscr{B}$ de sous-ensembles de **E** vérifiant la condition (2) ci-dessus.

Nous associons à tout espace basé (**E**, $\mathscr{B}$) la structure topologique qui est déterminée sur **E** par la famille $\mathscr{O}$ définie à partir de $\mathscr{B}$ au moyen de la relation (1) ci-dessus.

Un espace basé sera dit *à base compacte* si les adhérences des éléments de $\mathscr{B}$ sont des sous-ensembles compacts de **E**. Tout espace basé à base compacte est localement compact. Tout espace basé compact est à base compacte. Mais tout espace basé localement compact n'est pas nécessairement à base compacte.

5.3. Nous allons définir une structure d'espace basé sur chacun des espaces **N**, $\mathbf{F}'_p$, $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{S}^p$, **H**.

Pour $\mathbf{E}=\mathbf{N}$, nous prendrons comme base $\mathscr{B}$ la famille constituée par tous les sous-ensembles de $\mathbf{N}$ réduits à un seul élément.

Pour $\mathbf{E}=\mathbf{F}_p$, nous prendrons $\mathscr{B}=\mathscr{F}_p$ (cf. 2.5).

Pour $\mathbf{E}=\mathbf{F}'_p$, nous prendrons $\mathscr{B}=\mathscr{F}'_p$ (cf. 2.6).

Pour $\mathbf{E}=\mathbf{R}^p$, nous prendrons pour $\mathscr{B}$ la famille constituée par tous les pavés ouverts de $\mathbf{R}^p$ dont les sommets ont des coordonnées rationnelles (finies).

Nous ferons de même pour $\mathbf{E}=\mathbf{S}^p$ — Remarquons toutefois qu'il s'agit, dans ce dernier cas, des pavés *ouverts sur* $\mathbf{S}^p$; ainsi par exemple, pour $p=1$, nous considérerons que les intervalles semi-ouverts $[\![0, q [\![$ et $]\!] q, 1]\!]$ (avec $q \in \mathrm{Q} \cap \mathrm{S}$) appartiennent à $\mathscr{B}$.

Pour $\mathbf{E}=\mathbf{H}$, nous prendrons pour $\mathscr{B}$ la famille constituée par toutes les boules ouvertes dont le rayon est rationnel et dont le centre a des coordonnées rationnelles nulles à partir d'un certain rang.

Rémarques. 1⁰) Dans chacun de ces cas, la structure topologique associée à $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ est la structure usuelle déjà définie (cf. Partie 2).

2⁰) Sur $\mathbf{N}$, $\mathbf{F}_p$, $\mathbf{F}'_p$, $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{S}^p$ (mais non sur $\mathbf{H}$), les bases ainsi définies sont closes par rapport à l'intersection (à condition toutefois d'ajouter à chacune de ces bases, la partie vide de $\mathbf{E}$).

3⁰) $\mathbf{F}'_p$, $\mathbf{S}^p$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}^p$ sont à base compacte (les deux premiers parce qu'ils sont compacts, les deux autres parce qu'ils sont localement compacts et que les éléments de $\mathscr{B}$ sont bornés).

4⁰) Pour $\mathbf{E}=\mathbf{N}$, $\mathbf{F}_p$ et $\mathbf{F}'_p$, les éléments de la base $\mathscr{B}$ sont à la fois ouverts et fermés.

5⁰) Pour $\mathbf{E}=\mathbf{R}^p$ ou $\mathbf{S}^p$, nous pourrions prendre pour $\mathscr{B}$ l'ensemble des boules ouvertes à centre et rayons rationnels, ou encore l'ensemble des intersections finies de telles boules; cela ne changerait presque rien à la suite de cet exposé.

5.4. Soient $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$ deux espaces basés. Nous désignerons par $\mathscr{B} \times \mathscr{B}_1$ la famille consituée par tous les sous-ensembles de $\mathbf{E} \times \mathbf{E}_1$ qui sont de la forme $A \times A_1$ avec $\mathrm{A} \in \mathscr{B}$ et $A_1 \in \mathscr{B}$. Cette famille $\mathscr{B} \times \mathscr{B}_1$ vérifie la propriété (2).

Nous dirons, par définition, que le couple $(\mathbf{E} \times \mathbf{E}_1, \mathscr{B} \times \mathscr{B}_1)$ est le *produit direct* des espaces basés $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$. Ce produit direct est un espace basé. Et la structure topologique ainsi déterminée sur $\mathbf{E} \times \mathbf{E}_1$ n'est autre que la topologie produit.

5.5 Soient $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$ deux espaces basés. Nous désignerons par $\mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{E}_1$ l'ensemble des applications continues de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}_1$. Nous allons définir une structure d'espace basé sur $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$.

Soit X un élément quelconque de $\mathscr{B}$, et soit Y un élément quelconque de $\mathscr{B}_1$. Nous désignerons par $X \Rightarrow Y$ le sous-ensemble de $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$ constitué par toutes les fonctions f telles qu'on ait $f(\overline{X}) \subset Y$ (où $\overline{X}$ est l'adhérence de X). Et nous désignerons par $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1$ la famille consituée par toutes les intersections d'un nombre fini quelconque d'ensembles $X \Rightarrow Y$ ainsi obtenus.

La famille $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1$ est close par rapport à l'intersection. C'est elle que nous associerons à $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$ pour former un espace basé.

Rémarque. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases différentes définies sur un même ensemble $\mathbf{E}$ et donnant sur $\mathbf{E}$ la même structure topologique.

Soient de même $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$ donnant la même structure topologique sur $\mathbf{E}_1$. Les deux structures topologiques définies respectivement sur $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$ par $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1$ et par $\mathscr{B}' \Rightarrow \mathscr{B}'_1$ ne sont pas en général identiques. Elles le sont dans certains cas; on a par exemple le résultat suivant:

Si $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ est à base compacte et si $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$ est séparé, la structure topologique définie sur $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$ par $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1$ est celle de la convergence compacte (et par conséquent cette structure ne dépend que des structures topologiques de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{E}_1$).

5.6. En appliquant à l'ensemble $\mathbf{N}$ muni de la base précédemment choisie (cf. 5.2) le procédé défini en 5.3 (pour obtenir sur $\mathbf{N}^p$ une structure d'espace basé) et le procédé défini en 5.4, on obtient sur $\mathbf{F}_p$ (qui n'est autre que $\mathbf{N}^p \Rightarrow \mathbf{N}$) la structure d'espace basé précédemment choisie (cf. 5.2). Il en est de même lorsqu'on applique aux ensembles $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$, ou $\mathbf{S}^p$ et $\mathbf{S}^q$, le procédé défini en 5.3 (pour obtenir $\mathbf{R}^{p+q}$ ou $\mathbf{S}^{p+q}$).

Nous conviendrons d'appliquer à $\mathbf{C}_p$ (qui n'est autre que $\mathbf{S}^p \Rightarrow \mathrm{R}$) la structure d'espace basé déterminée au moyen du procédé défini en 6.4 à partir des structures d'espaces basés précédemment choisies pour $\mathbf{S}^p$ et $\mathbf{R}$.

Nous ferons de même pour $\mathbf{D}_p (= \mathbf{R}^p \Rightarrow \mathbf{R})$, pour $\mathbf{K}_{p,q} (= \mathbf{F}_p \Rightarrow \mathbf{F}_q)$, pour $\mathbf{K}'_{p,q} (= \mathbf{F}'_p \Rightarrow \mathbf{F}_q)$, pour $\mathbf{J}_p (= \mathbf{F}_p \Rightarrow \mathbf{R})$ et pour $\mathbf{J}'_p (= \mathbf{F}'_p \Rightarrow \mathbf{R})$.

Pour $\mathbf{C}_p$, $\mathbf{D}_p$, $\mathbf{K}'_{p,q}$, et $\mathbf{J}'_p$, les structures topologiques ainsi obtenues

sont précisément celles que nous avions convenu de prendre (cf. Partie 2).

Pour $\mathbf{K}_{p,q}$ et $\mathbf{J}_p$, nous définissons ainsi, comme il avait été annoncé, une certaine structure topologique (qui est strictement plus fine que celle de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbf{F}_p$).

5.7. Soient $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$ deux espaces basés. Soit I un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$. Et soit $Z = \bigcap_{i \in I} (X_i \Rightarrow Y_i)$ (avec $X_i \in \mathscr{B}$ et $Y_i \in \mathscr{B}_1$) un élément de $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1$.

Un problème fondamental consiste à savoir dans quels cas on a $Z \neq \emptyset$.

Il est évidemment nécessaire pour cela que Z vérifie la propriété Π ainsi définie:

$$\Pi(Z) \rightleftarrows (J)[J \subset I \to (\bigcap_{i \in J} \bar{X}_i \neq \emptyset \to \bigcap_{i \in J} Y_i \neq \emptyset)].$$

Mais la condition $\Pi(Z)$ est-elle suffisante pour avoir $Z \neq \emptyset$?

S. C. Kleene et G. Kreisel ont montré (indépendemment) que la réponse à cette question est affirmative dans le cas où $\mathbf{E}_1 = \mathbf{N}$ et où $\mathbf{E}$ est l'un des ensembles suivants: $\mathbf{N}$, $\mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N}$ $(= \mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N}) \Rightarrow \mathbf{N}$ $(= \mathbf{K}_{1,0})$, $((\mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N}) \Rightarrow \mathbf{N}) \Rightarrow \mathbf{N}$, ... etc. [2].

Une méthode, due à J. P. Serre, permet de ramener ce problème général à la considération d'une propriété topologique très large portant sur le quadruplet $(\mathbf{E}, \mathscr{B}, \mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$.

Soient $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$ deux espaces basés quelconques. Désignons par $\mathscr{C}_1$ (respectivement: $\bar{\mathscr{C}}$) la famille constituée par toutes les intersections d'un nombre fini quelconque — éventuellement nul — d'éléments de $\mathscr{B}_1$ (resp.^{nt}: d'adhérences d'éléments de $\mathscr{B}$). Et soit $\mathscr{D}$ la famille consituée par toutes les réunions d'un nombre fini quelconque d'éléments de $\bar{\mathscr{C}}$. L'espace $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ sera dit *adaptable à* $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$ si la condition suivante est vérifiée:

Quels que soient les éléments U et U' de $\mathscr{D}$, avec $U \subset U'$ et $U \neq \emptyset$, quel que soit l'élément V de $\mathscr{C}_1$, et quelle que soit l'application continue f de U dans V, il existe une application continue f' de U' dans V telle que la restriction de f' à U soit identique à f (autrement dit, f est "continument prolongeable" à U').

Nous avons alors le résultat suivant:

Théorème V (Serre). *Si* $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ *est adaptable à* $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$, *pour tout élément* Z *de* $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1$, $\Pi(Z)$ *entraîne* $Z \neq \emptyset$.

La démonstration de ce théorème est très simple et d'ordre purement combinatoire.

On est ainsi ramené à la question suivante: Dans quels cas un espace basé est-il adaptable à un autre espace basé? Les deux théorèmes suivants englobent une grande partie des cas usuels:

Théorème VI. *Si tous les éléments de* $\mathscr{B}$ *sont à la fois ouverts et fermés,* $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ *est adaptable à n'importe quel espace basé.*

Théorème VII. *Si* $\mathbf{E}$ *est un espace normal, et si tous les éléments non vides de* $\mathscr{C}_1$ *sont homéomorphes à des boules ouvertes de* $\mathbf{R}^n$, *alors* $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ *est adaptable à* $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$.

Le Théorème VI est trivial. Le Théorème VII est équivalent à un théorème classique d'Urysohn. On peut d'ailleurs déterminer des cas d'adaptabilité encore plus généraux que celui du Théorème VII [1]).

On peut aussi se poser le problème suivant:

Soit $Z = \bigcap_{i \in I} (X_i \Rightarrow Y_i)$ un élément de $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1$, et soit x un élément de $\mathbf{E}$. Désignons par $Z(x)$ l'ensemble de tous les éléments $f(x)$ de $\mathbf{E}_1$ lorsque f parcourt Z. A-t-on l'égalité $Z(x) = \bigcap_{x \in \bar{X}_i} Y_i$?

Ce problème se résout par une méthode analogue à celle qui vient d'être indiquée, en ajoutant simplement aux familles considérées les sous-ensembles de $\mathbf{E}$ ou de $\mathbf{E}_1$ réduits à un élément. La réponse est affirmative dans tous les cas particuliers étudiés ici.

6. Approximations dans les espaces basés

6.1. Soit $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ un espace basé. Nous appellerons *approximation* dans cet espace tout sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{B}$ possédant les deux propriétés suivantes:

$$(X \in \mathscr{A} \ \& \ X \subset Y) \to Y \in \mathscr{A}$$

$$(X \in \mathscr{A} \ \& \ Y \in \mathscr{A}) \to (EZ)(Z \in \mathscr{A} \ \& \ Z \neq \emptyset \ \& \ \bar{Z} \subset X \cap Y)$$

($\bar{Z}$ désignant l'adhérence de Z)

Nous appellerons *suite d'approximation* toute $\mathscr{B}$-suite $(X_0, \ldots, X_n, \ldots)$ telle qu'on ait, pour tout n, $X_n \neq \emptyset$ et $\bar{X}_{n+1} \subset X_n$.

---

[1]) Sur ce genre de problèmes, cf. par exemple [5].

A toute suite d'approximation $(X_0, \ldots, X_n, \ldots)$ nous pouvons associer l'approximation $\mathscr{A}$ définie par:

$$Y \in \mathscr{A} \rightleftarrows (En)(X_n \subset Y).$$

On a alors $\bigcap_{Y \in \mathscr{A}} Y = \bigcap_{i \in N} X_i$.

Inversement, si $\mathscr{B}$ est dénombrable, on peut associer (en général d'une infinité de façons) à toute approximation une suite d'approximation satisfaisant aux relations ci-dessus.

La notion de suite d'approximation est plus intuitive, mais moins maniable que celle d'approximation.

6.2. $\mathscr{A}$ étant une approximation quelconque, nous appellerons *intersection de* $\mathscr{A}$ l'ensemble $\bigcap_{X \in \mathscr{A}} X$. C'est un sous-ensemble fermé de **E**.

Une approximation sera dite *consistante* si son intersection est non-vide.

Une approximation $\mathscr{A}$ sera dite *faiblement convergente* si son intersection est réduite un seul élément x de **E**. Cet élément x sera appelé la *limite faible* de $\mathscr{A}$.

Une approximation $\mathscr{A}$ sera dite *fortement convergente* s'il existe un élément x de **E** tel que $\mathscr{A}$ soit identique à l'ensemble des éléments de $\mathscr{B}$ qui contiennent x. Cet élément x sera appelé la *limite forte* de $\mathscr{A}$.

Si l'espace **E** est séparé, toute approximation fortement convergente est aussi faiblement convergente (avec la même limite).

Si l'espace **E** est régulier, et si x est un élément quelconque de **E**, l'ensemble des éléments de $\mathscr{B}$ qui contiennent x constitue une approximation fortement convergente (avec x comme limite forte). Nous désignerons cette approximation par $\mathscr{V}_x$.

Remarque: Soit $(X_0, \ldots, X_n, \ldots)$ une suite d'approximation. Pour que l'approximation correspondante admette x comme limite forte, il faut et il suffit que les X_n consistituent un système fondamental de voisinages de x.

6.3. Pour un espace basé $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ quelconque, considérons les propriétés (A_1) et (A_2) suivantes):

(A_1). Toute approximation dans $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ est consistante.

(A_2). Dans $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$, toute approximation faiblement convergente

est aussi fortement convergente (avec nécessairement la même limite).

Tout espace basé à base compacte possède les propriétés (A_1), et (A_2). Ces propriétés sont donc vérifiées par $\mathbf{N}$, $\mathbf{F}'_p$, $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{S}^p$.

Mais d'autres espaces basés peuvent vérifier ces propriétés. Ainsi, avec les bases choisies, $\mathbf{F}_p$ et $\mathbf{H}$ vérifient (A_1) et (A_2) [1]).

Nous avons par contre les théorèmes suivants:

Théorème VIII. $\mathbf{K}_{p,q}$, $\mathbf{K}'_{p,q}$, $\mathbf{C}_p$, $\mathbf{D}_p$, $\mathbf{J}_p$ et $\mathbf{J}'_p$ *ne vérifient pas* (A_1).

Demonstration (pour $\mathbf{C}_1$). Soit X_n le sous-ensemble de $\mathbf{C}_1$ constitué par toutes les fonctions f telles que:

$$\text{pour } x \leqslant (2^{-1}-2^{-n}) \ , \ |f(x)|<2^{-n};$$
$$\text{pour } x \geqslant (2^{-1}+2^{-n}) \ , \ |f(x)-1|<2^{-n}.$$

La suite $(X_0, \ldots, X_n, \ldots)$ est une suite d'approximation, mais son intersection est vide.

Théorème IX. $\mathbf{K}_{p,q}$, $\mathbf{K}'_{p,q}$, $\mathbf{C}_p$, $\mathbf{D}_p$, $\mathbf{J}_p$ et $\mathbf{J}'_p$ *ne vérifient pas* (A_2).

Démonstration (pour $\mathbf{C}_1$). Soit Y_n le sous-ensemble de $\mathbf{C}_1$ constitué par toutes les fonctions f telles que:

$$\text{pour } |x-2^{-1}| \geqslant 2^{-n} \ , \ f(x)<2^{-n}.$$

$(Y_0, \ldots, Y_n, \ldots)$ est une suite d'approximation. L'approximation qui s'en déduit admet la fonction identiquement nulle comme limite faible, mais non comme limite forte.

6.4. Etant donné un espace basé $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ ne possédant pas la propriété (A_1), on peut se demander s'il ne serait pas possible de "compléter" cet espace, c'est à dire de le plonger canoniquement dans un espace basé $(\mathbf{E}', \mathscr{B}')$ vérifiant (A_1).

Une méthode pour construire un tel $(\mathbf{E}', \mathscr{B}')$ est suggérée par la notion d'*approximation maximale.*

---

[1]) Le fait que $\mathbf{H}$ vérifie (A_1) peut se déduire du théorème général suivant: Toute suite emboitée décroissante de sous-ensembles fermés, bornés, convexes et non-vides de $\mathbf{H}$ possède une intersection non vide. La propriété (A_1) resterait donc vérifiée si la base $\mathscr{B}$ choisie sur $\mathbf{H}$ était remplacée par l'ensemble $\mathscr{C}$ de toutes les intersections d'un nombre fini quelconque d'éléments de $\mathscr{B}$. Par contre, avec cette nouvelle base $\mathscr{C}$ la propriété (A_2) ne serait plus remplie. On voit sur cet exemple que (A_1) peut être vérifiée sans que (A_2) le soit.

L'ensemble des approximations, ordonné par inclusion, est *inductif*. D'après le Théorème de Zorn, toute approximation est donc contenue dans une approximation maximale.

D'autre part, quel que soit l'élément x de **E**, l'approximation $\mathscr{V}_x$ (qui existe, comme on l'a vu, dès que **E** est régulier: cf. 6.2) est maximale. Réciproquement, dans un espace régulier vérifiant (A_1) toute approximation maximale est une approximation fortement convergente.

Par conséquent, pour construire le "complété" d'un espace basé $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$, on peut essayer d'utiliser l'ensemble des approximations maximales dans $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$.

Avant de définir d'une façon générale ce procédé de complétion (ce que nous ne ferons pas ici), il est intéressant de regarder à quoi correspondent les approximations maximales, dans le cas d'un espace basé usuel ne vérifiant pas (A_1). Considérons donc rapidement le cas de $\mathbf{C}_1$ (avec la base précédemment choisie).

Soit $\mathscr{A}$ une approximation dans $\mathbf{C}_1$, et soit x un élément variable de **S**. Considérons tous les éléments de $\mathscr{A}$ qui sont de la forme $X \Rightarrow Y$ (cf. 5.5) avec $x \in X$. L'intersection de tous les éléments Y correspondants est un certain segment S_x de **R** (S_x pouvant éventuellement être identique à **R**). Posons $S_x = [\![f(x), g(x)]\!]$.

Les fonctions f et g ainsi déterminées à partir de $\mathscr{A}$ sont deux applications de **S** dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ satisfaisant aux trois conditions suivantes: (1) $f \leqslant g$; (2) f est semi-continue inférieurement; (3) g est semi-continue supérieurement.

Lorsque $\mathscr{A}$ est fortement convergente, f et g sont continues et on a $f = g =$ limite forte de $\mathscr{A}$.

On démontre le résultat suivant:

Théorème X. *Pour que $\mathscr{A}$ soit maximale, il faut et il suffit que les fonctions f et g correspondantes possèdent les propriétés suivantes*: (4) $f =$ *limite inférieure de* g; (5) $g =$ *limite supérieure de* f.

Les couples (f, g) vérifiant les deux conditions (4) et (5) [d'où aussi (1), (2) et (3)] possèdent un certain nombre de propriétés intéressantes.

A ces quelques remarques sur une possible "complétion" de $\mathbf{C}_1$ on pourrait d'ailleurs ajouter diverses observations de caractère plus spécifiquement récursif. Mais je voulais seulement indiquer qu'il peut être avantageux, pour certaines questions d'Analyse

récursive, de remplacer certains espaces fonctionnels par des espaces plus vastes vérifiant (A_1).

6.5. La notion d'approximation maximale, et la méthode qui vient d'être esquissée, suggèrent la notion de *base abstraite*: on appellerait ainsi un ensemble **B** (qui ne serait pas nécessairement un ensemble de parties) muni d'une certaine structure destinée à "reproduire abstraitement" les relations topologiques définies sur les bases d'ouverts. Sur une telle base, on définirait la notion d'*approximation abstraite*. Et, en désignant par $\mathbf{E}'$ l'ensemble des approximations abstraites maximales, on pourrait définir sur $\mathbf{E}'$ une certaine base $\mathscr{B}'$, ainsi qu'un isomorphisme entre $\mathscr{B}'$ et **B**.

L'espace basé $(\mathbf{E}', \mathscr{B}')$ ainsi obtenu vérifierait (A_1). En prenant pour ensemble **B** initial la base $\mathscr{B}$ d'un espace basé $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ quelconque, on obtiendrait ainsi un procédé canonique pour compléter $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$.

6.6. Soient $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$ deux espaces basés. Considérons l'espace basé $(\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1)$.

Soit $\mathscr{M}$ une approximation dans ce dernier espace. Et soit $\mathscr{A}$ une approximation quelconque dans $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$. Considérons le sous-ensemble $\mathscr{A}_1$ de $\mathscr{B}_1$ ainsi défini:

$$Y \in \mathscr{A}_1 \rightleftarrows (EX)\,(X \in \mathscr{A} \;\&\; X \Rightarrow Y \in \mathscr{M}).$$

Moyennant certaines conditions très générales (qui sont vérifiées dans tous les cas particuliers étudiés ici) on démontre que $\mathscr{A}_1$ constitue une approximation.

A toute approximation $\mathscr{M}$ dans $(\mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{E}_1, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1)$ on peut donc associer un opérateur d'approximation que nous désignerons par $\mathbf{\Phi}_{\mathscr{M}}$. Autrement dit, on a $\mathscr{A}_1 = \mathbf{\Phi}_{\mathscr{M}}(\mathscr{A})$.

Soient alors x un élément de **E**, et $\mathscr{V}_x$ l'approximation fortement convergente qui lui correspond (cf. 6.2). Si $\mathbf{\Phi}_{\mathscr{M}}(\mathscr{V}_x)$ est une approximation fortement convergente, nous dirons que $\mathscr{M}$ est *ponctuellement convergente* au point x. L'ensemble des éléments de **E** où $\mathscr{M}$ est ponctuellement convergente sera appelé le *domaine de convergence* de $\mathscr{M}$ et désigné par $\mathbf{D}(\mathscr{M})$.

Si $\mathbf{D}(\mathscr{M}) = \mathbf{E}$, $\mathscr{M}$ sera dite *totalement convergente*.

Si $x \in \mathbf{D}(\mathscr{M})$, on a $\mathbf{\Phi}_{\mathscr{M}}(\mathscr{V}_x) = \mathscr{V}_y$, où y est un élément de $\mathbf{E}_1$. A toute approximation $\mathscr{M}$ dans $(\mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{E}_1, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1)$, on peut donc associer une application de $\mathbf{D}(\mathscr{M})$ dans $\mathbf{E}_1$. Nous désignerons cette

application par $\mathbf{f}_{\mathscr{M}}$. Il résulte immédiatement des définitions que $\mathbf{f}_{\mathscr{M}}$ est continue sur $\mathbf{D}(\mathscr{M})$.

6.7. Si $\mathscr{M}$ est totalement convergente, $\mathbf{f}_{\mathscr{M}}$ est un élément de $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$. D'après les définitions, l'intersection de $\mathscr{M}$ est alors réduite à $\mathbf{f}_{\mathscr{M}}$. On voit par conséquent que la convergence totale entraine la convergence faible.

D'autre part, il résulte aussi des définitions (jointes aux conditions très générales dont nous avons parlé — sans les expliciter, faute de temps) que la convergence forte entraine la convergence totale. Et si $\mathscr{M}$ a pour limite forte m, on a $m = \mathbf{f}_{\mathscr{M}}$.

Inversement, on démontre facilement la propriété suivante:

Théorème XI. *Si* $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ *est à base compacte, la convergence totale équivaut à la convergence forte dans* $(\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1)$.

Il n'en est pas toujours de même lorsque $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ n'est pas à base compacte, par exemple pour $\mathbf{E} = \mathbf{F}_p$. On a en effet le résultat suivant:

Théorème XII. *Dans* $\mathbf{K}_{p,q}$ *et dans* $\mathbf{J}_p$ *il existe des approximations totalement convergentes qui ne sont pas fortement convergentes.*

Demonstration (dans $\mathbf{K}_{1,0}$). Soit X_n le sous-ensemble de $\mathrm{K}_{1,0}$ constitué par toute les fonctionnelles Φ satisfaisant à la condition:

$$(\varphi)[\varphi(0) < n \rightarrow \Phi(\varphi) = 0].$$

$(X_0, \ldots, X_n, \ldots)$ est une suite d'approximation. L'approximation correspondante est totalement convergente, et l'application de $\mathbf{F}_1$ dans $\mathbf{N}$ définie par cette approximation est la fonctionnelle identiquement nulle. Mais la fonctionnelle identiquement nulle n'est pas limite forte de cette approximation.

7. Espaces basés récursifs et approximations récursives

7.1. Soit $(\mathbf{E}, \mathscr{B})$ un espace basé dont la base $\mathscr{B}$ est dénombrable. Soit ν une numérotation (non nécessairement biunivoque) de $\mathscr{B}$. Le triplet $(\mathbf{E}, \mathscr{B}, \nu)$ sera appelé *espace basé récursif*, s'il satisfait à un certain nombre de conditions qu'il serait trop long d'expliciter ici (certaines de ces conditions sont d'ordre purement topologique; les autres sont d'ordre arithmético-topologique et concernent ν).

Lorsque cette définition est explicitée, on constate immédiate-

ment que, si l'on adjoint une numérotation récursive (cf. 2.3) à chacun des espaces basés particuliers que nous avons précédemment définis, on obtient des espaces basés récursifs (à numérotation biunivoque).

D'autre part, soient $(\mathbf{E}, \mathscr{B}, \nu)$, $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1, \nu_1)$ deux espaces basés récursifs. On définit canoniquement, à partir de ν et ν_1, une numérotation ν' de $\mathscr{B} \times \mathscr{B}_1$ et une numérotation ν'' de $\mathscr{B} \to \mathscr{B}_1$. On démontre alors que le triplet $(\mathrm{E} \times \mathrm{E}_1, \mathscr{B} \times \mathscr{B}_1, \nu')$ constitue un espace basé récursif, et qu'il en est de même le triplet $(\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}_1, \nu'')$ lorsque l'espace basé $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ est adaptable à $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1)$ (cf. 5.7).

7.2. Soit $(\mathbf{E}, \mathscr{B}, \nu)$ un espace basé récursif. Une approximation $\mathscr{A}$ dans cet espace sera dite *récursive* si $\mathscr{A}$ est un sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathscr{B}$ (cf. 2.2).

On obtient facilement le résultat fondamental suivant:

Théorème XIII. *L'ensemble des approximations récursives est récursivement énumérable.*

Le sens exact de ce théorème est le suivant:

Il existe un sous-ensemble récursivement énumérable A de $\mathbf{N}^2$ tel que, en désignant par $\mathscr{A}^{(n)}$ le sous-ensemble de $\mathscr{B}$ défini par

$$X \in \mathscr{A}^{(n)} \rightleftarrows (Ex)[X = \nu(x) \ \& \ (n, x) \in A],$$

l'ensemble de tous les $\mathscr{A}^{(n)}$ est identique à l'ensemble de toutes les approximations récursives. n sera dit le *nombre de Gödel* de $\mathscr{A}^{(n)}$.

Rémarque A. Considérons l'espace basé récursif $\mathbf{F}_p$ (avec la base que nous avons précédemment choisie, et une numérotation récursive de cette base). On voit facilement qu'à toute approximation récursive $\mathscr{A}$ dans $\mathbf{F}_p$, on peut associer une semi-fonction récursive α ("partial recursive function") telle que le sous-ensemble de $\mathbf{F}_p$ qui correspond à α (cf. 2.5) soit identique à l'intersection de $\mathscr{A}$. Nous dirons que $\mathscr{A}$ *définit* α. Réciproquement, à toute semi-fonction récursive α on peut associer une approximation récursive qui définit α [1]).

---

[1]) L'espace basé $\mathbf{F}_p$ a la propriété que tout élément de $\mathscr{B}$ qui contient l'intersection d'une approximation $\mathscr{A}$ appartient lui-même à $\mathscr{A}$. C'est une propriété plus forte que (A_2).

Rémarque B. Du Théorème XIV que nous énoncerons plus loin, on déduit le résultat suivant: *Dans* $\mathbf{C}_1$, *il existe une approximation récursive qui n'est incluse dans aucune approximation récursive maximale* (cf. 6.4).

7.3. Les approximations récursives convergentes vont nous permettrent de définir la notion d'*élément récursif* d'un espace basé récursif.

Mais la question se pose de savoir quelle convergence on va utiliser: convergence faible, convergence forte, ou encore (si l'espace basé considéré a été obtenu comme espace de fonctions continues) convergence totale?

Pour $\mathbf{F}_p$ et $\mathbf{F}'_p$, il n'y a pas de problème. Nous savons en effet que sur ces espaces les trois modes de convergence coïncident.

Il n'y a pas non plus de problème pour $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{S}^p$ et $\mathbf{H}$, où convergence faible et convergence forte coïncident.

Dans $\mathbf{F}_p$, $\mathbf{F}'_p$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{H}$, nous conviendrons par conséquent d'appeler élément *récursif* tout élément qui est limite d'une approximation récursive convergente. On voit facilement qu'on retrouve ainsi les définitions précédemment obtenues pour $\mathbf{F}^*_p$, $\mathbf{F}'^*_p$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{S}^*$, $\mathbf{H}^*$.

On a par contre les résultats suivants [1]).

Théorème XIV. *Dans chacun des espaces basés récursifs* $\mathbf{K}_{p,q}$, $\mathbf{K}'_{p,q}$, $\mathbf{C}_p$, $\mathbf{D}_p$, $\mathbf{J}_p$, $\mathbf{J}'_p$ (*avec* $p \neq 0$), *il existe un élément qui est limite d'une certaine approximation récursive faiblement convergente mais qui n'est défini par aucune approximation récursive totalement convergente.*

Théorème XV. *Dans* $\mathbf{K}_{p,q}$ *et dans* $\mathbf{J}_p$ (*avec* $p \neq 0$) *il existe un élément qui est la limite d'une certaine approximation récursive totalement convergente, mais qui n'est la limite d'aucune approximation récursive fortement convergente.*

---

[1]) Le Théorème XIV est beaucoup plus difficile à démontrer que le Théorème IX. En effet, le Théorème IX nous apprend seulement qu'il existe une certaine approximation $\mathscr{A}$ (on voit facilement qu'on peut la prendre récursive) et un élément a tels que a soit limite faible de $\mathscr{A}$ mais que $\mathscr{A}$ ne soit pas fortement (ni totalement) convergente. Mais il pourrait exister une autre approximation récursive $\mathscr{A}'$ dont ce même a serait la limite forte (c'est précisément ce qui se passe pour l'élément particulier avec lequel nous avons démontré le Théorème IX dans le cas de $\mathbf{C}_1$). Mêmes remarques pour le Théorème XV par rapport au Théorème XII.

Pour $\mathbf{C}_p$, $\mathbf{D}_p$, $\mathbf{K}'_{p,q}$, $\mathbf{J}'_p$, $\mathbf{H}$, il faut donc choisir entre la convergence faible et la convergence forte (identique, sur ces espaces, à la convergence totale).

Et pour $\mathbf{K}_{p,q}$ et $\mathbf{J}^!_p$, il faut choisir entre ccnvergence faible, convergence totale et convergence forte.

On constate que, pour retrouver les définitions classiques, il est nécessaire et suffisant d'adopter la convention suivante:

Dans $\mathbf{C}_p$, $\mathbf{D}_p$, $\mathbf{K}_{p,q}$, $\mathbf{K}'_{p,q}$, $\mathbf{J}_p$, $\mathbf{J}'_p$, un élément sera dit *récursif* s'il est la limite d'une approximation récursive totalement convergente.

7.4. Soit $(E, \mathscr{B}, \nu)$ un espace basé récursif. Nous conviendrons de désigner par $\mathbf{E}^*$ l'ensemble des éléments récursifs de $\mathbf{E}$ (convention qui n'a de sens, bien entendu, que lorsqu'on a précisé le mode de définition choisi pour ces éléments récursifs).

Moyennant certaines conditions très générales qui sont vérifiées dans tous les cas particuliers étudiés ici), $\mathbf{E}^*$ est dense sur $\mathbf{E}$. Comme $\mathbf{E}^*$ est toujours dénombrable, on a généralement $\mathbf{E}^* \neq \mathbf{E}$ (sauf pour $\mathbf{E} = \mathbf{N}$).

Dans le cas où $\mathbf{E}^*$ a été défini à partir de la convergence forte, dire que $x \in \mathbf{E}^*$ équivaut à dire que l'ensemble des éléments de $\mathscr{B}$ qui contiennent x est récursivement énumérable.

Si $\mathbf{E}^*$, $\mathbf{E}_1^*$ et $(\mathbf{E} \times \mathbf{E}_1)^*$ ont été définis à partir de la convergence forte, on a $(\mathbf{E} \times \mathbf{E}_1)^* = \mathbf{E}^* \times \mathbf{E}_1^*$.

7.5. Soient $(\mathbf{E}, \mathscr{B}, \nu)$ et $(\mathbf{E}_1, \mathscr{B}_1, \nu_1)$ deux espaces basés récursifs. Soient $\mathfrak{A}$ l'ensemble des approximations dans $\mathbf{E}$, $\mathfrak{A}^*$ l'ensemble des éléments récursifs de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{**}$ l'ensemble des éléments fortement convergents de $\mathfrak{A}^*$. Définissons de même $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1^*$, $\mathfrak{A}_1^{**}$. Nous supposons que les éléments récursifs de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{E}_1$ sont définis avec la convergence forte (autrement dit que $\mathbf{E}^*$ et $\mathbf{E}_1^*$ sont déterminés respectivement à partir de $\mathfrak{A}^{**}$ et de $\mathfrak{A}_1^{**}$).

Soit $\mathscr{M}$ une approximation dans l'espace basé récursif $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$ (muni de la base et de la numérotation canoniquement définies).

On voit facilement (cf. 6.6) que:

Théorème XVI. *Si $\mathscr{M}$ est récursive, $\mathbf{\Phi}_{\mathscr{M}}(\mathfrak{A}^*) \subset \mathfrak{A}_1^*$.*

Corollaire A. *Si $\mathscr{M}$ est récursive, $\mathbf{f}_{\mathscr{M}}(\mathbf{D}(\mathscr{M}) \cap \mathbf{E}^*) \subset \mathbf{E}_1^*$.*

Corollaire B. *Si $\mathscr{M}$ est récursive et totalement convergente, $\Phi_{\mathscr{M}}(\mathfrak{A}^{**}) \subset \mathfrak{A}_1^{**}$.*

Convenons d'appeler éléments récursifs de $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$ ceux qui sont obtenus par des approximations récursives totalement convergentes. Et désignons par $(\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1)^*$ l'ensemble de ces éléments récursifs.

Des corollaires A et B précédents, nous déduirons le suivant:

Corollaire C. $f \in (\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1)^* \rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{E}^*) \subset \mathrm{E}_1^*$.

7.6. Nous avons vu (cf. 7.2) que $\mathfrak{A}^*$ et $\mathfrak{A}_1^*$ sont "récursivement énumérables". Désignons respectivement par $\mathscr{A}^{(n)}$ et $\mathscr{A}_1^{(n)}$ l'élément de $\mathfrak{A}^*$ et l'élément de $\mathfrak{A}_1^*$ qui admettent n comme nombre de Gödel.

Une application Ψ de $\mathfrak{A}^*$ dans $\mathfrak{A}_1^*$ sera appelée une *opération effective* s'il existe un élément ψ de $\mathbf{F}_1^*$ tel qu'on ait, pour tout n, $\Psi(\mathscr{A}^{(n)}) = \mathscr{A}_1^{\psi(n)}$.

Cette terminologie est due à J. Myhill et J. C. Shepherdson [7]. Elle a été définie par ces auteurs dans le cas où $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 = \mathbf{F}_1$ (c'est à dire $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{K}_{1,1}$).

On voit facilement que si $\mathscr{M}$ est récursive, la restriction de $\mathbf{\Phi}_{\mathscr{M}}$ à $\mathfrak{A}^*$ est une opération effective.

Inversement, Myhill et Shepherdson ont démontré le théorème suivant (dans le cas particulier indiqué, mais la démonstration s'étend à tous les cas particuliers étudiés ici):

Théorème XVII (Myhill–Shepherdson). *A toute opération effective Ψ on peut associer une approximation récursive $\mathscr{M}$ telle que Ψ soit la restriction de $\mathbf{\Phi}_{\mathscr{M}}$ à $\mathfrak{A}^*$.*

7.7. Une attention particulière doit être apportée aux approximations dans $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$ qui sont récursives et telles que $\mathrm{E}^* \subset \mathbf{D}(\mathscr{M})$ (sans qu'on ait nécessairement pour cela $\mathbf{D}(\mathscr{M}) = \mathbf{E}$). En effet, pour une telle approximation $\mathscr{M}$, on a $\mathbf{f}_{\mathscr{M}}(\mathrm{E}^*) \subset \mathrm{E}_1^*$.

Nous désignerons par $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_*$ l'ensemble constitué par les restrictions à $\mathbf{E}^*$ de toutes les fonctions $\mathbf{f}_{\mathscr{M}}$ obtenues à partir de telles approximations $\mathscr{M}$. Les éléments de $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_*$ sont des applications de $\mathbf{E}^*$ dans $\mathbf{E}_1^*$.

Tout élément de $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_*$ est continu sur $\mathbf{E}^*$, mais n'est pas nécessairement *prolongeable par continuité* à $\mathbf{E}$ tout entier (un élément f de $(\mathrm{E}^* \Rightarrow \mathrm{E}_1^*)_*$ est dit prolongeable par continuité à $\mathbf{E}$ s'il existe un élément de $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$ dont la restriction à $\mathbf{E}^*$ est identique à f). Nous désignerons par $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_*^{\mathrm{C}}$ l'ensemble des éléments de $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_*$ qui sont prolongeables par continuité à $\mathbf{E}$.

Nous désignerons enfin par $(E^* \Rightarrow E_1^*)^*$ l'ensemble constitué par les restrictions à $\mathbf{E}^*$ de toutes les fonctions appartenant à $(E \Rightarrow E_1)^*$ (cf. 7.5).

On a évidemment (les inclusions étant prises au sens large):

$$(E^* \Rightarrow E_1^*)^* \subset (E^* \Rightarrow E_1^*)^c_* \subset (E^* \Rightarrow E_1^*)_*.$$

Dans le cas où $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1$ est l'un des espaces $\mathbf{K}_{p,q}$, $\mathbf{K}'_{p,q}$, $\mathbf{C}_p$, $\mathbf{D}_p$, $\mathbf{J}_p$, $\mathbf{J}'_p$ (et probablement dans des cas beaucoup plus larges), on démontre les deux propositions suivantes:

Théorème XVIII. $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)^* \neq (\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)^c_*$.

Théorème XIX. $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)^c_* \neq (\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_*$.

Rémarque. Le théorème XVIII est directement lié au Théorème XIV.

7.8. Revenons à la définition des opérations effectives (cf. 7.6). Mais, cette fois-ci, occupons nous seulement des éléments de $\mathfrak{A}^{**}$ et de $\mathfrak{A}_1^{**}$.

Nous appellerons *fonctionnelle récursivement définissable* [1]) toute application Ψ de $\mathfrak{A}^{**}$ dans $\mathfrak{A}_1^{**}$ telle qu'il existe une semi-fonction récursive ψ d'une variable possédant la propriété suivante:

$$\mathscr{A}^{(n)} \in \mathfrak{A}^{**} \rightarrow \psi(n) \textit{ est défini et } \Psi(\mathscr{A}^{(n)}) = \mathscr{A}_1^{(\psi(n))}.$$

Une telle fonctionnelle Ψ permet de définir une application de $\mathbf{E}^*$ dans $\mathbf{E}_1^*$. Soit $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)^*_K$ l'ensemble des applications de $\mathbf{E}^*$ dans $\mathbf{E}_1^*$ ainsi obtenues.

On voit facilement que $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_* \subset (E^* \Rightarrow E_1^*)_K$.

La proposition suivante est vraie dans les cas particuliers étudiés ici, et s'étend vraisemblablement à des cas très généraux.

Théorème XX. $(E^* \Rightarrow E_1^*)_* = (E^* \Rightarrow E_1^*)_K$.

7.9. En introduisant "récursivement" une variable de $\mathbf{N}$ supplémentaire dans la définition d'une approximation fortement convergente, on définit sans difficulté la notion de $\mathbf{E}$-*suite récursive*

---

[1]) Cette définition, et la démonstration du Théorème XX sont données, pour le cas $\mathbf{E} = \mathbf{F}_1$, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{N}$ (c'est à dire $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{K}_{1,0}$), dans [3].

(les éléments d'une telle suite appartiennent à $\mathbf{E}^*$ d'après la définition) [1]).

Une application f de $\mathbf{E}^*$ dans $\mathbf{E}_1^*$ sera appelée une *fonction de Banach–Mazur* [2]) si elle transforme toute $\mathbf{E}$-suite récursive $(x_0, \ldots, x_n, \ldots)$ en une $\mathbf{E}_1$-suite $(f(x_0), \ldots, f(x_n), \ldots)$ également récursive. Nous désignerons par $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_B$ l'ensemble des fonctions de Banach–Mazur.

On démontre, dans les cas usuels, que les fonctions de Banach–Mazur sont continues sur $\mathbf{E}^*$.

Nous désignerons par $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_B^C$ l'ensemble des fonctions de Banach–Mazur qui sont prolongeables par continuité à $\mathbf{E}$ tout entier.

On voit immédiatement que $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_* \subset (\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_B$.

On en déduit, d'après le Théorème XX, que $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_B \neq (\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_B^C$.

R. M. Friedberg a obtenu le résultat fondamental suivant (la démonstration – non encore publiée – s'applique au cas $\mathbf{E} = \mathbf{F}_1$, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{N}$, mais s'étend sans doute à des cas très larges):

Théorème XXI (Friedberg). $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_* \neq (\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_B$.

La méthode de Friedberg permet aussi, vraisemblablement, de démontrer $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_*^C \neq (\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)_B^C$.

7.10. Les éléments qui conviennent à l'Analyse sont ceux de $(\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1)^*$ (ou, ce qui revient au même, ceux de $(\mathbf{E}^* \Rightarrow \mathbf{E}_1^*)^*$).

Les ensembles $(E^* \Rightarrow E_1^*)_*$ ou $(E^* \Rightarrow E_1^*)_B$, et même les ensembles $(E^* \Rightarrow E_1^*)_*^C$ ou $(E^* \Rightarrow E_1^*)_B^C$ sont beaucoup moins satisfaisants.

Prenons par exemple le cas de $\mathbf{E} = \mathbf{S}$, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{R}$, c'est à dire $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{C}_1$.

On a les propriétés suivantes, parmi beaucoup l'autres:

Théorème XXII. $f \in \mathbf{C}_1^* \to max\,(f) \in \mathbf{R}^*$.

Théorème XXIII. $f \in \mathbf{C}_1^* \to \int_0^1 f(x)dx \in \mathbf{R}^*$.

---

[1]) Cette définition équivaut d'ailleurs à la suivante: une $\mathbf{E}$-suite récursive est un élément de $(\mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{E})^*$, les éléments récursifs de $\mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{E}$ étant supposés définis par la convergence totale (ou par la convergence forte, ce qui revient au même puisque $\mathbf{N}$ est à base compacte).

[2]) Cf. A. Mostowski [6]. La continuité des fonctionnelles de Banach–Mazur a été démontrée indépendamment par Mazur et par G. Kreisel (démonstrations non publiées).

Or ces propriétés ne sont par vraies, en général, pour les prolongements à **S** des éléments de $(\mathbf{S}^* \Rightarrow \mathbf{R}^*)^{C}_{*}$ (et *a fortiori* pour ceux de $(\mathbf{S}^* \Rightarrow \mathbf{R}^*)^{C}_{B}$).

Nous avons en particulier la propriété suivante, qui est caractéristique:

Théorème XXIV. *Tout élément de* $\mathbf{C}_1^*$ *est récursivement uniformément continu* [1]).

7.11. Considérons l'espace basé $\mathbf{C}_1 \Rightarrow \mathbf{C}_1$ (avec base et numérotation canoniques). Sur cet espace la convergence forte et la convergence totale sont distinctes.

Considérons les éléments M et I de $\mathbf{C}_1 \Rightarrow \mathbf{C}_1$ ainsi définis:

$M(f)(x) =$ *maximum de* f *sur le segment* $[\![0, x]\!]$.

$$I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Il est possible de montrer que M et I sont chacun la limite, dans $\mathbf{C}_1 \Rightarrow \mathbf{C}_1$, d'une approximation récursive fortement convergente (de ce résultat, on déduit immédiatement, à titre de corollaires, les Théorèmes XXII et XXIII).

