PUBBLICAZIONI A CURA DEL
CENTRO SUPERIORE DI LOGICA E SCIENZE COMPARATE

Franco Spisani

TEORIA GENERALE DEI NUMERI RELATIVI

GENERAL THEORY OF DIRECTED NUMBERS

TESTO BILINGUE

INTERNATIONAL LOGIC REVIEW

PUBBLICAZIONI A CURA DEL

CENTRO SUPERIORE DI LOGICA E SCIENZE COMPARATE

TEORIA GENERALE
DEI
NUMERI RELATIVI

CON INGRESSO DEI NUMERI MOLTIPLICATORI E DIVISORI

VOL. I

Testo bilingue

di

FRANCO SPISANI

INTERNATIONAL LOGIC REVIEW - BOLOGNA 1983

PUBLICATIONS OF THE
CENTRO SUPERIORE DI LOGICA E SCIENZE COMPARATE

GENERAL THEORY OF DIRECTED NUMBERS

WITH INTRODUCTION OF MULTIPLYING AND DIVIDING NUMBERS

VOL. I

by

FRANCO SPISANI

INTERNATIONAL LOGIC REVIEW - BOLOGNA 1983

First reprint June 1983

I diritti sull'intero materiale e sulle singole parti del libro sono riservati (comprese traduzioni, ristampe, riproduzioni a mezzo di fotocopiatrice o simili).

This work is subject to copyright: all rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned (translation, reprinting, reproduction by photocopying machine or similar means).

© by International Logic Review

Printed in Italy by Tip. Leonelli - Castenaso (Bologna)

SOMMARIO

PREFAZIONE . . . . . p. 10

1. MONOTONIA DELLA SERIE E DEFINIZIONE DELLO ZERO . . . . » 16

2. ORIGINE DELLA TEORIA DEI NUMERI RELATIVI E DERIVAZIONE DALLO ZERO . . . . . » 28

3. I CORRISPETTIVI RELATIVI DI ZERO . . . . . » 42

4. ESTENSIONE DEI NUMERI RELATIVI E LIMITE DELL'INDUZIONE COMPLETA . . . . . » 46

5. L'INSIEME FINITO E L'UNIVERSO ESIGUO . . . . . » 54

6. INTERI POSITIVI E NEGATIVI. TRASFORMAZIONE DI SOMME E DIFFERENZE . . . . . » 58

7. UNIVERSO ESIGUO E NUMERI INDEFINITI . . . . . » 68

8. COMPLEMENTARIETÀ DEI NUMERI RELATIVI E SOTTOINSIEMI FINITI . . . . . » 72

9. COMPLEMENTARIETÀ DEGLI INSIEMI ESIGUI . . . . . » 78

10. COLLEZIONE ESIGUA E NUMERABILITÀ DEGLI OGGETTI . . . . . » 84

11. CORRISPONDENZE FRA NUMERI E OGGETTI . . . . . » 100

12. MODELLI OMOLOGHI . . . . . » 116

13. CALCOLO DEI NUMERI RELATIVI IN $\mathfrak{S}$, σ, M E NEUTRALITÀ DEGLI OGGETTI NUMERABILI . . . . . » 120

14. LE DISTRIBUZIONI DEI NUMERI RELATIVI SEISEMICI . . . . . » 128

15. L'INDEFINITO RELATIVO . . . . . p. 132

16. ISOMORFISMO DELLA DISTRIBUZIONE IN $\mathfrak{S}$ . . . . . » 138

17. SOMME E DIFFERENZE DI NUMERI RELATIVI . . . . . » 140

18. USO DELLE PARENTESI . . . . . » 160

19. SOMME E DIFFERENZE DI NUMERI SEISEMICI, RADICALI E POTENZE . . . . . » 172

20. MOLTIPLICAZIONI E DIVISIONI DI NUMERI RELATIVI E DIFFERENZA DEI VALORI ASSOLUTI DEI PRODOTTI E DEI QUOZIENTI . . . . . » 178

21. NUMERI RELATIVI ESPONENZIALI E CALCOLO DEGLI INCREMENTI . » 194

22. NUMERI RELATIVI MOLTIPLICATORI E DIVISORI . . . . . » 212

23. REGOLE DEI SEGNI DEI NUMERI RELATIVI MOLTIPLICATORI E DIVISORI . . . . . » 224

BIBLIOGRAFIA . . . . . » 239

INDICE DEI SIMBOLI . . . . . » 245

SUMMARY

PREFACE . . . . . p. 11

1. MONOTONY OF THE SERIES AND DEFINITION OF ZERO . . . . . » 17

2. ORIGIN OF THE THEORY OF DIRECTED NUMBERS AND DERIVATION FROM ZERO . . . . . » 29

3. THE SIGNED CORRELATIVES OF ZERO . . . . . » 43

4. EXTENSION OF THE DIRECTED NUMBERS AND LIMITS OF COMPLETE INDUCTION . . . . . » 47

5. FINITE DISTRIBUTION AND SMALL UNIVERSE . . . . . » 55

6. POSITIVE AND NEGATIVE INTEGERS. TRANSFORMATION OF SUMS AND DIFFERENCES. . . . . » 59

7. SMALL UNIVERSE AND INDEFINITE NUMBERS . . . . . » 69

8. COMPLEMENTARITY OF DIRECTED NUMBERS AND FINITE SUBDISTRIBUTIONS. . . . . » 73

9. COMPLEMENTARITY OF SMALL DISTRIBUTIONS. . . . . » 79

10. SMALL COLLECTION AND NUMERABILITY OF OBJECTS . . . . . » 85

11. CORRESPONDENCES BETWEEN NUMBERS AND OBJECTS. . . . . » 101

12. HOMOLOGOUS MODELS . . . . . » 117

13. COMPUTATION BY DIRECTED NUMBERS IN $\mathfrak{S}$, σ, M AND NEUTRALITY OF NUMERABLE OBJECTS. . . . . » 121

14. THE DISTRIBUTIONS OF HEXADIC DIRECTED NUMBERS . . . . . p. 129

15. THE INDEFINITE DIRECTED NUMBER . . . . . » 133

16. ISOMORPHISM OF THE DISTRIBUTION IN $\mathfrak{S}$ . . . . . » 139

17. SUMS AND DIFFERENCES OF DIRECTED NUMBERS . . . . . » 141

18. THE USE OF BRACKETS . . . . . » 161

19. SUMS AND DIFFERENCES OF HEXADIC NUMBERS, ROOTS AND POWERS . . . . . » 173

20. MULTIPLICATION AND DIVISION OF DIRECTED NUMBERS AND DIFFERENCE BETWEEN ABSOLUTE VALUES OF PRODUCTS AND QUOTIENTS . . . . . » 179

21. EXPONENTIAL DIRECTED NUMBERS AND COMPUTATION OF INCREMENTS . . . . . » 195

22. NUMBERS DIRECTED BY THE SIGNS $\times$ AND : . . . . . » 213

23. RULES FOR THE SIGNS OF DIRECTED MULTIPLYING AND DIVIDING NUMBERS . . . . . » 225

BIBLIOGRAPHY . . . . . » 239

INDEX OF SYMBOLS . . . . . » 245

TEORIA GENERALE DEI NUMERI RELATIVI
GENERAL THEORY OF DIRECTED NUMBERS

PREFAZIONE

In Neutralizzazione dello Spazio per Sintesi Produttiva *(Bologna 1963) venne da me sottolineato che, dopo i numeri transfiniti, è ancora possibile presumere l'esistenza di un numero (non transfinito, ma trans-infinito), indicabile con M, ora con* $\bar{M}$ *(VI, § 3, 214-15), perché l'infinito s'indebolisce nella direzione dell'incontro coi finiti.*

C'è una relazione divisoria che "ipotizza il valore M (numero logico trans-infinito)" all'origine della neutralizzazione "dello spazio transfinito" (VI, § 3, 214). Aleph *va verso successivi aumenti; ma è la relatività dei numeri (allora espressa nel* calcolo per valori di posizione*) che ne individua la direzione inversa. Si finisce per ritornare ad M. Intanto* aleph *viene ripercorso fino ad incontrare il primo numero trans-infinito. Quel numero M (base dell'universo numericamente esiguo) è* sostegno *del finito, dentro il quale è pensabile la* teoria generale dei numeri relativi. *Quest'ultima inizia ad essere quando si aderisce all'ipotesi che, con* $\bar{M}$ *, esistano uno o più universi finiti, che dipendono dalla correlazione di numeri intrafiniti, di cui si diano i vari modi di distribuzione con i rapporti e le regole corrispondenti.*

Già nel 1963 la teoria generale dei numeri relativi *cominciava a derivare dall'ipotesi dell'*insieme finito. *Gli studi da me condotti fra il 1960 ed il 1965 mi avevano tuttavia persuaso che essa avrebbe potuto provocare conseguenze imprevedibili nel campo delle matematiche per l'ingresso di numeri relativi moltiplicatori e divisori (accanto ai numeri positivi e negativi), poi per la comparsa di un numero indefinito nella grandezza, però dotato di segno. Pensai allora di non pubblicare il mio lavoro.*

Ne discussi, comunque, a più riprese, dal 1965 al 1969, con Rudolph Carnap. Gli avevo sottoposto i risultati dell'indagine. Gli spiegai anche le ragioni che, al momento, mi inducevano a non diffonderne le conclusioni. Carnap rispose che quella scelta gli sembrava affatto ingiustificata: l'opera – scrisse – non poteva rimanere nel silenzio. Tuttavia non cambiai parere. Non avrei pubblicato, e glielo confermai.

PREFACE

In Neutralizzazione dello Spazio per Sintesi Produttiva *(Bologna, 1963), I stressed the fact that, beyond the transfinite numbers, it is still possible to presuppose the existence of a number (not transfinite but trans-infinite), which can be indicated by M, hereafter by* $\overline{M}$ *(VI, § 3, 214-15), because infinity weakens in the direction of meeting up with finite numbers.*

There is a divisory relationship which "supposes the value of M (a trans-infinite logical number)" to lie at the origin of the neutralisation "of transfinite space" (VI, § 3, 214). Aleph *goes on towards still further increases; but it is the directability of numbers (which at that time I expressed in the* calculus of values by their position*) that identifies their inverse direction. One ends up by returning to M. Meanwhile* aleph *is run through again until the first trans-infinite number is encountered. That number M (the* support *for the numerically small universe) is also the support for the finite. Within it one can envisage a* general theory of directed numbers. *This theory begins to exist when one accepts the hypothesis that, with* $\overline{M}$*, there may exist one or more finite universes. These depend on the correlation of intrafinite numbers of which there are various ways of distribution, with the corresponding relationships and rules.*

As long ago as 1963, the general theory of directed numbers *began to stem from the hypothesis of the finite distribution.*

My investigations, undertaken between 1960 and 1965, had however convinced me that it might give rise to unforeseeable consequences in the mathematical field, because of the advent of directed multiplying and dividing numbers (alongside positive and negative numbers), then because of the appearance of an indefinite number with respect to magnitude, but possessing a sign. I decided, at that time, not to publish my work.

Then I discussed it on several occasions, between 1965 and 1969, with Rudolph Carnap to whom I had submitted the results of my investigations. I also explained to him the reasons which, for the time being, induced me not to publish the work. Carnap replied that my decision was quite unjustified: the work, he wrote, could not be allowed to go unpublished. Nonetheless, I did not change my mind. I would not publish and confirmed the decision to him.

Certo il libro non sarebbe uscito dal cassetto, in cui stava dal 1962, senza la sorprendente svolta negli studi formalistici, fino alle conseguenze ultime del finitismo*: proprio l'imminenza dei nuovi contributi di Wette alla teoria finitista dei numeri mi ha convinto a presentare il lavoro.*

Penso che sia giunto il momento di far conoscere lo sviluppo almeno della prima parte dei miei studi.

Mi piace qui ricordare Stifel (1487-1567), che, accantonati gli scritti profetici sulla fine del mondo, se n'era andato ad insegnare a Jena.

Fra una pausa e l'altra delle lezioni universitarie, vide nelle cantine dei vinai quei segni '+' e '−', con cui essi erano soliti indicare la quantità maggiore o minore del contenuto, in mosto, nelle botti (rispetto a quanto normalmente prevedevano che vi si trovasse).

Sembra che sia derivato da lì l'uso di "nuovi" segni per esprimere il valore positivo e negativo dei numeri. Quei segni, vedremo, appartengono ai numeri, non diversamente, però, dai segni di moltiplicazione e di divisione.

Ora è il momento di dare all'intero campo dei numeri relativi una completa teoria.

La teoria generale dei numeri relativi *è rimasta per lungo tempo improponibile. Quei numeri non sono sembrati entità generalizzabili indipendentemente dai procedimenti di calcolo.*

I numeri relativi sono stati confusi con semplici termini n *preceduti dal '+' e '−' come segni di operazione.*

Per Peano, i numeri relativi non sono che collegamenti fra numeri e segni. "Vocabulo «positivo» et «negativo» habe valore de «additivo» et «subtractivo» ... «Numero negativo» non es numero, sed systema composito per numero et signo" (Peano 1908, III, 83).

Non sorprende, poi, che su base infinitistica, si ritorni ai numeri relativi solo per fissare qualche regola dei segni. Non a caso, ai numeri naturali (N_1), zero-inclusivi (N_0) e razionali (R), Peano, per denotazione nel calcolo, attribuisce una lettera maiuscola, mentre ai numeri relativi riserva un minutissimo n. *"Le nombre «n», qu'on peut*

Certainly the manuscript would not have left the drawer, in which it had lain since 1962, without the unexpected change in formalistic studies, extending to the recent consequences of E.W. Wette's finitism. It was the imminence of publication of new contributes to the finitistic theory of numbers that caused me to come to a decision and made me think that the time had come to make known the development of at least the first part of my work.

I like to remember Stifel of old (1487-1567) who, having put aside his prophetic writings upon the end of the world, went off to teach at Jena. During intervals between his university lectures he saw, in the cellars of a vintner, those '+' and '−' with which they were wont to indicate a larger or smaller quantity of the content of grape must in the vats (compared with what they would normally be expected to contain).

It seems that it was from this that there derived the use of "new" signs for expressing the negative or positive value of numbers.

We shall see that those signs belong to numbers, but only in the way that the signs of multiplication and division belong to them. It is now time the entire field of directed numbers was endowed with a full-scale theory of its own.

For a long time it has been impossible to put forward the general theory of directed numbers. *Such numbers did not seem to be entities that could be generalised independently of the procedures of calculation. Directed numbers were confounded with simple terms* n *preceded by '+' and by '−' as operational signs.*

In Peano's view directed numbers are mere links between numbers and signs. "Vocabulo «positivo» et «negativo» habe valore de «additivo» et «subtractivo» ... «Numero negativo» non es numero, sed systema composito per numero et signo" (Peano 1908, III, 83).

Thus it is not surprising that on the basis of theories connected with infinity there should have been a return to directed numbers solely in order to establish some rules of signs. Not by chance, for the purposes of denotation in calculus, Peano attributes a capital letter to natural numbers (N_1), as to zero-including numbers (N_0) and to rational numbers (R), while, for directed numbers, he reserves that very

lire «nombre relatif», indique l'ensemble des nombres positifs et des negatifs" (Peano 1899, § 24, 39).

Quando operiamo in un insieme numerico infinito, il segno che è preso in considerazione non è il segno che precede, ma quello che segue i numeri nella progressione della serie. Per cui ad ogni N_0, *nella disposizione seriale, viene aggiunto sempre qualcosa* ($N_0 +$ ...), *e dopo ogni numero c'è il segno '+', che addiziona* n *ad* n, *o, più semplicemente, 1 ad* n+. *Intanto si va da* n *verso l'infinito.*

L'ipotesi della non rilevanza di una teoria generale dei numeri relativi, dal punto di vista infinitista, sembra inevitabilmente scontata. Cantor ne conferma l'esclusione.

Con il formalismo (Hilbert 1918, Bernays 1934, Weyl 1940, Kleene 1952), si affaccia però la tendenza finitistica e la possibilità di fondare una teoria generale dei numeri relativi diventa finalmente pensabile.

RUDOLF CARNAP
11728 DOROTHY ST., APT. 304
LOS ANGELES, CAL. 90049
PHONE 478-4877

December 2, 1969

Professor Franco Spisani
Via Belmeloro 3
40126 Bologna, Italy

Dear Professor Spisani:

I am astonished that you insist on your decision not to publish your book. It is essential that you make your number theory known; and I have already emphasized the importance of the presentation of multipliers and divisors. Don't have any doubts. You have my total support.

With best wishes

Sincerely yours,

Rudolf Carnap

RC:jbc

Rudolf Carnap,
Professor of Philosophy,
Emeritus

small n. *"Le nombre «n» qu'on peut lire «nombre relatif», indique l'ensemble des nombres positifs et des negatifs" (Peano 1899, § 24, 39).*

When we operate in an infinite numerical set, the sign taken into consideration is not the one which precedes, but that which follows the numbers in the progression of the series. So that something is always added to every N_0 *in the serial arrangement* (N_0+ ...), *and, after every number, there is the sign '+', which adds* n *to* n, *or more simply, 1 to* n+, *while we pass from* n *towards infinity.*

From the infinitistic point of view any general theory of directed numbers seemed bound to be dismissed out of hand as Cantor himself confirmed.

With formalism (Hilbert 1918, Bernays 1934, Weyl 1940 or Kleene 1952), the finitistic tendency begins to come to the fore. Founding a general theory of directed numbers at long last becomes a possibility.

1. MONOTONIA DELLA SERIE E DEFINIZIONE DELLO ZERO

Osservazione 1. Con l'aggiunta di a $(=1)$, a destra dello 0 e successori, è indefinitamente possibile continuare nella progressione della serie monotona.

Sulla base di

$$0,\ a,\ b,\ c,\ n,\ +,\ \ldots,\ \ldots,\ (\ ,\ ),$$

da cui

$$(0+),\ (0+a+),\ ((a+a+)=b+),\ ((b+a+)=c+),\ \ldots,$$
$$(n+),\ (n+a+),\ \ldots,$$

la serie diviene, però, ripetitiva. Il numero si banalizza. Esso aumenta per semplice ripetizione di $(a+)$, e non c'è spiegamento della serie che sia indipendente dalla comparsa del segno '+' a destra della cifra:

$$(a+),\ (b+),\ \ldots,\ (n+),\ \ldots$$

Dalla progressione seriale risulta l'automaticità dell'aggiunta.

Il logicismo (Peano, Russell, Whitehead) spiega la derivabilità della serie solo per iterazione. I formalisti (Hilbert, Bernays, Weyl, Kleene), senza più escludere lo zero dalla serie dei numeri naturali (che scrivono N, omettendo di distinguere fra N_0 e N_1), si limitano a raffinarne il procedimento derivativo. Dopo 0, essi scrivono ancora 0, con l'aggiunta dell'apice ′, ossia 0′, per indicare l'inerenza (o appartenenza) a 0 dell'aumento attribuito allo 0. Proprio allo 0, primo numero naturale, quindi non più estromesso dalla serie dei numeri naturali (nè incluso in N_0 come numero iniziale della serie dei numeri zero-inclusivi), appartiene, allora, l'incrementabilità di se stesso.

Ora quel cambiamento di prospettiva concorre alla rifondazione di una teoria generale dei numeri, e, specificatamente, dei numeri relativi.

1. MONOTONY OF THE SERIES AND DEFINITION OF ZERO

Observation 1. By adding a $(=1)$ to the right of 0 and successors, it is indefinitely possible to continue in the progression of the monotonic series.