Soit g un élément de $\mathbf{C}_1^*$ à variation bornée dont la variation totale soit un nombre réel récursif. Considérons l'élément G de $\mathbf{C}_1 \Rightarrow \mathbf{R}$ ainsi défini:

$$G(f) = \int_0^1 f\,dg \text{ (intégrale de Stieljes).}$$

On démontre que G est limite d'une approximation fortement convergente.

On peut alors se demander si G dépend "récursivement" de g. Cela conduit à poser les problèmes suivants:

Considérons le sous-ensemble A de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_1 \times \mathbf{R}$ constitué par tous les triplets (f, g, r) tels que la fonction g soit à variation bornée et admette le nombre r comme variation totale.

1°) Peut-on donner à **A** une structure d'espace basé récursif "compatible" avec les structures de $\mathbf{C}_1$ et de **R**?

---

[1]) Ce théorème est lié à la compacité de **S**. Lorsque **E** n'est pas compact, il faut remplacer les mots "récursivement uniformément continu" par "récursivement uniformément continu sur tout compact récursif de **E**, la compacité en question étant récursive par rapport au compact envisagé".

2⁰) L'élément J de $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{R}$ défini par

$$J(f, g, r) = \int_0^1 f\,dg$$

est-il limite d'une approximation récursive totalement convergente, voire fortement convergente?

BIBLIOGRAPHY

[1] A. Grzegorczyk, Computable functionals. Fund. Math. **42** (1955), 168–202.

[2] S. C. Kleene, Countable functionals, (this volume p. 81).

[3] G. Kreisel, D. Lacombe, J. R. Shoenfield, Fonctionelles récursivement définissables et fonctionnelles récursives. Comptes Rendus, **245** (1957), 399–402.

[4] D. Lacombe, Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions d'une ou plusieurs variables. Comptes Rendus, **240** (1955), 2478–2480 et **241** (1955), 13–14, 151–153.

[5] E. A. Michael, Selection theorems for continuous functions. Proc. Int. Congress Math. (1954), II, 241–242.

[6] A. Mostowski, Der gegenwärtige Stand der Grundlagenforschung in der Mathematik. Die Hauptreferate des 8. polnischen Mathematikerkongresses, 1953 in Warschau, 11–44.

[7] J. Myhill and J. C. Shepherdson, Effective operations on partial recursive functions. Z. Math. Logik Grundlagen Math. **1** (1955), 310–317.

[8] E. Specker, Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. J. Symb. Log. **14** (1949), 145–148.

CONSTRUCTIVE TRUTH

M. H. LÖB
University of Leeds

In spite of the title I have no general theory or definition of constructive truth to propose. Rather I shall deal with the subject from the point of view of an epistemological problem, thus laying more emphasis on heuristic than technical matters.

Constructivism in the widest sense is the tendency to read mathematics in terms of cognitive evidence. Unlike the naive platonism motivating classical mathematics, it considers abstract mathematical objects to be objects of thought. As such constructive concepts are explications of particular cognitive structures. (For example, the concept of a Turing machine extrapolates certain types of cognitive processes into formal terms). To that extent a general characterization of constructive concepts is an epistemological task. As a preliminary contribution I shall outline an approach towards formalizing some aspects of epistemological discourse in an attempt to gain a perspicuous basis for appraising the philosophical ramifications of the constructivist conception of mathematics.

1. In [8] MYHILL gave a definition of constructive ideas which was intended as a generalization of recursiveness from functions to arbitrary categories of concepts. More particularly on the basis of a well-known result by Kleene, Myhill constructed a semantically complete formal system K (i.e. K is complete with respect to a certain interpretation) in which every recursively enumerable predicate is representable. But, owing to its completeness, classical negation, universal quantification and cognate concepts can clearly not be defined in K. Myhill called such concepts non-constructive and attributed the incompleteness of the usual formalizations of number theory, for instance, to the presence of such non-constructive notions. ("These represent a region with which the human central nervous system, being subject to all limitations of a Turing machine, is incapable of dealing, and may

therefore be rejected as meaningless''). This led Myhill to define constructive ideas as those which are expressible in K or may be added to K without rendering the extended system incomplete.

I suggested [7] that the class of concepts intended by this definition could simply be characterized as the concepts expressible in K itself. The reason is that in K we can define a proof predicate Thm_s for any arbitrary formal system S, i.e. if α is the Gödel number of a formula p of S, $\mathrm{Thm}_s\,\alpha$ is provable in K if and only if p is a theorem of S. But if S is a semantically complete system, we have that $\mathrm{Thm}_s\,\alpha$ is provable in K if and only if p is true in S. Therefore we can in this sense define a truth predicate for any semantically complete system in K. We can thus translate S into K by means of definitions of the form

$$p \leftrightarrow \mathrm{Thm}_s\,\alpha$$

where α is the Gödel number of a formula p of S, and so we have no need to go beyond K for a characterization of Myhill's constructive ideas.

I should now prefer to style the intended notions as effective rather than constructive ideas. For it may, I think, be justifiably held that the previous delimitation is too narrow to serve as an exhaustive characterisation of what we should allow as constructively unobjectionable. If so, we may conclude that the area of what is cognitively evident is not co-extensive with that of the effectively computable; and to that extent – on the plane of Myhill's physiological observation – a *conceptual* reduction of mental processes to brain processes appears to be impossible.

In any case the system sketched is an example of a reasonably expressive language for which no interpretational difficulties arise. Meaning here was characterised, in a sense, by presenting the formal system itself. The situation, of course, changes radically if we use languages which are semantically incomplete. There the characterization of meaning or evidence must go beyond the resources of the system and in some way involve reference (from the constructive point of view) to the user of the system, for it is to him that the construction of abstract objects of meaning is to be ascribed.

2. Here we are faced with the problem of how we may refer to the user of a system or speaker of a language within a formal

context. A possible solution is suggested from a consideration of the so-called semantic paradoxes. The view has sometimes been held that owing to their appearance natural language is self-contradictory. This I think to be mistaken and wish to offer an elucidation. I find it convenient to carry out the discussion in terms of semantics as formulated by KEMENY [3], [4].

It is an essential point of [3] that the author of the language $\mathscr{L}$ selects an interpretation M^* for the purpose of establishing a translation from $\mathscr{L}$ into the metalanguage $\mathscr{ML}$. Kemeny adduces two arguments intended to show that M^* describes the *actual* world. According to one an expression a of $\mathscr{L}$ is translated by M^* into an expression of $\mathscr{ML}$ (say English). But in $\mathscr{ML}$ a refers to an object of the actual world, and it is this object which M^* assigns to a as its meaning.

This reasoning essentially depends on a strong idealization by assuming that there is a fixed metalanguage to start with. Let us suppose the author **I** of $\mathscr{L}$ wants to teach $\mathscr{L}$ to **X**. Suppose **I** says to **X**: "'a' stands for that tree". Now clearly "that" as understood by **I** refers to the tree in a way different from "that" as understood by **X**. We may think of "that" as understood by **I** as designating a (set of) point(s) with respect to a coordinate system fixed in **I**, whereas "that" as understood by **X** designates the same (set of) point(s) with respect to a coordinate system fixed in **X**. The coordinate system fixed in **I** (in **X**) performs for **I** (for **X**) precisely the function of M^* regarding the interpretation of "that". It follows that **I**'s M^* is for **X** an interpretation distinct from **X**'s M^*. Therefore, if we take situations like this into account, we are compelled to relativize M^* to the respective interpreter, i.e. the user of $\mathscr{L}$. We might express this by writing M^* (**S**), and more generally $M(\boldsymbol{\delta})$, where **S** ranges over the set of interpreters, which is tantamount to relativizing $\mathscr{L}$ and $\mathscr{ML}$ to **S**. (We express this for the moment by $\mathscr{L}$ (**S**) and $\mathscr{ML}$ (**S**), respectively). Kemeny's argument then allows us to conclude only that M^* (**S**) describes the (actual) world as *experienced* by **S**. The fact that distinct metalanguages must be assigned to distinct interpreters is hidden in Kemeny's argument by the reference to "English" as a unique object. We see to the contrary, that we are compelled to relativize English to the indicidual speaker, and replace "English" by "English$_{\mathscr{A}}$", "English$_{\mathscr{B}}$", etc. Apart from the previous discussion

this conclusion is also supported by reason of changing vocabulary and syntax.

In short, the term "natural language" is vague and carries with it misleading associations which can lead to confusion. To clarify the situation let us agree that a formal language is an object determined by giving a set of syntactic and semantic rules (the latter prescribing the designations of the expressions of the language unequivocally). Our previous discussion then forces us to conclude that natural language is not formal in this sense, since, as we have seen, its syntax and semantics may chage from speaker to speaker and for the same speaker at different instances. To determine a natural language fully we require in addition a set of *pragmatic* rules which relate it to the circumstances of its use. The view is urged upon us to associate a "local" formal language with any given speaker at any time of his life as representing his linguistic disposition at a particular time. In this sense in using (local) language a speaker implicitly lays down the syntactic and semantic rules determining it as a formal language. These local languages may be consistent or inconsistent depending on their various logical structures. On this view the puzzles connected with the paradoxes disappear.

For consider the statement

$B(A)$ "If this sentence is true, then A" [6],

where A stands for an arbitrary sentence. From $B(A)$ we apparently can prove any proposition whatsoever. Now consider the following scheme.

Speaker	Inter-pretation	Lan-guage	Sentence	Name of the sentence
X	M	$\mathscr{L}_1$	If this$_M$ sentence is true, then A	B_M
I	M^*	$\mathscr{L}$	If this$_{M^*}$ sentence is true, then A	B_{M^*}

Here the sentences B_M and B_{M^*} are supposed to be formally indistinguishable. But we suppose that B_{M^*} is uttered by a person called **I** using local language $\mathscr{L}$ and interpretation M^*, and B_M is uttered by **X** with local language $\mathscr{L}_1$ and interpretation M, such that "this$_{M^*}$ sentence" and "this$_M$ sentence" both designate B_M. Evidently, then **X** utters a paradox, where **I** can correctly argue

"If this$_{M^*}$ sentence is true, then A" (B_{M^*}).

But as "this$_{M*}$ sentence" does not denote B_{M*}, we do not get a paradox in $\mathscr{L}$. In other words, though $\mathscr{L}_1$ is contradictory $\mathscr{L}$ need not be. Each person is free to choose at any moment a contradictory language, i.e. to assert nothing, but that does not commit anybody else to do likewise. [1])

As remarked before, the analogy of the interpretations to relativistic coordinate systems is very close. The M's are reference systems describing phenomenologically constructed worlds, not an absolute reality or an external world. [2]) I shall therefore assume Kemeny's interpretations to be enumerable. Thus to any M I

---

[1]) It must be emphasised that I am not giving a formal solution of the paradoxes of natural language. Indeed there are several well-known solutions for formal systems. The difficulty rather was that it was not clear how any solution for formal systems may be applicable to natural language. In regarding natural language as locally formal, formal methods of solution become available to it.

[2]) This absence of a fixed M independent from individual experience corresponds to the absence of an inertial coordinate-system in relativity theory. In fact, only by coordinates fixed in us are we capable of referring to an object. The view that concrete objects could be defined by linguistic descriptions without an explicit or implied ostensive reference cannot be maintained, because we have no a priori criteria to decide of two concrete objects which in a given language answer to the same description whether they are in fact two or one and the same object.

This does not mean that communication would be possible without having in some sense a "common" language. But as an objection to the present approach this remark is not pertinent, since it is not my purpose to provide a theory designed in principle to answer any relevant question which may be raised concerning language. Rather I am concerned with the construction of a model of natural language for dealing systematically with a certain range of epistemological problems. In the absence of a more comprehensive formal treatment this should fairly be judged in the light of its analytical cogency in relation to the problems it is designed to clarify — rather than by what it leaves undone. Nor do I think that the theory of local languages is inconsistent with the fact of communication. By way of a tentative suggestion I should at present conceive of communication as a method of translation between local languages. Of course, on this view certain rules must be supposed to be implicitly accepted by the communicants so that translation can function in an appropriate manner. But the point is that these rules have a pragmatic (not an aprioristic) standing depending on empirical considerations. We have, for instance, no a priori grounds to suppose that there is a theoretical possibility of communicating the identity of concrete objects to rational inhabitants of a remote galaxy.

assign a congruent set of non-negative integers $\tilde{M}$. In particular to the "standard world" M^* (i.e. the interpretation selected by **I**, where **I** denotes the uses of $\mathscr{ML}$) there corresponds a set $\tilde{M}^*$.

3. While classical mathematics owes its development to a naive metaphysical conception of the physical world, from the constructivist point of view mathematics may rather be regarded to be an abstract reconstruction of a private phenomenological world. Essentially in this sense, Brouwer regards mathematical propositions to be synthetic.

They are in this respect on a par with the propositions of empirical science, only they are supposed to refer to a different kind of experience called intuition. This suggests that a clear notion of empirical meaningfulness might contribute towards a better understanding of 'meaning' in mathematics. Indeed it seems likely that abstractly the problems posed by these two kinds of meaning are conceptually identical. For instance,the positivistic concept of verifiability as a criterion of empirical truth seems to be an analogue of some kind of constructive truth. For it is apparently intended that the meaning of an empirical statement is to be construed in terms of the method of observation, i.e. in terms of the cognitive processes of a subject (if the use of experimental aids is counted among these), rather than in terms of an external world. Unfortunately the positivists have never succeeded in making it completely clear what they mean by verifiability. On the present approach we can give a formal explication of a related concept, namely that of a physical event (or rather: event describing sentence).

Though for convenience using Kemeny's notation, I regard $\mathscr{ML}$ as the *intuitive* metalanguage of $\mathscr{L}$.

In addition I shall make use of the following notation.

$RF(\varphi)$ for 'φ is a general recursive function',
$PRF(\varphi)$ for 'φ is a partial recursive function', [5] p. 326,
$RF(\varphi, \psi)$ for 'φ is a function recursive in ψ', [5] p. 275,
$\{e\}^{\psi}=\varphi$ for 'e defines φ recursively in ψ', [5] p. 292,
"E" is the existential quantifier relative to the non-negative integers,
"$\mathfrak{E}$" is the existential quantifier for arbitrary sets,
$\mathfrak{Un}_2(x)$ expresses: 'x is a one-one correspondence', [1] p. 16, 4. 6.

$\bar{\alpha}$ is defined recursively as follows: If α is an expression of $\mathscr{L}$ without free variables, then $\bar{\alpha}$ is its Gödel number (in $\mathscr{ML}$). If α is a variable of $\mathscr{L}$ (of arbitrary type) $\bar{\alpha}$ is a variable ranging over the Gödel numbers of the expressions substitutable for α. If α is an expression of $\mathscr{L}$ containing free variables $\xi_1, \ldots, \xi_r$, $\bar{\alpha}$ is a general recursive function of $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_r$ such that, if β is the result of substituting expressions $t_1, \ldots, t_r$ not containing free variables for $\xi_1, \ldots, \xi_r$ in α, then the value of $\bar{\alpha}$ with arguments $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r$ is the Gödel number of β.

Intuitively we require that for each event-describing sentence, $\phi_{o\iota}n_\iota$ say, (i.e. the concrete object denoted by n_ι exhibits the property expressed by $\phi_{o\iota}$), there shall be an algorithm (depending on **I**, i.e. M^*) to decide the truth or falsity of that sentence. Formally this requirement may be met as follows. By [4] M^* assigns to $\varphi_{o\iota}$ a function φ mapping R_ι into R_0. We shall demand that this function is general recursive in $\tilde{M}^*$ for event-describing sentences. Moreover, an event-describing sentence must clearly be synthetic. We are thus led to

Definition 1

Event $(p; \phi, m)$ stands for $(E\phi_{o\iota}, \bar{n}_\iota)\{p = \phi_{o\iota}n_\iota$. Synth $(p) \cdot$ value $(\bar{n}_\iota, M^*, n) \cdot$ value $(\bar{\phi}_{y\iota}, M^*, \phi) \cdot RF(\phi, \tilde{M}^*)\}$.
Read: p is [the Gödel number of sentence describing] the event determined by ϕ and n.

This example shows the inadequacy of ordinary language for epistemological purposes. The concept of a function recursive relative to an interpretation was crucial in our analysis of empirical meaningfulness. (Intuitively this means that there must be a decision procedure for an empirical question – "is x black?", say, which is completed by observational confrontation.) Though this concept cannot be regarded as mathematically sufficiently defined on account of the indeterminacy still adhering to the *set* of interpretations, our approach gives it heuristic sanction as an extension of effectiveness. How on closer analysis this indeterminacy can be eliminated to render this concept identifiable with a defined class of functions is beyond the scope of this preliminary investigation to decide.

4. Here I shall only be concerned to gain further support for the present heuristic approach by illustrating its efficacy within

the context of some traditional epistemological problems to which speculative argument has been inconclusive. As an example I consider the concept of perception.

I assume the human brain to be represented by a computing machine. Moreover, I abstract from all other physical aspect of a human being as being irrelevant to a formal concept of perception. In other words, I assume that the external data impinge directly on the periphery of the brain. The external data are, therefore, represented by the input fed into the machine. Correspondingly the output represents a certain state of the brain which corresponds uniquely (under a given one-one correspondence) to a mental occurrence.

Definition 2

Brain (x) stands for $(\exists\phi, \psi)\ (Ee_1, e_2, \alpha, \beta)\ \{(r)(s)[<r, s> \in X \subset \subset r = 2^{e_1}3^{\alpha} \cdot s = 2^{e_2}3^{\beta}] \cdot PRF(x) \cdot \mathfrak{Un}_2(x) \cdot (Ep, q)$ [Event $(p; \phi, \alpha) \cdot$ Event $(q; \psi, \beta)] \cdot \{e_1\}^{\tilde{M}*} = \phi \cdot \{e_2\}^{\tilde{M}*} = \psi \cdot \cdot (u)(<u, \alpha> \in \phi \equiv <u, \beta> \in \psi)\}$.

Explanation: A brain x is a computing machine (represented here by the equivalent concept of a partial recursive function). The input and output are given by ordered couples $[e_1, \alpha]$, $[e_2, \beta]$, respectively, such that e_1, e_2 define the functions ϕ, ψ, recursively in $\tilde{M}^*$ and α, β are integers. In other words, $\phi^{\tilde{M}*}$, $\psi^{\tilde{M}*}$ and α, β are the values assigned by M^* to the functional and individual constants, respectively, in two certain event-describing sentences. Thus the couples determine abstractly two events, the former an input and the latter the corresponding output of the machine x. The final clause $(u)(<u, \alpha> \in \phi \equiv <u, \beta> \in \psi)$ expresses the condition that the values of the functions ϕ, ψ for the arguments α, β, respectively are equal, or in other words the events $[e_1, \alpha]$, $[e_2, \beta]$ are either both or neither facts.

Definition 3

Sub (ξ) stands for $(\exists M, x)\ \{\xi = <M, x> \cdot$ Int $(M) \cdot$ Brain $(x)\}$.

Explanation: A subject is abstractly determined by an ordered couple $<M, x>$, where M designates an interpretation of $\mathscr{L}$ and x a brain. Here M, in describing a phenomenological world, represents the mental correlate of the brain functions assigned to ξ.

Definition 4

Men Oc(ξ, z) stands for $(\exists x, M, \psi)\,(Er_i\ s, t, \bar{\theta}_{oi}, \bar{u}_i.\ y)\ \{\text{Sub}\ (\xi)\ \cdot$
$\cdot\ \xi = <M, x>\ \cdot\ <y, r> \in x\ \cdot\ \text{value}\ (z, M, 0)\ \cdot\ z = g(y)\ \cdot$
$\cdot\ z = \overline{\theta_{oi} u_i}\ \cdot\ y = 2^s 3^t\ \cdot\ <0, t> \in \psi\ \cdot\ \{s\}^{\tilde{M}*} = \psi\}$.

Explanation: The number $g(y)$ determines a mental occurrence of the subject $\xi(= <M, x>)$ under the following conditions: the output $y(= 2^s 3^t)$ of x which according to definition 2 determines an event (i.e. a physical state of the brain of ξ) corresponds uniquely to the Gödel number (here the function g stands for an arbitrary but fixed Gödel numbering of $\mathscr{L}$) of a sentence p of $\mathscr{L}$ to which M assigns the value 0.

Intuitively: ξ (implicitly) accepts p as a correct (phenomenological) description of an aspect of his (mental) world. The additional clause

$$(\exists \psi)(Es, t)\ [y \in 2^s 3^t\ \cdot\ <0, t> \in \psi\ \cdot\ \{s\}^{\tilde{M}*} = \psi]$$

expresses the condition that the event determined by y is moreover a fact of the external world (more particularly, an actual physical state of ξ's brain). (See: definition 2).

Definition 5

Perc (ξ, z) stands for $(\exists x, M, \theta)\,(Eh, k, \bar{\theta}_{oi}, \bar{u}_i, y)\ \{\text{Men Oc}\,(\xi, z)\ \cdot$
$\cdot\ \xi = <M, x>\ \cdot\ <y, 2^h 3^k> \in x\ \cdot\ z = g(y)\ \cdot\ z = \overline{\theta_{oi} u_i}\ \cdot$
$\cdot\ \text{Synth}\ (z)\ \cdot\ \text{value}\ (\bar{u}_i, M, k)\ \cdot\ \text{value}\ (\bar{\theta}_{oi}, M, \theta)\ \cdot\ RF(\theta, \tilde{M})\}$.

Explanation: z determines a perception of $\xi(= <M, x>)$ if (i) $z\ (= \overline{\theta_{oi} u_i})$ determines a mental occurrence of ξ, (ii) the function θ assigned by M to "θ_{oi}" is general recursive in $\tilde{M}$, (iii) $\theta_{oi} u_i$ is synthetic (for justification of (ii) and (iii) compare definition 1), (iv) the value assigned by M to the individual constant u_i is identical to the value assigned by M^* to the individual constant occurring in the description of the event corresponding to the input of x. In other words, a necessary condition for a mental occurrence O to be a perception is that O contains the object a that is at the same time contained in the event E which was the cause of O (i.e. E is described by a sentence of the form $\phi_{oi} u_i$, where "u_i" is the name of a and E is the input and O is the mental correlate of the corresponding output), while has subjective status.

As an example of an application of these definitions, I consider the so-called mind-body problem. This problem is (in my under-

standing) concerned with the nature of the relations between mental and physical concepts. For example, let p be the sentence "ξ has a pain in his leg". Now the word "in" which ordinarily suggests a spatial relation clearly does not express a spatial relation in p, and hence remains obscure in ordinary discourse. On the basis of our definitions we are able to provide a formal explication.

Let ξ be a subject, "$\phi_{o\iota}u_\iota$" a sentence (of $\mathscr{L}$) describing the state of the nerve endings (in a region of ξ's leg), and let the sentence "$\theta_{o\iota}u_\iota$" as valued by the interpretation corresponding to ξ express the phenomenological description of ξ's sensation of pain. Then the formal version of p reads

$$(\exists M, x)(E\,\overline{\phi}_{o\iota}, \bar{\theta}_{o\iota}, \bar{u}_\iota, h, k)\{\mathrm{Perc}(\xi, g(y)) \cdot \xi = <M, x> g(y) = =\overline{\theta_{o\iota}u_\iota} \cdot <y, 2^h 3^k> \in x \cdot \{h\}^{\tilde{M}*} = \phi \cdot \mathrm{value}(\overline{\phi}_{o\iota}, M^*, \phi) \cdot \mathrm{value}(\bar{u}_\iota, M^*, k)\}.$$

These examples give some indication that the present approach stands the test of consistent formal development over quite a wide field of epistemology. To that extent the intuitive soundness of the concepts engendered by it, in particular the relativization of recursiveness to interpretations, has received justification, and they may therefore serve as a heuristic basis for detailed extrapolation.

I am indebted to Dr. R. O. Gandy for helpful criticism and comments.

BIBLIOGRAPHY

[1] Kurt Gödel, The consistency of the continuum hypothesis (1940), Princeton (Princeton University Press).

[2] John G. Kemeny, Models of logical systems, Journal of Symbolic Logic, **13** (1948), 16–30.

[3] ————, A new approach to semantics I, Journal of Symbolic Logic, **21** (1956), 1–27.

[4] ————, A new approach to semantics II, Journal of Symbolic Logic, **21** (1956), 149–169.

[5] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics (1952), Amsterdam (North-Holland Publishing Co.).

[6] M. H. Löb, Solution of a problem of Leon Henkin, Journal of Symbolic Logic, **20** (1955), 115–118.

[7] ————, Formal systems of constructive mathematics, Journal of Symbolic Logic, **21** (1956), 63–75.

[8] John R. Myhill, A complete theory of natural, rational, and real numbers, Journal of Symbolic Logic, **15** (1950), 185–196.

ÜBER DIE BEGRIFFE „BEWEIS" UND „DEFINITION"

PAUL LORENZEN
Universität, Kiel

Alles das, was im Thema dieses Kongresses als „konstruktive" Mathematik bezeichnet wird, hat seine bewußten Anfänge schon im vorigen Jahrhundert und läßt sich philosophisch auf die kantische Lehre von der Spontaneität der Vernunft zurückführen. Es ist jetzt wohl an der Zeit, uns zu fragen, warum sich diese konstruktive Auffassung bisher – trotz ihrer grundsätzlichen Richtigkeit, von der wir, die wir hier versammelt sind, ja überzeugt sind – nicht hat durchsetzen können. Im normalen mathematischen Forschungs- und Lehrbetrieb herrscht zur Zeit unbestritten eine "ontologisierende" Auffassung, die sich als axiomatische Mathematik darstellt – und die sich philosophisch gern auf *Platon* beruft.

Ich möchte jedoch nicht annehmen, daß der Widerstand gegen die konstruktive Mathematik tatsächlich daher rührt, daß die meisten Mathematiker willens sind, die platonische Ideenlehre zu verstehen und zu verteidigen.

Einer der größten Widerstände gegen die „konstruktive Mathematik" scheint mir vielmehr eine auf Aristoteles zurückgehende Überlegung zu sein. Aristoteles sagt nämlich, daß ein Beweis stets nur von gewissen Sätzen zu einem anderen führt. Jeder Beweis eines Satzes erfordere daher schon Sätze, die für den Beweis als gültig vorausgesetzt werden müssen. Schließlich müsse also alles Beweisen bei unbewiesenen Sätzen, den Axiomen, anfangen.

Parallel zu dieser klassischen Überlegung verläuft die folgende, die allerdings nicht bei Ar. steht. Jede Definition führt nur von gewissen Begriffen zu einem anderen. Jede Definition eines Begriffs erfordert daher schon Begriffe, die für die Definition als bekannt vorausgesetzt werden müssen. Schließlich muß also alles Definieren bei undefinierten Begriffen, den Grundbegriffen, anfangen.

So lange nicht völlig deutlich gemacht werden kann, was an diesen klassischen Überlegungen falsch ist, inwiefern man nämlich „Beweis" und „Definition" nicht so eng zu fassen braucht, wie das

hier geschehen ist, so lange sind die Aussichten für die konstruktive Mathematik m.E. sehr schlecht. Mit dem Versuch, den Begriffen „Beweis" und „Definition" eine solch weitere Fassung zu geben, werde ich mich im folgenden beschäftigen.

Ich möchte mit den Definitionen beginnen. Hier trifft die klassische Überlegung, nach der man notwendigerweise mit undefinierten Grundbegriffen anfangen müsse, nur auf die sogen. expliziten Definitionen zu. Sind $B_1, \ldots, B_n$ Begriffe – oder, wenn man will, Prädikate –, so liefern die aus den Formeln $x \in B_1$, $x \in B_2, \ldots$ duch Zusammensetzung mit den logischen Partikeln entstehenden Formeln $\mathfrak{A}(x)$ explizite Definitionen weiterer Begriffe. Der Terminus „explizite" Definition ist unglücklich, weil er die Auffassung nahelegt, neben den expliziten Definitionen gäbe es noch „implizite" Definitionen. Das, was man so nennt, verdient m.E. diesen Namen jedoch keineswegs. Ein Axiomensystem $\mathfrak{S}$ mit den Begriffssymbolen $B_1, B_2, \ldots$ für die undefinierten Grundbegriffe definiert zwar die Klasse der Modelle von $\mathfrak{S}$, und also in jedem Modell Begriffe, aber von einer Definition, also einer eindeutigen Festlegung, von Begriffen auch ohne Bezugnahme auf ein Modell kann keine Rede sein. Der Terminus „implizite Definition" scheint mir sehr viel zur Verschleierung dieses Tatbestandes beizutragen.

Eine echte Alternative zu den expliziten Definitionen sind aber die induktiven (oder rekursiven) Definitionen. Ein einfaches Beispiel, wie die induktive Definition der Ordnungsrelation $<$ für die Grundzahlen $|, ||, |||, \ldots$ durch

$$n < n| \tag{1}$$

$$m < n \to m < n| \tag{2}$$

zeigt schon, daß hier die zu definierende Relation nicht auf andere Begriffe zurückgeführt wird. Die Dedekindsche Methode, mit Hilfe der sogen. höheren Prädikatenlogik induktive Definitionen in explizite umzuformen, kann ich hier beiseite lassen. Durch (1)–(2) ist ja jedenfalls festgelegt, wann $m < n$ behauptet werden darf – und diese Festlegung wird durch die Heranziehung der sehr problematischen Klasse aller Relationen nicht im geringsten fester.

Man kann die Definition (1)–(2) auch so auffassen, daß durch sie statt der Relation $<$ zunächst die Klasse der Aussagen $m < n$ induktiv definiert sei. Verallgemeinert man dieses Beispiel, so wird

man statt der Zahlen beliebige Figuren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, ..., die sich aus endlichen vielen Atomfiguren zusammensetzen lassen, betrachten, und aus diesen Figuren – ich will sie die Objekte nennen – mit anderen Atomfiguren weitere Figuren zusammensetzen. Eine induktive Definition einer Relation zwischen den Objekten ist dann nichts anderes als ein Kalkül der folgenden Art:

Aus Variablen $x, y, \ldots$ für die Objekte werden mit gewissen Atomfiguren „Formeln" $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ zusammengesetzt. Einige dieser Formeln werden als „Anfänge" gesetzt und es werden außerdem gewisse „Regeln"

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \rightarrow \mathfrak{a}$$

gesetzt. Die nach diesen Regeln aus den Anfängen ableitbaren variablenfreien Formeln bilden die zu definierende Klasse von Figuren.

Man erhält durch diese induktiven Definitionen ersichtlich genau die (rekursiv-) aufzählbaren Mengen von Figuren. Natürlich kann man auf diese Weise auch induktiv Mengen definieren, indem man schon gewisse Mengen oder Relationen als bekannt voraussetzt, wie man z.B. $\leqslant$ definieren kann durch

$$n \leqslant n \tag{3}$$

$$m < n \rightarrow m \leqslant n. \tag{4}$$

Der wichtige Einbruch in die klassische Definitionslehre besteht aber darin, daß man nicht mit undefinierten Grundbegriffen anfangen muß, sondern daß Systeme von Regeln der Form

$$\mathfrak{a}_1 \in \varrho, \mathfrak{a}_2 \in \varrho, \ldots \rightarrow \mathfrak{a} \in \varrho$$

mit einem Symbol ϱ für die zu definierende Menge – ohne daß weitere Symbole für Mengen auftreten – in der Tat schon eine Menge definieren. Als Bezeichnung für die so induktiv definierte Menge möchte ich

$$|_{\varrho}(\ldots; \mathfrak{a}_1 \in \varrho, \mathfrak{a}_2 \in \varrho, \ldots \rightarrow \mathfrak{a} \in \varrho; \ldots)$$

vorschlagen. In der Klammer hinter $|_{\varrho}$ sind alle Regeln (durch ; getrennt) aufzuführen.

Es ist jetzt zu untersuchen, wie sich diese Möglichkeit von Definitionen, die nicht auf Undefiniertes zurückgreifen, auswirkt auf die Möglichkeit von Beweisen, die nicht auf Unbeweisbares

zurückgreifen. Das Regelsystem einer induktiven Definition ist nichts anderes als ein Kalkül. Die Beweise der Ableitbarkeit einer Figur in einem Kalkül bilden also einen ersten Typ von Beweisen, die auf nichts Unbeweisbares zurückgreifen. Sie greifen ja nur auf die Definition zurück.

Bis hierhin dürfte die Situation unproblematisch sein. Schwierigkeiten stellen sich erst ein, wenn man über die Aussagen des einfachen Typs „die Figur $\mathfrak{a}$ ist ableitbar" hinausgehen will. Als die naheliegendste Möglichkeit zu weiteren Aussagen zu kommen, bietet sich die Zusammensetzung mit den logischen Partikeln an. Die üblichen Partikeln $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\bigwedge_x$, $\bigvee_x$ sind dafür in zwei Klassen einzuteilen. Die erste Klasse wird von $\wedge$, $\vee$ und $\bigvee_x$ gebildet, die zweite Klasse von $\rightarrow$, $\neg$ und $\bigwedge_x$. Damit die Verwendung der Quantoren sinnvoll ist, haben wir angenommen, daß in den Formeln die Variablen x, y, ... als Variable für gewisse Figuren, die Objekte, vorkommen. Für die Partikeln der ersten Klasse ist die Definition der zusammengesetzten Aussagen einfach. Schreiben wir $\vdash \mathfrak{a}$ für „$\mathfrak{a}$ ist ableitbar", so ist

(5) $\vdash \mathfrak{a} \wedge \vdash \mathfrak{b}$ dadurch zu beweisen, daß man $\vdash \mathfrak{a}$ und $\vdash \mathfrak{b}$ beweist,

(6) $\vdash \mathfrak{a} \vee \vdash \mathfrak{b}$ dadurch zu beweisen, daß man $\vdash \mathfrak{a}$ beweist oder $\vdash \mathfrak{b}$ beweist,

(7) $\bigvee_x \vdash \mathfrak{a}(x)$ dadurch zu beweisen, daß man $\vdash \mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ für ein $\mathfrak{x}$ beweist.

Obwohl es hier so aussieht, als ob $\wedge$, $\vee$, $\bigvee_x$ durch die metasprachlichen Partikeln „und, oder, für ein $\mathfrak{x}$" definiert würden, verschwindet dieser Anschein, wenn man statt (5)–(7) den zugrunde gelegten Kalkül durch die Regeln

(5′) $$a, b \rightarrow a \wedge b$$

(6′) $$a \rightarrow a \vee b$$
$$b \rightarrow a \vee b$$

(7′) $$a(\mathfrak{b}) \rightarrow \bigvee_x a(x)$$

erweitert. Hierin sind jetzt a, b, ... Variable für Formeln. In den ursprünglichen Kalkülregeln treten dagegen nur die Variablen x, y, ... auf, deren Variablitätsbereich nicht geändert wird. (Die Darstellung dieser Erweiterungen in meiner „Einführung" § 7 ist in diesem Punkte leider ungenau.)

Die Gleichwertigkeit von (5)–(7) mit (5′)–(7′) zeigt sich darin, daß z.B. eine Aussage $\vdash \mathfrak{a} \vee \vdash \mathfrak{b}$ nach (6) genau dann beweisbar ist, wenn $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$ nach (6′) ableitbar ist. Auf Grund dieses Zusammenhangs kann man sagen, daß die Regeln (5′)–(7′) genau den „Sinn" von $\wedge$, $\vee$, $\bigvee_x$ darstellen. Dieser „Sinn" braucht also nicht durch metasprachliche Mittel dargestellt zu werden.

Es bleiben die Partikeln $\rightarrow$, $\neg$, $\bigvee_x$ zu behandeln. Diese führen zu etwas grundsätzlich anderem. Man könnte versuchen, die Aussage „$\vdash \mathfrak{a} \rightarrow \vdash \mathfrak{b}$" (wenn $\mathfrak{a}$ ableitbar ist, dann ist $\mathfrak{b}$ ableitbar) so zu interpretieren, daß sie genau dann beweisbar sein soll, wenn $\mathfrak{b}$ nach den Regeln des Kalküls aus $\mathfrak{a}$ ableitbar ist, wenn also – wie wir kurz sagen wollen – die Regel $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ ableitbar wäre.

Für den Kalkül (1)–(2) ist aber z.B. die Regel

$$m < n \rightarrow m| < n| \tag{8}$$

nicht ableitbar. Diese Interpretation, die z.B. von Curry vertreten wurde, trifft also nicht den „Sinn" des „wenn – dann", wie es üblicherweise in der Mathematik gebraucht wird. Natürlich heißt das nicht, daß – wie oft behauptet wird – die Mathematik die Implikation $\vdash \mathfrak{a} \rightarrow \vdash \mathfrak{b}$ als faktische Implikation versteht, d.h. als „$\vdash \mathfrak{a}$ falsch oder $\vdash \mathfrak{b}$ wahr". Von faktischer Wahrheit und Falschheit kann bei der Ableitbarkeit von Figuren ja keine Rede sein. Deshalb habe ich vorgeschlagen, als Interpretation von $\vdash \mathfrak{a} \rightarrow \vdash \mathfrak{b}$ die Zulässigkeit der Regel $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ zu nehmen.

Die Regel (8) z.B. ist zulässig in dem Sinne, daß ihre Hinzufügung zum Kalkül (1)–(2) die Klasse der ableitbaren Figuren nicht echt erweitert. Der entscheidende Unterschied dieses Zulässigkeitsbegriffes gegenüber dem Ableitbarkeitsbegriff liegt darin, daß er definiert wird, ohne daß festgelegt wird, wie eine Zulässigkeit zu beweisen ist. Nach der Definition der Zulässigkeit ist nur festgelegt, daß eine Regel $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ als nicht zulässig bewiesen ist, wenn es eine im ursprünglichen Kalkül unableitbare Figur gibt, die mit $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ ableitbar wird. Wir wollen die Zulässigkeit dann widerlegt nennen. Zur Widerlegung der Zulässigkeit einer Regel ist also der Beweis der Unableitbarkeit einer Figur erforderlich. Von der Unableitbarkeit einer Figur wissen wir aber ebenfalls nur, wie man sie widerlegt, nämlich durch eine Ableitung der Figur. Die Situation sieht hoffnungslos verfahren aus. Sie klärt sich jedoch auf, wenn man sich zwei Diskussionspartner vorstellt, die versuchen, sich

gegenseitig zu widerlegen. Wenn jetzt der eine etwa die Zulässigkeit von $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ behauptet, dann muß der Opponent zur Widerlegung eine Formel $\mathfrak{c}$ angeben und diese mit Hilfe von $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ ableiten. Statt der Forderung, der Opponent solle auch die Unableitbarkeit von $\mathfrak{c}$ (ohne $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$) beweisen, verlangen wir jetzt vom Defendenten, daß er die Formel $\mathfrak{c}$ ohne $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ ableiten kann. Nur dann soll der Widerlegungsversuch als gescheitert gelten. Unter einem „Beweis" einer Zulässigkeit wäre demnach etwas zu verstehen, woraus man entnehmen kann, daß alle Widerlegungsversuche scheitern müssen.

Daß die Widerlegungsversuche der Zulässigkeit von (8) z.B. scheitern müssen, heißt, daß diese Regel eliminierbar ist. Hat man $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ für irgendwelche Zahlen abgeleitet, so ist die Ableitung dieser Figur nach (1)–(2) leicht in eine Ableitung von $\mathfrak{m}| < \mathfrak{n}|$ umzuformen: Es ist in jeder Zeile eine Ableitung auf beiden Seiten von $<$ noch $|$ hinzuzufügen. Der „Beweis" der Zulässigkeit wird also durch den Beweis dieser Eliminierbarkeit geleistet: Er ist keine Abfolge von Sätzen, sondern der Beweis ist ein Verfahren zur Elimination. Man muß das Verfahren verstehen lernen – – versteht man es, so hat man damit auch eingesehen, daß es zum Ziele führt, d.h. zur Elimination der als zulässig zu beweisenden Regel. Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob diese Einsicht etwas ist, was zusätzlich zu dem Verstehen des Verfahrens noch hinzukäme. Da ein Verfahren aber nichts ist, was man wie einen äußeren Gegenstand nur zur Kenntnis nimmt, sondern weil man ein Verfahren nur versteht, wenn man es als ein allgemein anwendbares versteht, ist hier die Einsicht unlösbar mit dem Verstehen verbunden.

Das hört sich vielleicht für manchen so an, als ob ein psychologisches Faktum zum Beweis herangezogen werden sollte. Durch psychologische Experimente ist hier aber natürlich gar nichts auszumachen. Die psychologischen Termini kommen nur insofern notwendig herein, weil Ableitungen und Eliminationen menschliche Handlungen sind. Wer eine Behauptung aufstellt, bei der er sich dem Risiko, widerlegt zu werden aussetzt, dem bleibt nichts anderes übrig, als sich darum zu kümmern, woher seine Gewißheit, nicht widerlegt zu werden, stammt – und diese Gewißheit ist nun einmal etwas Psychisches.

Die aristotelische Auffassung vom Beweisen trifft also hier nicht mehr zu, weil die Gewißheit nicht von Sätzen auf Sätze übertragen

wird, sondern weil die Gewißheit mit dem Verstehenlernen von Verfahren erworben wird.

Durch die obige Festlegung der Widerlegbarkeit einer Zulässigkeit bekommt die Zulässigkeit einer Regel den effektiven Sinn der Eliminierbarkeit: Es muß zum Beweis der Zulässigkeit effektiv ein Eliminationsverfahren angegeben werden. Ich möchte hiervon den klassischen Sinn, den man der Zulässigkeit auch geben kann, jetzt schärfer unterscheiden, als dies an manchen Stellen meiner „Einführung" geschehen ist. In der klassischen Auffassung, die gern als „ontologisch" charakterisiert wird, liegt es ja nahe, als Beweis der Zulässigkeit einer Regel die Widerlegung der Existenzbehauptung einer Formel $\mathfrak{c}$ die mit der Regel ableitbar, ohne die Regel aber unableitbar ist, anzusehen. Dieser Unterschied wirkt sich z.B. für die Zulässigkeit des tertium non datur aus. Um diese diskutieren zu können seien zunächst die noch verbliebenen Partikeln $\neg$, $\wedge_x$ mit in die Betrachtung einbezogen. Für die Interpretation der Implikation $\vdash \mathfrak{a} \to \vdash \mathfrak{b}$ haben wir die Regel $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ in Kalkülen betrachtet. Die Kalkülregeln bestehen aber im allgemeinen aus Formeln, die Variable – wir nehmen wieder x, y, ... – enthalten. Dies führt unmittelbar auf eine Interpretation der Generalisation. Die Formel $\wedge_x \vdash \mathfrak{a}(x)$ läßt sich als die Zulässigkeit der Regel $\mathfrak{V} \to \mathfrak{a}(x)$ mit irgend einer ableitbaren Formel $\mathfrak{V}$ und mit x als freier Variablen interpretieren. Wer die effektive Zulässigkeit dieser Regel behauptet, muß ein Verfahren kennen, für jede für x einzusetzende Konstante $\mathfrak{x}$ die Figur $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ abzuleiten.

In der allgemeinen Form der Regeln $\mathfrak{a}(x) \to \mathfrak{b}(x)$ steckt nicht nur die Implikation, sondern auch die Generalisation. Führt man also – wie bei Peano – eine generelle Implikation durch Bindung der Variablen x ein, etwa $\vdash \mathfrak{a}(x) \to_x \vdash \mathfrak{b}(x)$ und interpretiert man diese generelle Implikation durch die Zulässigkeit der Regel $\mathfrak{a}(x) \to \mathfrak{b}(x)$, so erweisen sich $\to$ und $\wedge_x$ als Spezialfälle dieser generellen Implikation. Schließlich läßt sich auch die Negation noch als Spezialfall hiervon gewinnen, wenn man eine unableitbare Formel $\wedge$ auszeichnet und $\neg \vdash \mathfrak{a}$ durch die Zulässigkeit von $\mathfrak{a} \to \wedge$ interpretiert. Weil hier $\wedge$ als unableitbar vorausgesetzt wird, kann eine Widerlegung einer Behauptung $\neg \vdash \mathfrak{a}$ nur durch die Ableitung von $\mathfrak{a}$ geschehen. Die Behauptung von $\neg \vdash \mathfrak{a}$ ist also mit der Behauptung der Unableitbarkeit von $\mathfrak{a}$ gleichwertig.

Nach dem Bisherigen erhält man alle logischen Partikeln, wenn

man einerseits die besprochenen Regeln für $\wedge$, $\vee$, $\bigvee_x$ einführt, andererseits die generelle Implikation hinzunimmt und d.h. daß man die zunächst metasprachlichen Regeln als objektsprachliche Formeln mit Hilfe der Zulässigkeit interpretiert. Während für Behauptungen, die mit $\wedge$, $\vee$, $\bigvee_x$ zusammengesetzt sind, festgelegt ist, wie ein Beweis zu führen ist, ist für die generellen Implikationen zunächst nur festgelegt, wann der Defendent als widerlegt betrachtet werden soll. Für die effektive Zulässigkeit einer generellen Implikation wird dann aber genauer gefordert, daß zu ihrem Beweis ein Eliminationsverfahren angegeben werden muß. Der Fall der Negation spielt dabei eine Sonderrolle. Hier kann von einem Eliminationsverfahren im wörtlichen Sinne nicht die Rede sein. Wenn $\mathfrak{a} \to \wedge$ als zulässig behauptet wird, so darf in keiner Ableitung diese Regel wirklich gebraucht werden – sonst wäre ja $\mathfrak{a}$ ableitbar. Hier kann man zu Beweisen nur dadurch kommen, daß man die Unableitbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch die gestaltliche Ungleichheit von $\mathfrak{a}$ mit allen ableitbaren Figuren ersetzt. Das ist wieder eine generelle Behauptung und daher durch Angabe von Verfahren zu beweisen. Allerdings müssen Regeln zur Feststellung von Gleichheiten und Ungleichheiten mit einbezogen werden.

Nachdem so festgelegt ist, wie die Zusammensetzung von Aussagen des Typs $\vdash \mathfrak{a}$ mit den logischen Partikeln zu beweisen sind, können diese Zusammensetzungen iteriert werden. Z.B. ist $\vdash \mathfrak{a} \vee \neg \vdash \mathfrak{a}$ dadurch zu beweisen, daß $\vdash \mathfrak{a}$ oder $\neg \vdash \mathfrak{a}$ bewiesen wird. Das tertium non datur, das als logisches Prinzip besagt, daß die Aussageform $\vdash \mathfrak{a} \vee \neg \vdash \mathfrak{a}$ für jedes $\mathfrak{a}$ beweisbar sei, kann nicht im effektiven Sinn behauptet werden: der Defendent müßte für jeden vom Opponenten genannten Kalkül und jede von ihm genannte Figur $\mathfrak{a}$ sonst $\vdash \mathfrak{a}$ oder $\neg \vdash \mathfrak{a}$ beweisen. Dies kann aber bekanntlich niemand. Daß andererseits die Annahme der Existenz eines Kalküls und einer Figur $\mathfrak{a}$, für die $\mathfrak{a}$ unableitbar und $\mathfrak{a} \to \wedge$ unzulässig ist, sofort zum Widerspruch führt, heißt, daß das tertium non datur im klassischen Sinne zulässig ist. Entwickelt man zuerst auf der Grundlage der effektiven Interpretation die Logik als die Theorie der in beliebigen Kalkülen zulässigen Aussageformen, so läuft die klassische Interpretation hier darauf hinaus, $a \vee b$ durch $\neg . \neg a \wedge \neg b.$ zu ersetzen. Die Zurückführung der klassischen Logik auf die effektive Logik ist ja aber ein längst gelöstes Problem.