With

$$0,\ a,\ b,\ c,\ n,\ +,\ \ldots,\ \ldots,\ (\ ,\ ),$$

whence

$$(0+),\ (0+a+),\ ((a+a+)=b+),\ ((b+a+)=c+),\ \ldots,$$
$$(n+),\ (n+a+),\ \ldots,$$

the series becomes repetitive however. The number grows stereotyped. It increases, but by simple repetition of $(a+)$; consequently there is no development of the series without the appearance of the sign '+' to the right of the number:

$$(a+),\ (b+),\ \ldots,\ (n+),\ \ldots$$

The series progression leads to automatic addition.

Logicism (Peano, Russell, Whitehead) does not explain how the series can be derived, if not by iteration. The formalists (Hilbert, Bernays, Weyl, Kleene), without excluding zero from the series of natural numbers (which they write N, omitting any distinction between N_0 and N_1), merely refine on the derivative process. After 0, they still write 0, with the addition of the prime or index ′, that is 0′, to indicate the inherency (or the affinity) to 0 of the increase attributed to 0. Now 0, the first natural number, no longer excluded from the set of natural numbers (nor included in N_0 as the first in the series of zero-including numbers), contains in itself the possibility of increasing itself.

The new perspective may well contribute to the refoundation of a general number theory and, specifically, of a theory of directed numbers.

Lemma 1. Prima di diventare

$$((0)'),\ (((0)')'),\ (((((0)')'..)'''')),$$

dove l'apice ($'''$) indica un suo aumento intrafinito, 0, uguale a se stesso ($0=0$), richiama φ, che è lo stesso 0 in quanto estensibile nella direzione del positivo ($\varphi=0$, come base dell'estensibilità in positivo di 0).

Teorema 1. Diremo $(0=0)$ e $(0=\varphi)$, se $(\varphi=\varphi)$ e $(\varphi=0)$.
Con 0, φ, $_0$, $_\varphi$, $\bigwedge$, $\wedge$, $=$, $\supset$, $(\ ,\ )$

$$\bigwedge_0 \wedge \bigwedge_\varphi (0=0),\ ((0=0)\wedge(0=\varphi))\supset((\varphi=\varphi)\wedge(\varphi=0))\supset$$
$$\supset(\varphi=\varphi)\wedge(\varphi=0),$$

(per ogni 0 e φ, quando $(0=0)$ e $(0=\varphi)$, se $(0=0)$ e $(0=\varphi)$ implicano $(\varphi=\varphi)$ e $(\varphi=0)$, allora $(\varphi=\varphi)\wedge(\varphi=0)$).

Definizione 1. Si dirà che 0, con $(0=0)$, esprime il numero k come $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$, ossia come numero idem-inclusivo di 0, per cui $0'$ va solamente verso il valore assoluto del successore di 0, senza che quest'ultimo sia estensibile positivamente o negativamente per mezzo di $'''$, mentre $(0=\varphi)$ corrisponde al numero derivato φ-inclusivo $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$, ossia al numero naturale 0 uguale a φ, e va verso la propria estensibilità in positivo.

Teorema 2. $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ indica il numero naturale derivato 0, però con $(0=\varphi)$ e quindi con il passaggio all'incrementabilità di 0.
Infatti, con

$$k,\ 0,\ _\varphi,\ _0,\ ^\varphi,\ ',\ \supset,\ \left(\ ,\ \right),$$

si può scrivere

$$0 \supset \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \supset \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}},$$

Lemma 1. Before becoming

$$((0)'),\ (((0)')'),\ (((((0)')'..)'''')),$$

where the index $(''')$ indicates its intrafinite increase, 0, equal to itself $(0=0)$, recalls φ, which is 0 itself in that it is extensible in the positive sense ($\varphi=0$ as being the basis of the extensibility towards the 'positive' of 0).

Theorem 1. We may take $(0=0)$ and $(0=\varphi)$, if $(\varphi=\varphi)$ and $(\varphi=0)$.

With $0,\ \varphi,\ {}_0,\ {}_\varphi,\ \bigwedge,\ \wedge,\ =,\ \supset,\ (\ ,\ )$

$$\bigwedge_0 \wedge \bigwedge_\varphi (0=0),\ ((0=0)\wedge(0=\varphi))\supset((\varphi=\varphi)\wedge(\varphi=0))\supset$$
$$\supset(\varphi=\varphi)\wedge(\varphi=0)$$

(for every 0 and φ, when $(0=0)$ and $(0=\varphi)$, if $(0=0)$ and $(0=\varphi)$ imply $(\varphi=\varphi)$ and $(\varphi=0)$, then $(\varphi=\varphi)\wedge(\varphi=0)$).

Definition 1. It will be expressed 0, with $(0=0)$, as the natural derived number k or as $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$, that is as a number idem-inclusive of 0, for which $0'$ which remains equal to 0, goes only toward the absolute value of 0, without being positively or negatively extensible by $'''$, while $(0=\varphi)$ corresponds to the derived φ-including number $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$, or to the natural number 0 equal to φ, and goes towards φ (towards its extensibility in a positive direction).

Theorem 2. $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ indicates the natural derived number 0, but with $(0=\varphi)$, hence with the advantage that it is possible to increase 0.

In fact, with

$$k,\ 0,\ {}_\varphi,\ {}_0,\ {}^\varphi,\ ',\ \supset,\ \left(\ ,\ \right),$$

one can write

$$0 \supset \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \supset \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}},$$

e, per il postulato 17 della teoria del numero (Kleene 1952, 82),

$$\left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \wedge \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \supset \left(\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \wedge \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right),$$

derivazione di $(a \wedge a) \supset (a' \wedge a')$, dalla

$$(a \wedge b) \supset (a' \wedge b'),$$

che si legge: $(a \wedge b)$ implica $(a' \wedge b')$, quando a e b siano aumentati per l'aggiunta di apici $(')$.

Lemma 2. Con $\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}$ si esprime la riconversione del numero naturale derivato φ $(=0)$, nella direzione inversa alla estensibilità di 0, ovvero come φ che torna a 0 (φ e φ' sono i corrispettivi relativi di 0). Con $\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}$, il numero naturale derivato φ resta uguale a se stesso e conferma l'estensibilità di φ in φ'.

Definizione 2. Dati

$$k,\ {}_0,\ {}_\varphi,\ {}^0,\ {}^\varphi,\ \wedge,\ =,\ \sim \text{ (vale a dire)}, (\ ,\ ),$$

con $\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}$ si intende l'estensibilità del numero naturale derivato φ $(=0)$, ~ 0, riportato nella direzione della non-estensibilità (ossia ricondotto a 0).

Lemma 3. A partire da

$$\left[(0=0) \sim \left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right)\right] \wedge \left[(0=\varphi) \sim \left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right)\right] \wedge \left[(\varphi=\varphi) \sim \left(\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right)\right] \wedge$$
$$\wedge \left[(\varphi=0) \sim \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right],$$

and for the postulate 17 of the number theory (Kleene 1952, 82),

$$\left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \wedge \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \supset \left(\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \wedge \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right),$$

that is the derivation of $(a \wedge a) \supset (a' \wedge a')$ from

$$(a \wedge b) \supset (a' \wedge b'),$$

which reads: $(a \wedge b)$ implies $(a' \wedge b')$, when a and b are increased by the addition of indices $(')$.

Lemma 2. By $\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}$ we express a reconverting of the natural derived number $\varphi(=0)$, in the direction inverse to the extensibility of 0, or as φ which returns to 0 (φ and φ' are the respective correlatives of 0). With $\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}$, the natural derived number φ remains equal to itself and confirms the extensibility of φ into φ'.

Definition 2. Given

$$k,\ {}_0,\ {}_\varphi,\ {}^0,\ {}^\varphi,\ \wedge,\ =,\ \sim \text{ (that means)}, (\ ,\ ),$$

by $\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}$ is meant the extensibility of the natural derived number $\varphi\ (=0)$, ~ 0, returning in the direction of non-extensibility (or referred back to 0).

Lemma 3. Setting out from

$$\left[(0=0) \sim \left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right)\right] \wedge \left[(0=\varphi) \sim \left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right)\right] \wedge \left[(\varphi=\varphi) \sim \left(\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right)\right] \wedge$$

$$\wedge \left[(\varphi=0) \sim \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right],$$

con 0, φ, k, $_0$, ^{0}, $_\varphi$, $^\varphi$, ↔ (se e solo se), ∼ (vale a dire), =, (,), [,], si hanno le correlazioni:

$$(0=0) \sim \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} ;$$

$$(0=\varphi) \sim \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} ;$$

$$(\varphi=\varphi) \sim \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}} ;$$

$$(\varphi=0) \sim \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} ;$$

$$((\varphi=0) \leftrightarrow (\varphi=\varphi)) \sim \left[\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right] ;$$

$$((\varphi=\varphi) \leftrightarrow (0=\varphi)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right] ;$$

$$((0=\varphi) \leftrightarrow (0=0)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right] ;$$

$$((0=0) \leftrightarrow (\varphi=0)) \sim \left[\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right] ;$$

$$((\varphi=0) \leftrightarrow (0=\varphi)) \sim \left[\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right] ;$$

$$((0=\varphi) \leftrightarrow (\varphi=\varphi)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right] ;$$

$$((\varphi=\varphi) \leftrightarrow (\varphi=0)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right] ;$$

$$((\varphi=0) \leftrightarrow (0=0)) \sim \left[\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right] ;$$

$$((0=0) \leftrightarrow (\varphi=\varphi)) \sim \left[\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right] ;$$

$$((\varphi=\varphi) \leftrightarrow (0=0)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right] ;$$

$$((0=0) \leftrightarrow (0=\varphi)) \sim \left[\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right] ;$$

$$((0=\varphi) \leftrightarrow (\varphi=0)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right] ;$$

given 0, φ, k, $_0$, ^{0}, $_\varphi$, $^\varphi$, ↔ (if and only if), ~ (that means), =, [,], (,), we have the correspondences:

$$(0=0) \sim \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}};$$

$$(0=\varphi) \sim \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}};$$

$$(\varphi=\varphi) \sim \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}};$$

$$(\varphi=0) \sim \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}};$$

$$((\varphi=0) \leftrightarrow (\varphi=\varphi)) \sim \left[\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right];$$

$$((\varphi=\varphi) \leftrightarrow (0=\varphi)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right];$$

$$((0=\varphi) \leftrightarrow (0=0)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right];$$

$$((0=0) \leftrightarrow (\varphi=0)) \sim \left[\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right];$$

$$((\varphi=0) \leftrightarrow (0=\varphi)) \sim \left[\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right];$$

$$((0=\varphi) \leftrightarrow (\varphi=\varphi)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right];$$

$$((\varphi=\varphi) \leftrightarrow (\varphi=0)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right];$$

$$((\varphi=0) \leftrightarrow (0=0)) \sim \left[\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right];$$

$$((0=0) \leftrightarrow (\varphi=\varphi)) \sim \left[\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right];$$

$$((\varphi=\varphi) \leftrightarrow (0=0)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right];$$

$$((0=0) \leftrightarrow (0=\varphi)) \sim \left[\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right];$$

$$((0=\varphi) \leftrightarrow (\varphi=0)) \sim \left[\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right];$$

Corollario 1. Diremo che $(0=0)$ equivale a $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$, ovvero all'elemento $\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}$ di N, mentre $0=\varphi$ equivale a $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$, elemento estensibile di N, che va da 0 alla numerosità per apici di φ di 0.

Definizione 3. Poiché $(0=0)$, $(\varphi=\varphi)$, $(0=\varphi)$ e $(\varphi=0)$ sono lo stesso 0, si dicono equivalenti o coeguali; ed equivalenti sono i loro corrispettivi

$$\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right) \wedge \left(\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right) \wedge \left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \wedge \left(\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right) ,$$

che si ottengono con

$$0,\ \varphi,\ k,\ {}_0,\ {}^0_{,\varphi},\ {}^\varphi,\ =,\ \leftrightarrow,\ \sim,\ (\ ,\ ),\ \left[\ ,\ \right],$$

$$(0=0) \sim \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} ;$$

$$(0=\varphi) \sim \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} ;$$

$$(\varphi=\varphi) \sim \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}} ;$$

$$(\varphi=0) \sim \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} ;$$

$$((\varphi=0)=(0=\varphi)\leftrightarrow(\varphi=\varphi)=(0=0)) \sim \left[\left[\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right] \leftrightarrow \left[\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right]\right] ;$$

$$((0=0)=(\varphi=\varphi)\leftrightarrow(0=\varphi)=(\varphi=0)) \sim \left[\left[\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right] \leftrightarrow \left[\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right]\right] ;$$

$$((\varphi=0)=(\varphi=\varphi)\leftrightarrow(0=\varphi)=(0=0)) \sim \left[\left[\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right] \leftrightarrow \left[\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right]\right] ;$$

$$((0=0)=(0=\varphi)\leftrightarrow(\varphi=\varphi)=(\varphi=0)) \sim \left[\left[\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right] \leftrightarrow \left[\overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}}\right]\right] ;$$

$$((\varphi=0)=(\varphi=\varphi)\leftrightarrow(0=0)=(0=\varphi)) \sim \left[\left[\overset{0}{\underset{\varphi=0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right] \leftrightarrow \left[\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right]\right] ;$$

Corollary 1. We shall say that $(0=0)$ equals $\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}$ or the $\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}$ element of N, but that $0=\varphi$ equals $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}$, the extensible element of N, which goes from 0 to the numerousness of indices (′) of φ of 0.

Definition 3. Since $(0=0)$, $(\varphi=\varphi)$, $(0=\varphi)$ and $(\varphi=0)$ are 0 itself, they are said to be equivalent or co-equal; and equal are their correlatives

$$\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right) \wedge \left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right) \wedge \left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right) \wedge \left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right) ,$$

obtained by

$$0,\ \varphi,\ k,\ {}_0,\ {}^0,\ {}_\varphi,\ {}^\varphi,\ =,\ \leftrightarrow,\ \sim,\ (\ ,\ ),\ \left[\ ,\ \right],$$

$$(0=0) \sim \underset{0=0}{\overset{0}{k_0}} ;$$

$$(0=\varphi) \sim \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}} ;$$

$$(\varphi=\varphi) \sim \underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}} ;$$

$$(\varphi=0) \sim \underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}} ;$$

$$((\varphi=0)=(0=\varphi)\leftrightarrow(\varphi=\varphi)=(0=0)) \sim \left(\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right) \leftrightarrow \left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}} \leftrightarrow \underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right) ;$$

$$((0=0)=(\varphi=\varphi)\leftrightarrow(0=\varphi)=(\varphi=0)) \sim \left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}} \leftrightarrow \underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right) \leftrightarrow \left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\right) ;$$

$$((\varphi=0)=(\varphi=\varphi)\leftrightarrow(0=\varphi)=(0=0)) \sim \left(\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right) \leftrightarrow \left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right) ;$$

$$((0=0)=(0=\varphi)\leftrightarrow(\varphi=\varphi)=(\varphi=0)) \sim \left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}} \leftrightarrow \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right) \leftrightarrow \left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}} \leftrightarrow \underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\right) ;$$

$$((\varphi=0)=(\varphi=\varphi)\leftrightarrow(0=0)=(0=\varphi)) \sim \left(\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}} \leftrightarrow \underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right) \leftrightarrow \left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}} \leftrightarrow \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\right) ;$$

$$((0=\varphi)=(\varphi=0)\leftrightarrow(\varphi=\varphi)=(0=0))\sim\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\varphi=\varphi)\leftrightarrow(\varphi=0)=(0=\varphi))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=\varphi)=(\varphi=\varphi)\leftrightarrow(\varphi=0)=(0=0))\sim\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\varphi=0)\leftrightarrow(\varphi=\varphi)=(0=\varphi))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=\varphi)=(\varphi=0)\leftrightarrow(\varphi=\varphi)=(0=0))\sim\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\varphi=0)\leftrightarrow(0=\varphi)=(\varphi=\varphi))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\right);$$

$$((\varphi=\varphi)=(\varphi=0)\leftrightarrow(0=0)=(0=\varphi))\sim\left(\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=\varphi)=(0=0)\leftrightarrow(\varphi=0)=(\varphi=\varphi))\sim\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\right);$$

$$((\varphi=\varphi)=(0=0)\leftrightarrow(0=\varphi)=(\varphi=0))\sim\left(\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\right);$$

$$((\varphi=0)=(0=0)\leftrightarrow(0=\varphi)=(\varphi=\varphi))\sim\left(\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\right);$$

$$((\varphi=\varphi)=(0=\varphi)\leftrightarrow(\varphi=0)=(0=0))\sim\left(\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\varphi=0)\leftrightarrow(0=\varphi)=(\varphi=\varphi))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\right);$$

$$((\varphi=\varphi)=(0=0)\leftrightarrow(\varphi=0)=(0=\varphi))\sim\left(\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\right);$$

da cui, per A, $A\supset B\dashv B$ e $A\wedge B\supset B$ (con $\dashv$ indicante derivazione),

$\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}, \left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\supset\underset{0=\varphi}{\overset{((\varphi)')}{k_0}}\right)\dashv\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}}$ (aumento intrafinito di φ per derivazione dal postulato 2 del calcolo proposizionale (Kleene, 1952, 82))

$$((0=\varphi)=(\varphi=0)\leftrightarrow(\varphi=\varphi)=(0=0))\sim\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\varphi=\varphi)\leftrightarrow(\varphi=0)=(0=\varphi))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=\varphi)=(\varphi=\varphi)\leftrightarrow(\varphi=0)=(0=0))\sim\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\varphi=0)\leftrightarrow(\varphi=\varphi)=(0=\varphi))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=\varphi)=(\varphi=0)\leftrightarrow(\varphi=\varphi)=(0=0))\sim\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\varphi=0)\leftrightarrow(0=\varphi)=(\varphi=\varphi))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\varphi}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\right);$$

$$((\varphi=\varphi)=(\varphi=0)\leftrightarrow(0=0)=(0=\varphi))\sim\left(\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=\varphi)=(0=0)\leftrightarrow(\varphi=0)=(\varphi=\varphi))\sim\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\right);$$

$$((\varphi=\varphi)=(0=0)\leftrightarrow(0=\varphi)=(\varphi=0))\sim\left(\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\right);$$

$$((\varphi=0)=(0=0)\leftrightarrow(0=\varphi)=(\varphi=\varphi))\sim\left(\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\right);$$

$$((\varphi=\varphi)=(0=\varphi)\leftrightarrow(\varphi=0)=(0=0))\sim\left(\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\varphi=0)\leftrightarrow(0=\varphi)=(\varphi=\varphi))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\right)\right);$$

$$((\varphi=\varphi)=(0=0)\leftrightarrow(\varphi=0)=(0=\varphi))\sim\left(\left(\underset{\varphi=\varphi}{\overset{\varphi}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\varphi=0}{\overset{0}{k_\varphi}}\leftrightarrow\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\right)\right);$$

whence, by A, $A\supset B\dashv B$ and $A\wedge B\supset B$ (where $\dashv$ stands for derivation),

we obtain $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}$, $\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}\supset\underset{0=\varphi}{\overset{((\varphi)')}{k_0}}\right)\dashv\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}}$ (intrafinite extension of φ by derivation from postulate 2 for propositional calculus (Kleene, 1952, 82))

$\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}} \wedge \underset{0=\varphi}{\overset{((\varphi)'..)''}{k_0}} \supset \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}}$ (aumento intrafinito di φ con implicazione da congiunzione logica).