Wir haben damit die Möglichkeit erörtert, neben den Aussagen $\vdash \mathfrak{a}$, die durch induktive Definitionen eingeführt waren, auch die Zusammensetzungen solcher Aussagen mit logischen Partikeln zu beweisen – immer ohne auf Unbeweisbares zurückzugreifen. Beide Prozesse lassen sich iterieren: mit den zusammengesetzten Aussagen kann man neue induktive Definitionen aufstellen. Es müssen aber dann Einschränkungen wie die Fundiertheitsforderung in meiner „Einführung" gemacht werden. Ich möchte darauf nicht mehr eingehen, da es mir hier nur auf die grandsätzlichen Einwendungen ankam, die gegenüber der klassischen Beweis- und Definitionslehre gemacht werden können.

ON VARIOUS DEGREES OF CONSTRUCTIVISM

ANDRZEJ MOSTOWSKI

University of Warsaw

Most mathematicians look with some suspicion at the analysis of the fundamental notions of mathematics. They find this analysis not interesting and rather futile. Such an analysis, however, is necessary for everyone who takes an interest in the philosophy of mathematics. Moreover, the history of modern mathematics makes it obvious that at least some results of this analysis may be of decisive influence on the development of various branches of mathematics.

Each analysis of general notions – whether mathematical or not mathematical – presupposes always some philosophical assumptions which may be either idealistic (in the platonic sense of the word) or nominalistic. The constructivistic trends in the foundations of mathematics are nearer to the nominalistic philosophy and I would even venture to say that they represent the nominalistic trend in the foundations of mathematics. This nominalistic character of constructivism is evident from the fact that its representants do not accept the general concepts of mathematics (numbers, sets, functions etc.) as given, but try to construct them, i.e., to define them in a way which is specific for a given constructivistic trend. This leads to the result that one can identify mathematical concepts with their definitions.

In spite of the deep difference between the basic assumptions of constructivistic and classical (i.e. platonic) trends, there are branches of mathematics in which theories, based on both assumptions, lead to entirely equivalent results. This is the case, e.g., for arithmetic of integers, whose classical foundation is given by Frege's theory, and constructivistic, e.g., by the recent theory of Lorenzen [11] in which an integer is identified with a symbol consisting of consecutive strokes. Both theories are mathematically equivalent. From the philosophical point of view the constructivistic theory is even more satisfactory than the classical one because it enables us to develop arithmetic without assuming the existence

of actually infinite sets, an assumption indispensable in the classical theory.

One should not think that the constructivistic arithmetic of integers allows us to get rid altogether of the abstract notions of sets and functions. We are forced to reintroduce them as soon as we come to a description of the process of counting. Indeed, counting consists in establishing a one-one relation between the counted objects and numbers. If the counted objects are symbols themselves, we can express the relation between them and the numbers again by means of certain symbols without departing from the nominalistic attitude; this is the approach described by LORENZEN [11]. No such device is possible if we want to count non-linguistic objects. For this reason it seems to me that even the constructivists must admit the existence of some abstract entities if not in pure mathematics, then necessarily in the description of procedures of applied mathematics. I shall not dwell longer upon this subject as it does not seem a very important one and lies outside the topics we are concerned with.

Besides arithmetic of integers, arithmetic of rationals and arithmetic of algebraic numbers can also be satisfactorily reconstructed on a nominalistic basis. Theories obtained in this way are equivalent to the classical ones. From the historical point of view particularly interesting is the theory (due to Kronecker) of algebraic numbers, as it had exerted an essential influence on the creation of modern abstract algebra. This is one of the examples which show the influence of philosophy of mathematics on mathematics itself.

The essential difference between the constructivistic and the classical approach comes to light in theories whose universes are (classically) non-denumerable. To these theories belong, first, arithmetic of real numbers, analysis (i.e., the theory of arbitrary functions of real numbers), and set theory. One cannot expect here that classical theories will coincide with the constructivistic ones. Since symbols are (classically) denumerable, no theory which identifies real numbers, functions or sets with symbols can be equivalent to the classical theory.

In what follows I shall describe some theories connected with the constructivistic foundation of arithmetic of real numbers and, in a less systematic way, with the foundation of analysis and

set theory. My conception of constructivism will be as naive as possible and will consist in the following. I shall consider theories of real numbers and real functions in which not arbitrary real numbers or real functions are considered but only numbers or functions which belong to a certain class specified in advance. According to the choice of this class, we shall obtain different theories of arithmetic and of analysis. Our choices of the initial class will not be arbitrary: we shall try to make the choice so that the elements of the chosen class satisfy certain conditions of calculability or effectivity. We shall start with stringent conditions and then loosen them gradually and we shall see that it is possible in this way to systematise a good deal of older and also of more recent work of constructivists. I shall pay no attention to the way in which the classes just mentioned are defined and shall impose no limitations on methods of proof acceptable in dealing with numbers or functions belonging to these classes. This naive approach to constructivism is certainly objectionable from the constructivistic point of view. It does not represent a constructivistic development of a branch of mathematics but gives merely a glance on constructivism, so to say, from outside. The value (if any) of such an approach I see in the possibility of reviewing on a common background several of the simplest constructivistic conceptions; but more refined ones and especially those which, like intuitionism, impose restrictions on methods of proof must necessarily be excluded from such a review.

In order to avoid repetitions I shall enumerate here all classes which I shall need later. I denote by Π_k^0 and Σ_k^0 the arithmetical classes, i.e., classes consisting of sets

$$\hat{n}(+x_1)(-x_2)\ldots(\pm x_k)R(n, x_1, \ldots, x_k) \text{ or}$$
$$\hat{n}(-x_1)(+x_2)\ldots(\mp x_k)R(n, x_1, \ldots, x_k),$$

where R is a recursive relation, $(+x_i)$ and $(-x_1)$ are general and existential quantifiers whose ranges are integers and "n" is a variable which runs over integers or finite sequences of integers. The sequence of classes Π_k^0, Σ_k^0 can be extended into the constructive transfinite, i.e., defined for values of k which denote ordinals $< \omega_1$. I omit here an exact definition of these "hyperarithmetical" classes (it can be found, e.g., in [6] and [16]) and mention only that Π_ω^0 and Σ_ω^0 are both identical with the set theoretical union

of classes Π_k^0 (or Σ_k^0) for $k<\omega$. I shall further denote by Π_k^1 and Σ_k^1 the k-th analytical classes of KLEENE [6], i.e., classes of sets

$$\hat{n}(+\varphi_1)(-\varphi_2)\ldots(\pm\varphi_k)(\mp x)R(n, \bar{\varphi}_1(x), \ldots, \bar{\varphi}_k(x),$$
$$\hat{n}(-\varphi_1)(+\varphi_2)\ldots(\mp\varphi_k)(\pm x)R(n, \bar{\varphi}_1(x), \ldots, \bar{\varphi}_k(x),$$

where $(\pm\varphi)$ are quantifiers, whose range are number theoretic functions. The intersection $\Pi^1 \cap \Sigma^1$ was shown by KLEENE [7] to be identical with the set-theoretical union of all hyperarithmetical classes.

Besides these classes, I shall also consider classes whose elements are subsets of the Euclidean line or space with a finite number of dimensions. F_α and G_α will denote the multiplicative and additive Borel classes and P_k and C_k the projective classes of Lusin.

The same symbols Π_k^i, Σ_k^i, F_α, G_α, P_k, C_k will be used to denote the classes of functions whose graphs belong to the classes defined above.

Having thus fixed the basic terms let us proceed to a discussion of real number arithmetic.

Let K be an arbitrary class of number theoretic functions. With every such class we associate a class $\mathbf{K}$ of real numbers a which for every n satisfy the inequality $||a-[a]|-f(n)/n|<1/n$, where f is a fixed function from K. Choosing appropriately the initial class K we can obtain classes $\mathbf{K}$ satisfying certain general theses of constructivism.

Taking $K=\Pi_0^0=\Sigma_0^0$ we obtain the class $\mathbf{K}_0$ of recursive real numbers. This is the largest class of reals whose approximations can be calculated by means of algorithms. It is therefore a very natural domain of constructivistic researches (cf. [14], [22]). I don't need to mention the results of these researches as they will be discussed by Dr. Grzegorczyk. I want, however, to discuss the problem, whether the class $\mathbf{K}_0$ can be defined in a finitary way and first I shall explain in what consists the importance of this problem.

Even among the strongest supporters of constructivism we do not find mathematicians who would deny the existence of potentially infinite sets. Whoever denies their existence deprives himself of the right of repeating one and the same algorithmic operation an unlimited number of times. Most radical constructivists would certainly like to exclude all actually infinite sets and work only

with potentially infinite ones. Viewed from such a radical standpoint, all elements of $\mathbf{K}_0$ are certainly admissible since they can be computed to any desired degree of accuracy by repeating sufficiently many times one and the same algorithmic procedure. We ask now, whether the whole class $\mathbf{K}_0$ is admissible in the same sense? The answer is certainly negative because we have defined the class $\mathbf{K}_0$ by means of the notion of a general recursive function; in our definition occurs thus an unlimited quantifier ranging over integers. The same remains true if we use other definitions of the class $\mathbf{K}_0$. It is known for instance [17] that $a \in \mathbf{K}_0$ if, and only if, there exist primitive recursive functions f, g, h such that $|a-[a]-f(n)/g(n)|<1/h(n)$ where $h(n)\leqslant h(n+1)$ and $h(n)\to\infty$. The notion of a primitive recursive function is finitary but the condition $h(n)\to\infty$ cannot be formulated without using at least 2 quantifiers ranging over integers [13].

Thus, we are necessarily led to the problem of characterizing the simplest definition of a general recursive function. No final answer is known but the following results give partial solutions: (a) let F_p be the standard universal function for recursively enumerable sets ($F_p=\hat{n}(Exy)\{T_1^1(p, x, y)\ \&\ [n=U\ (\mu y)T_1^1[(p, x, y)]\}$); then the set $\hat{p}[F_p\in\Pi_0^0]$ is in Σ_3^0 but not in Π_3^0; (b) the class of recursive functions is definable in the form $\hat{f}(Ex)(y)(Ez)R^f(x, y, z)$, where R^f is a relation recursive in f, but it is not definable either in the form $\hat{f}(x)(Ey)S^f(x, y)$, nor in the form $\hat{f}(Ex)(y)T^f(x, y)$, where S^f, T^f are recursive in f.

Theorem (b) was obtained as a corollary from (a) by Addison. Theorem (a) is based on the following Lemma, whose proof is due to Ehrenfeucht: There exists a primitive recursive function $f(x, y)$ such that the sets $Z_y=\{f(1, y), f(2, y), \ldots\}$ are non-increasing, recursive, and satisfy the condition that for an arbitrary (not necessarily recursive) function φ the set $\hat{n}(Exy)[(y<\varphi(x))\ \&\ (n=f(x, y))]$ is non recursive.

These results show that the notions of general recursive sets and functions are essentially infinitary. The radical constructivist who wants to eliminate actual infinity from mathematics is therefore entitled to deal with every of elements of $\mathbf{K}_0$ separately but not with their totality. This situation is typical also for other less restrictive constructivistic theses as we shall see below.

Now, let us consider classes $\mathbf{K}_\alpha$ of reals corresponding to the classes $\Pi^0_\alpha \cap \Sigma^0_\alpha$ of number theoretic functions. If we repeat for $\alpha > 0$ proofs devised by MAZUR [5] for the case $\alpha = 0$ we infer that each $\mathbf{K}_\alpha$ is a real closed field. If $a = \Sigma_n f(n)/10^n$ is an irrational number of $\mathbf{K}_\alpha$ such that the function f is recursive in no function $g \in \Pi^0_\beta$, then a is not in $\mathbf{K}_\beta$. It follows that the fields $\mathbf{K}_\alpha$ and $\mathbf{K}_\beta$ are distinct for $\beta <_0 \alpha$.

Some properties of fields $\mathbf{K}_\alpha$ depend on the character of the ordinal denoted by the symbol α. I shall give an example of such a property. Let us call a sequence $\{a_k\}$ $(0 < a_k < 1)$ of real numbers in $\mathbf{K}$ an i-recursive sequence $(i = 1, 2, 3, 4)$ if there exist functions f_i in K such that (1) $|a_k - f_1(n, k)/n| < 1/n$ for each n and k, (2) $a_k = \Sigma_n f_2(n, k)/10^n$ and $0 \leqslant f_2(n, k) < 10$ for each n and k, (3) $\{p/q < a_k\} \equiv \equiv \{f_3(p, q, k) = 0\}$, (4) $\{p/q > a_k\} \equiv \{f_4(p, q, k) = 0\}$ for each p, q, k. If $\mathbf{K} = \mathbf{K}_\alpha$ and α is a symbol for a limit number, then all these properties are equivalent because every f_i can be elementarily defined in terms of an arbitrary other f_j. If α is a symbol for an ordinal of first kind, then we have implications going only in one direction

$$(1) \rightarrow (2) \begin{matrix} \nearrow (3) \\ \searrow (4) \end{matrix}.$$

To construct suitable counter-examples for implications going in the opposite directions we use disjoint sets of class Σ^0_α which are non-separable by means of $\Pi^0_\alpha \cap \Sigma^0_\alpha$-sets [18]. A detailed proof for $\alpha = 0$ is given in [19].

From all possible classes $\mathbf{K}_\alpha$ the most interesting is the class $\mathbf{K}_\omega$. It is easy to see that it consists of all elementarily definable numbers, i.e., coincides with the universe of the constructive analysis of HERMANN WEYL [26]. Numbers of $\mathbf{K}_\omega$ are just those numbers which would be accepted by a constructivist who, while not excluding all infinite sets, would nevertheless require that all such sets be reducible to the set of integers. Similarly, as in the former case of class $\mathbf{K}_0$, the class $\mathbf{K}_\omega$ is not definable by the sole reference to the set of integers [24].

Thus, though each separate number is acceptable for our constructivist, the totality of them is not.

Before discussing further classes $\mathbf{K}$ I shall make a digression concerning an axiomatic theory of class $\mathbf{K}_\omega$.

It is well known that there exists a fairly natural mapping of irrationals a $(0<a<1)$ onto number theoretic functions

$$a \rightleftarrows \frac{1}{|f(1)} + \frac{1}{|f(2)} + \dots$$

and, hence, onto infinite sets of integers. We let correspond finite sets of integers to rational numbers and thus we obtain a correspondence between real numbers of the interval $0<a<1$ and sets of integers. The 4 arithmetical species as well as certain simple functions (e.g., $\sin \alpha$) correspond to operations on sets definable by means of the set-theoretical relation $\in$ and logical notions alone. Conversely, the relation $\in$ corresponds to a relation between reals definable by means of the 4 species and the notion of an integer. As Ryll–Nardzewski remarked, we can eliminate the latter notion in favour of suitable transcendental functions, e.g. $[x]$ or $\sin x$. (It would be interesting to obtain a characterization of functions which can be used for this purpose and to check whether, e.g. e^x is such a function).

It follows from these remarks that each axiomatic system for a fragmentary set theory in which we speak exclusively of integers and their sets determines an axiomatic system for arithmetic of real numbers whose primitive notions are the 4 species and the set of integers (or one of the functions $[x]$, $\sin x$).

Let us consider, in particular, the axiomatic system (S) for our fragmentary set-theory in which we make the same assumptions concerning sets of integers as in the well-known axiomatic system of Bernays [2] are assumed for the so called classes. Let (A) be the corresponding axiomatic system for arithmetic. It turns out that the class $\mathbf{K}_\omega$ of elementarily definable numbers constitutes (together with the ordinary arithmetical operations) a model for the system (A). Among models of (A) whose integers are isomorphic with the ordinary integers, model $\mathbf{K}_\omega$ is the smallest (i.e., it is contained in any other model). Thus, we see that the part of Bernays' axiomatic system of set theory which deals with construction of classes represents an axiomatization of a constructivistic (elementarily definable) notion of a set.

The following theorems give more ample informations about relations between the system (A) and its minimal model $\mathbf{K}_\omega$. All theorems of (A) are obviously true in $\mathbf{K}_\omega$. The converse

theorem is, in general, false. For formulae $(Ea)F(a)$, where $F(a)$ is a formula all bound variables of which run over integers, the following result can be inferred from OREY's theorem [20]: if a formula of this form is true in $\mathbf{K}_\omega$, then it can be proved from the axioms (A) by means of the so called Carnap rule.

I shall still mention some meta-mathematical theorems concerning the system (S). Let us assume that all axioms are open formulas (this can always be achieved by introduction of suitable constants and axioms into the system).

Using Herbrand's theorem we can show that, if a formula $F(X)$ contains no quantifiers whose range are sets, and if the formula $(EX)F(X)$ is provable in (S), then there exist finitely many elementary formulas (i.e., formulas without set variables) $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ such that the formula $F(\hat{x}A_1(x)) \vee \ldots \vee F(\hat{x}A_n(x))$ is provable in (S). The minimal number n of formulas $A_,(x)$ is, in general, greater than 1. As an application we obtain that the comprehension axiom $(EX)(x)[x \in X \equiv G(x)]$, is provable in (S) if, and only if, there are elementary formulas $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ such that the formula

$$(x)[G(x) \equiv A_1(x)] \vee \ldots \vee (x)[G(x) \equiv A_n(x)]$$

is provable in (S). This gives us an idea of the difference between (S) and the classical (impredicative) set theory in which the comprehension axiom is assumed for arbitrary $G(x)$.

The above theorems show that existential statements in (S) are effective. No similar theorems hold for general statements. One can show that there exist formulas $F(X)$ without bound set variables such that $F(\hat{x}A(x))$ is provable in (S) for every elementary formula $A(x)$ but at the same time the general statement $(X)F(X)$ is not provable in (S). This phenomenon is similar to the ω-incompleteness of arithmetic. It may be added that it does not disappear upon extension of the fragment of arithmetic lying at the base of (S) to a complete system.

After these remarks I shall resume my review of various classes $\mathbf{K}$ which can be taken as a basis for the constructivistic mathematics.

As far as I know, none of the classes $\mathbf{K}_\alpha$ with $\alpha >_0 \omega$ was considered as a natural basis for any such mathematics. It seems that the class $\mathbf{K}$ with $K = \Pi^1_1 \cap \Sigma^1_1$ (the class of hyperarithmetic numbers) might represent an interesting and fairly natural domain. The

hension axiom $(EX)(x)[x \in X \equiv G(x)]$ is satisfied in K; this is equivalent to the problem, whether all the axioms of classical arithmetic are satisfied in **K**.

It can easily be shown that the comprehension axiom does not hold in K if there exists an universal function for K definable with respect to K, i.e., a function $\Phi(n)$ such that 1^0 $X \in K \equiv (En)[X = \Phi(n)]$ and 2^0 the formula $m \in \Phi(n)$ can be written by means of logical and set-theoretical notions, in such a way that all its set variables range over K. This simple criterion enables us to show that in none of the previously considered classes Π^0_0, Π^0_ω, $\Pi^1_1 \cap \Sigma^1_1$ is the comprehension axiom satisfied. For the hyperarithmetic case this result follows from the theorem (due to Addison, Grzegorczyk, and Kuznecov) stating that each hyperarithmetical function is representable in the form $\mathscr{U}((\iota\psi)_{\Pi^1_1 \cap \Sigma^1_1} \mathscr{E}(\psi))$, where $\mathscr{U}$ is a recursive functional and $\mathscr{E}$ an elementary property satisfied by exactly one function.

The general recursive, elementarily definable, and hyperarithmetical systems are thus essentially different from the classical arithmetic: if we take any of them as a basis for mathematics we must abandon some classical principles. This result which, of course, is not at all surprising suggests immediately the problem of finding as simple a model as possible for the classical axioms of arithmetic or of set theory. If such a model could be defined by constructivistic means we would have a constructivistic justification of the classical system. (Models which we here have in mind are absolute for integers, i.e., their integers are isomorphic with the ordinary ones.)

One way of constructing models for the classical system uses Gödel's theory of constructible sets. Both the classes of all constructible sets of integers and the class K'_Ω corresponding to the class $\mathbf{K}'_\Omega$ defined above are examples of such models. Using the theorem of Löwenheim–Skolem we obtain from these models new models which are denumerable. A further discussion shows that there exist denumerable ordinals λ such that $\mathbf{K}'_\lambda$ is a model for classical arithmetic. Of course, this does not provide for constructive justification of the classical system since λ is defined by non-constructive means.

Another way of constructing models of classical systems stems directly from the completeness theorem as modified by Orey [20]. One can show that the model K obtained in this way for the

classical set theory is contained in $\Pi^1_2 \cap \Sigma^1_2$ and definable in both forms

$$\hat{X}(\varphi)(E\psi)(x)R^X(\bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)) \text{ and } \hat{X}(E\varphi)(\psi)(Ex)\,S^X(\bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x))$$

with R^X and S^X recursive in X. I don't know, whether this form is the simplest one which one can obtain for a model of classical set-theory. The following theorem shows, however, that we cannot expect a very simple form: If $K = \{X_1, X_2, \ldots\}$ is a denumerable model for the classical set theory and

$$X_n = \{\xi(n, 1), \xi(n, 2), \ldots\},$$

then the function ξ is not in Π^1_1. Thus, the elements of a denumerable model cannot be enumerated by means of a Π^1_1-function.

Thus far we have considered only arithmetic of numbers. In the rest of this speech I shall deal with some topics concerning constructivistic foundations of analysis and set theory. Instead of attempting a systemating exposition of this highly developed and difficult subject, I shall limit myself to a comparison of modern tendencies in this field with the older ideas of the French semi-intuitionistic school.

The starting point of the new theories is invariably the set of integers. All other notions are derived by definitions from this fundamental notion. In particular, the notion of a real number is not taken as granted but introduced in this way into the theory. Real functions are defined not everywhere but only on the constructivistic continuum. In older theories one took the notion of a real number as intuitively clear and did not analyze this notion. Limitations were imposed only on real functions which, however, were defined on the whole line.

The new theories go deeper in the matter than the older ones as they start with a simpler basic notion. It is striking, however, that both the old and the new theories develop along parallel lines: in the new theories we have a classification of sets of integers into arithmetical and analytical hierarchies and in the old theories the classification of sets of reals into Borel and projective hierarchies. The analogy between these pairs of notions was discovered by ADDISON in his thesis [1]; it goes much deeper than the analogies between arithmetic and projective hierarchies which I have stated in [15].

The following examples illustrate the analogies:

(1a) A set which is recursively enumerable together with its complement is recursive (POST [21], KLEENE [5]).

(1b) A set (contained in the Baire zerospace) which is open together with its complement is a union of a finite number of intervals.

(2a) A set which belongs to Σ_1^1 together with its complement is hyper-arithmetic (KLEENE [8]).

(2b) A set which is analytic together with its complement is Borelian (LUSIN, see [12]).

(3a) Each set X in Π_1^1 is representable as the union $\cup C_\alpha$ where α runs over denotations of constructive ordinals and the relation $n \in C_\alpha$ is recursive (KLEENE [7]).

(3b) Each analytic complement X is representable as the union $\cup C_\alpha$ where α runs over well orderings of integers and the relation $a \in C_\alpha$ is Borelian (LUSIN [12]).

It is not yet clear how far these analogies go and whether there exists one general theory which contains as its particular cases the theory of arithmetic and analytic sets on one side and the theory of Borel and projective sets on the other. There are theorems concerning projective sets of which satisfactory translations to the theory of analytic classes of Kleene are not known. An example of such a theorem is furnished by the theorem of LUSIN–SIERPIŃSKI [23] according to which analytic complements are representable as unions of $\aleph_1$ Borel sets.

A particularly striking example of parallelism between the old and new theories is given by a series of theorems known as separation theorems. These theorems discovered first by LUSIN [12] have permitted him to solve great many problems concerning Borel and projective sets. Similar theorems for arithmetic and analytic hierarchies are of paramount importance in modern researches on recursive sets and their generalizations.

An example of application of these theorems was mentioned above in connection with i-recursive sequences. I shall mention another example which has found interesting applications in metamathematics.

Let K be a class of sets such that if $X \in K$, then $-X \in K$ and also $f^{-1}(X) \in K$ for each general recursive function f. Let us call a pair A, B of two disjoint sets of K weakly universal for K if for every set X in K there exists a primitive recursive function Θ such that $X = \Theta^{-1}(A)$ and $-X = \Theta^{-1}(B)$. Sets forming a weakly

universal pair are not separable by means of sets which belong to K together with their complements. Indeed, assume that there is a set X_0 such that $A \subset X_0 \in K$ and $B \subset -X_0 \in K$. Let $\Theta_n(x)$ be a general recursive function universal for primitive recursive functions and put $X = \hat{n}[\Theta_n(n) \in - X_0]$. It follows that $X \in K$; hence, $X = \Theta_q^{-1}(A)$, $-X = \Theta_q^{-1}(B)$ for suitable q. From these formulas we infer that $x \in X \equiv \Theta_q(x) \in A \supset \Theta_q(x) \in X_0$ and $x \operatorname{non} \in X \equiv \equiv \Theta_q(x) \in B \supset \Theta_q(x) \operatorname{non} \in X_0$ whence $x \in X \equiv \Theta_q(x) \in X_0$. Putting here $x = q$ and observing that $q \in X \equiv \Theta_q(q) \operatorname{non} \in X_0$ we obtain a contradiction.

It can be easily shown that one obtains a weakly universal pair for the class Σ_1^0 (of recursively enumerable sets) by taking for as A and B sets of (Gödel numbers of) provable resp. disprovable sentences of Peano arithmetic. This proves the essential undecidability of this arithmetic. Other applications of weakly universal pairs are given in [4].

In former considerations concerning the notion of effectivity an important role was played by the notion of definable sets or functions [10], [25]. A mathematical object a is definable, if there exists a formula F with one free variable such that a is the unique object which satisfies this formula in the absolute model, i.e., in the model containing all objects whose types occur among the types of the variables of F. The notion of definability is essentially impredicative, similarly as the notion of analytic sets of Kleene: in the formula F which defines a may occur quantifiers whose range contains a. This impredicativity is responsible for the fact that arithmetic or analysis based on the notion of definable numbers or functions would not correspond to any constructive thesis.

The relations between the notion of definability and Kleene's analytical classes are also evident from the remark that the union $D = \bigcup_n \Sigma_n^1$ coincides with the class of sets which are definable by means of formulas all of whose variables have types $\leqslant 1$.

Assuming the axiom of constructibility we can show that D is a model for the classical (impredicative) theory of sets of integers, i.e., that the comprehension axiom is true in D. It follows that axioms of classical arithmetic are true in D. Similar results hold also for the class of definable sets of higher types. In order to prove these results we remark that if $F(X_1, \ldots, X_k)$ is any formula and

$F_D(X_1, \ldots, X_k)$ is obtained from F by a relativization of all quantifiers to D, then the formula

$$(5) \qquad X_1, \ldots, X_k \in D \supset [F(X_1, \ldots, X_k) \equiv F_D(X_1, \ldots, X_k)]$$

is true. The proof proceeds by induction on the number of logical connectives and quantifiers contained in F and uses the fact that if $\prec$ is a definable well ordering of constructible sets, then the earliest (with respect to $\prec$) set X_1 satisfying the condition $F(X_1, \ldots, X_k)$ is definable, provided $X_2, \ldots, X_k \in D$.

The above theorems provide us with simple examples of denumerable models of the classical set theory. They can also be used to establish the existence of models K'_λ (see p. 185). At the same time these theorems confirm the impredicative character of the class D.

In order to avoid misunderstanding let us observe that mathematicians who have introduced the notion of definability did by no means want to take it as a basis for a new constructivistic foundation of mathematics. They were interested in existential statements of the form $(EX)F(X)$ and inquired, whether they can be strengthened to statements of the form $(EX)[(X \in D) \,\&\, F(X)]$ (if they had a constructivistic tendency they would have aimed at statements of the form $(EX)[(X \in D) \,\&\, F_D(X)]$, where the meaning of the index D is the same as above). Using the terminology of KREISEL [9] we can say that the problem which these mathematicians faced was to determine, whether definable sets constitute a basis for all existential statements. If we assume the axiom of constructibility, then a positive answer to that problem follows immediately from (5); probably it would be extremely difficult to answer this problem without assuming the axiom of constructibility.

To finish this review of older problems and ideas I shall devote a few words to the axiom of choice. 50 years ago this axiom played a prominent role in discussions on effectivity in mathematics. There were even mathematicians who defined a proof as effective if it does not use the axiom of choice. In the modern research the axiom of choice seems to have lost its central role: constructivists of today take scarcely any notice of it. It is, of course, rejected by them but along with it many other axioms of the classical theory are rejected too, because they are found guilty of not conforming with constructivistic principles. In particular, the axiom of exten-

sionality which states the existence of an element in the symmetric difference $(X-Y) \cup (Y-X)$ of any two different sets is clearly non-constructive because it gives no method of constructing this element. It appears probable, although very difficult to prove, that there exist definable sets X, Y of real numbers such that $(X-Y) \cup (Y-X)$ contains no definable element.

It is doubtful at present, whether one can give any precise meaning to the notion of a "set whose existence can be proved without the axiom of choice" and we must state that works on constructivistic basis did not bring us nearer to a solution of the now burning problem of independence of the axiom of choice. Curiously enough, the theory of constructible sets obtained by Gödel by an extension into transfinite of the constructivistic ramified theory of types has resulted in a complete solution of the consistency problem of this axiom.

I want to conclude with some purely subjective remarks on constructivism in general. Its most promising feature is that it wants to inquire into the nature of mathematical entities and to find a justification for the general laws which govern them, whereas platonism takes these laws as granted without any further discussion. The general aim of constructivism seemed therefore always very attractive to me. The solutions proposed by constructivists are, however, by far not so attractive. It is most disturbing that to one question we do not get one answer but a multitude of them. This is a natural result of the existence of a multitude of constructivistic programmes some of which we described in this paper. In my opinion there are no compelling reasons to accept any of these programmes as definite and to reject all the others. I do not see, for instance, in what should consist a superiority of recursive analysis over the ramified type theory. Notions which were created in the course of constructivistic discussions of the foundations of mathematics (like, e.g., the notion of a recursive number of computable functionals) are, of course, interesting and deserving study quite independently of the philosophical programme of constructivism, just as the notion of Borel sets which is important for every mathematician quite independently of his sharing or not sharing the philosophical theses of half-intuitionists. But as far as a philosophical program is concerned, I am of the opinion that one should try to develop a philosophical analysis of the classical

foundations of mathematics. If we do not limit this analysis to pure mathematics only, but take into account its applications, then it is not at all impossible that we shall finally reach a more satisfactory theory than the various constructivistic trends have been able to produce thus far.

BIBLIOGRAPHY

[1] J. W. Addison (jr), Analogies in the Borel, Lusin and Kleene hierarchies. Thesis; University of Michigan 1955.

[2] P. Bernays, A system of axiomatic set-theory, part I. The Journal of Symbolic Logic, 2 (1937), 65–77.

[3] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set-theory. Annals of Mathematics Studies, N^0 3, Princeton 1940.

[4] A. Grzegorczyk, A. Mostowski, Cz. Ryll–Nardzewski, The classical and the ω-complete arithmetic. To appear.

[5] S. C. Kleene, Recursive predicates and quantifiers. Transactions of the American Mathematical Society, **53** (1943), 41–73.

[6] ————, Arithmetical predicates and function quantifiers. Ibidem, **79** (1955), 312–340.

[7] ————, On the form of predicates in the theory of constructive ordinals (second paper). American Journal of Mathematics, **77** (1955), 405–428.

[8] ————, Hierarchies of number theoretic predicates. Bulletin of the American Mathematical Society, **61** (1955), 193–213.

[9] G. Kreisel, A variant to Hilbert's theory of the foundation of arithmetic. The British Journal for the philosophy of science, **4** (1953), 107–129.

[10] K. Kuratowski, Topologie I. Monografie Matematyczne N^0 3, second edition, Warszawa 1948.

[11] P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **78**, Berlin 1955.

[12] N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Collection des monographies sur la théorie des fonctions (Collection Borel), Paris 1930.

[13] W. Markwald, Zur Eigenschaft primitiv-rekursiver Funktionen, unendlich viele Werte anzunehmen. Fundamenta Mathematicae, **42** (1955), 166–167.

[14] S. Mazur, Computable analysis. To appear.

[15] A. Mostowski, On definable sets of positive integers. Fundamenta Mathematicae, **34** (1946), 81–112.

[16] ————, A classification of logical systems. Studia Philosophica, **4** (1951), 231–274.

[17] ————, A lemma concerning recursive functions and its applications. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, **1** (1953), 277–280.

[18] ————, Contributions to the theory of definable sets and functions. Fundamenta Mathematicae, **42** (1955), 271–275.

[19] ————, On computable sequences. Ibidem, **45** (1957), 37–51.

[20] S. Orey, On ω-consistency and related properties. The Journal of Symbolic Logic, **21** (1956), 246–253.

[21] E. L. Post, Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bulletin of the American Mathematical Society, **50** (1944), 284–316.

[22] H. G. Rice, Recursive real numbers. Proceedings of the American Mathematical Society, **5** (1954), 784–791.

[23] W. Sierpiński, Sur une propriété des ensembles (A). Fundamenta Mathematicae, **8** (1926), 362–369.

[24] A. Tarski, Der Wahrheitsbegriff in formalisierten Sprachen. Studia Philosophica, **1** (1935), 261–405.

[25] ————, Sur les ensembles définissables des nombres réels I. Fundamenta Mathematicae, **17** (1931), 210–239.

[26] H. Weyl, Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Leipzig 1918.

FINITELY REPRESENTABLE FUNCTIONS [1])

JOHN MYHILL
Department of Philosophy, University of California

I want you to consider a formalism of an apparently trivial kind. It contains symbols for constant non-negative integers, 0, 1, 2 etc., but no variables. It also contains one functional constant f, constructed as denoting a number-theoretic function. Terms are built up from f and the numerals in the usual way; thus

$$f(5)$$

and

$$fff(17)$$

are terms. The atomic formulas are identities between terms, and the other formulas are formed from these by the connectives of the propositional calculus. An example of a formula is

$$(f(7)=f(5)\ \&\ f(10)\neq 0) \rightarrow f(3)=ff(3).$$

Such formulas assert finitely testable properties of the function denoted by f; that is, if values of f are coming in on a tape, and we are given a formula such as the above, we can in a finite number of steps, and using only a finite number of values of f, determine whether that formula is true or false. For this reason I call such formulas *finite formulas*.

You might be inclined to think that they are *so* finite that you can do with them practically nothing that is worth doing. Of course, with a *single* such formula one can say practically nothing, but axiomatizable *systems* of such formulas have a surprisingly great expressive power. It is my purpose in this paper to determine as far as I can how far this power extends.

The motivation behind this is to explicate the notion of 'function which can be effectively given'. A function which can be described

[1]) The composition of this paper was partly financed by National Science Foundation Grant G–3466. The author wishes to record his gratitude to the Foundation.

uniquely by an axiomatizable system of these finite formulas, has a claim to be considered effectively given, or *finitely representable* as I shall say, even if it cannot be effectively computed.

The phrase 'described uniquely by an axiomatizable system' turns out to lead us very rapidly to the quicksands of 'non-standard models'. To avoid getting lost in this notoriously treacherous area, it is wise to be a bit pedantic at the beginning about the semantics of these formulas.

I take it as obvious what is meant by saying that a *number-theoretic* function ϕ satisfies a finite formula. Intuitively it means that the formula comes out true if we interpret the letter f as denoting the function ϕ, and accord the usual interpretation to the numerals, the identity sign and the connectives of the propositional calculus. Formally we can define satisfaction of a finite formula by a number-theoretic function in a well-known inductive manner; and satisfaction of a set of formulas is defined simply as simultaneous satisfaction of each formula belonging to the set.

However, it is not sufficient to consider only satisfaction by *number-theoretic* functions. For there are many sets of finite formulas which are satisfiable by some function but not by any number-theoretic function. For example, consider the set whose members are

$$f(0) \neq 0$$
$$f(0) \neq 1$$
$$f(0) \neq 2$$
$$\vdots$$

and so on, $f(0) \neq \mathfrak{k}$ for every k. This is clearly not satisfied by any number-theoretic function, but it is satisfied by any function which has as value for the argument 0 some object which is not a number.

The definition of satisfaction is so brief that it is as well to forestall any possible misunderstanding by stating it in detail.

Let ϕ be any function defined at least on the natural numbers. ϕ induces a mapping $\mathfrak{v}_\phi$, called a valuation, on the set of terms. $\mathfrak{v}_\phi$ is defined inductively as follows.

If $\mathfrak{n}$ is the numeral which denotes the integer n $\mathfrak{v}_\phi(\mathfrak{n}) = n$.

$$\mathfrak{v}_\phi(f(\mathfrak{t})) = \phi(\mathfrak{v}_\phi(\mathfrak{t}))$$

ϕ *satisfies* an identity $t_1 = t_2$ just in case $\mathfrak{v}_\phi(t_1) = \mathfrak{v}_\phi(t_2)$.

It is obvious how the propositional connectives are to be dealt with.

ϕ is called a *model* of a set Σ of finite formulas if ϕ satisfies each formula belonging to Σ; however it simplifies matters if we identify two models ϕ_1 and ϕ_2 when $\mathfrak{v}_{\phi_1} = \mathfrak{v}_{\phi_2}$.

Finally, ϕ is called a *standard model* of Σ if for every term $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{v}_\phi(\mathfrak{t})$ is a number. Intuitively a model is standard if it assigns a number as denotation to every term. Obviously the set of formulas $f(0) \neq \mathfrak{k}$ mentioned above has models, but none of them are standard.

Now I want to set up axioms and rules of inference in such a manner that a completeness theorem can be proved. As axioms, take the axioms of the propositional calculus and the identity calculus, together with every formula

$$\mathfrak{n}_1 \neq \mathfrak{n}_2,$$

$\mathfrak{n}_1$ and $\mathfrak{n}_2$ being distinct numerals; as sole rule of inference, take *modus ponens*. The notions of consistency, completeness, axiomatizability, (deductive) system etc. can now all be defined in familiar fashion; and we have the

Theorem 1. (Completeness theorem for finite formulas). If a set of (finite) formulas is consistent, it has a model.

It follows from the above example ($f(0) \neq \mathfrak{k}$ for every k) that a consistent set of formulas does not necessarily possess a *standard* model.

I will not give the proof of the completeness theorem, since it is entirely routine.

A system is called *categorical* if it has exactly one *standard* model. Concerning categoricity we have the simple but important

Theorem 2. (A) If a system is categorical and has no non-standard models, it is complete. (B) If in addition it is axiomatizable, then it is decidable and the unique function which satisfies it is recursive.

Proofs. Ad A. The system, call it Σ, has only one standard model and no non-standard ones; thus it has exactly one model. Suppose there were a formula $\mathfrak{A}$ such that neither $\mathfrak{A}$ nor $\neg\mathfrak{A}$ belonged to Σ. Then neither $\mathfrak{A}$ nor $\neg\mathfrak{A}$ would be deducible from formulas belonging to Σ, since Σ is a (deductively closed) system. Then each of the sets of formulas $\Sigma + \{\mathfrak{A}\}$, $\Sigma + \{\neg\mathfrak{A}\}$ would be consistent

and so by the completeness theorem each would have a model. There would thus be two distinct models of Σ; contradiction.

Ad B. Let Σ be categorical (hence consistent) and have no non-standard models, and let it furthermore be axiomatizable. Then by A it is complete, that is for each formula $\mathfrak{A}$ either $\mathfrak{A}$ or $\neg\mathfrak{A}$ belongs to Σ; and by consistency only one of the two does. But since Σ is axiomatizable, it is a recursively enumerable set of formulas, and in order to find out of any formula $\mathfrak{A}$ whether or not it is in Σ we have merely to generate the formulas of Σ till either the formula $\mathfrak{A}$ or the formula $\neg\mathfrak{A}$ appears. Thus Σ is decidable.

Let now m be any integer, and consider all the formulas $f(\mathfrak{m})=\mathfrak{n}$. For each n, exactly one of the formulas $f(\mathfrak{m})=\mathfrak{n}$, $f(\mathfrak{m})\neq\mathfrak{n}$ is in Σ (by completeness). If $f(\mathfrak{m})=\mathfrak{n}$ were in Σ for *no* n, Σ would either be inconsistent or possess a non-standard model; if $f(\mathfrak{m})=\mathfrak{n}$ were in Σ for *more than one* n, again Σ would be inconsistent. Hence for each integer m there is *exactly one* n for which $f(\mathfrak{m})=\mathfrak{n}$ is in Σ. This n can be effectively found from m by merely generating Σ until the formula appears; thus f must be construed as denoting a recursive function.

It is therefore uninteresting to define finitely representable functions as those which form the unique model of some axiomatizable system of finite formulas. On the other hand, the situation becomes very different if we define them as those which form the unique *standard* model of such a system; and it was with this development in mind that I defined categoricity as I did. Formally we make the

Definition 1. A number-theoretic function ϕ is called *finitely representable* if there is an axiomatizable system Σ of finite formulas, such that ϕ is the unique *standard* model of Σ.

For the investigation of finitely representable functions, we shall find it convenient to consider a certain class of formulas with the happy property of banishing non-standard interpretations from the systems in which they appear. Concerning those, we introduce a definition and a theorem.

Definition 2. A (finite) formula is called *n-bounding* if it has the form

$$f(\mathfrak{n})=\mathfrak{a}_0 \vee f(\mathfrak{n})=\mathfrak{a}_1 \vee \ldots \vee f(\mathfrak{n})=\mathfrak{a}_k$$

$\mathfrak{a}_0 \ldots, \mathfrak{a}_k$ being numerals.

Theorem 3. If Σ is a system containing for each n at least one n-bounding formula, then every model of Σ is standard.

Proof. For each number n, $f(\mathfrak{n})$ must be construed as denoting one of the numbers a_0 or a_1 or ... or a_k in any interpretation which makes the n-bounding formula true. Thus the term $f(\mathfrak{n})$ must be construed as denoting a natural number; by induction, the same is true for all other terms and so there are only standard models.

Corollary. If Σ is categorical and contains for each n at least one n-bounding formula, it is complete.

Proof by Theorem 3 and Theorem 2(A).

With these preliminaries out of the way, we can proceed to give several alternative characterizations of finitely representable functions. Recall the definition; a function is finitely representable if constitutes the unique *standard* model of some (categorical) axiomatizable system of finite formulas; equivalently, if it is the unique *number-theoretic* function satisfying all the formulas belonging to such a system.

The most important thing about a finite formula is that it contains no variables; thus it refers to only finitely many values of the function denoted by f, and given access to any required finite number of values of that function, we can decide whether the formula is true or false. This is why I call them finite formulas.

Let now Σ be a categorical, axiomatizable system and ϕ the unique number-theoretic function which satisfies it. Let ϕ' be any number-theoretic function whose values are coming in on a tape. Then if ϕ' is different from ϕ, there is some formula of Σ which is not satisfied by ϕ'; but we can effectively find when this is the case, by generating all formulas belonging to Σ and plugging in the finite number of values of ϕ' required to compute the truth-value of each. Thus, for any ϕ' different from ϕ, we can assure ourselves in a finite number of steps that ϕ' is *not* the function satisfying Σ. If on the other hand ϕ' *is* the function ϕ satisfying Σ, the search for a formula of Σ invalidated by the given values of ϕ' will never terminate. Let, for each function ϕ' different from ϕ, $n=n(\phi')$ be a number such that some formula of Σ is invalidated using only values of ϕ' for arguments $\leqslant n$. Observing firstly that there always is such a number, secondly that it can be effectively found, and thirdly that $\phi'(x)\neq\phi(x)$ for some $x\leqslant n(\phi')$ we have the

Theorem 4. Let ϕ be finitely representable. Then there is an effective process which, when applied to any $\phi' \neq \phi$, yields a number n such that $\phi'(x) \neq \phi(x)$ for some $x \leqslant n$, but which, when applied to ϕ itself, does not terminate.

The intuitive idea of "effective process" in this Theorem can of course be made precise by referring to partial recursive functionals.

But the converse of Theorem 4 is also easily seen to be true. Suppose that an effective process is given, of the kind described in the Theorem; we may regard this process as incorporated in a Turing machine equipped with a buzzer, such that if successive values of ϕ are fed into $\mathbf{M}_1$, the buzzer will never buzz; but if successive values of any other function are fed in, it will buzz after receiving a finite number of such values. Generate now all sequences

$$(x_0, \ldots, x_k)$$

which elicit a buzz from $\mathbf{M}_1$; it can be readily verified that ϕ is the unique number-theoretic function satisfying all the formulas

$$f(0) = \mathfrak{x}_0 \;\&\; f(1) = \mathfrak{x}_1 \;\&\; \ldots \;\&\; f(\mathfrak{n}-1) = \mathfrak{x}_{n-1} \rightarrow f(\mathfrak{n}) \neq \mathfrak{x}_n.$$

This is a recursively enumerable, hence axiomatizable set of finite formulas; hence ϕ is finitely representable and we have the

Theorem 5 (=Theorem 4 with a converse). A number-theoretic function ϕ is finitely representable if and only if there exists a partial recursive functional Ω_1 such that $\Omega_1\phi$ is undefined, while for each (everywhere-defined) function $\phi' \neq \phi$, $\Omega_1\phi'$ is a number n such that

$$(\exists x \leqslant n)\,(\phi'(x) \neq \phi(x)).$$

A formula

$$f(0) = \mathfrak{x}_0 \;\&\; f(1) = \mathfrak{x}_1 \;\&\; \ldots \;\&\; f(\mathfrak{n}-1) = \mathfrak{x}_{n-1} \rightarrow f(\mathfrak{n}) \neq \mathfrak{x}_n$$

(or $f(0) \neq \mathfrak{x}_0$ in case $n=0$) is called a *normal formula*. Now if ϕ is finitely representable, there exists a Turing machine $\mathbf{M}_1$ with the properties described above; but then we saw that there exists a recursively enumerable set Σ of normal formulas such that ϕ is the unique number-theoretic function satisfying all the formulas belonging to Σ. We have thus proved the

Theorem 6. For each categorical axiomatizable system Σ, there exists (and incidentally, can be effectively found) a recursively

enumerable set Σ^* of normal formulas such that Σ is satisfied by the same (unique) number-theoretic function which satisfies Σ^*.