2. ORIGINE DELLA TEORIA DEI NUMERI RELATIVI E DERIVAZIONE DALLO ZERO

Definizione 1. Come $(0=\varphi)$ indica che 0, in quanto φ, è estensibile in positivo, si dice che esiste un ν che individua la diminuibilità di 0.

Teorema 1. Con

$k, {}_0, {}_\nu, {}', \wedge, \supset, \left(, \right),$

si ha

$$\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}} \supset \underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}, \text{ da } \left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}} \wedge \underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\right) \supset \left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}} \wedge \underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}\right),$$

che è applicazione di $((a \wedge b) \supset (a' \wedge b'))$, dove l'apice di ν indica che il numero non si estende in $(+1)$, ma ripiega in (-1).

Definizione 2. Si diranno φ e ν quei numeri coeguali o equivalenti a 0 che rappresentano la disponibilità di 0 ad aggiungersi, o togliersi, apici che portino verso una sua estensibilità o diminuzione. Ancora diremo che φ e ν sono all'origine della relatività dei numeri.

Definizione 3. I segni '+' e '−' appartengono a 0, però solo in quanto 0 è esprimibile rispettivamente come φ e come ν, ovvero come estensibilità e diminuibilità (estensibilità in negativo) di 0.

$\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}} \wedge \underset{0=\varphi}{\overset{((\varphi)'..)''}{k_0}} \supset \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}}$ (intrafinite extension of φ with implication from logical conjunction).

2. ORIGIN OF THE THEORY OF DIRECTED NUMBERS AND DERIVATION FROM ZERO

Definition 1. Since $(0=\varphi)$ indicates that 0 as φ is extensible towards the positive, there can be said to exist a ν that sanctions the possibility of diminishing 0.

Theorem 1. With

$$k,\ 0,\ \nu,\ ',\ \wedge,\ \supset,\ \left[\ ,\ \right],$$

we have

$$\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}} \supset \underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}, \text{ from } \left[\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}} \wedge \underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\right] \supset \left[\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}} \wedge \underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}\right],$$

which is an application of $((a \wedge b) \supset (a' \wedge b'))$, where the index of ν indicates that the number is not extended toward $(+1)$ but toward (-1).

Definition 2. We may say that φ and ν are the numbers coequal or equivalent to 0; they represent the tendency of 0 to add to or take from itself indices (′) that lead to its extending or diminishing. We shall also say that φ and ν are at the origin of the directability of numbers.

Definition 3. The signs '+' and '−' belong to 0, but only in so far as 0 is expressible respectively as φ and as ν, or as extensibility and reducibility (negative extensibility) of 0.

Osservazione 1. Si può allora scrivere tanto

$$\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} = a = 1,$$

quanto

$$\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} = -a = -1,$$

perché $\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ rappresenta l'estensione positiva di φ $(=a=1)$ mentre $\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ è l'estensione in negativo (diminuzione) di ν $(=-a=-1)$, per aggiunta degli apici $(')$ rispettivamente a φ, che sta per 0, il quale va verso il positivo, e a ν, che sta per 0 che va verso il negativo.

Definizione 4. In quanto 0 trova in φ la propria estensione in positivo e 0 trova in ν il segno della sua diminuibilità verso i numeri negativi, $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ indica la tendenza di 0 ad esprimere, attraverso $(')$, numeri relativi con segno negativo, come $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ indica la tendenza di 0 ad esprimere, mediante $(')$, numeri relativi con segno positivo.

Lemma 1. Scriveremo somme di φ e ν $\left[\sum_{\varphi}^{\varphi'''}, \sum_{\nu}^{\nu'''}\right]$.

$$\left(\left(\left(\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} + \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) = \overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) = b\ (=2)\right) \wedge \left(\left(\left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} + \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) = \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) = -b\ (=-2)\right) \ldots$$

Si scriverà anche $\mathbf{C}_0$ complemento nullo di φ e ν, con

$$\left(\left(\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} - \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) = \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \sim \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \wedge \left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} - \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) = \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \sim \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \ldots,$$

la differenza dei numeri $\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} - \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ e $\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} - \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}$.

Si dirà inoltre che

Observation 1. One can therefore write either

$$\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}} = a = 1,$$

or

$$\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}} = -a = -1,$$

because $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}}$ is the positive extension of φ $(=a=1)$ and $\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}$ represents the negative extension (diminution) of ν $(=-a=-1)$, as a result of adding indices (′) respectively to φ, which is 0 going positive, and to ν, which is 0 going negative.

Definition 4. Since 0 has its positive extension in φ and 0 has ν to indicate its own reducibility towards the negative numbers, $\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}$ indicates the tendency of 0 to express, by means of (′), directed numbers with negative sign just as $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}$ indicates the tendency of 0 to express by means of (′) directed numbers with positive sign.

Lemma 1. We shall write the sum of φ and ν $\left[\sum_{\varphi}^{\varphi'''}, \sum_{\nu}^{\nu'''}\right]$.

$$\left(\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}} + \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}}\right) = \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi''}{k_0}}\right) = b \ (=2)\right) \wedge \left(\left(\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}} + \underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}\right) = \underset{0=\nu}{\overset{\nu''}{k_0}}\right) = -b \ (=-2)\right) \ldots$$

We shall also write $\mathbf{C}_0$ (nil complement) of φ and ν, with

$$\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}} - \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}}\right) = \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}} \sim \underset{0=0}{\overset{0}{k_0}} \wedge \left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}} - \underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}\right) = \underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\right) \sim \underset{0=0}{\overset{0}{k_0}} \ldots,$$

the difference betwen the numbers $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}} - \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}}$ and $\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}} - \underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}$.

We shall further say that

$$\left(\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} > \left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right)\right) \wedge \left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} < \left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}\right)\right),$$

e per la A, $A \supset B \dashv B$ e la $A \wedge B \supset B$ (che si leggono: dato A, e da A consegue B, allora deriva B, e, dati A e B, allora consegue B), si potrà scrivere, con

$$k,\ {}_0,\ {}_\nu,\ {}',\ =,\ \supset,\ \dashv,\ \wedge$$

$$\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}, \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \supset \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} \dashv \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}};$$

$$\overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}, \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} \supset \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \dashv \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}};$$

$$\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}, \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \supset \left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)'\right) \dashv \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}};$$

$$\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \left(\left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)'\right) \supset \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}};$$

$$\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \left(\left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)'\right)'\ldots\right) \supset \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}.$$

Corollario 2. Risulta possibile riconoscere, nella corrispondenza 0, φ e ν, la derivabilità dell'estensione relativa o diminuzione intrafinita di 0.

Osservazione 2. In quanto 0 viene indicato con φ, anche 0 sta all'origine di un numero positivo relativo (**R**), ovvero

$$\left(\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \wedge \left(\left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right) \wedge \left(\left(\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right) \wedge \left(\left(\overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right)\right) \ldots \dashv \left(\left(\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right).$$

Di $\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} = 0\right)$ non si scrive per convenzione il segno.

Osservazione 3. In quanto ν sta all'origine di un numero relativo negativo, ν è **R**.

$$\left(\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} > \left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}\right)\right) \wedge \left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} < \left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}\right)\right),$$

and for A, $A \supset B \dashv B$ and $A \wedge B \supset B$ (which reads: given A, and that B follows from A, there derives B; and, given A and B, then B follows), one can write, with

$$k,\ {}_0,\ {}_\nu,\ {}',\ =,\ \supset,\ \dashv,\ \wedge,$$

$$\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}, \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \supset \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} \dashv \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}};$$

$$\overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}, \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} \supset \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \dashv \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}};$$

$$\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}, \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \supset \left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)'\right) \dashv \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}};$$

$$\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \left(\left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)'\right) \supset \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}};$$

$$\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \left(\left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)'\right)'..\right) \supset \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}.$$

Corollary 2. In the correspondence 0, φ and ν it is recognised that one can derive the directed extension or intrafinite diminution of 0.

Observation 2. Since 0 can be written φ, 0 too is at the origin of a directed positive number (**R**), or

$$\left(\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \wedge \left(\left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right) \wedge \left(\left(\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right) \wedge \left(\left(\overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right)\right)..\dashv \left(\left(\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right).$$

For $\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} = 0\right)$ by convention the sign is not written.

Observation 3. As ν is at the origin of a negative directed number, ν is **R**.

$$\left(\left(\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)\right) \wedge \left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right) \wedge \left(\left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right) \wedge \left(\left(\overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right)\right) \ldots \dashv \left(\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}.$$

Con k, 0, ν, $_0$, $_\nu$, ^{0}, $^\nu$, =, ~, ↔, (,), [,],

$$(0=0) \sim \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} ;$$

$$(0=\nu) \sim \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} ;$$

$$(\nu=\nu) \sim \overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} ;$$

$$(\nu=0) \sim \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} ;$$

$$((\nu=0)=(0=\nu)\leftrightarrow(\nu=\nu)=(0=0)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right)\right) ;$$

$$((0=0)=(\nu=\nu)\leftrightarrow(0=\nu)=(\nu=0)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}\right)\right) ;$$

$$((\nu=0)=(\nu=\nu)\leftrightarrow(0=\nu)=(0=0)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right)\right) ;$$

$$((0=0)=(0=\nu)\leftrightarrow(\nu=\nu)=(\nu=0)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}\right)\right) ;$$

$$((\nu=0)=(\nu=\nu)\leftrightarrow(0=0)=(0=\nu)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)\right) ;$$

$$((0=\nu)=(\nu=0)\leftrightarrow(\nu=\nu)=(0=0)) \sim \left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right)\right) ;$$

$$((0=0)=(\nu=0)\leftrightarrow(\nu=\nu)=(0=\nu)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{0}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)\right) ;$$

$$((0=\nu)=(\nu=0)\leftrightarrow(\nu=\nu)=(0=0)) \sim \left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right)\right) ;$$

$$\left(\left(\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)\right) \wedge \left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right) \wedge \left(\left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right) \wedge \left(\left(\overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}\right)\right) \;.\;.\; \dashv \left(\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \in \mathbf{R}.$$

With k, 0, ν, $_0$, $_\nu$, ^{0}, $^\nu$, =, ~, ↔, (,), [,],

$(0=0) \sim \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$;

$(0=\nu) \sim \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$;

$(\nu=\nu) \sim \overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}$;

$(\nu=0) \sim \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}$;

$$((\nu=0)=(0=\nu)\leftrightarrow(\nu=\nu)=(0=0)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\nu=\nu)\leftrightarrow(0=\nu)=(\nu=0)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=0)=(\nu=\nu)\leftrightarrow(0=\nu)=(0=0)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(0=\nu)\leftrightarrow(\nu=\nu)=(\nu=0)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=0)=(\nu=\nu)\leftrightarrow(0=0)=(0=\nu)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=\nu)=(\nu=0)\leftrightarrow(\nu=\nu)=(0=0)) \sim \left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(0=\nu)\leftrightarrow(\nu=\nu)=(\nu=0)) \sim \left(\left(\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=\nu)=(\nu=0)\leftrightarrow(\nu=\nu)=(0=0)) \sim \left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{\nu=0}{k_\nu}}\right) \leftrightarrow \left(\overset{\nu}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}} \leftrightarrow \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\nu=0)\leftrightarrow(0=\nu)=(\nu=\nu))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=\nu)=(\nu=0)\leftrightarrow(0=0)=(0=\nu))\sim\left(\left(\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=\nu)=(0=0)\leftrightarrow(\nu=0)=(\nu=\nu))\sim\left(\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=\nu)=(0=0)\leftrightarrow(0=\nu)=(\nu=0))\sim\left(\left(\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=0)=(0=0)\leftrightarrow(0=\nu)=(\nu=\nu))\sim\left(\left(\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=\nu)=(0=\nu)\leftrightarrow(\nu=0)=(0=0))\sim\left(\left(\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\nu=0)\leftrightarrow(0=\nu)=(\nu=\nu))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=\nu)=(0=0)\leftrightarrow(\nu=0)=(0=\nu))\sim\left(\left(\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\right)\right).$$

Definizione 5. Numeri relativi positivi e negativi φ e ν esprimono anche differenze di quantità.

Con k, $_0$, $_\nu$, $_\varphi$, ^{0}, $^\nu$, $^\varphi$, $'$, $=$, $\sim$, $\neg$ (negazione), $\left(\ ,\ \right)$,

$$\neg\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}=\underset{0=\nu}{\overset{\nu''}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu''}{k_0}}=\underset{0=\nu}{\overset{\nu'''}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu'''}{k_0}}=\underset{0=\nu}{\overset{\nu''''}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu''''}{k_0}}=\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}=\underset{0=\nu}{\overset{\nu''''}{k_0}}\right);$$

$$((0=0)=(\nu=0)\leftrightarrow(0=\nu)=(\nu=\nu))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=\nu)=(\nu=0)\leftrightarrow(0=0)=(0=\nu))\sim\left(\left(\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=\nu)=(0=0)\leftrightarrow(\nu=0)=(\nu=\nu))\sim\left(\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=\nu)=(0=0)\leftrightarrow(0=\nu)=(\nu=0))\sim\left(\left(\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=0)=(0=0)\leftrightarrow(0=\nu)=(\nu=\nu))\sim\left(\left(\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=\nu)=(0=\nu)\leftrightarrow(\nu=0)=(0=0))\sim\left(\left(\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\right);$$

$$((0=0)=(\nu=0)\leftrightarrow(0=\nu)=(\nu=\nu))\sim\left(\left(\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\leftrightarrow\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\right)\right);$$

$$((\nu=\nu)=(0=0)\leftrightarrow(\nu=0)=(0=\nu))\sim\left(\left(\underset{\nu=\nu}{\overset{\nu}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right)\leftrightarrow\left(\underset{\nu=0}{\overset{0}{k_\nu}}\leftrightarrow\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}\right)\right).$$

Definition 5. Positive and negative directed numbers φ and ν also express quantitative differences.

With k, $_0$, $_\nu$, $_\varphi$, ^{0}, $^\nu$, $^\varphi$, $'$, $=$, $\sim$, $\neg$ (negation), $\left(\ ,\ \right)$,

$$\neg\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}=\underset{0=\nu}{\overset{\nu''}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu''}{k_0}}=\underset{0=\nu}{\overset{\nu'''}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu'''}{k_0}}=\underset{0=\nu}{\overset{\nu''''}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu''''}{k_0}}=\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}}=\underset{0=\nu}{\overset{\nu''''}{k_0}}\right);$$

$$\neg \left(\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} = \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \right) ;$$

$$\cdot\cdot$$

$$\neg \left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \sim \overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \right) ;$$

$$\neg \left(\overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \sim \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \right) ;$$

$$\neg \left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \sim \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \right) ;$$

$$\neg \left(\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \sim \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \right) ;$$

$$\cdot\cdot$$

Definizione 6. Poiché $\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ è minore di $\overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$, minore di $\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$, $\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ si dice minore di $\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$. Allo stesso modo $\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ è maggiore di $\overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ e maggiore di $\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}$,

$$\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} > \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \right) \sim \left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} < \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \right) ;$$

$$\left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} > \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \right) \sim \left(\overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} < \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \right) ;$$

$$\left(\overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} > \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \right) \sim \left(\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} < \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \right) .$$

$$\cdot\cdot$$

Definizione 7. Si dicono $\overset{\varphi''}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}$ e $\overset{\nu''}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}$ i termini equivalenti che non esprimono un definito aumento oppure una diminuzione definita di 0.

Lemma 2. Con $(0=\varphi)$ si tende ad aumentare 0, e con $(0=\nu)$ si va verso la diminuzione di 0.

$$\neg\left(\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} = \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right);$$

$$\cdot\cdot$$

$$\neg\left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \sim \overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \sim \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \sim \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right);$$

$$\neg\left(\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \sim \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right);$$

$$\cdot\cdot$$

Definition 6. Since $\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ is less than $\overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$, less than $\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$, $\overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ is said to be less than $\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$. In the same way $\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ is greater than $\overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ and greater than $\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}$,

$$\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} > \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \sim \left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} < \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right);$$

$$\left(\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} > \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \sim \left(\overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} < \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right);$$

$$\left(\overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} > \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \sim \left(\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} < \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right).$$

$$\cdot\cdot$$

Definition 7. Equivalent terms that do not express a definite increase or a definite diminution of 0 are $\overset{\varphi''}{\underset{\varphi=\varphi}{k_\varphi}}$ and $\overset{\nu''}{\underset{\nu=\nu}{k_\nu}}$.

Lemma 2. With $(0=\varphi)$ 0 tends to increase, and with $(0=\nu)$ 0 tends to diminish.

Regola 1. Il più piccolo numero intero relativo positivo dopo 0 se $(0=\varphi)$ non è $0'$, ma φ' (ovvero $+1$). Si scrive 0 come $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$ il numero naturale 0, se origina il valore assoluto 1. Dopo $(0=\nu)$, non si va da 0 verso $0'$, ma da ν verso ν' (ossia da 0 verso -1).

Osservazione 4. La serie monotona non è fondamento dei numeri relativi, perché, nel disporre $\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \wedge \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}$, l'estensibilità o diminuibilità di 0 dipende da operazioni diverse dalla semplice aggiunta di apici al numero naturale (0).

Osservazione 5. I segni positivo e negativo non sono semplici segni di operazioni da effettuare (*addizione* e *sottrazione*) su quantità o grandezze successive a 0. L'estensibilità o diminuibilità di 0 deriva dalla proprietà di 0 (diverso da $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$) di essere all'origine dell'estensibilità o diminuzione di φ oppure ν.

I segni '+' e '−', prima di essere segni di relazione fra numeri, sono segni di appartenenza ai numeri derivati da φ o da ν.

Regola 2. Ad un numero *n* appartiene il segno positivo o negativo a seconda che *n* derivi da 0 come φ oppure da 0 come ν.

Definizione 8. Si chiama numero naturale 0 il numero che ha in $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$ un'estensione nulla; ma 0 come $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \wedge \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$, possiede una relativa, virtuale estensibilità e diminuibilità.

Si dice numero naturale maggiore o minore di 0 il numero che trova negli apici $(''')$ di $^{\varphi}$ o $(''')$ di $^{\nu}$ una grandezza definita.

Rule 1. The smallest positive integer after 0, if $(0=\varphi)$, is not $0'$, but φ' (or $+1$). 0 as $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$ is said to be the natural number 0, if it derives the absolute value 1. After $(0=\nu)$, we do not go from 0 towards $0'$, but from ν towards ν' (or from 0 towards -1).

Observation 4. Monotonic series is not the basis of directed numbers, because in arranging $\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \wedge \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}$, the extensibility or reducibility of 0 depends on operations different from the simple addition of indices to the natural number (0).

Observation 5. The positive and negative signs are not simple signs of operations to be carried out (*addition* or *subtraction*) upon quantities or magnitudes following 0. The extensibility or reducibility of 0 derives from the property of 0 (different from $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$) of being at the origin of the extensibility or diminution of φ or ν.

The signs '+' and '−', before being signs of relationship between numbers, are signs of affinity with the numbers derived from φ or from ν.

Rule 2. The positive or negative sign belongs to a number n according to whether n derives from 0 as φ or from 0 as ν.

Definition 8. That number is called natural number 0 which has in $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$ a nil extension; but 0 as $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \wedge \overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ possesses a virtual directed extensibility and reducibility.

Whatever number has a definite magnitude in the indices $(''')$ of $^{\varphi}$ or $(''')$ of $^{\nu}$ we call a natural number greater or less than 0.