To establish another equivalent for the notion of finite representability, let ϕ be a finitely representable function and Σ the system whose unique standard model it is. Suppose we are given, on a tape, successive values $\chi(0), \chi(1), \chi(2), \ldots$ of some function χ what *majorizes* ϕ i.e. which is such that

$$\chi(x) \geqslant \phi(x) \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots).$$

We claim that we can now compute every value of ϕ. For let the values coming in on the tape be

$$\begin{aligned} \chi(0) &= x_0 \\ \chi(1) &= x_1 \\ \chi(2) &= x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

and so on. As each value $\chi(n) = x_n$ comes in, write down the formula

$$\mathfrak{A}_n : \phi(\mathfrak{n}) = 0 \vee \phi(\mathfrak{n}) = 1 \vee \ldots \vee \phi(\mathfrak{n}) = \mathfrak{x}_n.$$

Note that the formulas $\mathfrak{A}_n$ are true and n-bounding. Generate now all formulas deducible from the formulas $\mathfrak{A}_n$ and the axioms of Σ. Recall the Corollary to Theorem 3; if a system is categorical and contains for each integer n an n-bounding formula, it is complete. The system $\Sigma + \{\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots\}$ certainly satisfies the hypothesis of this Corollary; hence it is complete and every true statement $\phi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}$ is deducible in a finite number of steps from the $\mathfrak{A}_n$ and the axioms of Σ. We thus have

Theorem 7. Let ϕ be finitely representable. Then there exists an effective process which, when applied to any function χ which majorizes ϕ, yields successively all the values of ϕ.

In terms of partial recursive functionals, there is a partial recursive functional Ω_2 such that $\Omega_2\chi = \phi$ wherever χ majorizes ϕ. (Henceforth we write '$\chi \geqslant \phi$' for 'χ majorizes ϕ').

Corollary. Every bounded finitely representable function is recursive.

For the converse, we again imagine the partial recursive functional Ω_2 incorporated in a Turing machine $\mathbf{M}_2$ with the property that, if $\phi' \geqslant \phi$, and if the values $\phi'(0), \phi'(1), \phi'(2), \ldots$ are successively

fed into $\mathbf{M}_2$, there will eventually appear on the tape of $\mathbf{M}_2$ all true (and no false) statements of the form $\phi(\mathfrak{p})=\mathfrak{q}$.

The behaviour of $\mathbf{M}_2$ can be described by a *table* by which I mean (not the machine-table in the usual sense, but) a two-column table containing in its first column finite sequences of numbers which are supposed to be fed into $\mathbf{M}_2$, and in its second column whatever entry (if any) is made on the tape of $\mathbf{M}_2$ beginning the instant after the feeding-in of the sequence is completed. (We can certainly arrange that the machine $\mathbf{M}_2$ will never start printing in the *middle* of a number's being fed in). Thus a typical row (the ith) of the table of $\mathbf{M}_2$ would look like this:

$$\mathfrak{x}_{i0}, \mathfrak{x}_{i1}, \cdots \mathfrak{x}_{ik_i} \mid \phi(\mathfrak{m}_i)=\mathfrak{n}_i.$$

And this is to be read: "If the values $\mathfrak{x}_{i0}, \mathfrak{x}_{i1}, \cdots \mathfrak{x}_{ik_i}$ are fed successively into $\mathbf{M}_2$, the entry $\phi(\mathfrak{m}_i)=\mathfrak{n}_i$ will begin to be inscribed on the tape of $\mathbf{M}_2$ beginning the instant after the feeding-in of x_{ik_i} is completed." Now I want you to notice three things.

Firstly (I) each of the statements

$$\mathfrak{B}_i\colon\ (\forall\chi)\left[\begin{array}{c}\chi\geqslant\phi\ \&\ \chi(0)=\mathfrak{x}_{i0}\ \&\ \cdots\ \&\ \chi(\mathfrak{k}_i)=\mathfrak{x}_{ik_i}\\ \rightarrow\\ \phi(\mathfrak{m}_i)=\mathfrak{n}_i\end{array}\right]$$

is true. For if it were not, there would be a function $\chi\geqslant\phi$ such that, if $\mathbf{M}_2$ were fed with a sufficiently large number of values of χ, it would print an incorrect value of ϕ. And there is no such χ; this is part of what we mean by saying that $\mathbf{M}_2$ reduces ϕ to every $\chi\geqslant\phi$.

Secondly, let p be any number and χ any function which majorizes ϕ. Then there is a row in the table of $\mathbf{M}_2$ which contains an initial segment of values of χ in its first column, and a correct evaluation of $\phi(p)$ in its second column. For if there were no such row we would never be able to evaluate $\phi(p)$ by using $\mathbf{M}_2$ on the sequence of inputs $\{\chi(i)\}$. And that we always are able so to evaluate $\phi(p)$ is the rest of what we mean by saying $\mathbf{M}_2$ reduces ϕ to χ.

Consequently, (II) *for each number p and each function $\chi\geqslant\phi$, there is a $\mathfrak{B}_i$ with $m_i=p$ and with true antecedent for that particular χ and hence with true consequent.*

Finally, the set of all rows of the table for $\mathbf{M}_2$, and consequently

(III) the set of all formulas $\mathfrak{B}_i$ is recursively enumerable. For $\mathbf{M}_2$ is a *Turing* machine, and the set of its responses to all possible inputs can be effectively generated.

By (I), ϕ satisfies all these formulas $\mathfrak{B}_i$. Further I claim that no other number-theoretic function does so. For let ϕ' be any number-theoretic function which satisfies all the $\mathfrak{B}_i$, and let p be any number. Let χ^* majorize both ϕ and ϕ'. By (II) there is a $\mathfrak{B}_i$ of the form

$$(\mathcal{F}\chi) \quad \left[\begin{array}{c} \chi \geqslant \phi \ \& \ \chi(0) = \mathfrak{x}_{i0} \ \& \ \ldots \ \& \ \chi(\mathfrak{k}_i) = \mathfrak{x}_{ik_i} \\ \rightarrow \\ \phi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q} \end{array} \right]$$

which has a true antecedent for $\chi = \chi^*$ and hence a true consequent. Hence $\phi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. But by hypothesis ϕ' satisfies this $\mathfrak{A}_i$. Since the antecedent is true for $\chi = \chi^*$, we have $\phi'(p) = q = \phi(p)$. But this happens for *every* p and hence $\phi' = \phi$, so that ϕ is the only function satisfying all the $\mathfrak{B}_i$.

Let us state exactly what has been proved so far. *If ϕ is a number-theoretic function, and if Ω_2 is a partial recursive functional such that*

$$\chi \geqslant \phi \rightarrow \Omega_2(\chi) = \phi,$$

then there is a set of formulas of the form $\mathfrak{B}_i$ such that ϕ is the only number-theoretic function which satisfies them all. Further (by III above) *this set of formulas is recursively enumerable.*

But to each formula $\mathfrak{B}_i$ the following formula is equivalent from the point of view of satisfaction.

$$\mathfrak{C}_i : \phi(0) \leqslant \mathfrak{x}_{i0} \ \& \ \ldots \ \& \ \phi(\mathfrak{k}_i) \leqslant \mathfrak{x}_{ik_i} \rightarrow \phi(\mathfrak{m}_i) = \mathfrak{n}_i.$$

Hence ϕ is the unique number-theoretic function satisfying all the formulas $\mathfrak{C}_i$. But these constitute a recursively enumerable and so axiomatizable set; and by writing each of the inequalities which they contain as a disjunction of equations, they can all be converted into equivalent finite formulas. Hence ϕ is finitely representable, and we have the

Theorem 8 = (Theorem 7 with a converse). A number-theoretic function ϕ is finitely representable if and only if there exists a partial recursive functional Ω_2 such that

$$\chi \geqslant \phi \rightarrow \Omega_2\chi = \phi.$$

Every recursive function is obviously finitely representable; also I showed before (Theorem 7, Corollary) that every bounded finitely representable function was recursive. By contraposition, no bounded non-recursive function is finitely representable; in particular, the characteristic function of a recursively enumerable but non-recursive set is not finitely representable. So we have the unsurprising

Theorem 9. Not every arithmetically definable function is finitely representable.

On the other hand, finitely representable functions extend far beyond recursive functions. Indeed, I can give an example of a finitely representable function which is not even arithmetically definable.

I shall assume familiarity with the nations of 'prenex normal form' and 'elementary arithmetical sentence'. Let $\{\mathfrak{A}_i\}$ be an effective enumeration of elementary arithmetical sentences in prenex normal form. Define an integer-valued function $\varrho(\mathfrak{A}_i)$, called the *realization-number* of $\mathfrak{A}_i$, as follows:

I. If $\mathfrak{A}_i$ is without variables, or if it is true and its first quantifier is universal, or if it is false and its first quantifier is existential, then $\varrho(\mathfrak{A}_i)=0$.

II. If $\mathfrak{A}_i$ is true and its first quantifier is existential, then $\varrho(\mathfrak{A}_i)$ is $x+1$, where x is the least example of $\mathfrak{A}_i$, i.e. the least x such that $\mathfrak{B}(x)$, where $\mathfrak{A}_i$ is $(\exists x)\mathfrak{B}(x)$. And if $\mathfrak{A}_i$ is false and its first quantifier is universal, then $\varrho(\mathfrak{A}_i)$ is $x+1$, where x is the least counter-example of $\mathfrak{A}_i$, i.e. the least x such that $\neg\mathfrak{B}(x)$, where $\mathfrak{A}_i$ is $(\forall x)\mathfrak{B}(x)$.

I claim that if $\varrho(i)=\varrho(\mathfrak{A}_i)$, then firstly, every arithmetically definable set is one-one reducible to the predicate $\varrho(x)=y$, and secondly, ϱ is finitely representable.

For let $\mathfrak{A}$ be any elementary arithmetical sentence. We can effectively find a number n such that $\mathfrak{A}$ is logically equivalent to $\mathfrak{A}_n$, and such that $\mathfrak{A}_n$ begins with a universal quantifier. Then

$$\mathfrak{A} \text{ is true } \leftrightarrow \varrho(n)=0.$$

Hence the set of all (Gödel-numbers of) true elementary arithmetical sentences, and a fortiori every arithmetically definable set, is one-one reducible to the predicate $\varrho(x)=y$. Hence also that predicate is not itself arithmetically definable. Observe also that statements

beginning with an existential as well as with a universal quantifier can be decided when their realization-number is known.

To show that the function ϱ is finitely representable, it will suffice by Theorem 8 to prove that ϱ is uniformly recursive in every function that majorizes it. Let $\sigma \geqslant \varrho$, and let the numbers $\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \ldots$ be coming in on a tape; we show how to compute $\varrho(x)$ for any number x, or what comes to the same thing, $\varrho(\mathfrak{A})$ for any formula $\mathfrak{A}$ in prenex normal form.

Observe that the numbers $\sigma(i)$ which are coming in give us bounds on the size of the smallest examples of existential statements, and the smallest counter-examples of universal ones. Let then a formula $\mathfrak{A}_i$ be given, and suppose first that it begins with a universal quantifier, say $\mathfrak{A}_i$ is $(\forall x)\mathfrak{B}(x)$. $\sigma(i)$, which we can obtain simply by waiting for it to come in on the tape, will give us a bound on the size of counter-examples, thus

$$[(\forall x)\mathfrak{B}(x)] \vee (\exists x < \sigma(\mathfrak{i}))\, \neg\mathfrak{B}(x)$$

is true. Hence if we can only ascertain the truth or falsity of each of the statements

$$\mathfrak{B}(0), \mathfrak{B}(1), \ldots, \mathfrak{B}(\sigma(\mathfrak{i})-1)$$

we can find whether $\mathfrak{A}_i$, that is $(\forall x)\mathfrak{B}(x)$, is true or false, and in the latter case we can determine the value of its smallest counter-example. Matters proceed exactly dually in case $\mathfrak{A}_i$ begins with an existential quantifier. Thus we have established that provided we are given as many values as we need of $\sigma \geqslant \varrho$, the problem of determining the realization-number of any formula is reducible to the problem of determining the truth-value of a finite-number of formulas with fewer quantifiers. But by a previous remark, this latter problem is reducible to the problem of determining *their* realization-numbers. Since every prenex formula begins with only finitely many quantifiers, the process must eventually stop. Hence ϱ is recursive uniformly in every $\sigma \geqslant \varrho$, and we have the

Theorem 10. There exists a finitely representable function ϱ such that every arithmetically definable set is one-one reducible to the predicate $\varrho(x) = y$.

Corollary. Of the family of arithmetically definable functions and the family of finitely representable functions, neither is included in the other (Cf. Theorem 9).

Let us now switch our attention from the hierarchy of arithmetical formulas in prenex normal form to the Kleene hierarchy of predicates

$$(1) \qquad (\forall x_1)(\exists x_2) \ldots T_n(e, x_1, \ldots x_n, y)$$

$$(2) \qquad (\exists x_1)(\forall x_2) \ldots T_n(e, x_1, \ldots x_n, y)$$

where the dots denote a string of n alternating quantifiers, and where the T_i are certain fixed primitive recursive predicates. The set of all predicates $\mathfrak{P}(y)$ expressible in the form (1) will be denoted by Π_n; the set of those expressible in the form (2) by Σ_n.

Exactly as above we can define realization-numbers restricted to an initial segment of the Kleene hierarchy. Specifically let $\{\mathfrak{A}_i^{(n)}\}$ be an enumeration of all formulas (1) beginning with a universal quantifier and having n quantifiers altogether, and also of all formulas (1) and (2) with less than n quantifiers. (We are of course considering *closed* formulas in which e and y are replaced by particular constants). Let us define realization-numbers

$$\varrho_n(i) = \varrho_n(\mathfrak{A}_i^{(n)})$$

exactly as we did above. Then using exactly the same argument we can establish that the every predicate expressible in the form Π_n is one-one reducible to the predicate $\varrho_n(x) = y$. Finally by simply writing out the definition of $\varrho_n(x) = y$, we find that this predicate itself belongs to the step Π_n.

Thus we have the

Theorem 11. For $n = 1, 2, 3, \ldots$; There exists a finitely representable function ϱ_n such that the predicate $\varrho_n(x) = y$ belongs to the step Π_n of the Kleene hierarchy and such that further, it is a *complete predicate* of the step Π_n, that is, every predicate of that step is one-one reducible to it.

If in this theorem we replace 'Π_n' by 'Σ_n' we obtain a false statement, for the simple reason that if a predicate $\phi(x) = y$ can be written in the n-quantifier form with existence first, it can also by a very little quantifier-juggling be written in the n-quantifier form with a universal quantifier first, and so cannot be a complete predicate of the step Π_n. The reason behind this asymmetry is that an existential statement is true just in case its realization-number is *not* zero, so that to dualize theorem 11, we would have to write '$\varrho_n(x) \neq y$' for '$\varrho_n(x) = y$' as well as Σ for Π.

After the first draft of this paper was completed, I encountered in a paper by KUZNECOV and TRAHTENBROT [1] the following theorem. Let ϕ be a number-theoretic function such that $\{\phi\}$ is effectively closed in Baire space. Then there is a partial recursive functional Ω such that $\Omega\phi' = \phi$ if $\phi' \geqslant \phi$, and conversely.

Time prevents me from defining the phrase 'effectively closed in Baire space'; I must refer you to [1]. The point is simply that here were my finitely representable functions again in an unexpected place. Actually it is very easy to give a direct proof of the equivalence of finite representability and effective closure, using my Theorem 5. We thus have an entirely independent proof for the theorem of Kuznevoc and Trahtenbrot.

You may be sure that I scanned their paper anxiously to see if any of my result had been anticipated. They also had some constructions of effectively closed functions of high degree of undecidability, analogous to my Theorems 10 and 11. I was not displeased by the fact that my theorems were just a bit stronger than theirs. What gave me much more pleasure however was that from two entirely independent starting-points – they from topological recursion theory, and I from a desire to clarify the notion of 'function which can be effectively given' – we had arrived at precisely the same class of number-theoretic functions. For when different investigators with different startingpoints find themselves led to consider the same mathematical notion, there is reason to suppose that that notion may be of some intrinsic importance.

BIBLIOGRAPHY

[1] A. V. KUZNECOV and B. A. TRAHTENBROT, Investigation of partially recursive operators by means of the theory of Baire Space. Dokl. Akad. Nauk. SSSR. (N.S.), **105** (1955), 897–900.

NEGATION AND SEPARATION OF CONCEPTS IN CONSTRUCTIVE SYSTEMS

D. NELSON

Department of Mathematics, The George Washington University, Washington D.C.

1. Introduction

The meaning of falsity and the meaning of the negation of a statement or predicate pose problems if we wish an empirical characterization of truth.

In general, an experimental verification of a statement consists of an operation followed by an observation of a property. Supposing that we have carried out the operation, we may plausibly suppose further that there are two mutually exclusive and exhaustive possibilities: either we observe the property or we do not. However, if we have not observed the property, there remains an ambiguous situation insofar as the truth of the statement is concerned. The failure to observe the property may be significant of the falsity of the statement or may merely be an indication of some deficiency on the part of the observer. The situation is involved in even greater ambiguity if we have not carried out the operation.

In view of this ambiguity, it might be maintained that every significant observation must be an observation of some property, and further that the absence of a property P if it may be established empirically at all, must be established by the observation of (another) property N which is taken as a token for the absence of P.

The way N is chosen in general seems to be a complicated matter. Observation is made in a framework of theory and under assumptions. Actually one of the serious difficulties with many accounts of the relation of mathematics to experience is an oversimplification of the actual process of construction and observation in mathematics. The intuitionistic contention that mathematics may be carried on independently of logic or language is possibly a case in point. In this matter the significists (VAN DANTZIG [2], [3],

MANNOURY [13], DE JONGH [10]) while in basic agreement on the importance of the experiential foundations of mathematics have offered criticism of the intuitionist accounts of what those experiential foundations amount to.

The procedure of choosing a token N for the absence of a property P, insofar as it is empirically grounded, involves an element of difficulty if we wish to preserve the conventional logical principles concerning negation. The situation insofar as the principle of excluded middle is concerned has been much discussed following the initial criticism of BROUWER [1]. However, there are apparent difficulties here also with the principle of non-contradiction if we choose the token N for the absence of P on the basis of empirically not knowing of any instances of their occurring together, which appears to be the ultimate situation insofar as an appeal to direct experience is concerned.

Actually if we are sufficiently tolerant of the entities which we consider in mathematics, we know that contradictions may arise; the Russell Class is a case in point.

In both the intuitionistic and classical logic all contradictions are equivalent. This makes it impossible to consider such entities at all in mathematics. It is not clear to me that such a radical position regarding contradiction is necessary. I feel that it may be possible to conceive a logic which does more justice to the uncertainty of the empirical situation insofar as negation is concerned. The intuitionistic logic takes cognizance of the inadequacy of classical logic as a logic of what is experientially known insofar as the principle of excluded middle is concerned; however, I believe regarding other negation principles it maintains what might be called an idealistic position.

Both FREUDENTHAL [4] and GRISS [6] have criticised the constructive interpretation of intuitionistic negation statements. Replies to these criticisms are contained in HEYTING's work [7], [8], [9]. The remarks seem to point to a symbolic or ideal constructive content in relation to the basic entities of the mathematical theory.

GRISS has argued [6] that we cannot have a clear conception of A if a false statement is deducible from it, or to put it another way, we cannot clearly understand an assumption which later turns out to be in error. If we do not think of deducibility in at

least a partially conventional or symbolic fashion, I believe the Griss criticsim is a just one.

Griss goes further in denying the existence of null predicates. If such predicates must be defined in terms of intuitionistic negation, then this position is, of course, a consequence of the one we have just mentioned. It is my own opinion that falsity and negation may be conceived in an alternate constructive fashion, and in this way the exclusion of all null predicates would not appear necessary even if we should wish to avoid the ideal features of intuitionistic negation.

I believe that both the Freudenthal and Griss criticisms are to be taken more as indications of a need for care in understanding how intuitionistic mathematics is to be characterized as constructive than in showing that something is wrong with it. We know in the case of arithmetic at least, that the intuitionistic system contains the classical one. If all of intuitionistic arithmetic is constructive then so is classical arithmetic in some sense. The merit of the intuitionistic approach lies not so much in avoiding classical concepts as in affording a method of separation among constructively distinguishable ones.

A kind of mathematics which merely lists constructions in a fashion similar to that in which multiplication tables do, is no doubt possible and may be interesting; but most mathematical systems are more ambitious synopses of mathematical experience. In the systematization certain ideal elements enter. If we are interested in constructive interpretation, the question arises as to how we can recognize the constructive elements from the others involved in the systematization.

Under the recursive realizability interpretation of a formal system for intuitionistic arithmetic, the provable implications of the form $A \supset 1 = 0$ receive a trivial interpretation, such a formula is interpreted by an essentially arbitrary construction. But this does not prevent our assigning some significant meaning to other provable formulas. In the case of a classical formal system however, every provable formula is equivalent to a formula interpretable by an essentially trivial construction under the realizability interpretation.

In view of the trivial constructive content of true intuitionistic negation statements, the speaker proposed a definition of con-

structive falsity, N-realizability and a correlative truth definition P-realizability (NELSON [16]). An example of a formal system interpretable by this truth definition was also presented. Assuming a non-trivial constructive meaning for the falsity of prime formulas, there is given a constructive meaning for falsity of formulas built up from them by logical operations. This characterization is similar to the classical one in that it reduces the (strong) falsity of certain complicated statements to the falsity of the prime ones. Trivial implications are not eliminated from the logic, thus negation of the intuitionistic type also appears. Under the truth definition, these negations are interpreted by arbitrary constructions. For the strong negation, the principle of non-contradiction in the form $\sim(A \,\&\, \sim A)$ is not valid, however, the principle $A \,\&\, \sim A \supset B$ for arbitrary B is valid.

The system for strong negation affords a systematic way of recognizing some provable negation statements and extracting from them non-trivial constructive information in contrast to the situation for the intuitionistic system for which, under the interpretation of realizability, all provable negation statements recognizable by intuitionistic negation receive only a trivial interpretation.

Some of the properties of a logic of this sort have been studied in MARKOV [14], and VOROBEV [22], [23]. In this connection the work of SANIN [18], [19] and the lecture in this colloquium of Rasiowa should also be mentioned.

Recently there have been proposed a number of formalizations for mathematical systems which avoid intuitionistic negation entirely, GILMORE [5], VREDENDUIN [24], and VALPOLA [21]. I believe that work in this direction is of great interest, but there appear to be some difficulties in the development of such systems. The system of Valpola is a set theory of great generality apparently. There remains however a question of consistency and also a question of how much of mathematics may be developed in such a system.

Intuitively, certain negation statements and certain null predicates do not require intuitionistic negation for their conception and it is my feeling that a study of constructive mathematics may be taken up from the point of view of distinguishing these concepts from those involving intuitionistic negation rather than from the point of view of exluding the latter.

The remarks which follow are concerned with two matters: (1) How certain formal systems separate concepts, and (2) The validity of various forms of the principle of non-contradiction in certain formal systems.

2. A truth definition and a formal system

In the abstract NELSON [17] there was described a further truth definition and an arithmetic system interpretable by this definition. (The abstract announced a proof of the theorem stating this interpretability. This paper has never been offered for publication because the speaker later learned of a simpler way to accomplish the same result.) The point of these ideas, aside from their relevance to the question of the universal validity of the principle of non-contradiction in the form $A \,\&\, \neg A \supset B$, is that the truth definition assigns whenever possible to a negation $A \supset F$, for false F, some constructive content beyond the trivial one.

These concepts of $\mathscr{P}$-realizability and $\mathscr{N}$-realizability are to be defined just as P-realizability and N-realizability in NELSON [16], p. 17, reading "$\mathscr{P}$" for "P" and "$\mathscr{N}$" for "N" and replacing 4_p (the clause defining "a P-realizes $B \supset C$" by:

$4_{p'} \cdot a = 2^f \cdot 3^e$, where f and e are Gödel numbers of partial recursive functions of one variable, ψ and φ respectively, such that, for every c which $\mathscr{N}$-realizes C, $\psi(c)$ $\mathscr{N}$-realizes B, and for every b which $\mathscr{P}$-realizes B, $\varphi(b)$ $\mathscr{P}$-realizes C.

Under this truth definition as that for P-realizability, there is a formula representing $(Ea)\,((Ex)T_1(a, a, x) \,\&\, \neg\, (Ex)T_1(a, a, x))$ which is neither $\mathscr{P}$-realizable nor $\mathscr{N}$-realizable.

Let $N_2(a)$ abbreviate $(Ex)\,T_1(a, a, x) \,\&\, \neg\, (Ex)\,T_1(a, a, x)$ and let $N_1(a)$ abbreviate $a + 1 = a$. Intuitively we may distinguish between the sort of evidence we have for asserting that each of these sets $N_1(a)$ and $N_2(a)$ is null. Each natural number may be constructively shown to be distinct from its successor, thus in a constructive sense $a + 1 = a$ is false for all a. On the other hand we show that $N_2(a)$ is null by a reductio ad absurdum argument depending upon essentially formal logical assumptions. We do not have any uniform procedure for deciding which of the two $(Ex)\,T_1(a, a, x)$ and $\neg\,(Ex)\,T_1(a, a, x)$ is false, and hence do not know in constructive detail why $N_2(a)$ is null.

The arithmetic system S which is presented here and which is

interpretable by $\mathscr{P}$-realizability has an implication operation contraposable with respect to strong negation.

Assuming the consistency of any of the arithmetics discussed earlier, this system S may be consistently extended by the addition of an axiom of the form

$$A \equiv \neg A$$

for a suitable choice of a formula A.

Not all of the formulas of any of the following forms is provable in S:

$$A \vee \neg A, \qquad \neg (A \& \neg A), \qquad A \& \neg A \supset B,$$
$$(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B), \qquad (A \supset (B \supset C)) \supset (A \& B \supset C)$$
$$A \& \neg B \supset \neg (A \supset B).$$

For convenience in comparing the intuitionistic, the strong negation, and contraposable strong negation systems, we rely on a formalization suggested by that of SCHÜTTE [20] for intuitionistic logic. The formalization is closely related to that of the Gentzen sequence calculus, and affords direct methods of establishing provability and at the same time allows easy application of the $\mathscr{P}$-realizability definition.

We define at the same time a propositional calculus, a predicate calculus, and a system for arithmetic. The notations except for the additional ones explained here are those of KLEENE [12]. Term and formula are defined in the usual way see KLEENE [12]: propositional calculus, page 109; predicate calculus, page 143; arithmetic, page 72; except that $\curlywedge$ is an additional formula (to be interpreted as a false formula). In the arithmetic system it is understood as an abbrevation for $1 = 0$.

From the postulate list which follows, each time understanding formula in the proper sense, the postulate list for the propositional calculus Sp contains I, II, III, V, and VI, the predicate calculus SP contains I–VI, and the arithmetic S contains I–IX.

We follow Schütte in writing "$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset B$" for "$A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (B) \ldots))$". The expression "$\Gamma \supset B$" abbreviates "$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset B$"; Γ may be null, in which case "$\Gamma \supset B$" stands for "B". The expression ,,$A \supset^2 B$" is an abbreviation for "$A \supset A \supset B$" and "$A \supset^1 B$" stands for "$A \supset B$". The expression "$\Gamma \supset^2 B$" abbreviates "$A_1 \supset^2 A_2 \supset^2 \ldots \supset^2 B$".

The notations "(&r)" etc. are abbreviations for names of the rules "& introduction on the right" etc.

In $(\forall r)^*$ and $(\exists l)^*$ it is understood that x is a variable which does not accur free in Γ or C. In $(\exists r)$ and $(\forall l)$, t is a term. In the occurrences of $\supset^i$ the letter "i" may be read as "1" or "2".

AXIOMS AND RULES OF INFERENCE FOR S

I. Axiom schemata.

1. $A \supset A$.
2. $\curlywedge \supset A$.
3. $\neg A \supset (A \supset \curlywedge)$.
4. $\neg \curlywedge$.
5. $A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A$.

II. Rules for rearrangement.

Permutation $\dfrac{\Gamma \supset A \supset B \supset C}{\Gamma \supset B \supset A \supset C}$ Weak condensation $\dfrac{A \supset A \supset A \supset C}{A \supset A \supset C}$

III. Introduction rules for positive connectives.

$(\supset \mathrm{l})\ \dfrac{\Gamma \supset A \quad B \supset C}{\Gamma \supset (A \supset B) \supset C}$ $(\supset \mathrm{r})\ \dfrac{C}{A \supset C}$

$(\& \mathrm{l})\ \dfrac{A \supset C}{A \& B \supset C}\ \dfrac{A \& B \supset C}{B \supset C}$ $(\& \mathrm{r})\ \dfrac{\Gamma \supset A \& B}{\Gamma \supset A \quad \Gamma \supset B}$

$(\vee \mathrm{l})\ \dfrac{A \supset^i C \quad B \supset^i C}{A \vee B \supset^i C}$ $(\vee \mathrm{r})\ \dfrac{\Gamma \supset B}{\Gamma \supset B \vee C}\ \dfrac{\Gamma \supset C}{\Gamma \supset B \vee C}$

IV. Introduction rules for quantifiers.

$(\forall \mathrm{l})\ \dfrac{A(t) \supset C}{\forall x\, A(x) \supset C}$ $(\forall \mathrm{r})^*\ \dfrac{\Gamma \supset A(x)}{\Gamma \supset \forall x\, A(x)}$

$(\exists \mathrm{l})^*\ \dfrac{A(x) \supset^i C}{\exists x\, A(x) \supset^i C}$ $(\exists \mathrm{r})\ \dfrac{\Gamma \supset A(t)}{\Gamma \supset \exists x\, A(x)}$

V. Elimination rule.

$$\frac{\Gamma \supset A \qquad A \supset C}{\Gamma \supset C}$$

VI. Introduction rules for strong negation.

$(\neg \supset \mathrm{l})\ \dfrac{A \& \neg B \supset C}{\neg (A \supset B) \supset C}$ $(\neg \supset \mathrm{r})^-\ \dfrac{\Gamma \supset^2 \neg (A \supset B)}{\Gamma \supset^2 A \& B}$

$(\neg \& \mathrm{l})\ \dfrac{\neg A \vee \neg B \supset C}{\neg (A \& B) \supset C}$ $(\neg \& \mathrm{r})\ \dfrac{\Gamma \supset \neg A \vee \neg B}{\Gamma \supset \neg (A \& B)}$

We list explicitly, as an example, only this pair of rules for $\neg$ with &. For each of the other logical symbols except $\supset$ there is assumed a similar pair of rules based on the following equivalences:

(1) $\neg A \,\&\, \neg B \equiv \neg (A \vee B)$. (2) $\forall x \neg A(x) \equiv \neg \exists x A(x)$.

(3) $\exists x \neg A(x) \equiv \neg \forall x A(x)$. (4) $A \equiv \neg\neg A$.

VII. Induction schema for arithmetic.

$$A(0) \,\&\, \forall A\,(A(x) \supset^2 A(x')) \supset^2 \forall x\, A(x).$$

VIII. Axioms for Negation and Equality.

(1) $\neg\, a=b \equiv \neg\, a'=b'$. (2) $\neg\, a=b \equiv \neg\, b=a$.

(3) $a=b \,\&\, \neg\, b=c \supset \neg\, a=c$.

IX. Axioms for $=$ and the remaining Peano Axioms.

(KLEENE [12], page 82, 14–17).

X. Axioms for $+$ and $\cdot$ in the form of recursion equations.

A system N for strong negation is obtained by:

(i) Replacing $(\neg \supset r)^-$ by its strong form:

$$(\neg \subset r)^+ \quad \frac{\Gamma \supset A \,\&\, \neg B}{\Gamma \supset \neg (A \supset B)}$$

(ii) Replacing Condensation by its strong form $\dfrac{A \supset A \supset C}{A \supset C}$.

(iii) Deleting Contraposition.

A system for intuitionistic logic is obtained by deletion all formulas, axioms, and rules which contain $\neg$.

3. Separation of concepts

As we have suggested earlier, an argument favoring intuitionistic logic over the classical is the fact that the intuitionistic logic allows the classical distinctions in meaning and further ones besides. Classical logic is open to possible objection in that it identifies certain constructively distinct entities. Since we are speaking here of formal systems, we are interested in the general question of finding when one formal system allows distinctions among concepts which are not possible in another. This involves the general question of methods of representing one system in another.

In the case of arithmetical systems a representation of the provability of a formula in one system is always afforded in the other by an arithmetization of the syntax language of the system. Such a representation, of course, is open to the objection that only recursively enumerable predicates can be so represented. Such a representation is excluded by our definition of a regular transformation offerd here.

Given a formal system with a specified equivalence symbol, the predicate symbols P_i of the logic are divided into equivalence classes, each class containing all the P_i such that $\vdash P_i \equiv P_j$. We suppose that the equivalence classes represent the mathematical concepts which the system formalizes. It, of course, need not be the case that each equivalence class represent a significant concept, since from some particular viewpoint of interpretation the formal system may contain "imaginary" elements. But in any case this separation into equivalence classes represents the most extensive possible separation of concepts which is allowable in the system. Whether or not this separation is of interest of course depends upon the interpretation which we have in mind for the system.

The present definition is restricted in that: (1) It refers to a specified equivalence symbol of the formal system. (2) It assumes that one system is a sub-system of the other. Concerning the former: In the more frequently used logical systems it is possible to characterize equivalence in the system by interdeducibility. However, in a non-extensional system such as that for constructive falsity, one might prefer to characterize it by substitutability. By this we mean that as a sufficient condition for $\vdash A \equiv B$, we should require not only $A \vdash B$ and $B \vdash A$, but for every result of substitution we should require $P(A) \vdash P(B)$ and $P(B) \vdash P(A)$, of course, subject to the appropriate restrictions about substitution in a predicate calculus. A different choice of equivalence symbol may give a different separation of concepts. An example of this situation is afforded by the equivalence in an arithmetic of constructive falsity which was defined in Markov [14] compared with the deducibility-equivalence.

Undoubtedly there are possible deeper formulations of the notion of separation of concepts and probably another may be of greater practical interest.

Let L_2 be a subsystem of L_1. By this we mean, let every formula of L_2 be also a formula of L_1, and let every provable formula of L_2 be a provable formula of L_1. In addition, let $\equiv_1$ be a specified equivalence symbol of L_1 and let $\equiv_2$ be a specified one of L_2.

Definition. *A transformation* * *on formulas of* L_1 *to formulas of* L_2 *is said to be regular just in case:*

(1) *For every formula* A *of* L_1, $A \equiv_1 A^*$ *is provable in* L_1.

(2) *For every pair of formulas* A *and* B *of* L_1, *if* $A^* \equiv_2 B^*$ *is provable in* L_2, *then* $A \equiv_1 B$ *is provable in* L_1.

(3) *If* E *is a prime formula then* E^* *is* E.

Assumption (1) amounts to a requirement that from the viewpoint of the system L_1, A and A^*, which are both predicate symbols of this system, should determine the same predicate. Assumption (2) guarantees that if A and B are not identified in L_1 under $\equiv_1$, then they are also not identified in L_2 under $\equiv_2$. Assumption (3) is reasonable from a constructive viewpoint in that it simply assumes that both systems are concerned with the same subject matter and start with the same basic concepts.

If there is a regular transformation from L_1 to L_2, then we say that $\equiv_2$ in L_2 allows all the distinctions among concepts which are allowed by $\equiv_1$ in L_1.

If there is no regular transformation from L_1 to L_2, then we say that $\equiv_1$ in L_1 allows distinctions which are not regularly represented by $\equiv_2$ in L_2.

If for formulas A and B of L_1 it is the case that for every transformation * of L_1 to L_2 for which (1) and (3) hold, $\vdash_{L_2} A^* \equiv_2 B^*$ while not $\vdash_{L_1} A \equiv_1 B$, then we say that $\equiv_1$ allows a separation of A and B not regularly representable by $\equiv_2$ in L_2.

We are concerned here with the separation of concepts in the various constructive systems, predicate calculi and arithmetics which we have defined in the previous section.

It is easily shown that for either the predicate calculus or arithmetic, the equivalence of the intuitionistic system allows a separation of $A \vee \neg A$ from $\neg(A \& \neg A)$ which is not regularly representable under the equivalence of the classical calculus. Using the transformation ° of KLEENE [12] p. 494, it is easily seen also

that either intuitionistic system allows all the distinctions which the corresponding classical one does.

The predicate calculus for strong negation allows separations not representable in the intuitionistic calculus. For suppose that there is a regular transformation * on the strong negation calculus to its intuitionistic subsystem. The formula $(\neg\, \mathfrak{A})^*$ must then be equivalent to $\neg\, \mathfrak{A}$ and $(\neg\, \mathfrak{A})^*$ must be a formula not containing $\neg$ since this symbol does not occur in the subsystem. This contradicts the independence property of $\neg$ in relation to the other logical symbols of N which was established in NELSON [16] § 5. This separation of concepts is of no significance for present formalization of arithmetic, however it might be of interest in some other application of the logic in which $\neg$ A for prime formulas has a meaning distinguishable from $\mathrm{A} \supset \curlywedge$.

The arithmetic system N does not allow any distinctions under the deducibility-equivalence relation beyond those of the intuitionistic system since the transformation $'$ of NELSON [15], Definition 2, is a regular transformation on N to its intuitionistic subsystem.

In order to consider relations between N and S (or we might equally well consider intuitionistic arithmetic and N with a different equivalence symbol), we define two transformations and consider theorems concerning them.

Definition 1. *The formula* A^+ *is defined inductively. If* A *is prime then* A^+ *is* A. *If* A *is* $\mathrm{B} \circ \mathrm{C}$ *for any binary logical connective* $\circ$ *except* $\supset$, *then* A^+ *is* $\mathrm{B}^+ \circ \mathrm{C}^+$. *If* A *is* QB *for* Q *a negation symbol or a quantifier, then* $(\mathrm{QB})^+$ *is* $\mathrm{Q}(\mathrm{B}^+)$. *If* A *is* $\mathrm{B} \supset \mathrm{C}$, *then* A^+ *is* $\mathrm{B}^+ \supset (\mathrm{B}^+ \supset \mathrm{C}^+)$.

Definition 2. *The formula* A' *is defined exactly as in Definition* 1, *regarding* "$'$" for "$+$" *except that if* A *is* $\mathrm{B} \supset \mathrm{C}$, *then* A' *is* $(\mathrm{B}' \supset \mathrm{C}') \,\&\, (\neg\, \mathrm{C}' \supset \neg\, \mathrm{B}')$.

Then the following theorem may be established by demonstrating by induction of the number of logical symbols in A that both $\vdash_N \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}^+$ and $\vdash_N \neg\, \mathrm{A} \equiv \neg\, \mathrm{A}^+$. The crucial step in the demonstration requires the provability in N of $\mathrm{B} \supset \mathrm{C} \equiv \mathrm{B} \supset (\mathrm{B} \supset \mathrm{C})$.

Theorem 1. *The formula* $\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}^+$ *is provable in* N *for any choice of a formula* A.

Again by induction on the number of logical symbols in A, we

show both $\vdash_N \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}^{+\prime}$ and $\vdash_N \neg \mathrm{A} \equiv \neg\, \mathrm{A}^{+\prime}$. A central item in this is the provability in N of $(\mathrm{B} \supset \mathrm{C}) \,\&\, (\mathrm{B} \,\&\, \neg\, \mathrm{C}) \supset \neg\, \mathrm{B}$.

Theorem 2. *The formula* $\mathrm{A} \equiv \mathrm{A}^{+\prime}$ *is provable in* N *for any choice of a formula* A.

The following theorem then is shown straightforwardly by induction of the length of a proof of A in N. The formal system we have chosen makes this quite easy.

Theorem 3. *For any choice of a formula* A, *if* A *is provable in* N, *then* A^{+} *is provable in* S.

For the following lemma, let $\Gamma \supset \mathrm{C}$ abbreviate $\mathrm{A}_1 \supset \ldots \supset \mathrm{A}_n \supset \mathrm{C}$, where $n \geqq 1$. Then the lemma may be established by induction on n.

Lemma. *The following formula is provable in* N:

$$(\Gamma \supset \mathrm{C})' \equiv (\prod_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i' \supset \mathrm{C}') \,\&\, \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\mathrm{A}_j' \,\&\, \neg\, \mathrm{C}' \supset \neg\, \mathrm{A}_i').$$

Applying the lemma, the following theorem may be demonstrated by induction on the length of a proof of A in S.

Theorem 4. *For any choice of a formula* A, *if* A *is provable in* S, *then* A' *is provable in* N.

We wish to show that S allows a separation of concepts not allowed in N. (We consider the arithmetic systems, the separation for predicate calculus follows as a consequence.)

Suppose we abbreviate "$\mathrm{A} \supset (\mathrm{A} \supset \mathrm{B})$" in S by "$\mathrm{A} \succ \mathrm{B}$", and consider those formulas of S which contain occurrences of $\supset$ only in the context of $\succ$. If we read the implication symbol of N as "$\succ$", then by Theorem 3, every provable formula of N occurs among the provable formulas of this class. In this way we may regard N as a subsystem of S. Abbreviate "$(\mathrm{A} \succ \mathrm{B}) \,\&\, (\mathrm{B} \succ \mathrm{A})$" by "$\mathrm{A} \equiv_N \mathrm{B}$". We note first that if $\vdash_S \mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$, then $\vdash_S \mathrm{A} \equiv_N \mathrm{B}$. Let $\mathrm{F}(\mathfrak{a})$ be the formula in the formal system which represents the predicate $(Ex)T_1(a, a, x) \,\&\, \neg\, (Ex)T_1(a, a, x)$. The formula

$$\mathrm{F}(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{a}$$

is not provable in S since its provability would entail the provability of $\exists \mathfrak{a} \mathrm{F}(\mathfrak{a}) \equiv \exists \mathfrak{a} (\mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{a})$ which is not $\mathscr{P}$-realizable.

Now suppose that there is a regular transformation * on S to

its subsystem corresponding to N. Then $\vdash_S F^*(a) \equiv F(a)$, and thus $\vdash_S F^*(a) \equiv_N F(a)$. Further $(a+1=a)^*$ is $a+1=a$. But $\vdash_N a+1=a \equiv F(a)$, and hence $\vdash_S a+1=a \equiv_N F^*(a)$. But this contradicts our assumption that * is regular.

On the other hand every separation in N is regularly representable in S. In N, let "$A \to B$" abbreviate "$(A \supset B)\ \&\ (\neg B \supset \neg A)$". Consider the formulas of N not containing $\supset$ except in such occurrences. Every provable formula of S occurs among these formulas by Theorem 4, if we read "$\supset$" of N as "$\to$". Abbreviate "$(A \to B)\ \&\ (B \to A)$" by "$A \equiv_S B$". Note that if $\vdash_N A \equiv_S B$, then $\vdash_N A \equiv B$.

Now consider any A and B of N. We know from Theorem 2 that $\vdash_N A \equiv A^{+'}$ and $\vdash_N B \equiv B^{+'}$. Thus if $\vdash_N A^{+'} \equiv_S B^{+'}$ we shall also have $\vdash_N A \equiv B$. Thus $^{+'}$ is a regular transformation on N to its subsystem corresponding to S.

4. Contradiction

Finally, let us consider a truth definition and systems in which the principle $A \supset (\neg A \supset B)$ is no longer valid. We wish also to give a non-trivial example of an arithmetic system which is contradictory in the sense that a formula $A\ \&\ \neg A$ is provable in the system but yet not every formula is provable in the system, the system is not overcomplete in the sense of Jaśkowski [11].

As motivation for the truth definition, suppose we consider a set of statements $\{P\}$ and also a set of basic interpretations $\{I_i\}$. Each interpretation gives a value, true or false, to some of the statements and in addition furnishes evidence according to some standards, for the truth or falsity of the statement. Now in comparing the interpretations we shall agree to call true only those statements P which are true under all interpretations. We shall agree to call false those statements which are false under any interpretation.

A situation of this sort might arise in establishing a natural law, where the statement corresponds to a universal statement, the interpretations, to observations of individual events, the evidence to a description of certain standard methods of observation.

Suppose we allow the possibility that for some statements P, an interpretation may offer evidence for both the truth of P and the falsity of P. Then, if all the other interpretations also offer

evidence for the truth of P, our criterion requires both the truth of P and the falsity of P.

To characterize the truth and falsity of statements (statements here will be formulas of a formal system) built up from the prime ones using the predicate calculus connectives, let us suppose that the evidence for the prime statements P is arithmetized and represented by a natural number and that the elements of the universe of discourse are represented by numerals. Then we offer a realizability definition with "$a\ R_i$ A" representing "a is the arithmetization of the evidence for the truth of A under the interpretation I_i" and "$a\ N_i$ A" representing "a is the arithmetization of the evidence for the falsity of A under interpretation I_i".

The realizability definition refers to a formal system for which "formula" is defined just as for the formal systems in § 2. Cases are considered as in previously given realizability definitions and it is understood that i is a natural number greater than 0.

Definition. *If* E *is a prime formula* $t_1 = t_2$ *containing no free variables, and* t_1 *and* t_2 *are natural numbers corresponding to the terms under the usual interpretation of numerals and function symbols then* $a\ R_i$ P *just in case* i *divides* $|t_1 - t_2|$ *and* $a = 0$, *and* $a\ N_i$ P *just in case* $a = |t_1 - t_2| \neq 0$. *The other clauses read exactly as the definition for a P-realizes* A *and a N-realizes* A *in* Nelson [16], *reading "*P_i*" for "P-realizes" and "*N_i*" for "N-realizes".*

Finally we define $a\ P$ A just in case for all i, $a\ P_i$ A; and $a\ N$ A just in case for all i, $a\ N_i$ A.

We write "A is R_i" for "there exists an a such that $a\ R_i$ A" etc.

First let us observe that there are formulas P such that P is both R_i and N_i for some choice of i. As a matter of fact, every closed formula $t_1 = t_2$ is R_i for appropriate choices of i. Hence not all the formulas of any of the following schemata are R:

$$\text{A} \,\&\, \neg\, \text{A} \supset \text{B}, \quad \text{A} \supset (\neg\, \text{A} \supset \text{B}), \quad (\text{A} \supset \text{B}) \,\&\, (\text{A} \supset \neg\, \text{B}) \supset \neg\, \text{A}.$$

For example consider $3 = 5 \,\&\, \neg\, 3 = 5 \supset 3 = 2$. The left member is R_2 but the right member is not R_2, hence the formula is not R_2 and not R. A similar observation applies to the intuitionistically valid formula

$$a' = 0 \supset 1 = 0.$$

However we find that the positive part of the intuitionistic logic is valid as well as some features of strong negation. The following theorems are easily checked using results and methods of earlier realizability theorems. The matter requiring careful attention for Theorem 2 is that various realization numbers do not depend on i. For the theorems let M be a formal system with formula defined as above, terms limited to those built up with $+$, $\cdot$, and $'$ from variables and 0.

M has the following postulate list:

(1) Postulates 1a through 21 of page 82, KLEENE [12], with the deletion of 7 and 15. This amounts to the postulate list for either classical or intuitionistic predicate calculus with the deletion of the postulates explicitly concerned with negation except for the following postulate which is included

$$\neg\ \mathrm{a}' = 0.$$

(2) The equivalences for strong negation of page 19 of NELSON [16].

(3) Axioms for negation with equality and the successor symbol. At least the following:

$$\neg\ \mathrm{a} = b \equiv \neg\ \mathrm{a}' = \mathrm{b}', \qquad \neg\ \mathrm{a} = \mathrm{b} \equiv \neg\ \mathrm{b} = \mathrm{a}.$$

Theorem 1. *Any formula deducible in M from arbitrary R_i formulas is an R_i formula.*

Theorem 2. *Any formula deducible in M from arbitrary R formulas is an R formula.*

The system is a very weak one in many respects. The principle of substitution for equality fails already with prime formulas under negation

$$\mathrm{a} = \mathrm{b}\ \&\ \neg\ \mathrm{b} = \mathrm{c} \supset \neg\ \mathrm{a} = \mathrm{c}$$

is not an R formula. The introduction of some axioms in the form of recursion equations would require abandoning substitution even for the positive parts of the system. The predecessor function would cause trouble in this respect.

In view of such deficiencies it is not surprising that the development of arithmetic under the usual translation of intuitive symbolism offers difficulties in such elementary matters as the definition of divisibility and prime. However, it is possible to include a version

of intuitionistic arithmetic in the system using an equality relation expressible in the symbolism of the system

$$\mathrm{a} \simeq \mathrm{b}$$

is taken as an abbreviation for the formula

$$\neg\, \exists \mathrm{c}(\mathrm{a} = \mathrm{b} + \mathrm{c}' \vee \mathrm{b} = \mathrm{a} + \mathrm{c}').$$

For this equality relation we note the following lemma.

Lemma. *For any natural numbers a and b, $a=b$ if and only if there exist natural numbers p and i such that $pR_i\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$. Further, for any choice of natural numbers i and k, the numbers $pR_i\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$ if and only if $pR_k\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$.*

First let us suppose that $a=b$, then $\Lambda c 2^{c'} \cdot 3^{c'} R_i \mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$. The number $\Lambda c 2^{c'} \cdot 3^{c'}$ defines a general recursive function, so we have only to show that for any choice of a natural number c, the number $2^{c'} \cdot 3^{c'} N_i \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}' \vee \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}'$. But this is true since $c' N_i \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}'$ and $c' N_i \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}'$.

For the converse, suppose that $pR_i\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$, then for all c, $(\{p\}(c))_0 N_i \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}'$ and $(\{p\}(c))_1 N_i \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}'$. Thus for each choice of c, $|b+c'-a| = (\{p\}(c))_0 \neq 0$ and $|a+c'-b| = (\{p\}(c))_1 \neq 0$. Now if we assume $a>b$ or $b>a$, we are led to a contradiction, thus $a=b$. It is interesting to note that our metamathematical reasoning requires the use of reductio ad absurdum to establish this lemma.

Now we may easily verify that the following are R formulas:

$$\mathrm{a} \simeq \mathrm{b} \equiv \mathrm{a}' \simeq \mathrm{b}', \qquad \mathrm{a} \simeq \mathrm{a}, \qquad \mathrm{a} \simeq \mathrm{b} \supset (\mathrm{a} \simeq \mathrm{c} \supset \mathrm{b} \simeq \mathrm{c})$$

$$\mathrm{a}' \simeq 0 \supset 1 \simeq 0,$$

and also the formulas in the form of recursion equations for addition and multiplication with $\simeq$ for equality.

If we add this collection of formulas to the axiom list of M, the resulting system will have all of the theorems of the formal system for intuitionistic arithmetic of KLEENE [12] provided, of course, that we read $\simeq$ as equality.

Finally our concern with contradiction. Suppose we add as an additional axiom to the system mentioned above a formula such as $3=0$. This formula is R_3 and by Theorems 1 and 2 of this section every provable formula in the system thus enlarged is R_3. Hence, not every formula is provable in the new system although it is inconsistent since the formula $3=0 \;\&\; \neg\, 3=0$ is provable.

The system has been constructed, of course, to show that the logical operations may be interpreted in such a way that a mathematical system for arithmetic may be inconsistent without being overcomplete.

Does the system have any practical interest? I should not want to claim much in this direction; however, the system might be of some interest to a mathematician who cannot make up his mind as to whether there are an infinite number of natural numbers or not. I hope that the generalization of the truth concept and the predicate calculus may have some further interest.

BIBLIOGRAPHY

[1] L. E. J. Brouwer, De onbetrouwbaarheid der logische principes. Tijdschrift voor wijsbegeerte, 2 (1908), 152–158.

[2] D. van Dantzig, On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics. Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences, **50** (1947), 918–929, 1092–1103 = Indagationes mathematicae, 9 (1947), 429–440, 506–517.

[3] ————, Significs and its relation to semiotics. Library of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11–18, 1948), vol. 2, Philosphical essays, Amsterdam 1948, 176–189.

[4] H. Freudenthal, Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln. Compositio Mathematica, 4 (1937), 112–116.

[5] P. C. Gilmore, The effect of Griss' criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalized within the intuitionistic logic (Dissertation, Amsterdam 1953), Amsterdam; also Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences, **56** (1953), 162–174, 175–186.

[6] G. F. C. Griss, Negationless intuitionistic mathematics I. Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceeding of the section of sciences, **49** (1946), 1127–1133 — Indagationes mathematicae, **8** (1946), 675–681. (An extensive list of the publications of Griss will be found in Heyting [8].)

[7] A. Heyting, Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn Freudenthal: "Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln". Compositio mathematica, 4 (1936), 117–118.

[8] ————, Intuitionism an introduction, Amsterdam, 1956.

[9] ————, La conception intuitioniste de la logique, Les etudes philosophiques, (1956), 226–233.

[10] J. J. de Jongh, Restricted forms of intuitionistic mathematics. Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11–18, 1948), Amsterdam 1949.

[11] S. Jaśkowski, Un calcul des propositions pour les systemes déductifs contradictoires, Studia Societatis Scientiarum Torunensis, Sect. A, 1 (1948), 57–77.

[12] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics. Amsterdam–New York, 1952.

[13] G. Mannoury, Les fondements psycholinguistiques des mathématiques. Neuchatel, 1947.

[14] A. A. Markov, A constructive logic. Uspehi matematiceskih nauk (N. S.), 5 (1950), 187–188.

[15] D. Nelson, Recursive functions and intuitionistic number theory. Transactions of the American Mathematical Society, **61** (1947), 307–368.

[16] ———, Constructible falsity. Journal of symbolic logic, **14** (1949), 16–26.

[17] ———, Contraposition with strong negation (Abstract). Bulletin of the American Mathematical Society, **60** (1954), 72. (Errata, for the second and third occurrences of "$\mathscr{P}$" read "$\mathscr{N}$".)

[18] N. A. Sanin, On some operations on logico-arithmetic formulas. Doklady Akademii Nauk SSSR (N. S.), **93** (1953), 779–782.

[19] ———, On embeddings of the classical logico-arithmetical calculus into the constructive logico-arithmetic calculus. Doklady Akademii Nauk SSSR (N. S.), **94** (1954), 193–196.

[20] K. Schütte, Schlussweisen-Kalküle der Prädikatenlogik. Mathematische Annalen, **122** (1950), 47–65.

[21] V. Valpola, Ein System der negationslosen Logik mit ausschliesslich realisierbaren Prädikaten. Acta Philosophica Fennica, Fasc. IX, Helsinki, 1955.

[22] N. N. Vorobev, A constructive propositional calculus with strong negation. Doklady Akademii Nauk SSSR, **85** (1952), 465–468.

[23] ———, The problem of deduction in the constructive propositional calculus with strong negation. Doklady Akademii Nauk SSSR, **85** (1952), 689–692.

[24] P. G. J. Vredenduin, The logic of negationless mathematics. Compositio mathematica, **11** (1953), 204–277.

REKURSIVITÄT UND KONSTRUKTIVITÄT

RÓZSA PÉTER

Professor der Eötvös Loránd-Universität, Budapest

Bereits bei der Entstehung des Begriffes der rekursiven Funktion war die Forderung der Konstruktivität entscheidend. Die erfolgreiche Entwicklung der Mengenlehre hat zu seiner Zeit die Tendenz hervorgebracht, die verschiedenen Zweige der Mathematik, auch die Zahlentheorie, als Teile der Mengenlehre zu behandeln. Das Auftauchen der mengentheoretischen Antinomien hat dann eben die entgegengesetzte Tendenz hervorgerufen. SKOLEM [11] hat gezeigt, dass sich die Zahlentheorie mit Hilfe der rekurrierenden Denkweise ohne Berufung auf unendliche Mengen begründen lässt. Die dabei verwendeten Rekursionen erhielten ihre wichtige Rolle eben als Definitionen, welche die Werte der definierten Funktionen an jeder Stelle in endlich vielen Schritten zu berechnen gestatten. (Im Folgenden verstehe ich unter „Zahl" immer eine nichtnegative ganze Zahl und unter „Funktion", wenn nicht etwas anderes gesagt wird, eine zahlentheoretische Funktion.)

Die Endlich-Berechenbarkeit gilt zweifellos für die primitive Rekursion, wo sich der Funktionswert an der Stelle $n+1$ auf den Funktionswert an der vorangehenden Stelle n zurückführen lässt; und für Rekursionsarten, die sich auf primitive Rekursionen zurückführen lassen, wie z.B. die Wertverlaufsrekursion [5], wobei zur Definition von $\varphi(n+1)$ beliebig viele an früheren Stellen angenommenen Werte von φ verwendet werden können; die einfache eingeschachtelte Rekursion [5], wobei für die in der Rekursion nicht teilnehmenden Variablen, für die sogenannten Parameter, Ersetzungen erfolgen; die uneingeschachtelte mehrfache Rekursion [6], wobei die Rekursion zugleich nach mehreren Variablen erfolgt; und die beschränkte mehrfache Rekursion [9], wobei die eben zu definierende Funktion durch eine bereits definierte Funktion majorisiert wird. Aber auch die allgemeine mehrfache Rekursion ist eine konstruktive Definition, und dasselbe gilt auch für eine

Erweiterung dieser Rekursionsart: Die Anordnung der Stellen ist nämlich bei einer k-fachen Rekursion vom Typus ω^k, und daher lassen sich die k-fachen Rekursionen auf transfinite Rekursionen vom Typus ω^k zurückführen [7]. Eine transfinite Rekursion vom Typus α (α eine Ordnungszahl) bedeutet nach ACKERMANN [1] eine Definition, wobei die Funktionswerte mit Hilfe früherer Funktionswerte angegeben werden, wo als „frühere" Stellen die in einer geeigneten Wohlordnung vom Typus α frühere Stellen gelten. Da nun in einer Wohlordnung von einer beliebigen Stelle ausgehend nur endlich viele Schritte rückwärts getan werden können, so lässt sich der Wert einer durch transfinite Rekursion definierten Funktion an jeder Stelle in endlich vielen Schritten berechnen. So ist eine transfinite Rekursion immer konstruktiv – vorausgesetzt natürlich, dass die betreffende Wohlordnung konstruktiv angegeben ist, wie das z.B. für die Ordnung vom Typus ω^k in der zitierten Arbeit angegeben wurde. Man sieht leicht, dass auch die bisher untersuchten Rekursionen der HILBERTschen höheren Stufen [2], [8] konstruktiv sind. Dabei werden zur Definition einer Funktion der II-ten, III-ten Stufe, usw. als Hilfsfunktionen nicht nur (wie in den bereits erwähnten Rekursionen, die bei der Hilbertschen Klassifikation zur I-ten Stufe gehören) Funktionen von Zahlenvariablen, sondern Funktionen auch von Funktionsvariablen, bzw. auch von Funktionsfunktionsvariablen, usw. zugelassen. Wird dieses „usw." ins transfinite fortgesetzt, so muss freilich bei den Rekursionen der α-ten Stufe auch die Ordnungszahl α konstruktiv definiert werden, um eine konstruktive Definition zu erhalten.

Als eine Zusammenfassung und Verallgemeinerung der durch diesen speziellen Rekursionsarten definierten Funktionen ist der HERBRAND–GÖDEL–KLEENEsche Begriff der allgemein-rekursiven Funktion entstanden [3]. Das ist ein sehr nützlicher Begriff, da er die einheitliche Behandlung sämtlicher speziellen rekursiven Funktionsarten ermöglicht; bisher ist aber keine allgemein-rekursive Funktion bekannt, die für irgendeine mathematische Untersuchung wichtig ist, und nicht unter eine der bekannten speziellen rekursiven Funktionsarten eingereiht werden könnte. Aber der Hauptziel bei der Einführung dieses Begriffes war eben die exakte Fassung des Konstruktivitätsbegriffes. Die sogenannte Churchsche Thesis identifiziert den Begriff der berechenbaren Funktion mit diesem Begriff. Hier möchte ich nicht darauf ein-

gehen, worüber Kalmár sprechen wird, nämlich ob tatsächlich alle berechenbaren Funktionen allgemein-rekursiv sind; ich möchte gerade die entgegengesetzte Frage aufwerfen: können die allgemein-rekursiven Funktionen sämtlich mit Recht „effektiv-berechenbar", d.h. „konstruktiv" genannt werden?

Eine allgemein-rekursive Funktion wird durch ein Gleichungssystem angegeben, wobei vorausgesetzt wird, dass es zu jeder Stelle ein endliches Berechnungsverfahren gibt, welche aus Einsetzungen von Zahlen für Variablen und Ersetzungen von Gleichem durch Gleiches besteht, und den Wert der betrachteten Funktion an der angegebenen Stelle eindeutig liefert. Nun ist aber dieses „ es gibt" etwas unsicheres, wie darauf schon der sprachliche Ausdruck hinweist, und zwar in den meisten Sprachen. „Es gibt" — wer denn? „Il y a" d.h. „er hat da" — wer und wo? „There is" d.h. „da ist" — wo denn? Kleene meint, wer das in dieser Allgemeinheit nicht annimmt, mag dieses "es gibt" konstruktiv auffassen. Das ist leicht zu sagen, gerade da bisher keine echt-allgemein-rekursive Funktion bekannt ist, und so kann man nicht wissen, was mit einer solchen Einschränkung verloren geht. So werden eigentlich zwei Begriffe der allgemein-rekursiven Funktion definiert: einer mit klassisch aufgefasstem, und einer mit intuitionistisch aufgefasstem „es gibt". Es wäre interessant durch ein Beispiel zu zeigen, inwiefern der letztere Begriff enger ist, nämlich durch eine Funktion, welche klassisch allgemein-rekursiv ist und intuitionistisch nicht; das ist aber kaum zu hoffen, da in den bisherigen Betrachtungen noch überhaupt kein Beispiel für eine allgemein- und nicht speziell-rekursive Funktion vorgekommen ist. Nun, der klassische Begriff der allgemein-rekursiven Funktion ist nicht konstruktiv, und die intuitionistische enthält ein Circulus vitiosus: hier soll das in der Definition auftretende „es gibt" konstruktiv sein — man wollte aber gerade mit dieser Definition der Allgemein-Rekursivität die Konstruktivität exakt definieren.

Derselbe Circulus vitiosus taucht überall auf, wie man ihn auch umgehen mag.

Der Aufbau der Theorie der allgemein-rekursiven Funktionen wird sehr erleichtert durch das schöne Ergebnis von KLEENE [3], wonach sich jede allgemein-rekursive Funktion auf eine explizite Form

$$\varphi(a_1, \ldots, a_r) = \psi(\mu_w[\tau(a_1, \ldots, a_r, w) = 0])$$

bringen lässt, wobei ψ und τ primitiv-rekursiv sind, und $\mu_w B(w)$ das kleinste w bedeutet, für welche die Aussage $B(w)$ wahr ist (und etwa 0, falls kein solches w existiert); denn man kann mit einer derartigen expliziten Form viel leichter umgehen, als mit einem definierenden Gleichungssystem. Aber eine derartige explizite Form definiert nur dann eine allgemein-rekursive Funktion, wenn es zu jeder Stelle $(a_1, \ldots, a_r)$ ein w mit $\tau(a_1, \ldots, a_r, w) = 0$ gibt. Hier haben wir wieder mit diesem „es gibt" zu tun, das konstruktiv gemeint werden muss, wenn man die dadurch definierte Funktion konstruktiv nennen will. Ist das nicht der Fall, so ist die Allgemein-Rekursivität von φ nur ein Schein: ein Gleichungssystem für φ kann zwar aufgeschrieben werden, aber um daraus den Wert von φ an einer gegebenen Stelle zu berechnen, hat man immer grössere Werte für w einzusetzen, bis einmal $\tau = 0$ wird; und dafür, dass es ein solches w gibt, liegt vielleicht nur ein Existenzbeweis vor. So haben wir hier wieder den Zirkel.

Wenn nun die speziell-rekursiven Funktionen offenbar verdienen, konstruktiv genannt zu werden, die allgemein-rekursiven Funktionen dagegen nur mit einer Einschränkung, die sich ohne ein Circulus vitiosus garnicht formulieren lässt, so erhebt sich die Frage, ob sich vielleicht durch eine zirkelfreie Definition eine Funktionenklasse, die noch mit Recht konstruktiv genannt werden kann, zwischen diese Funktionenklassen einschalten lässt.

Zunächst hat man dazu zu untersuchen, wie weit man über die bisher untersuchten speziell-rekursiven Funktionenklassen hinausgehen kann, um noch immer konstruktive Funktionen zu erhalten. Ich habe gezeigt [7], dass das Diagonalverfahren, auf sämtliche mehrfach-rekursive Funktionen angewandt, eine Funktion liefert, welche durch eine transfinite Rekursion vom Typus ω^ω definiert wird. Ackermann [1] hat schon früher durch eine transfinite Rekursion vom Typus der ersten ε-Zahl eine Funktion definiert, und zum Beweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie hat er gerade die Konstruktivität dieser Funktion benutzt. Will man aber in dieser Richtung weitergehen, also als die nächste konstruktive Funktionenklasse die Klasse der durch transfinite Rekursionen definierten Funktionen annehmen, so stösst man wieder an ein Circulus vitiosus. Zu einer transfiniten Rekursion ist ja immer eine Wohlordnung der Zahlen anzugeben, und zwar selbstverständlich konstruktiv, wenn die dadurch definierte Funk-

tion konstruktiv sein soll. ROUTLEDGE [10] hat diese Zirkelhaftigkeit benützend sogar bewiesen, dass die allgemein-rekursiven Funktionen mit den durch transfiniten Rekursionen (sogar vom Typus ω) definierten Funktionen identisch sind — wobei jedoch die nötigen Wohlordnungen wiederum durch allgemein-rekursive Funktionen angegeben werden.

Ähnlich kann vermutet werden, dass die Klasse der allgemein-rekursiven Funktionen mit der Klasse der Funktionen der Hilbertschen Stufen identisch ist, falls die Bildung dieser Stufen transfinit fortgesetzt wird. Offenbar können aber die auf der α-ten Stufe definierten Funktionen wiederum nur dann als konstruktiv betrachtet werden, wenn auch die Ordnungszahl α konstruktiv ist, was nach Church und KLEENE [4] im Wesentlichen ebenfalls auf den Begriff der Allgemein-Rekursivität hinauskommt. Da haben wir wieder einen Zirkel, wie bei der transfiniten Rekursion. — Auf diesem Gebiet gibt es noch viele ungelöste Probleme; z.B. die bereits erwähnte Vermutung der Identität der Klasse der allgemein-rekursiven Funktionen mit der Klasse der Funktionen der Hilbertschen Stufen; ferner ob die Hilbertsche II-te Stufe über die I-te Stufe wirklich hinausführt, wenn auch mehrfache Rekursionen zugelassen werden; und die entsprechende Frage für die höheren Stufen.

Man könnte die Suche nach der zweckmässigen Definition auch von anderer Seite her beginnen: man könnte aus einer offenbar konstruktiven Funktionenklasse ausgehen, und mit Hilfe von geeigneten allgemeinen Erweiterungsmethoden weitergehen, welche noch nicht über die intuitiv konstruktiven Funktionen hinausführen. Eine solche Erweiterungsmethode wäre z.B. das Diagonalverfahren. Man könnte diese schrittweise anwenden; also, nachdem das auf die mehrfach-rekursiven Funktionen angewandte Diagonalverfahren zu einer speziellen transfiniten Rekursion geführt hat, nicht gleich auf die allgemeine transfinite Rekursion übergehen, sondern die Diagonalfunktion zu den bisherigen Funktionen hinzugenommen, wieder das Diagonalverfahren verwenden, usw. In diesem „usw." steckt wieder das bereits erwähnte Circulus, wenn nämlich das Verfahren transfinit fortgesetzt wird. Sogar ein zweiter Zirkel steckt darin, wenn die Art der Abzählung der bereits gewonnenen Funktionen nicht von vornherein in einer offenbar konstruktiven Weise fixiert wird, sondern nur soviel verlangt wird, dass diese Abzählung konstruktiv sein soll.

Eine andere Möglichkeit zur Erweiterung der offenbar konstruktiven Funktionenklassen wäre zu untersuchen, wasfür „Gebrauchsanweisungen" zu den Definitionsgleichungen angegeben werden können, um die Werte der definierten Funktionen tatsächlich zu erhalten. (Es kann ja auch ein am willkürlichsten aussehendes Gleichungssystem als konstruktive Definition einer Funktion angenommen werden, wenn dazu eine annehmbare Gebrauchsanweisung zur Berechnung der Funktionswerte gehört.) Z.B. gehören zu der primitiven Rekursion

$$G_1 \qquad \varphi(0)=k$$
$$G_2 \qquad \varphi(x+1)=\alpha(x,\ \varphi(x)),$$

wobei α bereits konstruktiv definiert ist, folgende Gebrauchsanweisungen: soll $\varphi(n)$ berechnet werden, so

(1) a) falls $n=0$, man kopiere G_1,
b) falls $n\neq 0$, man setze in G_2 $n-1$ für x:

$$\varphi(n)=\alpha(n-1,\ \varphi(n-1)),$$

(2) falls man eine Gleichung hat, wo auf der linken Seite $\varphi(n)$ steht, sind folgende Fälle zu unterscheiden:

α) steht auf der rechten Seite eine Zahl, so ist die Berechnung fertig,

β) kommt auf der rechten Seite $\varphi(m)$ vor, wo m eine von 0 verschiedene Zahl ist, dann soll in G_2 $m-1$ für x gesetzt werden:

$$\varphi(m)=\alpha(m-1,\ \varphi(m-1)),$$

und in der vorangehenden Gleichung soll $\varphi(m)$ durch die rechte Seite dieser Gleichung ersetzt werden,

γ) kommt auf der rechten Seite $\varphi(0)$ vor, dann soll diese durch k ersetzt werden,

δ) sonst (nämlich, wenn die rechte Seite durch Einsetzungen aus α und Zahlen aufgebaut wird) soll die rechte Seite auf Grund der konstruktiven Definition von α berechnet, und der erhaltene Wert für sie eingesetzt werden.

Diese Gebrauchsanweisungen können leicht „gödelisiert" werden, und so ergibt sich für sie eine einfache primitive Rekursion. Man weiss auch, dass (1) einmal und die Schritte (2) $n+1$-mal anzuwenden sind.

Zunächst würde man glauben, dass zu einer komplizierteren Rekursionsart auch kompliziertere Gebrauchsanweisungen gehören, und so könnte man durch Zulassung komplizierterer Gebrauchsanweisungen zu weiteren konstruktiven Funktionenklassen kommen. Das ist aber nicht der Fall: damit die Berechnung eines Funktionswertes $\varphi(n_1, \ldots, n_r)$ überhaupt möglich sei, müssen derartige Definitionsgleichungen vorhanden sein, dessen eine Seite durch geeignete Einsetzung zu $\varphi(n_1, \ldots, n_r)$ wird, und die andere Seite entweder eine Zahl ist, oder aus bereits konstruktiv definierten Funktionen aufgebaut wird, oder aber auch φ enthält, jedoch an Stellen, die in irgendeinem Sinn als „günstigere" Stellen betrachtet werden können, nämlich am Wege zur Berechnung näher zum Ziel liegen. In den bekannten Rekursionen führt immer zum Ziel, wenn man den nächsten Schritt auf ein innerstes φ anwendet (dessen Argumente also kein φ mehr enthalten), oder, falls die Funktionen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l = \varphi$ simultan definiert werden, auf ein innerstes σ_i. So erhält man immer ähnliche einfache Gebrauchsanweisungen, wie bei der betrachteten primitiven Rekursion. Aber an den Gebrauchsanweisungen sieht man nicht an, ob sie in endlich vielen Schritten zu Ende führen. Die Anzahl der anzuwendenden Schritte wird bei den komplizierteren Rekursionsarten immer komplizierter: bei einer 2-fachen Rekursion ist auch die Anzahl der Berechnungsschritte eine 2-fach rekursive Funktion der Stelle. So wird die Endlichkeit des durch die Gebrauchsanweisung gegebenen Berechnungsverfahrens für eine 2-fach rekursive Funktion nur dadurch gesichert, dass die 2-fache Rekursion konstruktiv ist.

So kommt man also nicht weiter. Auch für beliebige allgemeinrekursive Funktionen kann man sehr einfache Gebrauchsanweisungen angeben: zur Berechnung des Wertes $\varphi(n_1, \ldots, n_r)$ verwende man auf die Definitionsgleichungen die erlaubten „elementaren" Berechnungsschritte (statt Einsetzung einer Zahl n für x gelten als elementare Schritte: die Ersetzung von x durch die Nachfolgerfunktion – dies geschieht n-mal – und dann durch 0), und zwar erst nur einmal (dies kann endlichvielemal geschehen), dann auf die erhaltenen Gleichungen noch einmal, usw.; hat man eine Gleichung der Form $\varphi(n_1, \ldots, n_r) = c$, wo c eine Zahl ist, so ist die Berechnung beendet. Wieviele Schritte sind dazu nötig? Kann man dafür keine konstruktive Schranke angeben, so ist die Definition nicht konstruktiv. Gibt es eine primitiv-rekursive, oder

etwa mehrfach-rekursive Schranke für die Berechnungsschritte, so ergibt sich aus der Ableitung der Kleeneschen expliziten Form (da nämlich das darin vorkommende kleinste w als ein Mass der zur Berechnung notwendigen Schritte betrachtet werden kann; ferner dieses kleinste w, wenn eine primitiv- oder etwa mehrfach-rekursive Schranke dafür vorliegt, auch primitiv- bzw. mehrfach-rekursiv ist), dass auch die definierte Funktion primitiv- bzw. mehrfach-rekursiv ist. Auf diesem Wege gelingt es also auch keine konstruktive Funktionenklasse zwischen die speziell-rekursiven und die allgemein-rekursiven Funktionen einzuschalten.

Es hat den Anschein, dass sich der Konstruktivitätsbegriff überhaupt nicht zirkelfrei erfassen lässt.

BIBLIOGRAPHY

[1] W. Ackermann, Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie. Math. Ann. **117** (1940), 162–194.

[2] D. Hilbert, Über das Unendliche. Math. Ann. **95** (1926), 161–190.

[3] S. C. Kleene, General recursive functions of natural numbers. Math. Ann. **112** (1936), 727–742.

[4] ———, On notation for ordinal numbers. J. Symb. Log. **3** (1938), 150–155.

[5] R. Péter (Politzer), Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion. Math. Ann. **110** (1934), 612–632.

[6] ———, Über die mehrfache Rekursion. Math. Ann. **113** (1936), 489–527.

[7] ———, Mehrfache und transfinite Rekursionen. J. Symb. Log. **15** (1950), 248–272.

[8] ———, Probleme der Hilbertschen Theorie der höheren Stufen von rekursiven Funktionen. Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 2 (1951), 247–274.

[9] ———, Die beschränkt-rekursiven Funktionen und die Ackermannsche Majorisierungsmethode. Publ. Math. Debrecen. 4 (1956), 362–375.

[10] N. A. Routledge, Ordinal recursion. Proc. Cambridge Philos. Soc. **49** (1953), 175–182.

[11] Th. Skolem, Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. Videnskapsselskapets Skrifter I, Mat. Naturv. Kl. 6 (1923), 3–38.

ALGEBRAISCHE CHARAKTERISIERUNG DER INTUITIONISTISCHEN LOGIK MIT STARKER NEGATION

H. RASIOWA

Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

Das Thema dieses Vortrags ist der konstruktive Aussagenkalkül mit starker Negation. Die Idee der konstruktiven Logik mit starker Negation stammt von DAVID NELSON, der in seiner Arbeit [3] eine neue konstruktive Interpretation der logischen Operatoren in der Zahlentheorie eingeführt hat. In dieser Interpretation ist eine Aussage $\sim\prod_x \alpha(x)$ dann und nur dann gültig, wenn man solches n effektiv konstruieren kann, dass die Aussage $\sim\alpha(n)$ gültig ist. Insbesondere, ist eine Aussage $\sim(\alpha\cdot\beta)$ genau dann gültig, wenn mindestens eine der Aussagen $\sim\alpha$ und $\sim\beta$ gültig ist. Ein diese Interpretation erfüllendes System N der Zahlentheorie wurde von Nelson konstruiert. Etwas später, hat A. MARKOV [2] ein ähnliches System der Zahlentheorie untersucht, das auf einem Aussagenkalkül mit logischen Operatoren: die Alternative $+$, die Konjunktion $\cdot$, die Implikation $\rightarrow$, die Negation $\neg$ und die so genannte starke Negation $\sim$, aufgebaut worden ist. Die Bedeutung der starken Negation ist dieselbe wie in dem System von Nelson.

Der konstruktive Aussagenkalkül mit starker Negation, der die Basis des Systems von Markov bildete, wurde von N. N. WOROBIEV [5], [6] axiomatisiert und untersucht.

Das Axiomensystem von Worobiev für den betrachteten Aussagenkalkül S enthält alle Axiome des intuitionistischen Aussagenkalküls und die folgenden Axiome für die starke Negation

(1) $\sim\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$,
(2) $\sim(\alpha\rightarrow\beta)\leftrightarrow(\alpha\cdot\sim\beta)$,
(3) $\sim(\alpha\cdot\beta)\leftrightarrow(\sim\alpha+\sim\beta)$,
(4) $\sim(\alpha+\beta)\leftrightarrow(\sim\alpha\cdot\sim\beta)$,
(5) $\sim\neg\alpha\leftrightarrow\alpha$,
(6) $\sim\sim\alpha\leftrightarrow\alpha$,

wo $\alpha \leftrightarrow \beta$ anstatt $(\alpha \to \beta)\cdot(\beta \to \alpha)$ geschrieben ist, und α, β beliebige Formeln sind. Es ist bekannt, dass die Ableitbarkeit einer Formel $\sim \alpha \leftrightarrow \sim \beta$ im allgemeinen aus der Ableitbarkeit der Formel $\alpha \leftrightarrow \beta$ nicht folgt.

Im folgenden werden wir uns dem wohlbekannten Begriff der Matrix bedienen. Die betrachteten Matrizen sind abstrakte Algebren $\mathfrak{M} = \langle A, e, +, \cdot, \sim, \to, \neg \rangle$, wo A die Menge der Elementen von $\mathfrak{M}$ ist, e ein ausgezeichnetes Element von $\mathfrak{M}$ ist, $+, \cdot, \to$ die zweistellige Operationen sind, und $\neg, \sim$ einstellige Operationen sind. Die Menge A enthält mindestens zwei Elemente. Eine Matrix $\mathfrak{M}$ heisst regulär, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) wenn $e \to x = e$, so gilt $x = e$ für jedes $x \in A$,

(ii) wenn $a \to b = e$, $b \to a = e$, $\sim a \to \sim b = e$ und $\sim b \to \sim a = e$, so gilt $a = b$, für beliebige $a, b \in A$.

Jede Formel α von S wird als ein Polynom $\alpha_{\mathfrak{M}}$ einer Matrix $\mathfrak{M}$ interpretiert. Eine reguläre Matrix $\mathfrak{M}$ wird eine Matrix des betrachteten Aussagenkalküls S genannt, wenn $\alpha_{\mathfrak{M}} \equiv e$ für jedes Axiom α gilt. Sie heisst charakteristisch für S, wenn die Bedingung $\alpha_{\mathfrak{M}} \equiv e$ alle ableitbare Formeln α von S charakterisiert.

Im folgenden werden wir die algebraische Charakterisierung der Matrizen des Aussagenkalküls S angeben.

Eine abstrakte Algebra $\langle A, +, \cdot, \sim \rangle$ wird quasi-Boolesche Algebra genannt, wenn:

(a) $\langle A, +, \cdot \rangle$ ein distributiver Verband mit dem Nullelement 0 und Einselement e ist,

(b) die Operation $\sim$ die folgende Bedingungen erfüllt $\sim\sim a = a$, $\sim(a+b) = \sim a \cdot \sim b$ für beliebige $a, b \in A$.

Für jedes $a \in A$, wird $\sim a$ das Quasikomplement des Elements a genannt.

Es ist leicht zu sehen, dass in jeder quasi-Booleschen Algebra $\sim(a \cdot b) = \sim a + \sim b$, $\sim 0 = e$ und $\sim e = 0$ gilt.

Eine abstrakte Algebra $\langle A, e, +, \cdot, \sim, \to, \neg \rangle$ wird ein N-Verband genannt, wenn folgendes zutrifft:

(1) A ist eine quasi-geordnete Menge in bezug auf die so definierte Relation $\prec$

$a \prec b$ genau dann wenn $a \to b = e$, für beliebige $a, b \in A$;

(2) die abstrakte Algebra $\langle A, +, \cdot, \sim \rangle$ ist eine quasi-Boolesche Algebra mit dem Einselement e, und die folgendermassen definierte Relation $\subset$

$a \subset b$ dann und nur dann wenn $a \prec b$ und $\sim b \prec \sim a$ ist die Verbandshalbordnung dieser quasi-Booleschen Algebra;

(3) wenn $a \prec c$ und $b \prec c$, so ist $a+b \prec c$;

(4) wenn $c \prec a$ und $c \prec b$, so ist $c \prec a \cdot b$;

(5) $\sim (a \to b) \prec (a \cdot \sim b)$;

(6) $(a \cdot \sim b) \prec \sim (a \to b)$;

(7) $a \prec \sim \neg a$;

(8) $\sim \neg a \prec a$;

(9) $a \cdot \sim a \prec b$;

(10) $a \prec b \to c$ dann und nur dann wenn $a \cdot b \prec c$;

(11) $\neg a = a \to \sim e$.

Man kann beweisen, dass eine reguläre Matrix dann und nur dann die Matrix des Aussagenkalküls S ist, wenn sie ein N-Verband ist.

Es ist beachtenswert, dass für jeden N-Verband die folgenden Bedingungen gelten:

(1′) $\sim a \subset \neg a$,

(2′) $a \cdot \sim a = a \cdot \neg a$,

(3′) $\neg a + b \subset a \to b$,

(4′) wenn $a \cdot b = 0$ gilt, so ist $a \subset \sim b$,

(5′) wenn $a + b = e$ gilt, so ist $\neg a \subset b$,

(6′) wenn $a + c = e$ gilt, so ist $a \to b \subset c + b$,

(7′) $\neg a = a \to \sim a$ (Vorobiev [5]).

Die wohlbekannte Lindenbaumsche Methode ermöglicht es leicht, die Existenz einer charakteristischen Matrix des Aussagenkalküls S zu beweisen.

Ich komme jetzt kurz auf die Frage zu sprechen, wie sich N-verbände topologisch repräsentieren lassen. Zu diesem Zweck brauchen wir den Begriff der topologischen Heytingschen Algebra sowie ein Repräsentationssatz für quasi-Boolesche Algebren.

Jede Klasse $H(\mathfrak{X}_1)$ von offenen Teilmengen eines topologischen Raumes $\mathfrak{X}_1$ die mit beliebegen Teilmengen X und Y auch ihre mengentheoretische Vereinigung $X+Y$, ihren mengentheoretischen Durchschnitt, ihre durch die folgende Gleichheit

$$X \to_1 Y = \mathrm{Int}_1 [(\mathfrak{X}_1 - X) + Y]$$

definierte Pseudokodifferenz und das mit Hilfe der Gleichheit $\neg_1 = \mathrm{Int}_1 (\mathfrak{X}_1 - X)$ definierte Pseudokomplement enthält, wird eine topologische Heytingsche Algebra genannt. $\mathrm{Int}_1 X$ bezeichnet überall den offenen Kern von X.

Übereinstimmend mit der angenommenen Definition ist jeder N-Verband eine quasi-Boolesche Algebra. Deswegen wollen wir über die Frage der Repräsentation der quasi-Booleschen Algebren sprechen. Sei $\mathfrak{X}$ eine nicht leere Menge und sei g eine Involution von $\mathfrak{X}$, d.h. eine eineindeutige Transformation von $\mathfrak{X}$ auf $\mathfrak{X}$, so dass $g(g(x))=x$ für jedes $x \in \mathfrak{X}$ gilt. Sei

$$\sim X = \mathfrak{X} - g(X) \text{ für jede Teilmenge } X \subset \mathfrak{X}.$$

Man kann leicht beweisen, dass jede Klasse $B(\mathfrak{X})$ von Teilmengen der Menge $\mathfrak{X}$, die $\mathfrak{X}$ enthält und in bezug auf die mengentheoretischen Operationen der Vereinigung und des Durchschnittes so wie auf die oben angeführte Operation $\sim$ abgeschlossen ist, eine quasi-Boolesche Algebra darstellt. Jede solche quasi-Boolesche Algebra wird ein Quasimengenkörper genannt.

Białynicki–Birula und Rasiowa [1] haben nachgewiesen, dass jede quasi-Boolesche Algebra einem Quasimengenkörper isomorph ist. Dieser Satz kann leicht so verstärkt werden:

Jede quasi-Boolesche Algebra ist einem Quasimengenkörper $B(\mathfrak{X})$ von offenen Teilmengen eines bikompakten topologischen T_0-Raumes $\mathfrak{X}$ isomorph. Die Beweismethode ist analog der wohlbekannten Methode von Stone [4]. Und zwar ist der Raum $\mathfrak{X}$ die Menge aller Primfilter des betrachteten Verbands. Die Klasse $\mathfrak{M}$ aller Teilmengen $h(a)=\underset{p\in\mathfrak{X}}{E}(a\in p)$, $a\in A$ ist als die Klasse der Umgebungen in $\mathfrak{X}$ angenommen. Dann ist $\mathfrak{X}$ ein bikompakter T_0-Raum und h- ein Isomorphismus des gegebenen Verbands auf den Quasimengenkörper $\mathfrak{M}$, in welchem das Quasikomplement mit Hilfe der folgenden Involution

$$g(p)=A-\tilde{p},\ p\in\mathfrak{X}$$

bestimmt ist, wo $\tilde{p}=A-\underset{\sim x\in A}{E}(x\in p)$. Öffentlich $\mathfrak{X}\in\mathfrak{M}$.

Nun kommen wir dazu, einen Repräsentationssatz für N-Verbände zu formulieren.

Sei $\mathfrak{X}$ ein topologischer Raum, g – eine Involution von $\mathfrak{X}$ und $B(\mathfrak{X})$ – ein Quasimengenkörper der offenen Teilmengen von $\mathfrak{X}$, in dem das Quasikomplement mit Hilfe der Involution g bestimmt ist. Sei $\mathfrak{X}_1$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{X}$, die folgende Bedingungen erfüllt, wo $\mathfrak{X}_2$ gleich $g(\mathfrak{X}_1)$ ist:

(i) $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X} - \sum_{X \in B(\mathfrak{X})} X \cdot \sim X$,

(ii) wenn $X, Y \in B(\mathfrak{X})$ und $X - Y \neq \wedge$, so gilt

$$(\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2) \cdot (X - Y) \neq \wedge,$$

(iii) die Klasse $H(\mathfrak{X}_1)$ aller (in bezug auf $\mathfrak{X}_1$ offener) Teilmengen $X \cdot \mathfrak{X}_1$, wo $X \in B(\mathfrak{X})$, ist eine topologische Heytingsche Algebra,

(iv) für beliebige $X, Y \in B(\mathfrak{X})$ gibt es eine solche Teilmenge $Z \in B(\mathfrak{X})$, dass die Bedingungen

$$\mathfrak{X}_1 \cdot Z = \mathfrak{X}_1 \cdot X \to_1 \mathfrak{X}_1 \cdot Y \text{ und } \mathfrak{X}_2 \cdot Z = (\mathfrak{X}_2 - g(\mathfrak{X}_1 \cdot X)) + \mathfrak{X}_2 \cdot Y$$

gelten.

Man kann leicht sehen, dass eine solche Menge $Z \in B(\mathfrak{X})$ eindeutig bestimmt ist.

Die Klasse $B(\mathfrak{X})$ ist dann ein N-Verband in bezug auf die mengentheoretischen Operationen der Vereinigung, des Durchschnittes, des Quasikomplements und der Operationen $\to$ und $\neg$, die folgendermassen definiert sind:

$$X \to Y = Z \text{ dann und nur dann wenn}$$

$$\mathfrak{X}_1 \cdot Z = \mathfrak{X}_1 \cdot X \to_1 \mathfrak{X}_1 \cdot Y \text{ und } \mathfrak{X}_2 \cdot Z = (\mathfrak{X}_2 - g(\mathfrak{X}_1 \cdot X)) + \mathfrak{X}_2 \cdot Y,$$

$$\neg X = X \to \wedge.$$

Man beweist nämlich, dass die Bedingung $X \prec Y$ mit der Bedingung $\mathfrak{X}_1 \cdot X \subset \mathfrak{X}_1 \cdot Y$ äquivalent ist. Daraus ist die Relation $\prec$ eine Quasiordnung. Weiter haben wir:

(*) $\sim Y \prec \sim X$ dann und nur dann wenn $\mathfrak{X}_2 \cdot X \subset \mathfrak{X}_2 \cdot Y$.

Aus obigen wie auch aus (ii) folgt, dass die folgende Äquivalenz gilt: $X \subset Y$ genau dann wenn $X \prec Y$ und $\sim Y \prec \sim X$. Damit sind die Bedingungen (1) und (2) der Definition eines N-Verbands erfüllt. Offentlich sind auch die Bedingungen (3) und (4) erfüllt. Aus (*) folgen leicht die Bedingungen (5)–(8). Aus (i) folgt (9). Die Bedingung (10) erhalten wir aus (iii). Die Bedingung (11) ist trivial.

Jeder N-Verband dieser Art wird ein N-Mengenverband genannt. Es lässt sich beweisen, dass jeder N-Verband einem N-Mengenverband $B(\mathfrak{X})$ isomorph ist. Die Beweismethode basiert auf dem Beweise des Satzes über den Isomorphismus von quasi-Booleschen

Algebren auf Quasimengenkörper. Die Teilmengen $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ des Stoneschen Raumes $\mathfrak{X}$ sind entsprechend aus so genannten Primfiltern der ersten und der zweiten Art gebildet. Ein Primfilter p heisst nämlich ein Primfilter der ersten Art (der zweiten Art), wenn die Bedingung $y \in p$ aus den Bedingungen $x \in p$ und $x \prec y$ ($\sim y \prec \sim x$) folgt.

Mit Hilfe des obengeführten Repräsentationssatzes lassen sich die folgende Beispiele von N-Verbänden konstruieren.

Beispiel 1. Der Raum $\mathfrak{X}$ besteht aus vier Punkten a, b, c, d. Die folgende Teilmengen sind offen in $\mathfrak{X}$: $\wedge$, $\{c\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$, $\{c, a, b\}$, $\mathfrak{X}$. Die Involution g ist so definiert:

$$g(a)=a,\ g(b)=b,\ g(c)=d,\ g(d)=c.$$

Die Klasse $B(\mathfrak{X})$ aller offenen Teilmengen von $\mathfrak{X}$ ist dann ein Quasimengenkörper. Sei $\mathfrak{X}_1=\{a, b, d\}$. Dann sind die Bedingungen (i)–(iv) erfüllt. Die Operation $\rightarrow$ in $B(\mathfrak{X})$ ist so definiert:

$$X \rightarrow Y=(\mathfrak{X}_1 \cdot X \rightarrow_1 \mathfrak{X}_1 \cdot Y)+((\mathfrak{X}_2-g(\mathfrak{X}_1 \cdot X))+\mathfrak{X}_2 \cdot Y).$$

Beispiel 2. $\mathfrak{X}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen mit der Null. Sei $g(2n)=2n+1$ und $g(2n+1)=2n$ für jedes $n \in \mathfrak{X}$. Nehmen wir als $B(\mathfrak{X})$ die Klasse aller Teilmengen X von $\mathfrak{X}$ mit der folgenden Eigenschaft: gehört $2n+1$ zu X, so gehört auch $2n$. Sei $\mathfrak{X}_1$ die Menge aller nicht geraden Zahlen. Dann sind die Bedingungen (i)–(iv) erfüllt. Die Operation $\rightarrow$ in $B(\mathfrak{X})$ ist dann so definiert:

$$X \rightarrow Y=((\mathfrak{X}_1-\mathfrak{X}_1 \cdot X)+\mathfrak{X}_1 \cdot Y)+((\mathfrak{X}_2-g(X \cdot \mathfrak{X}_1))+\mathfrak{X}_2 \cdot Y).$$

Ich meine, dass es möglich ist, mit Hilfe der algebraischen Charakterisierung des konstruktiven Aussagenkalküls mit starker Negation gewisse Resultate aus der Metatheorie dieses Systems zu erreichen, Z.B. ist mir bekannt, dass die Beweisbarkeit wenigstens einer der Formeln α, β aus der Beweisbarkeit der Alternative $\alpha+\beta$ folgt. Daraus schliessen wir, dass die Negation einer Konjunktion $\sim(\alpha \cdot \beta)$ genau dann beweisbar ist, wenn mindestens eine der Formeln $\sim\alpha$, $\sim\beta$ beweisbar ist. Dieser letzte Satz stimmt mit der Grundidee von Nelson überein.