3. I CORRISPETTIVI RELATIVI DI ZERO

Definizione 1. Si dicono somme $\sum_{\varphi'}^{\varphi'''} \sum_{\nu'}^{\nu'''}$ di $(\varphi' + \varphi''')$ o $(\nu' + \nu''')$ i risultati del tipo $\left(\overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} + \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) = \overset{\varphi'''''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ e $\left(\overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} + \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) = \overset{\nu'''''}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ ..

Il prodotto $(\varphi \times 0)$ è equivalente a $\left(\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \times \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}\right) = \overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$.
Tale prodotto è nullo. Anche il prodotto di $(\nu \times 0)$ si dice $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$, ovvero nullo.

Regola 1. Numeri $\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ e $\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ possono venir sommati o sottratti sulla base delle correlazioni operative degli apici che si aggiungono o si tolgono (si moltiplicano e si dividono) nel $^{\varphi}$ e nel $^{\nu}$, che si scrivono sopra k.

Lemma 1. Il numero naturale 0, somma, differenza, prodotto e quoziente di un $\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ rispetto a zero, risulta operativamente nullo.

Definizione 2. Si dirà che φ e ν, addizionati a 0 oppure sottratti da 0, danno somme o differenze uguali al prodotto $(\varphi \times 0)$ e $(\nu \times 0)$

$$((\nu + 0 = \nu - 0) = (\nu \times 0)).$$

Definizione 3. Diremo *estensione positiva* o *negativa* del corrispondente relativo del numero naturale 0, il risultato dell'operazione con cui si aggiunge o si toglie (′) ai corrispondenti φ e ν di 0.

3. THE SIGNED CORRELATIVES OF ZERO

Definition 1. The operations of the type $\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi''}{k_0}} + \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}}\right) = \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi''''}{k_0}}$ and $\left(\underset{0=\nu}{\overset{\nu''}{k_0}} + \underset{0=\nu}{\overset{\nu'''}{k_0}}\right) = \underset{0=\nu}{\overset{\nu''''}{k_0}}$ are said to be sums $\sum_{\varphi'}^{\varphi'''}$ $\sum_{\nu'}^{\nu'''}$ between $(\varphi'+\varphi'''')$ or $(\nu'+\nu'''')$ . .

The product $(\varphi\times 0)$ is equivalent to $\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}}\times\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}\right) = \underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}$. This product is nil. The product, too, of $(\nu\times 0)$ is called $\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}$, or nil.

Rule 1. Numbers $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}}$ and $\underset{0=\nu}{\overset{\nu'''}{k_0}}$ can be summed or subtracted on the basis of the operative correlations of the indices (′) which are added or taken away (multiplied and divided) in the $^{\varphi}$ and in the $^{\nu}$, which are written over k.

Lemma 1. The natural number 0 (a sum, difference, product or quotient of a $\underset{0=\nu}{\overset{\nu'''}{k_0}}$ with respect to zero), is found to be operatively nil.

Definition 2. We shall say that φ and ν, added to or subtracted from 0, give sums or differences equal to the product $(\varphi\times 0)$ or $(\nu\times 0)$

$$((\nu+0=\nu-0)=(\nu\times 0)).$$

Definition 3. We shall term *positive* or *negative extension* of the corrisponding signed number of the natural number 0, the result of the operation by which indices (′) are added to or subtracted from the corrisponding φ and ν of 0.

Corollario 1. L'estensione di 0 non è ottenuta a partire da 0′, ma da $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ e da $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$, quando a $^{\varphi}$ e a $^{\nu}$ si aggiunge un apice.

Definizione 4. L'apice è quanto si aggiunge a $^{\nu}$, perchè, con $0=\nu$, ν sia minore di 0, oppure ciò che viene aggiunto a $^{\varphi}$ in modo che, con $0=\varphi$, φ sia maggiore di 0.

Osservazione 1. La serie dei numeri naturali non fonda il calcolo dei numeri relativi. Essa può venire sostituita con l'ordinamento derivato da $\overset{0}{\underset{0=0}{k_0}}$ a $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$, $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$, $\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$, $\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}$, indipendentemente dalla collocazione di questi ultimi in un insieme lineare $\mathfrak{S}$.

Lemma 2. Può convenirsi che $\pm a$ $(=\pm 1)$, $\pm b$ $(=\pm 2a)$, $\pm c$ $(=\pm a \pm b)$ .., e tuttavia $a, b, c, \ldots$ non richiedono progressioni monotone per essere derivati. Diremo che da $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ e da $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ sono dedotti $a, b, c,$ ma inoltre che $(a-c)=-b$, come $(a+a)=b$. La deduzione dei numeri relativi da $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ e $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ interrompe l'ordine seriale.

Corollario 2. Possono farsi corrispondere, fuori dalla serie monotona, quei numeri positivi e negativi che derivano da

$$\overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}, \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}, \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}},$$

distribuiti in $\mathfrak{S}$, indipendentemente dalla serie.

Essi sono numeri relativi, conseguenti dai corrispettivi derivati di φ e di ν, per la $A \wedge B$, $A \supset B \vee \ldots \dashv B \vee \ldots$,

$$\left(\left(\left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \wedge \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right), \left(\left(\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \wedge \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \vee \overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \vee \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \vee \ldots \vee \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \supset \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \vee \overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \vee \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \vee \ldots \vee \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) \dashv\right.\right.$$

$$\left.\left.\dashv \overset{\varphi'}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \vee \overset{\varphi''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \vee \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \vee \ldots \vee \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right)\right) \sim (a \vee b \vee c \vee \ldots \vee n);$$

Corollary 1. The extension of 0 is obtained not by setting out from 0′, but from $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}$ and from $\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}$, when an index is added to $^{\varphi}$ and to $^{\nu}$.

Definition 4. The index (′) is what is added to $^{\nu}$, so that, with $0=\nu$, ν be less than 0, or what is added to $^{\varphi}$ in such a way that, with $0=\varphi$, φ be greater than 0.

Observation 1. The series of natural numbers does not come into the calculation of directed numbers. It is replaced by the arrangement derived from $\underset{0=0}{\overset{0}{k_0}}$ to $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}$, $\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}$, $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}}$, $\underset{0=\nu}{\overset{\nu'''}{k_0}}$, independently of their collocation in a linear distribution $\mathfrak{S}$.

Lemma 2. It may be agreed that $\pm a\ (=\pm 1)$, $\pm b\ (=\pm 2a)$, $\pm c\ (=\pm a \pm b)$ .., but $a, b, c, \ldots$ do not require monotonous progressions in order to be derivatives. We shall say that from $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}$ and from $\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}$ $a,b,c,$ are deduced, but also that $(a-c)=-b$, just as $(a+a)=$ $=b$. The deduction of the directed numbers from $\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}}$ and $\underset{0=\nu}{\overset{\nu}{k_0}}$ interrupts the serial order.

Corollary 2. Outside the monotonous sets, those positive and negative numbers may be made to correspond that derive from

$$\underset{0=\nu}{\overset{\nu'}{k_0}} \wedge \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}}, \underset{0=\nu}{\overset{\nu''}{k_0}} \wedge \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi''}{k_0}}, \underset{0=\nu}{\overset{\nu'''}{k_0}} \wedge \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}},$$

distributed in $\mathfrak{S}$, independently of the series.

They are directed numbers, being derived from the signed correlatives of φ and ν, by $A \wedge B$, $A \supset B \vee \ldots \dashv B \vee \ldots$,

$$\left(\left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}} \wedge \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}}\right), \left(\left(\underset{0=\varphi}{\overset{\varphi}{k_0}} \wedge \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}} \vee \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi''}{k_0}} \vee \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}} \vee \ldots \vee \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}}\right) \supset \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}} \vee \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi''}{k_0}} \vee \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}} \vee \ldots \vee \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}}\right) \dashv\right.\right.$$

$$\left.\left.\dashv \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'}{k_0}} \vee \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi''}{k_0}} \vee \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}} \vee \ldots \vee \underset{0=\varphi}{\overset{\varphi'''}{k_0}}\right)\right) \sim (a \vee b \vee c \vee \ldots \vee n);$$

$$\left(\left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right), \left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \ldots \vee \overset{\nu'''\cdots}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \supset \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \ldots \vee \overset{\nu'''\cdots}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \dashv$$

$$\dashv \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \ldots \vee \overset{\nu'''\cdots}{\underset{0=\nu}{k_0}}\Big)\Big) \sim (-a \vee -b \vee -c \vee \ldots \vee -n).$$

4. ESTENSIONE DEI NUMERI RELATIVI E LIMITE DELL'INDUZIONE COMPLETA

Definizione 1. Dicesi tendenza di 0 verso φ o ν la condizione, interna a 0, dell'appartenenza del segno al numero relativo derivato.

Corollario 1. Poiché al numero 0, in quanto derivato da φ e ν, appartiene il segno, si dirà che il segno è una proprietà del numero.

Definizione 2. Chiameremo numero relativo derivato o esteso **R**, il numero che dipende dall'estensione di φ e ν di 0.

Dati due numeri relativi x e y, si dirà che x è maggiore di y se x risulta maggiormente esteso in φ di $\mathfrak{G}$. Si dirà numero relativo maggiore (più esteso) o minore (meno esteso), il numero x che, attraverso l'attribuzione $\varphi'^{\cdots}$ oppure $\nu'^{\cdots}$, contiene o è contenuto da y.

Definizione 3. Si dice numero naturale 0 il numero che sostiene φ e ν come corrispettivi delle sue derivazioni nulle o relativamente estese.

Definizione 4. Gli apici ($'$) e ($'^{\cdots}$) sono quanto si aggiunge a φ e ν, perché φ e ν siano diversi dalla naturalità di 0 (ovvero da 0 come numero naturale).

$$\left(\left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right), \left(\left(\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}} \wedge \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \ldots \vee \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \supset \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \ldots \vee \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) \dashv\right.$$

$$\left.\dashv \overset{\nu'}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \vee \ldots \vee \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right)\right) \sim (-a \vee -b \vee -c \vee \ldots \vee -n).$$

4. EXTENSION OF THE DIRECTED NUMBERS AND LIMITS OF COMPLETE INDUCTION

Definition 1. We call the tendency of 0 towards φ or ν the condition within 0 of the affinity of the sign to the derived directed number.