BIBLIOGRAPHY

[1] A. Białynicki–Birula and H. Rasiowa, On the representation of quasi-Boolean algebras, Bul. de l'Ac. Pol. des Sci. Cl. III, **5** (1957), 259–261.

[2] A. A. Markov, Konstruktivnaja logika (Konstruktive Logik), Usp. Mat. Nauk, **5**, No 3 (1950), 187–188.

[3] D. Nelson, Constructible falsity, Journ. of Symb. Log. **14** (1949), 16–26.

[4] M. H. Stone, Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics, Čas. Mat. Fys. **67** (1937), 1–25.

[5] N. N. Worobiev, Konstruktivnoje isčislenie vyskasiwanij s silnym otrizaniem (Konstruktive Aussagenkalkül mit starker Negation), Dokl. Ak. Nauk SSSR, **85** (1952), 456–468.

[6] ————, Probleme Vywodimosti w konstruktivnom isčislenii vyskasiwanij s silnym otrizaniem (Probleme der Beweisbarkeit im konstruktiven Aussagenkalkül mit starker Negation), Ibid. S. 689–692.

FORMALISIERTE INTUITIONISTISCHE ELEMENTARE THEORIEN

H. RASIOWA UND R. SIKORSKI
Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

HALMOS begann eine seiner Arbeiten [3] mit den Worten: „It is well known that when a logician speaks of the propositional calculus and when a mathematician speaks of Boolean algebras there is a sense in which they are talking about the same thing".

Als Motto zu diesem Vortrag könnte man folgende Bemerkung annehmen: Wenn ein Logiker über die formalisierte intuitionistische Logik spricht und wenn ein Mathematiker über die Algebra der offenenen Teilmengen topologischer Räume spricht, so sprechen sie in einem gewissen Sinne über gleichwertigen Theorien.

Diese Anschaungsweise anführend, übergehen wir die philosophischen Aspekte des Intuitionismus. Die philosophische Seite der intuitionistischer Logik wird in unseren Erwägungen nicht behandelt werden.

Wir werden uns mit der Metatheorie des HEYTINGschen intuitionistischen Prädikatenkalküls [6] und allgemeiner mit der Metatheorie der auf der Basis des Heytingschen Prädikatenkalküls formalisierten Theorien befassen. Hierbei werden wir uns der klassischen Logik und allgemein gebräuchlicher mathematischer Beweismittel bedienen. Auf die Elementarisierung der Beweismittel wie auch auf die Konstruktivität der Metatheorie wird kein besonderer Wert gelegt werden.

Der Begriff, der in der oben angeführten Metatheorie eine grundlegende Rolle spielt, ist der Begriff gewisser Verbände, die hier Heytingsche Algebren genannt werden. Jede Heytingsche Algebra ist ein Verband mit Nullelement $\wedge$, der die folgende Bedingung erfüllt: für beliebige Elemente a, b enthält die Menge $\underset{x}{E}(a \cdot x \subset b)$ das grösste Element c. Dieses Element c wird mit dem Symbol $a \to b$ bezeichnet und die Pseudokodifferenz der Elementen a, b genannt. Das Element $\neg a \overset{\text{def}}{=} a \to \wedge$ wird für beliebige a, das Pseudokomplement von a genannt. Es folgt aus der oben ange-

führten Definition, dass jede Heytingsche Algebra distributiv ist und das Einselement V enthält. Jede Heytingsche Algebra A wird als eine abstrakte Algebra $\langle A, \wedge, V, +, \cdot, \rightarrow, \neg \rangle$ betrachtet. Der Begriff der Heytingschen Algebren ist dual zu dem wohl bekannten Begriff der Brouwerschen Algebren.

Die Klasse $H(X)$ aller offener Teilmengen eines topologischen Raumes X ist ein Beispiel einer Heytingschen Algebra. Der Zusammenhang zwischen den Heytingschen Operationen $\rightarrow$ und $\neg$ und topologischen und mengentheoretischen Operationen in X wird von den folgenden Gleichheiten festgestellt:

$$a \rightarrow b = \mathrm{Int}\,((X - a) + b) \qquad \neg a = \mathrm{Int}\,(X - a).$$

Der Verband $H(X)$ ist vollständig. Die obere Grenze in $H(X)$ stimmt mit der mengentheoretischen Vereinigung überein, die untere Grenze in $H(X)$ ist gleich dem offenen Kern des mengentheoretischen Durchschnittes. Bekanntlich (Stone [26], Tarski [27], McKinsey–Tarski [14]) ist eine beliebige Heytingsche Algebra einer Unteralgebra der Algebra $H(X)$ offener Teilmengen eines Raumes X isomorph.

Der Zusammenhang zwischen Heytingschen Algebren und dem intuitionistischen Aussagenkalküls S, der in den oben zittierten Arbeiten von Stone, Tarski und McKinsey–Tarski [15] untersucht wurde, kann so formuliert werden.

Sei A eine beliebige Heytingsche Algebra. Jede Formel α des intuitionistischen Aussagenkalküls lässt sich als ein Polynon α_A in A interpretieren. Zu diesem Zweck deuten wir die logischen Operationen folgendermassen: die Alternative als Vereinigung in A, die Konjunktion als Durchschnitt in A, die Implikation als Pseudokodifferenz in A und die Negation als Pseudokomplement in A. Dann sind die folgende Bedingungen untereinander äquivalent:

(i) α ist eine ableitbare Formel,

(ii) $\alpha_A \equiv V$ für jede Heytingsche Algebra A,

(iii) $\alpha_{H(X)} \equiv X$ für jede Heytingsche Algebra $H(X)$ aller offenen Teilmengen eines beliebigen topologischen Raumes X.

(iv) $\alpha_{H(X_0)} \equiv X_0$ in der Algebra $H(X_0)$ aller offenen Teilmengen eines separablen, in sich dichten, metrischen Raumes X_0.

Insbesondere können wir als den Raum X_0 in der Bedingung (iv)

den n-dimensionalen Euklidischen Raum ($n = 1, 2, \ldots$) annehmen (TARSKI [27], MCKINSEY–TARSKI [14], [15]).

Der Satz über die Äquivalenz der vier Bedingungen kann als ein Vollständigkeitssatz für den intuitionistischen Aussagenkalkül gelten.

Hierbei drängte sich natürlich die Frage auf: wie stellen sich vom topologischen Standpunkte aus mehr komplizierte, reichere logische Systeme, nämlich der engere intuitionistische Prädikatenkalkül S^* und die elementaren, formalisierten intuitionistischen Theorien dar?

Sei J eine nicht leere Menge und sei A eine vollständige Heytingsche Algebra. Jede Formel α von S^* lässt sich als ein auf J definierte Funktional $\alpha_{J,A}$ mit Werte in A interpretieren. Zu diesem Zweck deuten wir die Primzeichen von S^* folgendermassen: Individuenvariablen als die die Menge J durchlaufende Variablen, die Prädikate als die auf J definierte Funktionen deren Werte zu A gehören, die logische Aussagenoperationen als die entsprechende Operationen in A, das Allzeichen $\prod_x$ als die untere Grenze in A wenn x die Menge J durchläuft, und das Seinzeichen $\sum_x$ als obere Grenze in A, wenn x die Menge J durchläuft.

Diese Weise der Interpretation der Formeln α des Heytingschen Prädikatenkalküls als Funktionale $\alpha_{J,A}$ wurde von MOSTOWSKI [16] bemerkt. Er hat darauf hingewiesen, dass für jede ableitbare Formel α und beliebige J und A

$$(*) \qquad \alpha_{J,A} \equiv V$$

gilt. Diese Eigenschaft wurde von ihm bei den Beweisen der Unableitbarkeit in S^* gewisser Tautologien des klassischen Prädikatenkalküls angewandt [16]. Tatsächlich eignet sich diese Methode zu diesem Zweck besonders gut. Sie ermöglicht auch andere bekannte Resultate (z.B. dieses von HEYTING [7] das auch von KLEENE [10] und NELSON [17] bewiesen wurde, dieses von KLEENE [11]) über Unableitbarkeit von Formeln zu gewinnen.

MOSTOWSKI [16] hat die Frage gestellt, ob die Eigenschaft (*) alle ableitbare Formeln in S^* charakterisiert, insbesondere ob eine Formel α dann und nur dann ableitbar ist wenn die Bedingung (*) für die Menge J_0 aller natürlicher Zahlen und für die Heytingsche Algebra $H(X)$ aller offenen Teilmengen der Geraden gilt.

Die positive Antwort auf den ersten Teil der Frage wurde von RASIOWA [18] gegeben: es gibt eine vollständige Heytingsche Algebra A_0 so dass aus

$$(**) \qquad \alpha_{J_0, A_0} \equiv V$$

folgt, dass α ableitbar in S^* ist. J_0 bezeichnet hier die Menge aller natürlicher Zahlen.

Eine partielle Lösung desselben Teiles des Problems wurde gleichzeitig von HENKIN gewonnen [4].

Der zweite Teil dieser Frage steht noch offen. Gewisse Teilergebnisse wurden allerdings erreicht. RASIOWA und SIKORSKI [21] haben nachgewiesen, dass als di adequate Algebra A_0 in (**) die Algebra $H(X_0)$ offener Teilmengen eines gewissen topologischen Raumes X_0 angenommen werden kann. Dieses Resultat kann noch verstärk werden, und zwar, wie SIKORSKI [24] aufzeigte, als topologischer Raum X_0 in dem letzten Satz kann eine Menge der irrationalen Zahlen angenommen werden.

Die oben angeführte Interpretation der Formeln des Heytingschen Prädikatenkalküls gestattet den semantischen Begriff der Erfüllbarkeit von TARSKI [28] so zu modifizieren, dass dieser Begriff in diesem Falle angewandt werden könnte. Im weiteren wird dieser Begriff in grossen Zügen erläutert.

Sei J eine fixierte Menge und A eine fixierte volständige Heytingsche Algebra. Sei ausserdem $\mathfrak{M}(J, A)$ eine festgestellte Funktion, die jedem Prädikat F von S^* eine auf J definierte Funktion $F_{\mathfrak{M}}$ zuordnet, deren Werte zu der Algebra A gehören. Diese Funktion $\mathfrak{M}(J, A)$ wird ein Pseudomodell in J und A genannt. Für jede Formel α ohne freie Variable besitzt ihr entsprechendes Funktional $\alpha_{J,A}$ für die Werte der von $\mathfrak{M}(J, A)$ fixierten Argumenten einen Wert $\alpha_{\mathfrak{M}}$ der zu A gehört. Es wird gesagt werden dass α in $\mathfrak{M}(J, A)$ erfüllbar ist, wenn $\alpha_{\mathfrak{M}} = V$ gilt. Wenn $\alpha_{\mathfrak{M}}$ gleich V für jedes Pseudomodell $\mathfrak{M}(J, A)$ ist, dann werden wir sagen dass α allgemein gültig ist.

Wenn man einen solchen Begriff der Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit annimt, dann kann jeder der oben angeführten Sätze von RASIOWA [18], RASIOWA–SIKORSKI [21] und SIKORSKI [24] als Gödelscher Vollständigkeitssatz [1] behandelt werden. Neben dem obigen Satz lassen sich andere grundlagende logische Sätze auf den Fall des Heytingschen Prädikatenkalküls übertragen. Zum Beispiel wurde zu dem SKOLEM–LÖWENHEIMschen Satz [13], [25]

ein analogisches Ergebnis von RASIOWA–SIKORSKI [21] bewiesen. Es wurde gezeigt, dass ein solcher topologischer Raum X_0 existiert, der folgende Eigenschaft hat: wenn eine beliebige Formel α in einer Algebra A und in einer Menge J erfüllbar ist, so ist α erfüllbar in der Algebra $H(X_0)$ und in der Menge J_0 aller natürlicher Zahlen. Als X_0 kann man eine Menge irrationaler Zahlen annehmen. Die Heytingsche Algebra $H(X_0)$ spielt die Rolle der Booleschen–Zweielementenalgebra in der klassischen Logik.

Gehen wir jetzt zu der Metatheorie der elementaren intuitionistischen Theorien über, die auch Funktionszeichen enthalten dürfen.

Jede Formel α solcher Theorie kann auch als ein Funktional $\alpha_{J,A}$ interpretiert werden. Die Funktionszeichen werden dabei als auf J definierte Funktionen mit Werten in J gedeutet. Der angenommene Begriff der Erfüllbarkeit gestattet in der üblichen Weise den grundlegenden Begriff des Modells einer Theorie einzuführen (RASIOWA [19]). Nehmen wir an, dass die Axiomen der behandelten Theorien gewisse Formeln ohne freie Variablen sind. Sei $\mathfrak{M}(J, A)$ ein Pseudomodell einer Theorie, d.h. eine fixierte Interpretation der Prädikaten und der Funktionen. Ein Pseudomodell $\mathfrak{M}(J, A)$ wird dann ein Modell genannt werden, wenn jedes Axiom in $\mathfrak{M}(J, A)$ erfüllbar ist.

Die oben angeführten Modelle intuitionistischer Theorien haben analoge Eigenschaften wie die semantischen Modelle der klassischen Theorien. Zum Beispiel (RASIOWA [19]):

(1) Jede widerspruchsfreie Theorie hat ein Modell in der Menge J_0 aller natürlicher Zahlen. Man kann noch beweisen, dass ein adäquates Modell $\mathfrak{M}_0$ für jede Theorie existiert, d.h. so ein Modell, dass eine beliebige Formel α ohne freie Variablen dann und nur dann ableitbar ist, wenn sie in $\mathfrak{M}_0$ erfüllbar ist.

(2) Jede in einer Theorie ableitbare Formel ohne freie Variablen ist in jedem Modell dieser Theorie erfüllbar.

(3) Wenn eine Theorie ein Modell besitzt, dann ist sie widerspruchsfrei.

Der Begriff des intuitionistischen Modells ist brauchbar zum beweisen anderer Sätze der Metatheorie, insbesondere der ε-Sätze für formalisierte intuitionistische Theorien. Der erste ε-Satz kann für diese Theorien in der vollen Allgemeinheit übertragen werden (RASIOWA [20]). Der zweite ε-Satz ist gültig für die intuitionistischen Theorien in der folgenden Form: Sei T eine widerspruchsfreie

intuitionistische Theorie, deren Axiome eine pränexe Normalform haben. Die Theorie T^*, die aus der Theorie T mit Hilfe der Skolemschen Methode der Elimination der Quantoren erhalten wird, ist auch widerspruchsfrei. Darüber hinaus wenn eine offene Formel α der Theorie T in der Theorie T^* ableitbar ist, ist sie ableitbar in T (RASIOWA [20]). Es ist nicht bekannt, ob die Voraussetzung dass α offen ist, tatsächliche Rolle spielt.

Die Beweismethode des zweiten ε-Satzes gestattet den Satz über die Elimination der Definition der Individuenkonstanten zu gewinnen. Die pränexe Normalform der Axiomen wird hier nicht vorausgesetzt.

Es ist nicht bekannt, ob der Satz über die Elimination der Definitionen der Funktionen auf den Fall der intuitionistischen Theorien verallgemeinert werden kann.

GÖDEL [2] hat bemerkt, dass der intuitionistische Aussagenkalkül von Heyting die folgende Eigenschaft hat: Wenn eine Alternative $\alpha+\beta$ ableitbar ist, so ist auch wenigstens eine der Formeln α, β ableitbar.

Diese Eigenschaft hat ebenfalls der Prädikatenkalkül von Heyting. Für den intuitionistischen Prädikatenkalkül gilt dabei noch folgende Eigenheit (RASIOWA–SIKORSKI [22]): Wenn eine Existenzformel $\sum_x \alpha(x)$ in diesem System ableitbar ist, so gibt es einen solchen Term ξ, dass die Formel $\alpha(\xi)$ auch ableitbar ist. Es folgt daraus, dass jede Formal die die pränexe Normalform hat, entscheitbar ist.

Die letzten Ergebnisse führen zu folgenden Verallgemeinerungen. Eine elementare intuitionistische Theorie wird konstruktiv genannt, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) wenn $\alpha+\beta$ eine in dieser Theorie ableitbare Formel ist, so ist wenigstens eine der Formeln α, β ableitbar,

(ii) wenn $\sum_x \alpha(x)$ eine ableitbare Formel ist, so gibt es einen Term ξ, so dass $\alpha(\xi)$ auch ableitbar ist. Eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür dass eine intuitionistische Theorie konstruktiv sei, wurde von RASIOWA [19] angegeben. Die Bedingung ist schwer auszudrücken und würde die Einführung zusätzlicher Definitionen notwendig machen. Daher wird hier nur eine einfache hinreichende Bedingung angeführt, die aus dem oben angedeuteten Satz hervorgeht. Sie lautet wie folgt:

Sei Z die kleinste Menge der Formeln so, dass

(a) jede Primformel zu Z gehört,

(b) wenn α, β zu Z gehören, so gehört auch zu Z die Formel $\alpha \cdot \beta$,

(c) wenn α zu Z gehört, so gehören auch zu Z die Formel $\neg\beta$, $\beta \to \alpha$, $\prod_x \alpha$.

Wenn alle Axiome mit Ausnahme der Gleichheitsaxiomen zu Z gehören, dann ist die Theorie konstruktiv.

Wenn eine Theorie konstruktiv ist, so gilt für sie das folgende zum Herbrandschen Satz analoge Resultat (RASIOWA [19]): Für jede Formel α in der pränexen Normalform kann man effektiv eine Folge der offenen Formeln α_1, α_2, ... in solcher Weise zuordnen, dass α in dieser Theorie dann und nur dann ableitbar ist, wenn wenigstens eine der Formeln α_1, α_2, ... ableitbar ist.

Die Eigenschaft, dass aus der Ableitbarkeit einer Formel $\alpha+\beta$ die Ableitbarkeit wenigstens einer der Formeln α, β folgt, stellt für den intuitionistischen Aussagenkalkül keine charakteristische Eigenschaft dar.

KREISEL und PUTNAM [29] haben gezeigt, dass der Aussagenkalkül S_1, der aus dem intuitionistischen Aussagenkalkül durch Beifügung der Formel

$$(1) \qquad (\neg p \to q+r) \to ((\neg p \to q)+(\neg p \to r))$$

entsteht, auch diese Eigenschaft besitzt.

Die Methode der topologischen Interpretation der Formeln kann auch bei Untersuchungen des intuitionistischen Aussagenkalküls mit Quantoren angewandt werden (RASIOWA–SIKORSKI [23]). Wir erhilten hier Sätze über die Vollständigkeit und folgenden Satz über die Konstruktivität: Wenn eine Alternative $\alpha+\beta$ ableitbar ist, dann ist entweder α oder β ableitbar; wenn $\sum_p \alpha(p)$ ableitbar ist, dann ist eine Substituition $\alpha(\beta/p)$ ableitbar.

Es wurde auch bewiesen, dass – im Gegensatz zu der klassischen Logik – eine unendliche Folge geschlossener nicht äquivalenter Formeln existiert. (Ein analoger Satz für Formeln des Heytingschen Aussagenkalküls ohne Quantoren, die nur eine Variable enthalten, wurde von MCKINSEY–TARSKI [15] nachgewiesen.)

Die von uns angewandte Methode der Interpretation unterscheidet sich im Falle des Aussagenkalküls darin, dass die Voll-

ständigkeit der betrachteten Heytingschen Algebren nicht vorausgesetzt wird. Das Problem, ob man sich hier nur auf vollständige Heytingsche Algebren beschränken kann, bleibt offen.

Die oben besprochene Methode der topologischen Interpretation der formalisierten intuitionistischen Logik kann auch bei Untersuchungen gewisser Teilsysteme, wie z.B. der positiven [8] oder minimalen [9] Logik angewandt werden (Rasiowa–Sikorski [21], [23]). Insbesondere kann man mit Hilfe dieser Methode beweisen dass eine Formel ohne Negationssymbol dann und nur dann in der intuitionistischer Logik ableitbar ist, wenn sie in der positiven Logik ableitbar ist (Rasiowa–Sikorski [21]). Analog dazu kann man beweisen, dass die intuitionistische Logik ein Teilsystem der Modallogik von Lewis ist (McKinsey–Tarski [15], Rasiowa–Sikorski [21], [23]).

Die bisherigen Untersuchungen zeigen dass die Anwendung von topologischen Methoden zurMetatheorie der formalisierten Systeme,, die auf der Grundlage der intuitionistischen Logik aufgebaut sind auf sehr einfache Weise zu interessanten Ergebnissen auf diesem Gebiete führt. Diese Methoden bilden ein beachtenswertes Forschungsthema und können zweifellos weitere spezifische Eigenschaften dieser Systeme entdecken.

BIBLIOGRAPHY

[1] K. Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik, 37 (1930), 349–360.

[2] ————, Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, Erg. Koll. Wien, 4 (1933), 39–40.

[3] P. R. Halmos, Polyadic Boolean algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 40 (1954), 296–301.

[4] L. Henkin, An algebraic characterization of quantifiers, Fund. Mathem. 37 (1950), 63–74.

[5] J. Herbrand, Recherches sur la théorie de la démonstration (Travaux de la Soc. des Sci. et des Lettres de Varsovie, cl. III, Warszawa 1930.

[6] A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitz. der Preuss. Akad. der Wissen. Phys. mathem. Klasse, 1930, pp. 42–56.

[7] ————, Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, Ibid., pp. 57–71, 158–169.

[8] D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, Band II, Berlin 1939.

[9] I. Johansson, Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, Compositio Math. **4**, (1936).
[10] S. C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory, Jour. of Symb. Log. **10** (1945), 109–124.
[11] ————, Introduction to metamathematics, New York, 1952.
[12] C. J. Lewis and C. H. Langford, Symbolic logic, New York, 1932.
[13] L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Ann., **76** (1915), 447–470.
[14] J. C. C. McKinsey and A. Tarski, On closed elements in Closure algebras, Ann. of Math. **47** (1946), 122–162.
[15] ————, Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting, Journ. of Symb. Log. **13** (1948), 1–15.
[16] A. Mostowski, Proofs of Non-deducibility in Intuitionistic Functional Calculus, Ibid., pp. 204–207.
[17] D. Nelson, Recursive functions and intuitionistic number theory, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 307–368.
[18] H. Rasiowa, Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis, Fund. Mathem. **38** (1951), 101–126.
[19] ————, Algebraic models of axiomatic theories, Ibid. Vol. 41 (1954), 291–310.
[20] ————, On ε-theorems, Ibid. Vol. 43, 2 (1956), 154–165 (Errata Vol. 44).
[21] H. Rasiowa and R. Sikorski, Algebraic treatment of the notion of Satisfiability, Ibid. Vol. 40 (1953), 62–95.
[22] ———— and ————, On existential theorems in non-classical functional calculi, Ibid. Vol. 41 (1954), 21–28.
[23] ———— and ————, An application of lattices to logic, Ibid., Vol. 42 (1955), 83–100.
[24] R. Sikorski, A theorem on Non-Classical Functional Calculi, Bull. de l'Ac. Pol. des Sci. Cl. III, 4 No 10, 1956, pp. 649–650.
[25] T. Skolem, Logisch-kombinatirische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Mat.-natur. klasse 1919, no 3, 37 pp.
[26] M. H. Stone, Topological Representations of Distrubutive Lattices and Brouwerian Logics, Čas. pro pěstováni Mat. a Fys. **67** (1937-38), 1–25.
[27] A. Tarski, Der Aussagenkalkül und die Topologie, Fund. Mathem. **31** (1938), 103–134.
[28] ————, Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych, Prace Tow. Nauk. Warsz. Wydz. III, 1933, pp. 1–116.
[29] G. Kreisel and H. Putnam, Eine Unableitbarkeitsbeweismethode für den intuitionistischen Aussagenkalkül, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, January 1957.

DER HEYTINGSCHE PRÄDIKATENKALKUL UND METRISCHE RÄUME

ROMAN SIKORSKI
Instytut Matematyczny PAN, Warsaw

Ich werde über die topologische Interpretation des intuitionistischen Prädikatenkalkul von A. Heyting sprechen.

Sei X ein topologischer Raum und sei $H(X)$ die Klasse aller offener Untermengen von X. Wir werden die Klasse $H(X)$ als eine abstrakte Algebra mit den folgenden vier Operationen betrachten:

$$(1)\qquad \begin{cases} A+B \text{ (die mengentheoretische Vereinigung)} \\ A\cdot B \text{ (der mengentheoretische Durchschnitt)} \\ A\to B=\mathrm{Int}\,((X-A)+B) \\ \neg A=\mathrm{Int}\,(X-A), \end{cases}$$

wo das Symbol Int den offenen Kern bezeichnet.

Jede Formel α des Heytingschen Prädikatenkalkuls kann als ein Polynom in der Algebra $H(X)$ betrachtet werden, das wir mit dem Symbol α_X bezeichnet werden. Zu diesem Zwecke werden wir betrachten:

1) die Individualvariablen $x, y, z, \ldots$ als Symbole beliebiger natürlicher Zahlen,

2) die *Primformeln* $R(x, y, \ldots, z), \ldots$ als beliebige offene Untermengen von X,

3) die logische Zeichen $+, \cdot, \to, \neg$ als die Zeichen der oben eingeführten Operationen (1),

4) die Quantoren $\sum$ und $\prod$ als Zeichen der mengentheoretischen Operationen $\sum_{x=1}^{\infty}$ und $\mathrm{Int}\prod_{x=1}^{\infty}{}^{x}$.

Wir werden schreiben

$$(2)\qquad \alpha_X \equiv X,$$

wenn das Polynom α_X nur den Wert X annimmt.

A. Mostowski [1] hat bemerkt, dass wenn α in dem Heytingschen

Prädikatenkalkul beweisbar ist, dann gilt die Gleichung (2) für jeden topologischen Raum X. In der Arbeit von RASIOWA und mir [2] ist es bewiesen worden, dass, umgekehrt, wenn die Gleichung (2) für jeden topologischen Raum X gilt, dann ist α beweisbar in dem Heytingschen Prädikatenkalkul.

Jetzt werden wir das Problem untersuchen, ob wir in dem letzten Satz statt aller topologischer Räume nur gewisse Räume mit ziemlich regulären Eigenschaften, zum Beispiel nur metrische separable Räume, betrachten können. Die positive Antwort wird von einem strengeren Satz gegeben werden, den ich später formulieren werde.

Wir werden sprechen, dass ein topologischer Raum X *funktional frei* ist, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt:

(E) Für jede Formel α, wenn $\alpha_X \equiv X$, dann ist α beweisbar in dem Heytingschen Prädikatenkalkul.

Eigentlich werden wir hier nur über einen speziellen Fall der funktional freien Räume sprechen, nämlich über die freien Räume, die so definiert werden können.

Wir werden zwei Formeln α, β des Heytingschen Prädikatenkalkuls dann und nur dann identifizieren, wenn die Formel $\alpha \equiv \beta$ beweisbar ist. Auf diese Weise bekommen wir einen Verband L, den wir die *Lindenbaumsche Algebra* nennen werden. Das Element von L, das von einer Formel α bestimmt wird, werden wir mit $|\alpha|$ bezeichnen. Die Verbandsoperationen $+$ und $\cdot$ werden von den folgenden Gleichheiten definiert:

$$|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|, \qquad |\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|. \tag{3}$$

Die logischen Zeichen $\rightarrow$ und $\neg$ induzieren in L noch zwei Operationen $\rightarrow$ und $\neg$:

$$|\alpha| \rightarrow |\beta| = |\alpha \rightarrow \beta|, \qquad \neg\,|\alpha| = |\neg\,\alpha|. \tag{4}$$

Es ist zu bemerken, dass

$$\sum_x |\alpha(x)| = |\sum_x \alpha(x)|, \quad \prod_x |\alpha(x)| = |\prod_x \alpha(x)|, \tag{5}$$

wo x an der linken Seite alle Individualvariablen durchläuft.

Wir sagen, dass ein topologischer Raum X *frei* ist, wenn L einer Unteralgebra von $H(X)$ isomorph ist. Dieser Isomorphismus soll die Operationen (3), (4), (5) auf die oben angeführte mengentheoretischen Operationen (siehe (1) und (4)) in $H(X)$ transformieren.

Es ist leicht zu zeigen, dass jeder freie topologische Raum auch funktional frei ist.

Die positive Antwort auf unsere Frage wird von dem folgenden Satz gegeben:

Satz. *Es gibt eine Menge X_0 irrationaler Zahlen, die ein freier Raum ist.*

Also:

Wenn $\alpha_{X_0} \equiv X_0$, dann ist α beweisbar in dem Heytingschen Prädikatenkalkul.

Die Existenz der freien topologischen Räume wurde früher bewiesen. In der oben zitierten Arbeit von Rasiowa und mir wurde ein T_0-Raum X_1 mit einer abzählbaren offenen Basis definiert, der frei ist. Es war aber lange Zeit nicht bekannt, ob es einen freien metrischen separabeln Raum gibt.

Mein Satz folgt aus den zwei folgenden Hilfsätzen:

Hilfsatz 1. *Für jeden T_0-Raum X_1 mit einer abzählbaren offenen Basis gibt er eine Menge X_0 irrationaler Zahlen und eine offene Abbildung f von X_0 auf X_1.*

Eine Abbildung f ist *offen*, wenn sie stetig ist und offene Mengen auf offene Mengen aufbildet.

Dieser Hilfsatz wurde von A. Švarc bewiesen.

Hilfsatz 2. *Eine Abbildung f eines Raumes X_0 in einen Raum X_1 dann und nur dann offen ist, wenn*

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(f^{-1}(A))$$

für jede Menge $A \subset X_1$.

Dieser Hilfsatz wurde von Wallace bewiesen [4].

Jetzt sei X_1 ein freier T_0-Raum mit einer abzählbaren offenen Basis. $H(X_1)$ enthält isomorph die Lindenbaumsche Algebra:

$$L \underset{is}{\subset} H(X_1).$$

Es folgt aus dem ersten Hilfsatz, dass $X_1 = f(X_0)$, wo f offen ist und X_0 eine Menge irrationaler Zahlen ist. Es folgt aus dem zweiten Hilfsatz, dass die Abbildung

$$h(A) = f^{-1}(A) \qquad \text{für } A \in H(X_1)$$

ein Isomorphismus von $H(X_1)$ in $H(X_0)$ ist, d.h.

$$H(X_1) \underset{is}{\subset} H(X_0).$$

Also ist L in $H(X_0)$ isomorph enthalten:

$$L \underset{is}{\subset} H(X_0),$$

d.h. X_0 ist ein freier Raum.

Es ist zu bemerken, dass analogische Sätze auch für anderen nicht-klassischen Prädikatenkalkül gelten.

Der volle Beweis wird in meiner Arbeit [3] gegeben werden.

BIBLIOGRAPHY

[1] A. Mostowski, Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus. J. Symb. Log. **13** (1948), 204–207.

[2] H. Rasiowa and R. Sikorski, Algebraic treatment of the notion of satisfiability. Fund. Math. **40** (1953), 62–95.

[3] R. Sikorski, Some applications of interior mappings. Fund. Math. (to appear).

[4] A. D. Wallace, Some characterization of interior transformations. Amer. J. Math. **41** (1939), 757–763.

DER SATZ VOM MAXIMUM IN DER REKURSIVEN ANALYSIS

ERNST SPECKER

Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich

Das Ziel der Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes: Es gibt eine rekursive reelle Funktion, die ihr Maximum im Einheitsintervall in keiner rekursiven reellen Zahl annimmt [1]).

Zum Beweis konstruieren wir eine Funktion f, deren Argument- und Wertebereich die Menge der rationalen Zahlen ist und die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) Für all x gilt $0 \leqslant f(x) \leqslant 1/36$.

(2) Ist $x \leqslant 0$ oder $1 \leqslant x$, so ist $f(x) = 0$.

(3) Für alle x, x' gilt $|f(x) - f(x')| \leqslant |x - x'|$.

(4) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine rationale Zahl x, so dass $1/36 - 1/n < f(x)$.

(5) f ist primitiv rekursiv, d.h. es gibt zwei zweistellige primitiv rekursive Funktionen φ_1, φ_2 (mit der Menge der nicht negativen ganzen Zahlen als Argument- und Wertebereich), so dass für alle nicht negativen ganzen Zahlen m, n gilt $f\left(\frac{m}{n+1}\right) = \varphi_1(m,n)/\varphi_2(m,n) + 1$.

(6) Ist u eine rekursive Folge rationaler Zahlen mit einer rekursiven Konvergenzfunktion (d.h. gibt es rekursive Funktionen ψ_1, ψ_2 und μ, so dass $u(n) = \psi_1(n)/\psi_2(n) + 1$ und dass $|u(n) - u(n^*)| < 1/9^m$ für alle n, n^* mit $n, n^* \geqslant \mu(m)$), so ist $\lim_n f(u(n)) < 1/36$.

Damit wird der zu Beginn ausgesprochene Satz bewiesen sein: Auf Grund der gleichmässigen Stetigkeit (3) lässt sich f zu einer stetigen Funktion F erweitern, die auf der ganzen Zahlengeraden definiert ist; F ist nach (3) und (5) rekursiv reell. Das Maximum

---

[1]) Die Frage nach einer solchen Funktion ist gestellt in [1]. Sie könnte auch beantwortet werden auf Grund des Satzes von I. D. Zaspavskij [6]. Wie ich während des Kolloquiums erfahren habe, hat D. Lacombe den Satz über die Existenz einer solchen Funktion bereits 1955 ausgesprochen [4]; nach der Zusammenfassung des Vortrages von A. A. Markov wurde er auch von I. D. Zaslovskiĭ bewiesen.

von F im Einheitsintervall ist gleich 1/36, doch wird 1/36 nach (6) in keiner rekursiven reellen Zahl angenommen.

Die Funktion f wird konstruiert auf Grund einer rekursiven Verzweigungsfigur (über der Menge der natürlichen Zahlen), die keinen rekursiven Faden enthält. Wir definieren (in 6.2) eine solche Verzweigungsfigur – deren Existenz bekannt ist [3]) – mit Hilfe eines Paares rekursiv aufzählbarer disjunkter Mengen, die durch keine rekursive Menge getrennt werden können [2].

Der Satz von Bolzano–Weierstrass gilt in der rekursiven Analysis in dem Sinne, dass es zu einer rekursiven reellen Funktion F [2]) mit $F(0)=-1$, $F(1)=1$ eine rekursive reelle Zahl gibt, an der F verschwindet. Doch kann der Satz nicht konstruktiv bewiesen werden, denn es gibt eine rekursive Folge F_k von rekursiven reellen Funktionen mit $F_k(0)=-1$, $F_k(1)=1$, so dass für keine rekursive Doppelfolge $u(k, n)$ von rationalen Zahlen, welche für jedes k in n rekursiv konvergiert, für alle k gilt $\lim_n F_k(u(k, n))=0$.

1.1. Die endlichen Folgen der Zahlen 3 und 5 seien geordnet, und zwar in erster Linie nach der Länge und in zweiter Linie lexikographisch. A_n sei die n-te Folge in dieser Ordnung ($n=1, \ldots$) und $a(k, n)$ ($1 \leqslant k$) sei das k-te Glied der Folge A_n. Die Länge der Folge A_n sei gleich $1(n)$. Die Funktionen $a(k, n)$ und $l(n)$ sind primitiv rekursiv und eine einfache Abschätzung zeigt, dass $n \leqslant 2^{l(n)+1}-3$.

1.2. Definition einer primitiv rekursiven Folge rationaler Zahlen:

$$r(n)=\sum_{k=1}^{l(n)} \frac{a\,(k,n)}{9^k}$$

Es ist $0 \leqslant r(n) \leqslant 5/8$.

1.3. Ist $|r(m)-r(n)| \leqslant \frac{1}{9^{l(m)}}$, so ist eine der Folgen A_m, A_n eine Fortsetzung der andern.

Beweis. Ist keine der Folgen A_m, A_n eine Fortsetzung der andern, so existiert ein k, $k \leqslant l(m)$, $l(n)$, so dass $a(j, m)=a(j, n)$ für $j \leqslant k-1$ und $a(k, m) \neq a(k, n)$. Es sei ohne Einschränkung der Allge-

---

[2]) Zum Begriff der rekursiven reellen Funktion — der hier weiter zu fassen ist als beim obigen Existenzsatz zum Satz vom Maximum — vergleiche man etwa [5].

meinheit $a(k, m) < a(k, n)$, d.h. $a(k, m) = 3$ und $a(k, n) = 5$. Eine leichte Abschätzung ergibt dann

$$r(n) - r(m) > \frac{1}{9^{l(m)}}.$$

2.1. Definition einer Funktion φ (mit Menge der rationalen Zahlen als Argument- und Wertebereich). Es sei $\varphi(x) = 0$ für $x \leqslant 0$ und für $1 \leqslant x$; es sei $\varphi(x) = x$ für $0 \leqslant x \leqslant 2/9$; es sei $\varphi(x) = 2/9$ für $2/9 \leqslant x \leqslant 7/9$; es sei $\varphi(x) = 1 - x$ für $7/9 \leqslant x \leqslant 1$. Es ist $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant |x - x'|$ und die Funktion φ ist primitiv rekursiv.

2.2 Definition einer rekursiven Funktionenfolge:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{9^{l(n)}} \varphi(9^{l(n)}[x - r(n)]).$$

Die folgenden Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Definition:

$$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \frac{2}{9^{l(n)+1}}$$

$$\varphi_n(x) = 0 \text{ für } x \leqslant r(n) \text{ und für } r(n) + \frac{1}{9^{l(n)}} \leqslant x,$$

$$\varphi_n(x) = \frac{2}{9^{l(n)+1}} \text{ für } r(n) + \frac{2}{9^{l(n)+1}} \leqslant x \leqslant r(n) + \frac{7}{9^{l(n)+1}},$$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(x')| \leqslant |x - x'|.$$

2.3. Besitzt die reelle Zahl x_0 keine Umgebung, in der entweder φ_m oder φ_n identisch verschwindet (was insbesondere der Fall ist bei rationalem x_0 mit $\varphi_m(x_0) \neq 0$ und $\varphi_n(x_0) \neq 0$), so ist

$$|r(m) - r(n)| \leqslant \frac{1}{9^{l(m)}} \text{ oder } |r(m) - r(n)| \leqslant \frac{1}{9^{l(n)}}$$

und eine der Folgen A_m, A_n ist Fortsetzung der andern.

Beweis. Gibt es in jeder Umgebung von x_0 Zahlen x, x' mit $\varphi(x) \neq 0$ und $\varphi(x') \neq 0$, so ist

$$r(m) \leqslant x_0 \leqslant r(m) + \frac{1}{9^{l(m)}} \text{ und } r(n) \leqslant x_0 \leqslant r(n) + \frac{1}{9^{l(n)}}.$$

Daraus folgt die Behauptung über die Ungleichung und nach 1.3, dass eine der Folgen A_m, A_n Fortsetzung der andern ist.

2.4. Zu jeder natürlichen Zahl n und jeder reellen Zahl x_0 gibt es eine solche Umgebung U von x_0, dass von den Funktionen $\varphi_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ höchstens eine nicht konstant in U ist.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass zu einer reellen Zahl x_0 und natürlichen Zahlen m, n mit $m \neq n$ eine solche Umgebung U von x_0 gibt, dass eine der Funktionen φ_m, φ_n in U konstant ist. Verschwindet eine der Funktionen in einer Umgebung von x_0 identisch, so ist sie daselbst konstant. Wir dürfen somit annehmen, dass $r(m) \leqslant x_0 \leqslant r(m) + \frac{1}{9^{l(m)}}$, $r(n) \leqslant x_0 \leqslant r(n) + \frac{1}{9^{l(n)}}$ und dass nach 2.3 eine der Folgen A_m, A_n die andere fortsetzt. Es sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $l(m) \leqslant l(n)$. Dann ist $l(m) < l(n)$, denn aus $l(m) = l(n)$ folgt $A_m = A_n$ und $m = n$. Es sei $a(k, n) = b(k)$; dann ist

$$r(m) = \sum_1^{l(m)} \frac{b(k)}{9^k}, \qquad r(n) = \sum_1^{l(n)} \frac{b(k)}{9^k}$$

Somit ist

$$\sum_1^{l(n)} \frac{b(k)}{9^k} \leqslant x_0 \leqslant \sum_1^{l(n)} \frac{b(k)}{9^k} + \frac{1}{9^{l(n)}};$$

da $b(k) = 3$ oder $b(k) = 5$ für $k \leqslant l(n)$, so ist

$$r(m) + \frac{2}{9^{l(m)+1}} < \sum_1^{l(m)} \frac{b(k)}{9^k} + \frac{3}{9^{l(m)+1}} \leqslant \sum_1^{l(n)} \frac{b(k)}{9^k} \leqslant x_0;$$

ferner

$$\sum_1^{l(n)} \frac{b(k)}{9^k} < \sum_1^{l(m)} \frac{b(k)}{9^k} + \sum_{l(m)+1}^{\infty} \frac{5}{9^k} \leqslant r(m) + \frac{5}{9^{l(m)+1}} \frac{9}{8}$$

und somit

$$x_0 \leqslant r(n) + \frac{1}{9^{l(n)}} < r(m) + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{9^{l(m)}} + \frac{1}{9^{l(m)+1}} \leqslant r(m) + \frac{7}{9^{l(m)+1}}.$$

Es ist demnach $r(m) + \frac{2}{9^{l(m)+1}} < x_0 < r(m) + \frac{7}{9^{l(m)+1}}$ und φ_m ist in einem Intervall um x_0 konstant.

2.5. Ist $\delta(k) = 0$ oder $\delta(k) = 1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ und $\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \delta(k) \varphi_k(x)$, so ist $|\psi_n(x) - \psi_n(x')| \leqslant |x - x'|$.

Beweis. Sei x_0 eine reelle Zahl; x_0 besitzt eine Umgebung U, in welcher höchstens eine der Funktionen $\varphi_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ nicht konstant ist. Ist dies die Funktion φ_m, so ist für $x, x' \in U$:

$$|\psi_n(x) - \psi_n(x')| = |\varphi_m(x) - \varphi_m(x')| \leqslant |x - x'|,$$

woraus die Behauptung folgt.

2.6. Ist x eine rationale Zahl, $x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c(k)}{9^k}$ ($c(k)$ ganz, $0\leqslant c(k)\leqslant 8$) und $\varphi_n(x)\neq 0$, so ist $c(k)=a(k,n)$ für $1\leqslant k\leqslant l(n)$.

Beweis. Ist $\varphi_n(x)\neq 0$, so ist

$$\sum_{k=1}^{l(n)}\frac{a(k,n)}{9^k}<\sum_{1}^{\infty}\frac{c(k)}{9^k}<\sum_{1}^{l(n)}\frac{a(k,n)}{9^k}+\frac{1}{9^{l(n)}}$$

und daher $c(k)=a(k,n)$ für $1\leqslant k\leqslant l(n)$.

3.1. Es sei P ein primitiv rekursives Prädikat und ϑ eine primitiv rekursive Funktion eines rationalen Argumentes und mit ganzzahligen Werten mit den folgenden Eigenschaften:

1) P trifft auf unendlich viele Zahlen zu.

2) Gilt $P(n)$ und ist A_m ein Anfangsstück von A_n (d.h. ist $a(k,m)=a(k,n)$ für $k\leqslant l(m)$), so gilt $P(m)$.

3) Ist x rational, $x=\sum_{1}^{\infty}\frac{c(k)}{9^k}$ ($c(k)$ ganz, $0\leqslant c(k)\leqslant 8$), so gibt es entweder ein k mit $k\leqslant\vartheta(x)$ und $c(k)\neq 3,5$ oder P trifft nicht zu auf die Nummer der Folge $(c(1),\ldots,c(\vartheta(x)))$ (in der in 1.1 gegebenen Abzählung der Folgen aus Zahlen 3, 5).

χ sei die charakteristische Funktion des Prädikates P, d.h. $\chi(n)=0$ oder $\chi(n)=1$ und $\chi(n)=1$, genau wenn $P(n)$.

3.2. Sei $\varkappa(x)=2^{\vartheta(x)}-2$; dann ist $\chi(n)\,\varphi_n(x)=0$ für $\varkappa(x)<n$.

Beweis. Es sei $x=\sum_{1}^{\infty}\frac{c(k)}{9^k}$ und $\varphi_n(x)\neq 0$. Dann ist nach 2.6 $c(k)=a(k,n)$ für $k\leqslant l(n)$. Sein nun $\chi(n)=1$; dann trifft P zu auf die Nummern der Folgen, die Anfangsstücke der Folge mit der Nummer n sind (Bedingung 2) in 3.1; Abzählung der Folgen in 1.1). Die Folge mit der Nummer n ist die Folge

$$(a(1,n),\ldots,a(l(n),n))=(c(1),\ldots,c(l(n))).$$

Nach Bedingung 3) in 3.1 trifft P nicht zu auf die Nummer der Folge $(c(1),\ldots,c(\vartheta(x)))$, es ist somit $l(n)<\vartheta(x)$. Nun ist (1.1) $n\leqslant 2^{l(n)+1}-3\leqslant 2^{\vartheta(x)}-3<\varkappa(x)$.

4.1. Definition einer primitiv rekursiven Funktion f (mit Menge der rationalen Zahlen als Argument- und Wertebereich):

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\varkappa(x)}\chi(n)\;\varphi_n(x).$$

Aus 2.1 folgt unmittelbar, dass $0 \leqslant f(x)$ und $f(x) = 0$ für $x \leqslant 0$ und für $1 \leqslant x$.

4.2. Es ist $|f(x) - f(x')| \leqslant |x - x'|$.

Beweis. Sei $m \geqslant \varkappa(x), \varkappa(x')$; dann ist $f(x) = \psi_m(x)$, $f(x') = \psi_m(x')$ und die behauptete Ungleichung folgt nach 2.5.

4.3. Es ist $f(x) \leqslant 1/36$.

Beweis. Es ist $f(x) \leqslant \sum \varphi_n(x)$ und nach 2.2 ist $\varphi_n(x) \leqslant \frac{2}{9^{l(n)+1}}$. Ist $\varphi_j(x) \neq 0$ und $\varphi_k(x) \neq 0$, so ist nach 2.3 eine der Folgen A_j, A_k eine Fortsetzung der andern. Es gibt somit zu m höchstens eine Zahl n mit $l(n) = m$ und $\varphi_n(x) \neq 0$. Somit ist

$$f(x) \leqslant \sum_1^\infty \frac{2}{9^{m+1}} = \frac{1}{36}.$$

4.4. Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es eine rationale Zahl x mit $f(x) \geqslant \frac{1}{36}\left(1 - \frac{1}{9^m}\right)$.

Beweis. Das Prädikat P trifft auf unendlich viele Zahlen zu und es gibt somit eine Zahl n^* mit $P(n^*)$ und $l(n^*) \geqslant m$. Die Folge $(a(1, n^*), \ldots, a(m, n^*))$ besitzt dann (nach Bedingung 2) in 3.1) eine Nummer n, auf die P ebenfalls zutrifft. Es sei

$$a(k, n^*) = a(k, n) = a(k) \ (1 \leqslant k \leqslant m = l(n)); \ x_n = r(n) + \frac{1}{3 \cdot 9^m}.$$

Es ist $\varphi_n(x_n) = \frac{2}{9^{m+1}}$. Es sei $p < m$ und q die Nummer der Folge $(a(1), \ldots, a(p))$; es ist $\chi(q) = 1$. Wir wollen zeigen, dass $\varphi_q(x_n) = \frac{2}{9^{p+1}}$. Es ist

$$r(q) + \frac{2}{9^{p+1}} = \sum_1^p \frac{a(k)}{9^k} + \frac{2}{9^{p+1}} \leqslant \sum_1^{p+1} \frac{a(k)}{9^k} \leqslant x_n;$$

ferner

$$x_n = \sum_1^m \frac{a(k)}{9^k} + \frac{3}{9^{m+1}} \leqslant \sum_1^p \frac{a(k)}{9^k} + \sum_{p+1}^{m+1} \frac{5}{9^k} \leqslant r(q) + \frac{7}{9^{p+1}}$$

zusammengefasst somit

$$r(q) + \frac{2}{9^{p+1}} \leqslant x_n \leqslant r(q) + \frac{7}{9^{p+1}} \text{ und daher } \varphi_q(x_n) = \frac{2}{9^{p+1}}.$$

Da es zu jedem k mit $1 \leqslant k \leqslant m$ eine Zahl j gibt mit $\varphi_j(x_n) = \frac{2}{9^{k+1}}$,

so ist

$$f(x_n) \geqslant \sum_1^m \frac{2}{9^{k+1}} = \frac{1}{36}\left(1 - \frac{1}{9^m}\right).$$

5.1. Ist $0 \leqslant t(k) \leqslant 1$ und $\sum_1^m \frac{2}{9^{k+1}} \leqslant \sum_1^\infty t(k) \frac{2}{9^{k+1}}$, so ist $t(m) \neq 0$.
Der Beweis ergibt sich durch eine leichte Abschätzung.

5.2. Ist $e(k)$ gleich 0, 1 oder -1 und $\left| \sum_1^m \frac{e(k)}{9^k} \right| < \frac{1}{9^m}$, so ist $e(k) = 0$ für $k = 1, \ldots, m$.

Beweis. Es sei $e(k) = 0$ für $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $p \leqslant m$. Es ist bei $p < m$

$$\frac{1}{9^{p+1}} \geqslant \frac{1}{9^m} > \left| \sum_1^m \frac{e(k)}{9^k} \right| \geqslant \frac{|e(p)|}{9^p} - \sum_{p+1}^\infty \frac{1}{9^k} \geqslant \frac{|e(p)|}{9^p} - \frac{1}{8 \cdot 9^p}$$

und daher $|e(p)| < 1$, d.h. $e(p) = 0$. Der Fall $p = m$ ist klar.

5.3. Ist $f(v) \geqslant \sum_1^m \frac{2}{9^{k+1}}$, so gibt es ein n mit $l(n) = m$ und

$$\chi(n)\varphi_n(v) \neq 0.$$

Beweis. Da es zu jedem k höchstens ein n gibt mit $l(n) = k$ und $\varphi_n(v) \neq 0$ (2.3) und da $0 \leqslant \varphi_n(v) \leqslant \frac{2}{9^{l(n)+1}}$, so gibt es eine Folge t rationaler Zahlen $(0 \leqslant t(k) \leqslant 1)$, so dass $\varphi_n(v) = 0$ oder $\chi(n)\varphi_n(v) = t(l(n)) \frac{2}{9^{l(n)+1}}$ und dass $t(k) \neq 0$ nur dann, wenn es ein n gibt mit $\chi(n)\varphi_n(v) \neq 0$ und $l(n) = k$. Es ist dann

$$\sum_1^{\varkappa(v)} \chi(n)\,\varphi_n(v) = \sum_1^\infty t(k) \frac{2}{9^{k+1}}$$

und aus $f(v) \geqslant \sum_1^m \frac{2}{9^{k+1}}$ folgt nach 5.1, dass $t(m) \neq 0$ und damit nach der Definition der Folge t die Behauptung.

5.4. Ist $0 \leqslant v(m) \leqslant 1$, $v(m) = \sum_1^\infty \frac{v(k,m)}{9^k}$, $v(k,m)$ ganz $0 \leqslant v(k,m) \leqslant 8$, $v(k, m) = 3$ oder 5 für $k \leqslant m$ und $|v(m) - v(m^*)| < \frac{1}{9^{m+1}}$ für $m^* \geqslant m$, so ist $v(k, m) = v(k, k)$ für $k \leqslant m$.

Beweis. Es ist

$$\left| v(m) - \sum_{k=1}^{m} \frac{v(k,m)}{9^k} \right| \leqslant \frac{1}{9^m},$$

$$\left| v(m+1) - \sum_{k=1}^{m} \frac{v(k,m+1)}{9^k} \right| \leqslant \frac{5}{9^{m+1}} + \frac{1}{9^{m+1}}, \quad |v(m) - v(m+1)| < \frac{1}{9^{m+1}}$$

und somit

$$\left| \sum_{1}^{m} \frac{v(k,m) - v(k,m+1)}{9^k} \right| \leqslant \frac{1}{9^{m+1}} + \frac{6}{9^{m+1}} + \frac{1}{9^m} < \frac{2}{9^m}.$$

Nun ist $v(k, m) - v(k, m+1)$ gleich $0, 2$ oder -2 für $k \leqslant m$ und nach 5.2 daher $v(k, m) = v(k, m+1)$; für $k \leqslant m$ gilt somit $v(k, k) = v(k, m)$.

5.5. Gibt es eine (allgemein) rekursive Folge u rationaler Zahlen, welche rekursiv konvergiert und für welche $\lim_n f(u(n)) = \frac{1}{36}$, so gibt es eine rekursive Folge w der Zahlen 3, 5, so dass das Prädikat P zutrifft auf die Nummer jeder Folge $(w(1), \ldots, w(m))$.

Beweis. Es sei $|u(n) - u(n^*)| < \frac{1}{9^m}$ für $n, n^* \geqslant \mu(m)$, wobei μ eine rekursive Funktion ist. Da $f(x) = 0$ für $x \leqslant 0$ und für $1 \leqslant x$, dürfen wir annehmen, dass $0 \leqslant u(n) \leqslant 1$ für alle n. Es ist für $n \geqslant \mu(m+2)$

$$|f(u(n)) - f(u(\mu(m+2)))| \leqslant \frac{1}{81} \frac{1}{9^m}$$

und wegen

$$\lim_n f(u(n)) = \frac{1}{36}$$

$$f(u(\mu(m+2))) \geqslant \frac{1}{36} - \frac{1}{81} \frac{1}{9^m} \geqslant \frac{1}{36} \left(1 - \frac{1}{9^m}\right) \geqslant \sum_{1}^{m} \frac{2}{9^{k+1}}.$$

Setzen wir $v(m) = u(\mu(m+2))$, so ist somit $f(v(m)) \geqslant \sum_{1}^{m} \frac{2}{9^{k+1}}$ und nach 5.3 gibt es eine Zahl n, so dass $l(n) = m$, $\chi(n) = 1$ und $\varphi_n(v(m)) \neq 0$. Ist $v(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v(k,m)}{9^k}$ ($v(k, m)$ ganz, $0 \leqslant v(k, m) \leqslant 8$, $v(k, m)$ eine rekursive Funktion), so ist nach 2.6 $v(k, m) = a(k, n)$ für $k \leqslant l(n) = m$ und die Folge $(v(1, m), \ldots, v(m, m))$ besteht aus den Zahlen 3, 5 und besitzt in der Abzählung dieser Folgen die Nummer n; wegen

$\chi(n)=1$ gilt $P(n)$. Es ist $|v(m)-v(m^*)|<\frac{1}{9^{m+2}}$ für $m\leqslant m^*$, nach 5.4 ist somit $v(k, k)=v(k, m)$ für $k\leqslant m$. Setzen wir $v(k, k)=w(k)$, so erfüllt die Funktion w die gestellten Forderungen.

6.1. Es gibt ein primitiv rekursives Prädikat P mit den folgenden Eigenschaften: 1) P trifft auf unendlich viele Zahlen zu. 2) Gilt $P(n)$ und ist A_m ein Anfangsstück von A_n (d.h. ist $a(k, m)=$ $=a(k, n)$ für $k\leqslant l(m)\leqslant l(n)$), so gilt $P(m)$. 3) Es gibt keine rekursive Funktion w (mit den Werten 3, 5), so dass für jede Zahl m das Prädikat P zutrifft auf die Nummer der Folge $(w(1), \ldots, w(m))$.

Beweis. Es seien R und S zwei rekursiv aufzählbare disjunkte Mengen, welche durch keine rekursive Menge getrennt werden können. $R(m, n)$, $S(m, n)$ seien primitiv rekursive Prädikate, so dass $n\in R$, genau wenn $(Ex)R(x, n)$, $n\in S$, genau wenn $(Ex)S(x, n)$. $P(n)$ gelte genau dann, wenn für alle $k\leqslant l(n)$ folgendes gilt:

$$(Ex)(x\leqslant l(n)\ \&\ R(x, k))\rightarrow a(k, n)=3,$$
$$(Ex)(x\leqslant l(n)\ \&\ S(x, k))\rightarrow a(k, n)=5.$$

Dieses Prädikat ist primitiv rekursiv und erfüllt die obigen drei Bedingungen. Ad 1) Wir zeigen, dass es zu m eine solche Zahl n gibt, dass $l(n)=m$ und $P(n)$. Es sei $b(k)=3$, falls es ein x gibt mit $x\leqslant m$ und $R(x, k)$, $b(k)=5$ sonst $(k\leqslant m)$. Die Folge $(b(1), \ldots, b(m))$ habe die Nummer n: $b(k)=a(k, n)$ für $k\leqslant l(n)=m$. Es gilt für alle $k\leqslant l(n)$: $(Ex)(x\leqslant l(n)\ \&\ R(x, k))\rightarrow a(k, n)=3$ und, da R und S disjunkt, $(Ex)(x\leqslant l(n)\ \&\ S(x, n))\rightarrow a(k, n)=5$. Ad 2) Sei $a(k, m)=$ $=a(k, n)$ für $k\leqslant l(m)$, wobei $l(m)\leqslant l(n)$. Dann gilt für alle $k\leqslant l(n)$: $(Ex)(x\leqslant l(n)\ \&\ R(x, k))\rightarrow a(k, n)=3$, $(Ex)(x\leqslant l(n)\ \&\ S(x, k))\rightarrow$ $\rightarrow a(k, n)=5$; für $k\leqslant l(m)$ gilt somit a fortiori: $(Ex)(x\leqslant l(m)\ \&$ $\&\ R(x, k))\rightarrow a(k, m)=3$, $(Ex)(x\leqslant l(m)\ \&\ S(x, k))\rightarrow a(k, m)=5$. Ad 3) Es sei w eine rekursive Funktion (mit den Werten 3 und 5), so dass für alle Zahlen m das Prädikat P zutrifft auf die Nummer der Folge $(w(1), \ldots, w(m))$. Die Menge T, definiert durch $k\in T\equiv$ $w(k)=3$, ist dann rekursiv und trennt die Mengen R und S. Sei nämlich $k\in R$, d.h. es gelte $(Ex)R(x, k)$; m sei so gewählt, dass gilt $(Ex)(x\leqslant m\ \&\ R(x, k))$. Ist dann n die Nummer der Folge $(w(1), \ldots, w(m))$, d.h. ist $w(j)=a(j, n)$, $j\leqslant l(n)=m$, so gilt $P(n)$ und daher $(Ex)(x\leqslant l(n)\ \&\ R(x, k))\rightarrow a(k, n)=3$; es ist somit $w(k)=$ $=a(k, n)=3$, d.h. $k\in T$. Ist $k\in S$, so folgt ebenso $w(k)=5$, d.h. $k\notin T$.

6.2. Es gibt ein primitiv rekursives Prädikat Q und eine primitiv rekursive Funktion ϑ (eines rationalen Argumentes und mit ganzzahligen Werten) mit den folgenden Eigenschaften: 1) Q trifft zu auf unendlich viele Zahlen. 2) Gilt $Q(n)$ und ist A_m ein Anfangsstück von A_n, so gilt $Q(m)$. 3) Ist x rational, $x=\sum_1^\infty \frac{c(k)}{9^k}$ ($c(k)$ ganz, $0\leqslant c(k)\leqslant 8$), so gibt es entweder ein k mit $k\leqslant\vartheta(x)$ und $c(k)\neq 3, 5$ oder Q trifft nicht zu auf die Nummer der Folge $(c(1), \ldots, c(\vartheta(x)))$. 4) Es gibt keine rekursive Funktion w (mit den Werten 3, 5), so dass für jede Zahl m das Prädikat Q zutrifft auf die Nummer der Folge $(c(1), \ldots, c(m))$.

Bemerkung. Wird für ϑ eine allgemein rekursive Funktion zugelassen, so kann für Q das Prädikat P aus 6.1 gewählt werden. Die einer rationalen Zahl zugeordnete Folge c ist nämlich rekursiv und es gibt somit eine Zahl m, so dass die Folge $(c(1), \ldots, c(m))$ eine Zahl verschieden von 3, 5 enthält oder das P nicht zutrifft auf die Nummer der Folge.

Beweis. Es sei $q(j)=3$, falls j eine Quadratzahl ist, $q(j)=5$ sonst. P sei das Prädikat aus 6.1. $Q(n)$ gelte genau dann, wenn $a(2\,j, n)=q(j)$ für $2\,j\leqslant l(n)$ und wenn P zutrifft auf die Nummer der Folge $(a(1, n), a(3, n), \ldots, a(2\,j+1, n), \ldots, a(u, n))$ (wobei u die grösste ungerade Zahl kleinergleich $l(n)$ ist). ϑ sei eine primitiv rekursive Funktion mit folgender Eigenschaft: Ist x rational, $x=\sum_1^\infty \frac{c(j)}{9^j}$ ($c(j)$ ganz, $0\leqslant c(j)\leqslant 8$), so gibt es eine Zahl k mit $2\,k\leqslant\vartheta(x)$ und $c(2\,k)\neq q(k)$. Eine solche primitiv rekursive Funktion gibt es, da die Folge c von einer Stelle an periodisch ist und Länge von Vorperiode und von Periode primitiv rekursiv von x abhängen. Das Prädikat Q und die Funktion ϑ erfüllen die vier Bedingungen. Ad 1) Gilt $P(n)$, so trifft Q zu auf die Nummer der Folge $(b(1), \ldots, b(2\,l(n)+1))$, wobei $b(2j)=q(j)$ und $b(2j+1)=a(j, n)$, $j\leqslant l(n)$. Ad 2) Es gelte $Q(n)$ und A_m sei ein Anfangsstück von A_n. Es ist dann $a(2\,j, n)=q(j)$ für $2\,j\leqslant l(n)$ und somit auch $a(2\,j, m)=q(j)$ für $2\,j\leqslant l(m)$. Ferner trifft P zu auf die Nummer der Folge $(a(1, n), \ldots, a(u, n))$ (wobei u die grösste ungerade Zahl kleinergleich $l(n)$ ist) und somit auch auf die Nummer der Folge $(a(1,m), \ldots, a(u^*, m))$ (wobei u^* die grösste ungerade Zahl kleinergleich $l(m)$ ist), da die zweite Folge ein Anfangsstück der ersten ist. Ad 3) Ist x rational,

$x=\sum_1^\infty \frac{c(j)}{9^j}$ ($c(j)$ ganz, $0\leqslant c(j)\leqslant 8$), so gibt es eine Zahl k mit $2k\leqslant\vartheta(x)$ und $c(2k)\neq q(k)$. Ist dann $c(j)=3$ oder $c(j)=5$ für alle $j\leqslant\vartheta(x)$, so trifft Q nicht zu auf die Nummer der Folge $(c(1), \ldots, c(\vartheta(x)))$, da $c(2k)\neq q(k)$. Ad 4) Gibt es eine rekursive Funktion w, sodass für alle Zahlen m das Prädikat Q zutrifft auf die Nummer der Folge $(w(1), \ldots, w(m))$, so trifft bei $w^*(j)=w(2j-1)$ das Prädikat P zu auf alle Nummern von Folgen $(w^*(1), \ldots, w^*(m))$.

7.1. Es gibt eine primitiv rekursive Funktion f (mit Menge der rationalen Zahlen als Argument- und Wertebereich) mit folgenden Eigenschaften: $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{36}$, $f(x)=0$ für $x\leqslant 0$ und für $1\leqslant x$, $|f(x)-f(x')|\leqslant|x-x'|$; zu jedem m gibt es ein x mit

$$f(x)\geqslant\frac{1}{36}\left(1-\frac{1}{9^m}\right)\left(\text{d.h. } \operatorname*{Max}_x f(x)\geqslant\frac{1}{36}\right);$$

ist u eine rekursive Folge rationaler Zahlen, welche rekursiv konvergiert, so ist $\lim_n f(u(n))<\frac{1}{36}$.

Beweis. Es sei P ein primitiv rekursives Prädikat und ϑ eine primitiv rekursive Funktion, welche die vier Bedingungen in 6.2 erfüllen. Es sei f die einem solchen Paar in 4.1 zugeordnete primitiv rekursive Funktion. Es ist $0\leqslant f(x)$ und $f(x)=0$ für $0\leqslant x$ und für $1\leqslant x$ nach 4.1, $|f(x)-f(x')|\leqslant|x-x'|$ nach 4.2, $f(x)\leqslant\frac{1}{36}$ nach 4.3 und $\operatorname*{Max}_x f(x)\geqslant\frac{1}{36}$ nach 4.4. Gibt es eine rekursive Folge u rationaler Zahlen, welche rekursiv konvergiert und für welche $\lim_n f(u(n))=\frac{1}{36}$, so gibt es eine rekursive Folge der Zahlen 3, 5, so dass das Prädikat P zutrifft auf die Nummer jeder Folge $(w(1), \ldots, w(m))$ (5.5); dies widerspricht der Bedingung 4 in 6.2.

BIBLIOGRAPHY

[1] A. Grzegorczyk, Computable functionals. Fund. Math. **42** (1955), 168–202.

[2] S. C. Kleene, A symmetric form of Gödel's theorem, Indag. Math. **12** (1950), 244–246.

[3] ————, Proceedings Intern. Congress of Math. **1** (1950), 679–685.

[4] D. Lacombe, Extension de la notion de fonction récursive aux fonctions

d'une our plusieurs variables. Comptes Rendus. **240** (1955), 2478–2480; **241** (1955), 13–14, 151–153.

[5] E. Specker, Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. J. Symb. Log. **14** (1949), 145–148.

[6] I. D. Zaspavskij, Oprovéženié nékotoryh téorem klassičéskogo analiza v konstruktivnom analizé. Uspéhi Mat. Nauk. **10** (1955), 209–210.

VON OPERATIVEN MODELLEN DER AXIOMATISCHEN MENGENLEHRE

EDUARD WETTE

Philosophisches Seminar der Universität Kiel

Ich skizziere einen Weg, auf dem nach meinem Ermessen bewiesen werden kann, daß die generelle Kontinuumhypothese (Kh) und das Auswahlaxiom (Aw) formal unentscheidbar sind in einer Kodifikation der Zermeloschen Mengenlehre ($\mathfrak{M}_Z$) mit beziehungsweise ohne Auswahlaxiom, daß also

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{Kh}(\rightarrow \mathrm{Aw}) \\ \neg\,\mathrm{Kh} \wedge \mathrm{Aw} \\ \neg\,\mathrm{Aw} \end{array}\right\} \wedge \mathfrak{M}_Z \text{ [1]}$$

erfüllbar sind. Dabei beziehe ich mich auf die axiomatische Mengenlehre nach von Neumann/Bernays und im einzelnen auf formale Unabhängigkeit von den Axiomen der Gruppen A bis D aus Gödels Monographie 1940 [1], abgesehen von der Abschwächung des Fraenkelschen Ersetzungsaxioms C 4 zum Zermeloschen Aussonderungsaxiom (As):

$$\mathfrak{M}_Z \rightleftharpoons \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}\,1, 2, 3 \wedge \mathrm{As} \wedge \mathrm{D}.$$

Mein Plan geht auf Modelle aus, die nicht der axiomatischen Mengenlehre selbst entspringen [2]). Anlaß zur Suche nach einem externen Modell für die kodifizierte Zermelosche Mengenlehre bietet das Problem ihrer formalen Widerspruchsfreiheit. Wenn ein mengentheoretisches Axiomensystem dieser Art erfüllbar ist, dann ist es nach dem Skolemschen Relativitätssatz auch im Abzählbaren erfüllbar. Dies führt zu der Spekulation, daß die Axiome auch erfüllt werden könnten ohne irgendeine Berufung auf jene Vor-

---

[1]) Symbolik, abgesehen von der Punktation bei Quantoren (vgl. [4])), wie [3].

[2]) Durch das Fundierungsaxiom D, das restrictive axiom bei Bernays, ist die Fragestellung scharf zugespitzt. Vgl. auch die internen Resultate, die Mostowski 1939 und Specker 1952 erzielt haben.

stellung von einer Analogie des Unendlichen zum Endlichen, auf die sich die ursprünglich intendierte Interpretation der Axiome gründet.

Wegweisend auf der Suche nach einer Umdeutung mengentheoretischer Axiomensysteme, die sich strikt an die Auffassung vom Unendlichen als etwas Potentiellem hält, ist einerseits Gentzens Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein Kodifikat der Arithmetik, andererseits Lorenzens operative Einstellung zum Prozeß mathematischen Definierens und Beweisens. Lorenzen gelingt es, Satz für Satz eine operative Umdeutung der praktisch relevanten Teile der Analysis vorzunehmen [3]. Lorenzens Begriffsmodifikationen, die auf 'primäre' beziehungsweise 'quasiprimäre' Einschränkung der Aussagemittel seiner 'elementaren Sprachschichten' zugeschnitten sind [3]), und überhaupt solchen, die explizit definiert sind in bezug auf eine begrenzte Iteration selbst induktiv definierter Schichten, bleiben jedoch schon gewisse Sätze im Grenzgebiet zwischen Analysis und Ordinalzahltheorie unzugänglich, zum Beispiel der Cantor-Bendixsonsche Satz über abgeschlossene Mengen.

Im Laufe meiner Versuche, diesen Satz und darüber hinaus den Konfinalitätscharakter von Ordinalzahlen höherer Zahlklassen mit einer neuen Begriffsmodifikation umzudeuten, die induktiv definiert ist und die sich innerhalb jeder (alten) Schicht einschränkend auswirkt, bin ich nun auf ein operatives Modell der axiomatischen Mengenlehre gestoßen.

Die Errichtung eines passenden Rahmens für ein solches Modell, eine hinreichend umfassende operative Ordinalzahltheorie, vollführe ich in drei Etappen. Die Definition des Modells erfolgt in zwei weiteren Etappen, und diese beiden Etappen können dann (im selben Rahmen) so abgewandelt werden, daß sich die eingangs genannten Unabhängigkeiten ergeben. Während die erste Etappe eine bloß vorbereitende Rolle spielt, sind die übrigen konstitutiv an der schließlichen Modellkonstruktion beteiligt.

Vorweg will ich noch bemerken, daß ich im Verfolg des operativen Rahmens am Ende dahin gelangt bin, für jedes Entwicklungsstudium des operativ-inhaltlich Gemeinten ein Kodifikat aufzustellen.

---

[3]) '...' bezieht sich auf in [3] erklärte Begriffe.

I. Ohne Orientierung an der naiven Theorie der II. Zahlklasse ist es nicht leicht, einen genügend ausdrucksreichen Ansatz für die Sprachkonstruktion aufzufinden, die einer Schichtiteration zugrunde liegen soll. Im Hinblick auf Anwendungen bei induktiven Definitionen, die im allgemeinen einen beliebig verzweigten Regreß von definienda zu definientes besitzen, gehe ich nicht von den Wohlordnungen der Menge der Grundzahlen 1, 2, 3, ... aus, sondern von den Fundierungen. Eine binäre Relation R zwischen Grundzahlen heiße *fundierend*, wenn unter Benutzung der Abkürzungen

$$m \overset{R}{<} n \rightleftharpoons mRn \wedge \neg nRm$$

$$I(\prec ; \pi(m)) \rightleftharpoons \bigwedge_{m_0} \bigwedge_{m} m \prec m_0 \rightarrow \pi(m) . \rightarrow \pi(m_0) . \rightarrow \pi(m) \ ^{4})$$

für $\overset{R}{<}$ die Vorgängerinduktion $I(\overset{R}{<} ; \pi(m))$ gilt:

$$\mathrm{fd}(R) \rightleftharpoons \vdash I(\overset{R}{<} ; \pi(m)) \ ^{5}).$$

Fundierende Relationen brauchen keinerlei Eigenschaften totaler Ordnungen zu haben.

Um Ordinalzahlen aus fundierten Mengen statt aus wohlgeordneten zu abstrahieren, ist es auch ohne jeden operativen Hintergedanken schon vom naiven Standpunkt aus nicht ratsam, eine verwickelte Abschwächung des Isomorphiebegriffs anzugeben derart, daß Ordinalzahlen als Klassen abgeschwächt isomorpher fundierter Mengen herauskommen. Vielmehr empfiehlt es sich, einen derartigen Isomorphismus, falls er existiert, induktiv herzustellen. Ich definiere einen Niveauvergleich zwischen zwei fundierenden Relationen R und S folgendermaßen durch Vorgängerinduktion:

$$m_0 \overset{R}{\leqslant} \overset{S}{} n_0 \leftrightarrow \bigwedge_{\substack{m \\ \overset{R}{<} m_0}} \bigvee_{\substack{n \\ \overset{S}{<} n_0}} m \overset{R}{\leqslant} \overset{S}{} n.$$

Bezeichnet noch $\underset{\sqcup}{R}$ das Feld von R ($m \in \underset{\sqcup}{R} \rightleftharpoons \bigvee_n mRn \vee nRm$), dann liefert mir

$$R \leqslant S \rightleftharpoons \bigwedge_{\substack{m \\ \in \underset{\sqcup}{R}}} \bigvee_{\substack{n \\ \in \underset{\sqcup}{S}}} m \overset{R}{\leqslant} \overset{S}{} n$$

---

[4]) Punkte auf der Zeile bezeichnen das Ende der Wirkungsbereiche von Quantoren. Welcher Quantor zu einem bestimmten Punkt gehört, ergibt sich schrittweise von den innersten zusammengehörigen Paaren ausgehend. Punkte am Formelende werden unterdrückt.

[5]) Im Hinblick darauf, daß unter II. die Definition fundierender Relationen von der kodifikativen Ableitung der Vorgängerinduktion ausgeht, schreibe ich schon hier $\vdash$ und kann es dann unterlassen, π und m zu binden

sogleich die natürliche Halbwohlordnung $\leqslant$ zwischen fundierenden Relationen, welche der natürlichen Wohlordnung zwischen den von ihnen dargestellten Ordinalzahlen entspricht:

$$R \leqslant S \wedge S \leqslant T \to R \leqslant T, \quad \to R \leqslant S \vee S \leqslant R, \quad I(<; \Pi(R)).$$

Diese naive Durchgangsetappe enthält, obwohl durch den Niveauvergleich ${}^{R}\leqslant^{S}$ der Vorgriff auf die Gesamtheit aller binären Relationen zwecks Abstraktion von Ordinalzahlen beseitigt ist, selbstverständlich deutlich imprädikative Rückstände: 1. gehen in die Definition für fundierende Relationen „beliebige" Eigenschaften $\pi(m)$ ein; 2. repräsentieren „alle" fundierenden Relationen zwischen Grundzahlen, über die in $I(<; \Pi(R))$ quantifiziert wird, die Ordinalzahlen der gesamten naiven II. Zahlklasse.

II. Der erste Schritt zur Überführung der naiven Etappe I in eine operative Theorie besteht in der Konstruktion einer geeigneten Sprache $\mathfrak{S}$ über Grundzahlen. Lorenzens 'elementare' Sprache ist ungeeignet, weil dort mit je zwei Relationen R und S zwischen Grundzahlen, welche 1. durch Aussageformen aus $\mathfrak{S}$ darstellbar und 2. durch Beweise aus $\mathfrak{S}$ als fundierend erkennbar sind, die Aussageform $m\,{}^{R}\leqslant^{S} n$ und die Aussage $R \leqslant S$ nicht zu $\mathfrak{S}$ gehören würden.

In der Definition für ${}^{R}\leqslant^{S}$ wird von Paaren m_0, n_0 zurückgegriffen auf Paare m, n mit $m \overset{R}{<} m_0$ und $n \overset{S}{<} n_0$; die Vorgängerrelation, die ${}^{R}\leqslant^{S}$ so entspringt, kann daher erst dann als fundierend und also ${}^{R}\leqslant^{S}$ selbst erst dann als induktiv definiert erkannt werden, wenn R oder S schon als fundierend erkannt sind. Infolgedessen müssen die Beweismittel aus $\mathfrak{S}$, welche durch Ableitung von Vorgängerinduktionen zu Definitions- und Aussagemitteln aus $\mathfrak{S}$ führen, eben die Aussagemittel aus $\mathfrak{S}$ auch stets wieder umfassen.

Für eine in $\mathfrak{S}$ darstellbare Relation R, die in $\mathfrak{S}$ als fundierend erkennbar ist, muß die Vorgängerinduktion $I(<; \pi(m))$ überdies in folgendem Sinn „absolut" sichergestellt sein: $\pi(m)$ soll durch jede Aussageform $A(m)$ substituierbar sein, unabhängig davon, ob das Entwicklungsstadium von $\mathfrak{S}$, in dem $A(m)$ konkret erfaßt wird, später liegt als dasjenige, in welchem R darstellbar und $I(\overset{R}{<}; \pi(m))$ beweisbar wird. Diese Forderung läßt sich nur auf abstrakte Weise befriedigen, nämlich durch Kodifikate, die der

jeweiligen Entwicklung von $\mathfrak{S}$ angepaßt sind und worin neben jene Primformeln $\varrho(m, \ldots)$, welche im vorgängigen Abschnitt von $\mathfrak{S}$ schon definiert sind, abstrakte Symbole $\pi(m, \ldots)$ treten, welche keine bestimmte intendierte Interpretation haben, sondern unbestimmte Formelsymbole sind [6]).

Es läßt sich nun eine Sprachkonstruktion aufstellen, in der formale Aussage-, Definitions- und Beweismittel simultan so miteinander verkoppelt sind, daß die abgegrenzten Sprachmittel abgeschlossen sind gegenüber der Gruppe derjenigen logischen und definitorischen Operationen, welche in jenem Teil der Herleitungen aus Etappe I benötigt werden, der mit Mitteilungsvariablen für Relationen formulierbar ist und nicht, wie etwa $I(<; \Pi(R))$, auf freie und gebundene Relationsvariablen angewiesen ist. Diese Konstruktion bezeichne ich als *normale* Sprache über Grundzahlen; sie bildet den formalen Kern meiner Theorie. Es sei erwähnt, daß der Sinn, in dem die normale Sprache sich auf der ersten Stufe über Grundzahlen bewegt, den Rahmen axiomatischer Fixierungen der Stufentheorie, die nur explizite Definitionen benutzen, erheblich überschreitet; eine induktiv definierte Relation zwischen Grundzahlen wie ${}^{R}\leqslant^{S}$ ist im allgemeinen erst auf transfiniter Stufe einer expliziten Formulierung fähig.

Die Kodifikate für Abschnitte der normalen Sprache sowie ihre Vereinigung zum Kodifikat für die normale Sprache sind Kodifikate der Arithmetik, die sich vor den üblichen dadurch auszeichnen, daß induktiv definierte Relationen einkalkuliert werden, die nicht, von den Rechenrelationen ausgehend, mit Hilfe logischer Zusammensetzungen explizit darstellbar sind, also sogenannte nicht-arithmetische Relationen. Ungeachtet dieser Bezeichnung hat das Kodifikat für die normale Sprache mit den üblichen Kodifikationen der Arithmetik jedenfalls die formale Eliminierbarkeit des tertium-non-datur gemein: wiederum ist im Rahmen des kodifikativ Fixierten jeder klassische Beweis transformierbar in einen intuitionistischen Beweis für eine formale Übersetzung der Behauptung, die klassisch äquivalent und intuitionistisch stabil ausfällt.

III. Der zweite Schritt zur Überführung der naiven Etappe I in eine operative Theorie besteht darin, den Prozeß der Kon-

---

[6]) Vgl. [2], p. 263. Dort heißen derart aufzufassende „Symbole" letters; für die dortigen symbols können wir „Zeichen" sagen.

struktion einer normalen Sprache gemäß Etappe II zu iterieren und auf diese Weise zu einer immer höheren, aber stets begrenzten transfiniten Folge normaler Sprachschichten $\mathfrak{S}_\alpha$ aufzusteigen. $\mathfrak{S}_{\alpha+1}$ ist für $\alpha=0$ die normale Sprache über Grundzahlen und für $\alpha>0$ die normale Sprache über einem Bereich von Figuren, der die $\mathfrak{S}_\xi$ mit $\xi\leqslant\alpha$ formal umfaßt; $\mathfrak{S}_{\omega\cdot\alpha}$ ist für $\alpha=0$ der Bereich der Grundzahlen und für $\alpha>0$ die Vereinigung der $\mathfrak{S}_\xi$ mit $\xi<\omega\cdot\alpha$. Wie bei Lorenzens elementaren Schichten sind auch bei den normalen Schichten in $\mathfrak{S}_{\alpha+1}$ die Definition von $\mathfrak{S}_\alpha$ und eine umkehrbare Abbildung von $\mathfrak{S}_\alpha$ auf $\mathfrak{S}_0$ ausdrückbar.

Durch den iterierten „metamathematischen" Bezug, auf dem Abzählungen von $\mathfrak{S}_1$ in $\mathfrak{S}_2$, von $\mathfrak{S}_2$ in $\mathfrak{S}_3$, ... beruhen, werden Eigenschaften über Grundzahlen induktiv definierbar, die innerhalb des Rahmens der axiomatischen Mengenlehre nicht explizit darstellbar sind. Infolge der starken Axiome, die die Mengenbildung betreffen, ist freilich eine sehr weitgehende transfinite Schichtiteration nötig, ehe sich ihr Vorteil, neben der logischen Zusammensetzung auch den Prozeß der Definition primitiver Aussageformen formal zu berücksichtigen, so weit auswirkt, daß die axiomatische Mengenlehre eine vollständige Einbettung erfährt.

Wird aber auf eine Erfüllung des Fraenkelschen Ersetzungsaxioms einstweilen verzichtet zugunsten des schwächeren Zermeloschen Aussonderungsaxioms, so läßt sich ein ausreichender operativer Rahmen leicht angeben. Eine Ordinalzahl heiße in $\mathfrak{S}_\alpha$ darstellbar, wenn es eine sie repräsentierende fundierende Relation gibt, die in $\mathfrak{S}_\alpha$ darstellbar und in $\mathfrak{S}_\alpha$ als fundierend beweisbar ist. Bezeichnet σ_α den Limes der in $\mathfrak{S}_\alpha$ darstellbaren Ordinalzahlen ($\sigma_\alpha \rightleftharpoons \leqslant_\xi \bigwedge_{\mathfrak{S}_\alpha \eta} \eta\leqslant\xi$), so ist σ_α in $\mathfrak{S}_{\alpha+1}$ darstellbar. Um nun zu einer hinreichend hohen Schichtiteration zu gelangen, werden Regionen normaler Schichten konstruiert: $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{S}_{\sigma_1}$, $\mathfrak{R}_2=\mathfrak{S}_{\sigma_{\sigma_1}}$, $\mathfrak{R}_3=\mathfrak{S}_{\sigma_{\sigma_{\sigma_1}}}$, ...; die in $\mathfrak{R}_n$ darstellbaren Ordinalzahlen dienen also jeweils als Iterationsindizes für die Schichten der nächsten Region $\mathfrak{R}_{n+1}$. Alles weitere ist dann bereits innerhalb $\mathfrak{R}_3$ enthalten.

Der Übergang zur Iteration normaler Sprachschichten stellt uns auch vor die Frage, wie die induktive Definition der Sprachmittel einer Schicht beschaffen sein muß, damit die Definition unter Zuhilfenahme von Beweismitteln höherer Schichten nicht etwa mehr Sprachmittel erzeugt. Bei Aussageformen aus $\mathfrak{S}_\alpha$, die eine

fundierende Relation darstellen, ist ja im allgemeinen gerade zu unterscheiden zwischen Relationen, die irgendwoher fundierend sind, und Relationen, die mit den Beweismitteln aus $\mathfrak{S}_\alpha$ als fundierend erkennbar sind. Daß die Vorgängerinduktion für eine fundierende Relation eventuell erst auf definitorischen Umwegen beweisbar ist, rührt daher, daß die dort eingehenden generellen Implikationen keiner vollständigen formalen Fixierung fähig sind. Definitorische Umwege liefern jedoch keine neuen Erzeugnisse bei solchen induktiven Definitionen, bei denen die 'uneigentlichen' logischen Partikeln $\rightarrow$, $\bigwedge_x$, $\neg$, deren Einführung in operativer Sicht auf Grund einer Deutung erfolgt, nicht in die logische Zusammensetzung der definientes der Definition oder der an ihrem definitorischen Stammbaum beteiligten Definitionen (für „vorgängige" Relationen) eingehen. Der Bezirk der induktiven Definitionen, der sich auf ausschließlich mit den 'eigentlichen' logischen Partikeln $\wedge$, $\vee$, $\bigvee_x$ zusammengesetzten definientes aufbaut, entspricht, von entscheidbaren Primformeln ausgehend, dem finitären Definieren. Den Prozeß des Operierens nach eigentlichen Regeln vermögen die kodifizierten Beweismittel allerdings nicht unmittelbar wiederzugeben, denn sie bringen uneigentliche Regeln, zum Beispiel 'Inversionen', ins Spiel [7]); dagegen erfolgt die operative Einführung der eigentlichen logischen Partikeln mit Hilfe definierender Regeln, die im Zusammenhang mit eigentlichen Regeln eigentlich bleiben [8]). Sollen kodifiziertes Ableiten und intuitives Operieren nach eigentlichen Regeln wenigstens mittelbar übereinstimmen, so wird es nötig, sich auf den intuitionistischen Logikkalkül zu beschränken.

IV. Es geht jetzt darum, die Axiome der Zermeloschen Mengenlehre im Rahmen von $\mathfrak{R}_3$ tatsächlich zu erfüllen. Zu dem Zweck weise ich zuerst innerhalb desjenigen Abschnitts der naiven II. Zahlklasse, welcher im operativen Rahmen von $\mathfrak{R}_1$ liegt und also durch σ_{σ_1} begrenzt wird, einen Zugang zu einer Umdeutung höherer Zahlklassen auf.

Um den Konfinalitätscharakter von Limeszahlen wie ω_1, $\omega_1+\omega$, $\omega_1+\omega_1$, $\omega_1\cdot\omega$, ... (und übrigens auch über die mit dem Aussonderungsaxiom nicht erreichte Grenze ω_ω hinaus) im Abgezählten herauszuformen, definiere ich induktiv eine Einschränkung der nor-

---

[7]) Vgl. [3], etwa S. 60.

[8]) Vgl. [3], S. 79 und S. 172.

malen Sprachmittel, die sich durch alle normalen Schichten hindurch auswirkt. Ausgehend von der natürlichen Wohlordnung der Ordinalzahlen als einer Grundaussageform, die sich in jede normale Schicht zwangsläufig fortsetzt, werden neue Schichten $^*\mathfrak{S}_\beta$ von Aussage-, Definitions- und Beweismitteln konstruiert, die ebenfalls beliebig hoch fortsetzbar sind. Diese Schichten bezeichne ich als *expansible* Schichten; sie bilden den technischen Kern meiner Gedankengänge. Die Ausdehnung der $^*\mathfrak{S}_\beta$ in normalen Schichten hängt von dem Ordinalzahlabschnitt ab, auf den sich die expansible Grundaussageform $\xi \leqslant \eta$ jeweils erstreckt; $^*\mathfrak{S}_\beta/\sigma_\alpha$, die expansible Schicht von der Höhe β über dem durch σ_α begrenzten Ordinalzahlabschnitt, ist ein (echter) Teil der normalen Schicht $\mathfrak{S}_{\alpha+\beta}$. Für den verfolgten Zweck genügen $^*\mathfrak{S}_\beta/\gamma$ mit γ und β aus $\mathfrak{R}_1$.

Relativ zu den expansiblen Aussagemitteln werden nun die normalen Möglichkeiten, $\mathfrak{S}_\alpha$ in $\mathfrak{S}_{\alpha+1}$ abzuzählen, aufgehoben, weil eine von außen in normale Ordinalzahldarstellungen eindringende Beziehung eben nicht fortsetzbar ist. Immerhin bleiben noch expansible Möglichkeiten, $^*\mathfrak{S}_\beta/\gamma$ durch umkehrbare Abbildung auf Ordinalzahlen „auszuzählen", bestehen. Am wichtigsten aber ist, daß infolge der Eigenart expansibler Sprachmittel, induktiv auf normale transfinite Induktionen aufgestockt zu sein, äußerst kräftige induktive Beweismitel verfügbar werden.

In entfernter Anlehnung an Dedekind läßt sich zuerst ein Reduktionslemma beweisen, demzufolge die Aussagemittel aus $^*\mathfrak{S}_\beta/\gamma$ (mit γ, β aus $\mathfrak{R}_1$) explizit umgeformt werden können in solche aus reduzierten expansiblen Schichten $'^*\mathfrak{S}_{\beta'}/^*\mathfrak{S}_\beta/\gamma$ (mit β' aus $\mathfrak{R}_2$), die sich über den Figuren von $^*\mathfrak{S}_\beta/\gamma$ erheben:

$$\bigwedge_{{}^*\mathfrak{S}_\beta/\sigma_\alpha}^{A} \quad \bigvee_{{}'^*\mathfrak{S}_{\sigma_{\alpha+\beta}}/^*\mathfrak{S}_\beta/\sigma_\alpha}^{B} \quad A \leftrightarrow B.$$

An Hand dieser Reduktion komme ich dann zu einem Limitationslemma, welches besagt, daß die Limeszahlen $\sigma_{\alpha+1}$ relativ zu expansiblen Aussageformen $^*A(\xi, \eta)$ Anfangszahlcharakter haben:

$$\bigwedge_{<\sigma_{\alpha+1}}^{\xi} \bigvee_{<\sigma_{\alpha+1}}^{\eta} {}^*A(\xi,\eta) \,..\!\rightarrow \bigwedge_{<\sigma_{\alpha+1}}^{\xi_0} \bigvee_{<\sigma_{\alpha+1}}^{\eta_0} \bigwedge_{<\xi_0}^{\xi} \bigvee_{<\eta_0}^{\eta} {}^*A(\xi,\eta).$$

In Anlehnung an Gödel ergibt sich nunmehr ein Komprehensionslemma, das expansible Aussageformen über Ordinalzahlen in einem begrenzten (nur vom zugrunde liegenden Ordinalzahlabschnitt

abhängigen) expansiblen Schichtabschnitt darstellen lehrt:

$$\underset{{}^*\mathfrak{S}_{\sigma_{\alpha+1}}/\sigma_\alpha}{\bigvee_B} \quad \underset{\mathfrak{S}_\alpha}{\bigwedge_\xi} {}^*A \leftrightarrow B.$$

Und all dies führt zum Potenzmengensatz: jede expansibel darstellbare Untermenge einer expansibel darstellbaren Menge ist in einem begrenzten, nur vom zugrunde liegenden Ordinalzahlabschnitt und von der Darstellungshöhe der Menge (aber nicht der Untermenge!) abhängigen expansiblen Schichtabschnitt darstellbar:

$${}^*N \subseteq {}^*M \leftarrow {}^*\mathfrak{S}_\beta/\sigma_\alpha \rightarrow {}^*N \leftarrow {}^*\mathfrak{S}_{\sigma_{\alpha+\beta}}/\sigma_\alpha \text{ [9]}).$$

Schon im Anschluß an das Komprehensionslemma läßt sich eine expansible Umdeutung der Anfangszahlen induktiv definieren:

$$\overset{*}{\omega}_\alpha = \underset{\geqslant\omega \ <\alpha}{\leqslant_{\zeta_0} \bigwedge_\zeta \zeta_0} \geqslant \underset{\overset{*}{>}\omega\zeta}{\leqslant_{\zeta_0}} \underset{{}^*\mathfrak{S}_{\sigma_{\alpha+1}}/\sigma_\alpha}{\bigwedge_A} \underset{<\zeta_0 \ <\zeta_0}{\bigwedge_\xi \bigvee_\eta} A \ldots \rightarrow \underset{<\zeta_0 \ <\zeta_0 \ <\xi_0 \ <\eta_0}{\bigwedge_{\xi_0} \bigvee_{\eta_0} \bigwedge_\xi \bigvee_\eta} A.$$

Aus dem Limitationslemma folgt $\overset{*}{\omega}_\xi \leqslant \sigma_\xi$, und der Potenzmengensatz kann dann zum Kontinuumsatz $2^{\overset{*}{\aleph}_\xi} = \overset{*}{\aleph}_{\xi+1}$ verschärft werden. (Einen Beweis für $\sigma_\xi \leqslant \overset{*}{\omega}_\xi$ habe ich nicht erzielt.)

V. Auf der Ebene von Etappe IV ließe sich bereits eine Satz für Satz erfolgende Umdeutung der Mengenlehre durchführen. Um jedoch sofort die Axiome zu verifizieren, wird noch eine letzte Etappe V erforderlich, und zwar schon in Anbetracht des Umstandes, daß die axiomatische Mengenlehre jede Ordinalzahl α mit der Menge W_α aller Ordinalzahlen, die $<\alpha$, identifiziert, während unter I. und III. α durch die natürliche Anordnung der Menge W_α lediglich repräsentiert wird. Damit Elemente, die keine Mengen sind, fortfallen, deute ich die Grundbegriffe „Klasse", „Menge", „Elementrelation" der axiomatischen Mengenlehre im Rahmen solcher Mengen, die in expansiblen Schichten ${}^*\mathfrak{S}_\beta/0$ über dem durch 0 begrenzten leeren Ordinalzahlabschnitt darstellbar sind. Das Modell des Bereichs der „Klassen" unterscheidet sich von dem des Bereichs der „Mengen" bloß insofern, als die Fundierung durch die Elementrelation die Ordinalzahlen $\overset{*}{\omega}_\omega + 1$ beziehungsweise $\overset{*}{\omega}_\omega$ darstellt.

---

[9]) $\leftarrow$ statt „darstellbar in".

IV′. V′., IV″. V″. Der am Beispiel dieser „reinen" Expansibilitätstheorie gewonnene Einblick in die Automatik der Mengenlehre führt im Verein mit der Flexibilität ihres derart tief umgefügten Fundaments schließlich auch dazu, durch externe Modelle die erwarteten Unabhängigkeiten nachzuweisen. Dazu sind Eingriffe in die rein-expansiblen Definitionsmittel vorzunehmen, aber selbstverständlich solche Eingriffe, die im Hinblick auf Potenzmengen- und Aussonderungsaxiom nicht die rein-expansible Möglichkeit zerstören, imprädikative Definitionsverfahren durch induktive Definitions- und Beweismittel zu rechtfertigen; in die freie logische Zusammensetzbarkeit rein-expansibler Aussagemittel darf mit Rücksicht auf die Axiome der Gruppe B keinerlei Eingriff erfolgen.

Eine Vergrößerung der Kardinalzahl der Menge aller rein-expansibel darstellbaren reellen Zahlen wird durch Hereinnahme von normalem Aussagematerial in die Konstruktion neuer „gemischt"-expansibler Schichten besorgt; und auch nur in normalen Schichten sind die Abzählungsmöglichkeiten vorhanden, die ja unumgänglich sind, um im Vergleich zu rein-expansibel darstellbaren reellen Zahlen „höhere" reelle Zahlen darzustellen. Wie aber wird verhindert, daß infolge der Aussagemöglichkeiten, die aus normalen Schichten herangezogen werden, sich in der normalen Ordinalzahlskala gleichzeitig auch die gemischt-expansiblen Anfangszahlmarken gegenüber den rein-expansiblen vergrößern? Zu dem Zweck brauche ich die Konstruktion gemischt-expansibler Schichten lediglich so einzurichten, daß 1. in den herangezogenen normalen Aussageformen frei nur Variablen für Grundzahlen vorkommen und daß 2. solche normalen Aussageformen über Grundzahlen nur in explizite gemischt-expansible Definitionen eingehen, während in induktive Definitionen ausschließlich (quantifikativ geschlossene) normale Aussagen hereingenommen werden dürfen.

Im Unterschied zu den Lemmata und zum Potenzmengensatz unter IV. überträgt sich die Eigenschaft rein-expansibler Schichten, rein-expansibel mit Ordinalzahlen auszählbar zu sein, nicht ohne weiteres sinngemäß auf gemischt-expansible Schichten. Mit induktiven Definitionen im expansiblen Rahmen ist nämlich nicht ohne weiteres (wie im normalen Rahmen) die Abbildung von den Aussageformen über Grundzahlen, die fundierende Relationen zwischen Grundzahlen darstellen, auf die durch diese dargestellten Ordinal-

zahlen zu erzielen – auch wenn schon die umkehrbare Abbildung von den Grundzahlen auf die finiten Ordinalzahlen herangezogen ist.

Auf solche Weise gabeln sich die möglichen gemischt-expansiblen Abwandlungen der rein-expansiblen Etappen IV und V in zwei Varianten. In der einen Variante (′) bleibt das Prinzip expansibler Auszählbarkeit erhalten, und im Rahmen gemischt-expansibler Schichten über dem Leeren wird dann das Auswahlaxiom zusammen mit der Kontinuumsatzschar

$$2^{\aleph_\xi} = \begin{cases} \aleph_{\alpha+1} \leftarrow \xi \leqslant \alpha \\ \aleph_{\xi+1} \leftarrow \xi \leqslant \alpha \end{cases}$$

beweisbar, die für $\alpha > 0$ die Lusinsche Hypothese erfüllt. In der anderen Variante (″) wird das Prinzip expansibler Auszählbarkeit verletzt, und dies wiederum führt im Rahmen gemischt-expansibler Schichten über dem Leeren zur Widerlegung des Auswahlaxioms, weil innerhalb des externen Modells keine Abbildung aus der Menge der Ordinalzahlen in die Menge der reellen Zahlen das reelle Kontinuum ausschöpft.

Von dem skizzierten Programm sind die beiden ersten Etappen ausgearbeitet. Die Ausarbeitung der anderen Etappen hoffe ich an Hand der angesammelten Entwürfe ohne Unterbrechung durchführen zu können.

Der Gegensatz zwischen freier Wahl und Gesetz, den die intuitionistische Mathematik bei willkürlichen und einzelnen reellen zahlen aufgedeckt hat, scheint demnach im Rahmen dessen, was die axiomatische Mengenlehre von den naiven Intentionen wirklich festlegt, durch Aufweis eines hinreichend umfassenden Bezirks arithmetischer Gesetze einer dialektischen Synthese zuzuführen zu sein. Unsere Anschauung vom Kontinuum hat sich aber nicht nur auf dem einen Flügel der Mathematik mit dem, was gemeinsam hinter Arithmetik und Logik steht, auseinanderzusetzen, sondern auf dem anderen Flügel der Mathematik auch mit dem, was gemeinsam zwischen Geometrie und Physik zu suchen sein könnte.

Dies ist, abgesehen von stilistischen Verbesserungen und von einigen Zusätzen in dem durch IV′. V′., IV″. V″. gekennzeichneten Abschnitt, der Text eines Vortrags, den ich am 27. August 1957 gehalten habe anläßlich des Kolloquiums „Constructivity in Mathematics", das in Amsterdam für

die International Union of Logic, Philosophy and Methodology of the Sciences veranstaltet worden ist.

Allergrößten Dank schulde ich meinem Lehrer, Prof. P. Lorenzen, der mir 1951 eine „konstruktive" Ordinalzahltheorie als Arbeitsfeld überlassen hat. Mit nicht zu ermüdender Geduld ist er seitdem den Ansätzen gefolgt, die ich aus der Hoffnung heraus, schließlich eine Auflösung des Kontinuumproblems zu finden, immer wieder verworfen und neu überarbeitet habe, und er hat meine Absicht durch viele Vereinfachungsvorschläge und manchen wertvollen Rat ständig unterstützt.

Ferner danke ich Prof. W. Krull, der das Unternehmen angesichts zunächst widerstrebender Meinungstendenzen gutgeheißen hat, ebenso Prof. Arnold Schmidt, der mir die Teilnahme an Kolloquien für mathematische Logik und Grundlagenforschung 1952/53/54 ermöglicht und mir so Zugang zu unterschiedlichen Grundauffassungen verschafft hat, und nicht zuletzt Prof. P. Bernays, der sich auf liebenswürdigste Weise mit mir während eines Austauschaufenthalts 1955/56 auseinandergesetzt und mich durch scharfsinnige, doch stets aufgeschlossene Kritik sowie durch manchen Hinweis gefördert hat, und auch Prof. B. L. van der Waerden, der mir zu der Frage, wie das Projekt in die Mathematik einzuordnen sei, Anregung vermittelt hat.

Der Vortrag selbst ist dadurch zustandegekommen, daß mir Prof. P. Lorenzen im Einverständnis mit Prof. A. Heyting einen großen Teil seiner Vortragszeit überlassen hat.

LITERATUR

[1] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. Ann. Math. Studies 3, Princeton, 1940/51/53.

[2] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, New York, 1952.

[3] P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin, 1955.

APPENDIX

COMPUTABLE FUNCTIONALS OF ARBITRARY FINITE TYPE[1])

MARTIN DAVIS
Hartford Graduate Division, Rensselaer Polytechnic Institute

Any attempt to formulate a notion of effectiveness (extending Church's thesis) to objects of higher type must face the paradox: How can a notion of effectiveness be defined on classes of entities themselves highly non-constructive?

One approach (used by KLEENE [2]*)) abandons the idea of a finite computation, and requires us to imagine a "procedure" which "operates" on a total description of a functional of higher type. Another, which we shall follow here, keeps computations finite, but limits them to operating on "constructive", i.e. finite pieces of the functionals.

Norman Shapiro has remarked that if partial recursiveness is an adequate formalization of the intuitive notion of effective calculability, all concepts involving effectiveness and based on the notion of a finite computation should be *intrinsic* in the sense of being definable in terms of partial recursiveness (taken in extension), without regard to the special formal apparatus (Turing machines, Herbrand–Gödel–Kleene systems of equations, etc.) used in defining partial recursiveness. The definition of computability given here for functionals of higher type is intrinsic in this sense and since the usual notions of recursive reducibility (Turing, Kleene, Post) and recursiveness of functionals of numerical functions (Kleene) are definable in terms of it, they too are intrinsic (though their usual definitions do not bring this out).

We shall use subscripts to denote the type of the functionals under consideration. There is to be a single element u of type 0. The domain and range of u are both empty. The elements of type $(a_1 \ldots a_n)$ are all functionals whose domain is a set of n-tuples $(v^{(1)}_{a_1}, \ldots, v^{(n)}_{a_n})$ and whose range is a set of natural numbers. To simplify statements of definitions, they will often be restricted to

---

[1]) From: Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornelt University, p. 242–246.

* Publishers' note: See also KLEENE [3].

functionals of a single argument, the obvious generalization being left to the reader.

We write $1=(0)$, $2=(1)$, etc. The natural number n may be identified with the functional of type 1 whose value on u is n.

Def. 1. $f \subseteq g$ if $v \in \mathrm{Dom}(f)$ implies $v \in \mathrm{Dom}(g)$ and $f(v)=g(v)$.

Def. 2. v and w are *compatible* if for some t, $v \subseteq t$, $w \subseteq t$.

Def. 3. u is *consistent*. f is *consistent* if its domain contains only consistent functionals and if $v \in \mathrm{Dom}(f)$ and $w \in \mathrm{Dom}(f)$, where v, w are compatible, implies $f(v)=f(w)$.

In what follows, the word **functional** *will always mean consistent functional.*

Def. 4. u is *finite*. f is finite if its domain consists of a finite number of (n-tuples of) *finite* functionals.

We assign a number $\langle f \rangle$ to each finite functional f in a definite effective manner (e.g., we may take $\langle f \rangle = 0$ if f is completely undefined of any type, and

$$\langle f \rangle = \prod_{j=1}^{m} [Pr(\prod_{i=1}^{m} Pr(i)^{\langle v^{(ij)} \rangle})]^{r_j+1}$$

where $f(v^{(1j)}, \ldots, v^{(nj)})=r_j$, $j=1, 2, \ldots, m$, where each $v^{(ij)}$ is finite and f is undefined otherwise).

For each integer p, and type symbol a we let $p^a = f_a$ where $\langle f_a \rangle = p$. If no such f_a exists, we take p^a to be completely undefined.

Def. 5. f is *completely computable* if there is a partial recursive function q such that $f(v_a)=k$ if and only if there is a number r such that $q(r)=k$ and $r^a \subseteq v_a$.

This definition was stated in an abstract [1]. I later saw that the definition of extension there given (the present Def. 1) did not have the desired effect and proposed use of a weaker definition. Hilary Putnam showed that the weaker definition would permit no non-constant completely computable functionals, and proposed the restriction to *consistent functionals* as a method of indirectly changing the effect of the definition of extension.

Def. 6. f is *compact* if: (1) $v \in \mathrm{Dom}\, f$ and $v \subseteq w$ implies $w \in \mathrm{Dom}\, f$, (2) $v \in \mathrm{Dom}\, f$ implies that for some t, $t \subseteq v$, t is finite, and $t \in \mathrm{Dom}\, f$.

Note that, by consistency, in the case of clause (1): $f(v)=f(w)$.

Cor. 1. If f is completely computable, then f is compact.

Cor. 2. The *compact* functional f is completely computable if and only if the function q, defined by $q(r)=f(r^a)$, is partial recursive.

Def. 7. $u|y=u$. $f|y$ is defined by $(f|y)(v)=k$ if and only if: (1) $k\leqslant y$, (2) $v=v|y$, (3) $f(v)=k$.

From Cor. 2, we have the normal form theorem (stated for binary functionals).

Theorem 1. If $f(v, w)$ is completely computable, then there is a number e such that

$$f(v, w)=U(\mu y T_2(e, \langle v|y\rangle, \langle w|y\rangle, y)).$$

In its present form the converse of Th. 1 is false. However, there exists a primitive recursive predicate $\mathfrak{T}(z, r, s, y)$ (depending on the type of the functionals involved) such that:

Theorem 2. $f(v, w)$ is completely computable *if and only if* there is a number e such that

$$f(v, w)=U(\mu y \mathfrak{T}(e, \langle v|y\rangle, \langle w|y\rangle, y)).$$

Def. 8. u is *total*. f is *total* if its domain consists of *all* (n-tuples of) *total* functionals of the appropriate type(s).

Def. 9. The *totalization* of u is u. The *totalization* of f is g if g is total, and $g(v)=k$ when and only when v is the *totalization* of w and $f(w)=k$.

Def. 10. f is *contracted* if its domain contains only (n-tuples of) total functionals.

Def. 11. The *contraction* of f is g, where $g(v)=k$ if and only if v is the totalization of w and $f(w)=k$.

Cor. 3. If v is total, v is consistent.

Cor. 4. If f is contracted, f is consistent.

Cor. 5. The contraction of f is contracted.

Def. 12. f is *partially computable* if it is the contraction of a completely computable functional. f is *computable* if it is *partially computable* and total.

It is the computable functionals which one would naturally compare with Kleene's general recursive functions (loc. cit.). However,

Theorem 3. For type $a\geqslant 4$, there are no computable functionals.

This result is reminiscent of Rice's theorem. The (open) question

is raised whether by use of *completely computable functionals* and with a suitable interpretation of quantifiers operating on incompletely defined predicates, one can generate a hierarchy in which new predicates of integers are determined by quantification over functionals of even higher type.

Finally, we suggest a technique for comparing these functions with KREISEL's continuous [5] and KLEENE's countable functionals [2], [4].

Def. 13. The *crystallization* of u is u. The crystallization of f is g if: (1) $v \in \mathrm{Dom}(g)$ if and only if v is the crystallization of a compact functional of the appropriate type, (2) f is compact, (3) $g(v)=k$ if and only if v is the crystallization of w where $f(w)=k$.

I believe, but I have not verified, that a function is a crystallization if and only if it is continuous, and is the crystallization of a completely computable functional if and only if it is recursively continuous.

BIBLIOGRAPHY

[1] M. DAVIS, An intrinsic definition of recursive functionals. Bull. Amer. Math. Soc. **63** (1957), 139.

[2] S. C. KLEENE, Recursive functionals of higher finite types. Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University.

[3] ———, Recursive functionals and quantifiers of finite types- I. Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[4] ———, Countable functionals (this volume p. 000).

[5] G. KREISEL, Relations between classes of constructive functionals. Summaries of talks at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University.

REALIZABILITY [1])

S. C. KLEENE
Department of Mathematics, University of Wisconsin, Madison

A notion of "realizability" was introduced by us in JSL (1945) pp. 109–124 [1] for use in studying intuitionistic arithmetic; see § 82 of our "Introduction to metamathematics" (IM). We proposed a similar investigation of intuitionistic analysis in [2]. In "intuitionistic analysis" we include Brouwer's theory of "sets" or "spreads" and his species of the first order (and applications) but not his species of higher orders.

As symbols for a formal system of intuitionistic analysis we use those of two-sorted predicate calculus with number variables x, y, z, ... and variables α, β, γ, ... for one-place number-theoretic functions ("free choice sequences" or "infinitely proceeding sequences" in intuitionistic parlance), also $=$, 0 (zero), $'$ $(+1)$, $+$, $\cdot$, symbols for finitely many other specified primitive recursive functions, and Church's lambda-operator λ (to be applied with one number variable). "Terms" (expressions for natural numbers), "functors" (expressions for one-place number-theoretic functions), and "formulas" (expressions for propositions) are formed from these symbols under obvious rules (extending IM § 17).

Unlike Heyting's 1930 formalization of intuitionistic mathematics, our symbolism for a portion of it is equally natural as symbolism for a corresponding portion of classical mathematics; and we can compare intuitionistic and classical systems with common formation rules.

The postulates for such systems shall include those of the predicate calculus, intuitionistic or classical (IM pp. 82, 101), with the postulates 9–12 of a one-sorted predicate calculus splitting into 9N–12N (for a number variable) and 9F–12F (for a function variable). As additional postulates for arithmetic or number theory, we take those of IM p. 82 Group B, and the equations defining

---

[1]) From: Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University, p. 100–104.

explicitly or by primitive recursion the additional primitive recursive functions provided in the symbolism. As additional postulates concerning functions, we include the axiom schemata:

(1) $x = y \supset \alpha(x) = \alpha(y)$.

(2) $\{\lambda x\, r(x)\}(t) = r(t)$ ($r(x)$ and t being terms; cf. IM p. 78).

(3) $\forall x \exists y A(x, y) \supset \exists \alpha \forall x A(x, \alpha(x))$.

We are investigating the relations between various choices of additional postulates, such as for the intuitionistic system Brouwer's fan theorem in the form of the axiom schema:

(4) $\forall \alpha_B \exists n A(\alpha, n) \supset \exists z \forall \alpha_B \exists n \forall \gamma_B \{\forall x[x < z \supset \gamma(x) = \alpha(x)] \supset A(\gamma, n)\}$

where the subscript B confines the variable to the fan determined by β, i.e. $\forall \alpha_B(\ )$ is short for $\forall \alpha[\forall x[\alpha(x) \leqq \beta(\bar{\alpha}(x))] \supset (\ )]$ (cf. [2]). Work is in progress on the formalization of intuitionistic mathematics in this system.

Prime formulas are interpreted alike intuitionistically and classically. By our definition of "realizability" the logical symbols are given a different meaning than they have classically under the usual truth definition after Tarski. If the logical symbols are read classically in the definition of realizability, we obtain a classical interpretation of intuitionism; but they can also be read intuitionistically, so that we get an intuitionistic reinterpretation; cf. [1], which is fuller on this point than IM § 82. This interpretation or reinterpretation uses the theory of general recursive functions as a theory of all effective processes under Church's 1936 thesis (cf. IM § 62).

Let x be a number variable and A(x) a formula. Then the formula $A(\boldsymbol{x})$ (where $\boldsymbol{x}$ is the numeral for the natural number x) expresses the same as A(x) expresses when x is interpreted by x. For $A(\alpha)$ with α a function variable, only the second mode of expression is available in general, since there is not a functor $\underline{\alpha}$ in the symbolism to express each function α.

Let Ψ be short for $\psi_1, \ldots, \psi_l$ (one-place number-theoretic functions), and X for $x_1, \ldots, x_n$. We write $\{z\}(\Psi, X)$ for $\{z\}^{\Psi}(X)$ IM p. 341.

We define *e realizes-*Ψ E by induction on the number of logical symbols in the formula E, as follows. Here Ψ are one-place number-

theoretic functions correlated $1-1$ to the function variables Ψ, and E is to contain no variables except (some or all of) Ψ.

1. *e realizes-*Ψ a prime formula P, if $e=0$ and P is true-Ψ, i.e. P is true when Ψ are interpreted by Ψ.

2. *e realizes-*Ψ A & B, if $e=2^a \cdot 3^b$ where *a realizes-*Ψ A and *b realizes-*Ψ B.

3. *e realizes-*Ψ A $\vee$ B, if $e=2^0 \cdot 3^a$ where *a realizes-*Ψ A, or $e=2^1 \cdot 3^b$ where *b realizes-*Ψ B.

4. Let Ψ_A come from Ψ by suppressing those which do not occur in A. (This step is unnecessary, but proofs are probably easier with it.) *e realizes-*Ψ A $\supset$ B, if for every *a* and θ, whenever *a realizes-*Ψ_A, θ A, then $\{e\}(\Psi, \theta, a)$ *realizes-*Ψ, θ B.

5. *e realizes-*Ψ $\neg$ A, if *e realizes-*Ψ A $\supset 1=0$ under Clause 4.

6. *e realizes-*Ψ $\exists$xA(x), if $e=2^x \cdot 3^a$ where *a realizes-*Ψ A($\boldsymbol{x}$).

7. *e realizes-*Ψ $\forall$xA(x), if for all *x*, $\{e\}(\Psi, x)$ *realizes-*Ψ A($\boldsymbol{x}$).

8. Say $\boldsymbol{\alpha} \notin \boldsymbol{\Psi}$ (otherwise first change $\exists\boldsymbol{\alpha}$A($\boldsymbol{\alpha}$) to $\exists\boldsymbol{\beta}$A($\boldsymbol{\beta}$) where $\boldsymbol{\beta} \notin \boldsymbol{\Psi}$). *e realizes-*$\Psi$ $\exists\boldsymbol{\alpha}$A($\boldsymbol{\alpha}$), if $e=2^d \cdot 3^a$ where *a realizes-*Ψ, $\lambda y\{d\}(\Psi, y)$ A($\boldsymbol{\alpha}$). (Here $\lambda y\{d\}(\Psi, y)$ must be completely defined for the given Ψ.)

9. Say $\boldsymbol{\alpha} \notin \boldsymbol{\Psi}$ (etc.). *e realizes-*Ψ $\forall\boldsymbol{\alpha}$A($\boldsymbol{\alpha}$), if for all α, $\{e\}(\Psi, \alpha)$ *realizes-*Ψ, α A($\boldsymbol{\alpha}$).

A formula E(X) containing free only $\boldsymbol{\Psi}$, X is *realizable*, if there is a general recursive function ϕ such that, for each Ψ, *X*, the number $\phi(\Psi, X)$ realizes-Ψ E($\boldsymbol{X}$). That is, $\lambda X\, \phi(\Psi, X)$ is to be general recursive uniformly in Ψ under IM p. 275 [2].

(Also, writing $\boldsymbol{\Psi}=(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta})$, E(X) is *realizable-*$\Theta$, if there is a function ϕ^{Θ} general recursive in Θ such that, for each Φ, *X*, the number $\phi^{\Theta}(\Phi, X)$ realizes-Φ, Θ E($\boldsymbol{X}$).)

This definition of realizability is the straightforward extension of the 1945 definition (but cf. IM p. 503) to allow function variables, except for the treatment of implication in Clause 4 (and thence of negation in Clause 5).

Consider e.g. the formula $\forall\boldsymbol{\alpha}\, \exists\boldsymbol{\beta}\, \forall$x$(\boldsymbol{\alpha}(x)=\boldsymbol{\beta}(x))$, which is provable intuitionistically and classically by elementary reasoning. The constructive sense of the formula is that the function $\boldsymbol{\beta}$ should be obtainable effectively *from* the function $\boldsymbol{\alpha}$ (and indeed as the choice of $\boldsymbol{\alpha}$ proceeds that of $\boldsymbol{\beta}$ can proceed). So the $\boldsymbol{\beta}$ for a given $\boldsymbol{\alpha}$ needs simply to be recursive in $\boldsymbol{\alpha}$, not recursive absolutely. The formula is realizable, if there is an *e* which realizes it; i.e. by Clause 9

with Ψ empty, if for each α, $\{e\}(\alpha)$ realizes-α $\exists\boldsymbol{\beta}\,\forall x(\boldsymbol{\alpha}(x)=\boldsymbol{\beta}(x))$. Now Clause 8 applies with α as the Ψ; etc. Here we see that α has two roles, *valuational* (i.e. it is the value of $\boldsymbol{\alpha}$ in the further analysis) and *informational* (i.e. it is an "assumed function" for relativizing the recursiveness of functions used in the further analysis, i.e. specifically the function $\beta=\lambda y\{d\}(\alpha, y)$ which is to be the value of $\boldsymbol{\beta}$).

In Clause 4 θ has a purely informational role. Consider an implication $A \supset B$, beginning with the case A and B are closed number-theoretic formulas. For the 1945-realizability of this, it is only required that there be an effective process (i.e. a partial recursive function ϕ, with Gödel number e) by which from any number a which realizes A we obtain a number $\{e\}(a)$ which realizes B. In the case that A is unrealizable, we then have $A \supset B$ realizable for every B. (Consequently, in the 1945 theory, classically, for A closed: Either A or $\neg$ A is realizable. If $\neg\neg$ A is realizable, so is A.)

For the present realizability interpretation of intuitionism, we still intend that A should *only hold* intuitionistically if A is realizable; but we do not use this principle explicitly within intuitionism in such a way that an unrealizable formula is construed as absurd and therefore as implying every B. Rather we allow the implication $A \supset B$ to hold intuitionistically (in the sense of being realizable) whenever, for any number a which realizes A relative to some θ, we can from a and θ obtain effectively a number $\{e\}(\theta, a)$ which realizes B relative to the same θ; the "construction" called for under the intuitionistic meaning of B need not be effective absolutely, but only relatively to operations (represented by the number-theoretic function θ) assumed in the "construction" for A.

For the A(x) of IM pp. 511–514, the formula $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ is as before unrealizable. But it is realizable-θ for any function θ of Kleene–Post degree $\geqq \boldsymbol{0'}$ [3], and hence $\neg\,\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ is also unrealizable now (since $1=0$ is unrealizable-θ for every θ). Furthermore, $\neg\neg\,\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ is realizable now.

In the present theory, negations of classically true formulas can only be realizable when the formulas contain function variables.

1945-realizability gave various (non-elementary) metamathematical results more simply than we obtain them by use of the present notion.

The 1945-realizability of any particular number-theoretic formula

A is expressible by another number-theoretic formula $\mathscr{R}$ A. Now the like is true for any formula A of analysis (but for A number-theoretic, $\mathscr{R}$ A may not be), which is not directly the case for Gödel's interpretation as extended to analysis by Kreisel (though for one version, it is so indirectly on the basis of results regarding "countable" or "continuous" functionals).

We can show (but not quickly) that every formula provable in the intuitionistic system described above is realizable; indeed realizability is preserved under deduction in the two-sorted predicate calculus (which is not true of the straightforward extension of 1945-realizability), so that the same must be the case upon addition of further realizable formulas as axioms.

Some very simple formulas of analysis which contradict laws of classical logic are realizable, e.g. $\neg\, \forall\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{A}(\boldsymbol{\alpha}) \vee \neg\, \mathrm{A}(\boldsymbol{\alpha}))$ where $\mathrm{A}(\boldsymbol{\alpha})$ is $\forall \mathrm{x}\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{x}) = 0$, $\neg\, \forall\boldsymbol{\alpha}\{\forall \mathrm{x}(\mathrm{B}(\boldsymbol{\alpha}) \vee \mathrm{C}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\alpha})) \supset \mathrm{B}(\boldsymbol{\alpha}) \vee \forall \mathrm{x}\mathrm{C}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\alpha})\}$ where $\mathrm{B}(\boldsymbol{\alpha})$ is $\neg\, \forall \mathrm{x}\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{x}) = 0$ and $\mathrm{C}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\alpha})$ is $\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{x}) = 0$.

BIBLIOGRAPHY

[1] S. C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory. J. Symb. Log. **10** (1945), 109–124.

[2] ———, Recursive functions and intuitionistic mathematics. Proc. Internat. Cong. Math. 1950, vol. **1**, 679–685.

IM ———, Introduction to metamathematics. Amsterdam (North-Holland), Groningen (Noordhoff), New York and Toronto (Van Nostrand) 1952, X + 550 pp.

[3] S. C. Kleene and E. L. Post, The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability. Ann. of Math. **59** (1954), 379–407.

PARTIAL RECURSIVE FUNCTIONALS AND EFFECTIVE OPERATIONS [1])

G. KREISEL, D. LACOMBE AND J. R. SHOENFIELD
Institute for Advanced Study, Princeton, N.J.

This paper is primarily concerned with functionals whose domain is a class of recursive functions and whose range is either a set of natural numbers or a class of partial recursive functions. We shall show that, under certain conditions, two notions of 'effectively calculable functionals' coincide. At the end of the paper we use these results to compare different ways of defining classes of recursive functions.

1. Definitions

We use the notation of [1]. In particular $\{e\}$ denotes the partial recursive function with Gödel number e.

Consider first a functional F whose domain is a class $\mathscr{A}$ of recursive functions and whose range is a set of natural numbers. F is called an *effective operation* if there is a partial recursive function F^* such that

$$\{e\} \in \mathscr{A} \rightarrow F(\{e\}) = F^*(e). \tag{1}$$

In particular $F^*(e)$ is defined when $\{e\} \in \mathscr{A}$: our $=$ denotes strong equality of [1], p. 327. (This is a slight modification of a definition in [2].) — F is called potentially partial recursive if it can be extended to a partial recursive functional in the sense of [1].

Consider next a functional $\mathfrak{F}$ whose domain is a class $\mathscr{A}$ of recursive functions and whose range is a class of partial recursive functions. $\mathfrak{F}$ is called an *extensional effective operation* if there is

---

[1]) Particular cases of the results of this paper appeared in Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, vol. 245 (1957), 399–402, and in the Notes of the Summer Institute of Symbolic Logic at Cornell University in 1957, pp. 364–365. The research of the first author was supported by the Office of Ordnance Research, U.S. Army, the research of the third author was suppoerted by the National Science Foundation.

a partial recursive function F_1 such that

$$\{e\} \in \mathscr{A} \to \{F_1(e)\} = \mathfrak{F}(\{e\}). \tag{2}$$

A class $\mathscr{A}$ of recursive functions is said to possess a *recursively dense base* B if B is a recursively enumerable set of natural numbers with the following properties:

$$n \in B \to \{n\} \in \mathscr{A},\ \{e\} \in \mathscr{A} \to (En)\{n \in B\ \&\ (x)[x \leqslant k \to \to \{e\}(x) = \{n\}(x)]\}.$$

Note that B need not be extensional, i.e. if $\{n\} = \{n'\}$ and $n \in B$ then not necessarily $n' \in B$. Also since B is recursively enumerable the second condition implies that there exists a partial recursive function $\varphi(e, k)$ such that

$$\{e\} \in \mathscr{A} \to \{\varphi(e, k) \in B\ \&\ (x)[x \leqslant k \to \{e\}(x) = \{\varphi(e, k)\}(x)]\}.$$

A class $\mathscr{A}$ of recursive functions *is* called *recursive* (*recursively enumerable*) if there is a recursive (recursively enumerable) set A of natural numbers such that

$$\{e\} \in \mathscr{A} \leftrightarrow e \in A \tag{3}$$

whenever e is the Gödel number of a recursive function.

2. Numerical-valued functionals

It is evident that if F is a potentially partial recursive functional (with numerical values) then it is an effective operation. For then $F(\{e\})$ can be computed from a finite number of values of $\{e\}$, and these values can be computed from e itself. We shall now show that the converse holds with suitable restrictions on $\mathscr{A}$.

Theorem 1: *Let $\mathscr{A}$ have a recursively dense base and let F be ab effective operation whose domain is $\mathscr{A}$ and whose range is a set of natural numbers. Then F is potentially partial recursive.*

Proof. Let F^* be as in (1) and let B be a recursively dense base of $\mathscr{A}$. Let D be the diagonal set $\hat{x}(Ey)T_1(x, x, y)$: it has the property that, given an index of a recursively enumerable set C, we can effectively find a number z such that either $z \in C \cap D$ or $z \notin C \cup D$; if $C = \hat{x}(Ey)T_1(e, x, y)$, take $z = e$.

Given f and e, we define a partial recursive function τ_e; we try to choose τ_e so that, if $\{f\} \in \mathscr{A}$, then $\tau_e = \{f\}$ for $e \notin D$, and $F(\tau_e) \neq F(\{f\})$ for $e \in D$. To determine $\tau_e(x)$, for given e, we search

through the natural numbers $\leqslant x$, in order, for a necessarily unique y such that $T_1(e, e, y)$ and $y \leqslant x$. If there is no such y, we set $\tau_e(x) \simeq \{f\}(x)$. Now, suppose that we find such a y, and that $\{f\}(z)$ is defined for $z<y$. We then look for an n, $n \in B$, such that $\{n\}(z)=\{f\}(z)$ for $z<y$ and $F^*(n)\neq F^*(f)$. If such an n exists, we choose the first such n in some fixed enumeration of B. We have already set $\tau_e(z)=\{f\}(z)=\{n\}(z)$ for $z<y$, and now set $\tau_e(z)=\{n\}(z)$ for $z \geqslant y$. Note that the definition is consistent since y is unique. In all cases not covered by these instructions $\tau_e(x)$ is undefined.

For any e, we can compute a Gödel number g_e of τ_e. Let C_f be the set of e such that $F^*(g_e)$ is defined and equal to $F^*(f)$. Then C_f is recursively enumerable, and an index of C_f can be computed from f. Hence given f, we can compute a $\lambda(f)$ such that $\lambda(f) \in C_f \cap D$ or $\lambda(f) \notin C_f \cup D$.

If $\{f\} \in \mathscr{A}$ and $\lambda(f) \notin D$ then $\tau_{\lambda(f)}=\{f\}$, so $F^*(g_{\lambda(f)})=F(\tau_{\lambda(f)})=$ $=F(\{f\})=F^*(f)$; hence $\lambda(f) \in C_f$. By choice of $\lambda(f)$:

$$\{f\} \in \mathscr{A} \rightarrow \lambda(f) \in D. \tag{4}$$

Further:

$$\{F^*(f) \text{ defined } \& \ T_1[\lambda(f), \lambda(f), y] \ \& \ n \in B \ \& \ (x)[x<y \rightarrow \rightarrow \{f\}(x)=\{n\}(x)]\} \rightarrow F^*(f)=F^*(n). \tag{5}$$

For, given f and y, suppose this is false for some n; choosing the smallest such n, in the given enumeration of B, we have $\tau_{\lambda(f)}=\{n\}$, and hence, since $\{n\} \in \mathscr{A}$, $F^*(g_{\lambda(f)})=F^*(n)$. But if (5) is false, its hypothesis is true, and so $\lambda(f) \in D$; also its conclusion is false, i.e. $F^*(g_{\lambda(f)})\neq F^*(f)$, and so $\lambda(f) \notin C_f$. But this is impossible.

We now define a partial recursive functional Φ. Given a function α we look for an f and a y such that $F^*(f)$ is defined, $T_1[\lambda(f), \lambda(f), y]$ and $\{f\}(x)$ is defined and equal to $\alpha(x)$ for $x<y$. If such a pair of numbers exists, we choose one and set $\Phi(\alpha)=F^*(f)$. Clearly Φ is partial recursive. (We use the function variable α instead of $\{e\}$ to emphasize that α is given by its values, and not by a method of computation.)

Let $\alpha \in \mathscr{A}$. We must show that a pair f, y with the above properties exists and that, for every pair, $F^*(f)=F(\alpha)$. If f_0 is a Gödel number of α, we have $T_1[\lambda(f_0), \lambda(f_0), y_0]$ for some y_0 by (4): then f_0, y_0 is such a pair. Also by (5), since $F^*(f_0)$ is defined,

$$[n \in B \ \& \ \alpha(x)=\{n\}(x) \text{ for } x<y_0] \rightarrow F(\alpha)=F^*(n).$$

Now let f, y be any pair with the required properties: by (5)

$$[n \in B \ \& \ \{f\}(x) = \{n\}(x) \text{ for } x < y] \rightarrow F^*(f) = F^*(n).$$

Since B is recursively dense in $\mathscr{A}$, there is an n of B such that $\alpha(x) = \{n\}(x)$ for $x < \max(y, y_0)$, and for this n, $F^*(f) = F^*(n)$ and $F(\alpha) = F^*(n)$, and so $F(\alpha) = F^*(f)$.

This completes the proof.

Remark 1. The proof shows that we can compute a Gödel number of Φ from a Gödel number of F^* and of B.

Remark 2. It is necessary to impose some restriction on the class $\mathscr{A}$ to ensure that effective operations defined on $\mathscr{A}$ are potentially partial recursive, as shown by the following example due to Myhill. Let $F(\alpha) = 0$ if α is identically 0 and let $F(\alpha) = 1$ if (i) α is recursive and (ii) for all e, $\{e\} = \alpha \rightarrow (Ex)[x \leqslant e \ \& \ \alpha(x) \neq 0]$. Otherwise $F(\alpha)$ is undefined. F is an effective operation because, if $F(\{e\})$ is defined, then

$$F(\{e\}) = 0 \leftrightarrow (x)[x \leqslant e \rightarrow \{e\}(x) = 0].$$

If F were potentially partial recursive then, since F vanishes at the zero function, there would be a k such that $F(\alpha) = 0$ for all α for which $F(\alpha)$ is defined and $\alpha(x) = 0$ for $x \leqslant k^2)$. However, for each k there is a recursive function α_k such that $\alpha_k(x) = 0$ for all x except $x = k+1$, $\alpha_k(k+1)$ is distinct from $\{e\}(k+1)$ for all $e \leqslant k$. We then have $F(\alpha_k) = 1$, a contradiction.

Theorem 2. *Let $\mathscr{A}$ be a recursively enumerable class of recursive functions and let F be an effective operation whose domain is $\mathscr{A}$ and whose range is a set of natural numbers. Then F is potentially partial recursive.*

By Theorem 1 it is sufficient to prove the

Lemma. *Every recursively enumerable class of recursive functions has a recursively dense base.*

In fact we show that for every α in $\mathscr{A}$ and every natural number k there is a function σ in $\mathscr{A}$ which is zero for all sufficiently large arguments and satisfies $\sigma(x) = \alpha(x)$ for $x \leqslant k$.

Proof: Suppose this is false for some α^* and k^*. Let C be any recursively enumerable, non-recursive set of natural numbers.

---

2) This is easily proved from Kleene's normal form theorem for partial recursive functionals.

Define the function β_z as follows: $\beta_z(x)=\alpha^*(x)$ if $x\leqslant k^*$ or if z is not among the first x members of C in some fixed enumeration of C; otherwise $\beta_z(x)=0$. Clearly β_z is recursive since α^* is recursive, and there is a recursive function $\gamma(z)$ such that $\gamma(z)$ is a Gödel number of β_z. If $z\notin C$ then $\beta_z=\alpha$ and so $\beta_z\in\mathscr{A}$; if $z\in C$ then $\beta_z\notin\mathscr{A}$ since the lemma has been assumed false. But since $\mathscr{A}$ is a recursively enumerable class there is, as in (3), a recursively enumerable set A of natural numbers such that $\beta_z\in\mathscr{A}\leftrightarrow\gamma(z)\in A$ and so

$$z\notin C\leftrightarrow\gamma(z)\in A.$$

This is impossible since the complement of C is not recursively enumerable. Now choose some (primitive) recursive enumeration of Gödel numbers σ_n of just those functions which are ultimately zero. Then the recursively enumerable set of those σ_n which are in A is a recursively dense base of $\mathscr{A}$.

This completes the proof of the lemma and hence of Theorem 2.

3. Functionals whose values are partial recursive functions

It is clear that Theorems 1 and 2 carry over automatically to effective operations whose values are recursive functions. For effective operations as in (2) we note the following results.

Theorem 3: *Let $\mathfrak{F}$ be an effective operation whose domain is the class of all recursive functions and whose range is a class of partial recursive functions. Then there is a partial recursive functional Φ such that:*

$$\mathfrak{F}(\{e\})(x)=\Phi(\{e\},x) \tag{6}$$

whenever the left side is defined. [$\mathfrak{F}(\{e\})(x)$ denotes the value of the partial recursive function $\mathfrak{F}(\{e\})$ at the argument x.]

Proof. Let F_1 be as in (3). For each x, let $\mathscr{A}_x$ be the set of recursive $\{e\}$ such that $\mathfrak{F}(\{e\})(x)$ is defined. If A_x is the set of e such that $F_1(e)$ is defined and $\{F_1(e)\}(x)$ is defined, then for recursive $\{e\}$, $\{e\}\in\mathscr{A}_x\leftrightarrow e\in A_x$. Thus $\mathscr{A}_x$ is recursively enumerable; and the functional F_x defined by $F_x(\{e\})=\mathfrak{F}(\{e\})(x)$, is an effective operation as in (1), with domain $\mathscr{A}_x$.

By Theorem 2 and the remark after Theorem 1, F_x is the

restriction of a partial recursive functional Φ_x, whose Gödel number is a recursive function of x. The theorem follows readily.

In general $\Phi(\alpha, x)$ can not be so chosen that, for every recursive α, both sides of (6) are defined for the same values of x, as shown by the following example, due to Friedberg [3]. Let the function $\{e\}$ be in $\mathscr{A}_0$ if it is recursive and if either, for $n \leqslant e$, $\{e\}(n) = 0$, or if there is an e', $e' < \mu_x[\{e\}(x) \neq 0]$, such that:

$$\{e'\}(y) = \{e\}(y) \text{ for } y \leqslant \mu_x[\{e\}(x) \neq 0].$$

Let $\mathfrak{F}(\alpha)(0) = 0$ if $\alpha \in \mathscr{A}_0$, and let $\mathfrak{F}(\alpha)(x)$ be undefined otherwise. It is readily seen that $\mathscr{A}_0$ is recursively enumerable, and hence that $\mathfrak{F}$ is an effective operation as in (2). Suppose that Φ is as described in Theorem 3. Since $\Phi(\alpha, 0) = 0$ for α identically 0, there is a k such that $\Phi(\alpha, 0) = 0$ if $\alpha(x) = 0$ for $x \leqslant k^2$). Now choose α_k of Myhill's example in remark 2 after Theorem 1; α_k is recursive, $\mathfrak{F}(\alpha_k)(0)$ is undefined, but $\Phi(\alpha_k, 0)$ is defined.

Remark 1. MYHILL and SHEPHERDSON [2] asked whether every effective operation, whose domain is the class of recursive functions, is partial recursive. For numerical valued effective operations the answer is affirmative. For effective operations whose range is a class of partial recursive functions the answer depends on what kind of equality is required. If equality is only required between $F(\alpha)$ and $\lambda x \Phi(\alpha, x)$ at those x where $F(\alpha)(x)$ is defined, Theorem 3 shows that the answer is affirmative. If strong equality in the sense of [1], p. 327, is required, Friedberg's example shows that the answer is negative.

Remark 2. As is to be expected we get a neat theory when we consider effective operations whose domains and ranges are suitable classes of recursive functions, as shown in the present paper, or if we consider effective operations whose domains and ranges are classes of partial recursive functions, as shown in [2]. We get anomalies if we consider effective operations whose domain is the class of recursive functions and whose range is a class of partial recursive functions, as shown by Friedberg's example.

4. Characterization of classes of recursive functions

We now ask whether a recursive (recursively enumerable) class of recursive functions can be characterized by means of their initial segments.

Theorem 4. *A necessary and sufficient condition that a class $\mathscr{A}$ of recursive functions be recursive is that there exist disjoint recursively enumerable sets S and T of sequence numbers such that*: for recursive α,

$$\alpha \in \mathscr{A} \leftrightarrow (Ex)[\bar{\alpha}(x) \in S] \tag{7}$$

$$\alpha \notin \mathscr{A} \leftrightarrow (Ex)[\bar{\alpha}(x) \in T]. \tag{8}$$

Proof. If such sets S and T exist, and a Gödel number of the recursive function α is given, we can determine whether $\alpha \in \mathscr{A}$ by calculating $\bar{\alpha}(x)$ for $x = 0, 1, \ldots$, and enumerating S and T until we find an $\bar{\alpha}(x)$ in S or T. Conversely, let $\mathscr{A}$ be recursive. Since the characteristic function of $\mathscr{A}$ is an effective operation, it follows from Theorem 1 that for some recursive predicates U and V:

$$\alpha \in \mathscr{A} \leftrightarrow U(\alpha)$$

$$\alpha \notin \mathscr{A} \leftrightarrow V(\alpha).$$

It follows that recursively enumerable sets satisfying (7) and (8) exist [2]); and they are clearly disjoint.

We remark that S and T may be taken (primitive) recursive. For, suppose S is recursively enumerable. Let a sequence number x of length n belong to S_0 if one of the first n members of S in some given (primitive) recursive enumeration of S is an initial segment of x. Then S_0 is (primitive) recursive, and any function which begins with a sequence in S_0 begins with a sequence in S. Conversely, suppose α begins with a sequence of length k which is the n^{th} element of S. Then the sequence consisting of the first $n+k$ values of α is in S_0. Hence S_0 may replace S [3]).

Remark. The motive for proving Theorem 4 was that the representations (7) and (8) make the extensional character of the class $\mathscr{A}$ evident.

Theorem 4 is reminiscent of the theorem that the recursive sets are just those recursively enumerable sets which have a recursively enumerable complement. This suggested the *conjecture*:

If $\mathscr{A}$ is a recursively enumerable class of recursive functions there exists a recursively enumerable set S of sequence numbers such that, for recursive α,

$$\alpha \in \mathscr{A} \leftrightarrow (Ex)[\bar{\alpha}(x) \in S].$$

---

[3]) In the statement of this theorem in CR, vol. 245, p. 399–402, para. 4, we inadvertently omitted to state that the sets M, E, F were recursive.

However, Friedberg's example, cited after Theorem 3 is a *counterexample* to this conjecture, if we consider his recursively enumerable class $\mathscr{A}_0$. Since the zero function is in $\mathscr{A}_0$, S would have to contain an initial segment of it, i.e. a sequence of k successive zeros. On the other hand, there are recursive functions α, satisfying $\alpha(x)=0$ for $x \leqslant k$, which are not in $\mathscr{A}_0$, contrary to the conjecture.

BIBLIOGRAPHY

[1] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, Amsterdam 1952.

[2] J. Myhill and J. C. Shepherdson, Effective operations on partial recursive functions, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **1** (1955), 310–315.

(3) Richard Friedberg, un contre-exemple relatif aux fonctionelles récursives, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), **247** (1958), 852–854.

510 6 16 1957
INTERNATIONAL COLLOQUIUM CONSTRUCTIVI

INSERT BOOK
MASTER CARD
FACE UP IN
FRONT SLOT
OF S.R. PUNCH

MASTER CARD

GLOBE 901144-0

SIGILLVM VNIVERSITATIS ARIZONENSIS
SVRSVM
ESTABLISHED
1885

UNIVERSITY OF ARIZONA
LIBRARY

72-1

510.6 16 1957
999