Corollary 1. Since a sign belongs to the number 0, in that the latter is derived from φ and ν, we shall say that the sign is a property of number.

Definition 2. We define as derived directed number or extended **R**, the number that depends upon the extension φ and ν of 0.

Given two directed numbers x and y, it is said that x is greater than y if x is found to be more extended in φ of $\mathfrak{G}$. We define as a greater directed number (more extended) or lesser (less extended), the number x which, through the attribution φ''' or ν''' contains or is contained by y.

Definition 3. The natural number 0 is defined as the number that supports φ and ν as correlatives of its nil or directedly extended derivations.

Definition 4. The indices ($'$) and ($'''$) are what is added to φ and ν, to distinguish φ and ν from the naturalness of 0 (or from 0 as a natural number).

Corollario 2. Gli apici di φ e ν trasformano 0 da numero naturale in numero relativo

$$\left(\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} + \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) = \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \sim +n;$$

$$\left(\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} + \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) = \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \sim -n.$$

Regola 1. I numeri relativi vanno derivati dall'interno dell'estensibilità del numero naturale 0.

Osservazione 1. L'induzione completa si applica ai numeri relativi derivati, solo quando questi vengano disposti in una serie monotona n di numeri, di cui ciascuno possieda un antecedente del tipo $(n-1)$.

Definizione 5. Con $\pm a(=\pm 1)$, $\pm b(=\pm a \pm a)$, $\pm c(=\pm a \pm b)$, $\pm d(=\pm c \pm a)$, e con

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \Gamma\ ,\ \pm,\ =,\ (\ ,\ ),\ \{\ ,\ \},$$

si definisce l'insieme $\{(\pm a) \wedge (\pm b) \wedge (\pm c) \wedge (\pm d)\} = \Gamma$, come derivazione serialmente monotona di $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ e di $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$.

Lemma 1. Alla serie monotona si applica l'induzione da $(\pm a)$ a $(\pm n)$ ed a $((\pm n)\ \pm a)$. Essa tuttavia non può dirsi completa se non si verifica anche dopo $((\pm n) \pm a)$, ovvero se non si conosce la grandezza $((\pm n) \pm a)$.

Corollario 3. Induzione completa dell'insieme monotono Γ , con

$$\{a\ (=1),\ b\ (=2a)\},$$

Corollary 2. The indices (′) of φ and ν transform 0 from a natural number into a directed number

$$\left(\overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} + \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}}\right) = \overset{\varphi'''}{\underset{0=\varphi}{k_0}} \sim +n;$$

$$\left(\overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} + \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}}\right) = \overset{\nu'''}{\underset{0=\nu}{k_0}} \sim -n.$$

Rule 1. The directed numbers are derived from within the extensibility of the natural number 0.

Observation 1. Complete induction is applied to derived directed numbers only when these are arranged in an n monotonous series of numbers, of which each has an antecedent of the $(n-1)$ type.

Definition 5. By means of $\pm a(=\pm 1)$, $\pm b(=\pm a \pm a)$, $\pm c$ $(=\pm a \pm b)$, $\pm d(=\pm c \pm a)$, and with

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \Gamma\ ,\ \pm,\ =,\ (\ ,\ ),\ \{\ ,\ \},$$

we define the set $\{(\pm a)\wedge(\pm b)\wedge(\pm c)\wedge(\pm d)\}=\Gamma$, as the monotonic derivation of $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ and of $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$.

Lemma 1. Induction from $(\pm a)$ to $(\pm n)$ and to $((\pm n)\ \pm a)$ is applied to the monotonic series. It cannot however be said to be complete unless it is verified after $((\pm n)\pm a)$ as well, that is if the magnitude of $((\pm n)\ \pm a)$ is not known.

Corollary 3. Complete induction of the monotonic set Γ , with

$$\{a\ (=1),\ b\ (=2a)\}$$

è la seguente:

$$\Gamma_{\{a+b\}} = \frac{b \cdot (b+a)}{b},$$

con

$$\Gamma_{\{a+b\}} = \frac{b \cdot (b+a)}{b} \leftrightarrow \Gamma_{\{-a-b\}} = \frac{-b \cdot (-b-a)}{-b} .$$

Se l'induzione riguarda $\{a, b, c\}$, si scrive

$$\Gamma_{\{a+b+c\}} = \frac{c \cdot (c+a)}{b} \leftrightarrow \Gamma_{\{-a-b-c\}} = \frac{-c \cdot (-c-a)}{-b} .$$

Definizione 6. Si dice che $\{a+b\}$ è uguale a $(\frac{b \cdot (b+a)}{a})$, se e solo se $\{-a-b\}$ è uguale a $(\frac{-b \cdot (-b-a)}{-b})$, e se e solo se è possibile scrivere $\{b+a\}$ oppure $\{-b-a\}$ come numeri definiti.

Ancora:

$$\Gamma_{\{a+b+c\,..\,+m\}} = \frac{m \cdot (m+a)}{b} \leftrightarrow \Gamma_{\{-a-b-c\,..\,-m\}} = \frac{-m \cdot (-m-a)}{-b} .$$

Definizione 7. Diremo che $\{a+b+c\ ..\ +m\}$ è uguale a $(\frac{m \cdot (m+a)}{b})$, se e solo se $\{-a-b-c\ ..\ -m\}$ è uguale a $(\frac{-m \cdot (-m-a}{-b})$, e se e solo se è possibile scrivere $\{m+a\}$ e $\{-m-a\}$ come numeri definiti.

Da qui deriva la generalizzazione

$$\Gamma_{\{\pm a \pm b \pm c\,..\,\pm n\}} = \frac{\pm n \cdot (\pm n \pm a)}{\pm b} .$$

Prova. Per l'induzione da $(\pm a)$ a $(\pm n)$ si sommano i termini compresi fra $(\pm a)$ e $(\pm n)$, e viene derivato

$$\frac{\pm n \cdot (\pm n \pm a)}{\pm b} .$$

is as follows:

$$\Gamma_{\{a+b\}}=\frac{b\cdot(b+a)}{b},$$

with

$$\Gamma_{\{a+b\}}=\frac{b\cdot(b+a)}{b}\leftrightarrow\Gamma_{\{-a-b\}}=\frac{-b\cdot(-b-a)}{-b}.$$

If the induction concerns $\{a, b, c\}$, one writes

$$\Gamma_{\{a+b+c\}}=\frac{c\cdot(c+a)}{b}\leftrightarrow\Gamma_{\{-a-b-c\}}=\frac{-c\cdot(-c-a)}{-b}.$$

Definition 6. It is said that $\{a+b\}$ is equal to $(\frac{b\cdot(b+a)}{a})$ if and only if $\{-a-b\}$ is equal to $(\frac{-b\cdot(-b-a)}{-b})$, and if and only if it is possible to write $\{b+a\}$ or $\{-b-a\}$ as definite numbers.

Again:

$$\Gamma_{\{a+b+c\,..\,+m\}}=\frac{m\cdot(m+a)}{b}\leftrightarrow\Gamma_{\{-a-b-c\,..\,-m\}}=\frac{-m\cdot(-m-a)}{-b}.$$

Definition 7. It is said that $\{a+b+c\,..\,+m\}$ is equal to $(\frac{m\cdot(m+a)}{b})$, if and only if $\{-a-b-c\,..\,-m\}$ is equal to $(\frac{-m\cdot(-m-a)}{-b})$, and if but only if it is possible to write $\{m+a\}$ and $\{-m-a\}$ as definite numbers.

Whence there derives the generalization

$$\Gamma_{\{\pm a\pm b\pm c\,..\,\pm n\}}=\frac{\pm n\cdot(\pm n\pm a)}{\pm b}.$$

Proof. By induction from $(\pm a)$ to $(\pm n)$ one sums the terms comprised within $(\pm a)$ and $(\pm n)$, and one derives

$$\frac{\pm n\cdot(\pm n\pm a)}{\pm b}.$$

La verifica è data da

$$\Gamma_{\{\pm a \pm b \pm c \cdots \pm n \pm (\pm n \pm a)\}} = \frac{\pm n \cdot (\pm n \pm a)}{\pm b} \pm (\pm n \pm a)$$

$$= \frac{\pm n \cdot (\pm n \pm a) \pm b \cdot (\pm n \pm a)}{\pm b} = \frac{(\pm n \pm a) \cdot (\pm n \pm b)}{\pm b}.$$

Osservazione 2. In quanto il procedimento induttivo ha senso solo se è possibile scrivere $((\pm n) \pm a)$, non c'è induzione completa quando il numero che chiude la serie sia $(\pm n)$.

Regola 2. L'induzione completa si applica solo quando $(\pm n)$ possiede un successore.

Corollario 4. L'induzione è completa se, dato $\pm n$, derivato da $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ e $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$, è possibile scrivere ancora $(\pm n \pm a)$.

Con $a = 1$, Δ e Γ come insiemi di numeri relativi, **V** inteso come simbolo d'esistenza e $\neg$ di negazione, si ha:

$$\underset{x}{\mathbf{V}}((x) = (n)) \supset ((\Delta\ ((\pm a) \ldots (\pm x)) \wedge \neg (\Gamma\ ((\pm a) \ \ldots\ (\pm x \pm a))))).$$

Definizione 8. Quando, dati $\{(\pm a) \wedge (\pm b) \wedge (\pm c), \ldots \wedge (\pm n)\}$ non è consentito scrivere $((\pm n) \pm a)$, l'insieme vien detto insieme finito.

Definizione 9. Nell'ipotesi di un insieme finito (composto di un numero limitato di elementi), non essendo consentito scrivere $((\pm n) \pm a)$, l'induzione completa è impossibile.

Verification is given by

$$\Gamma_{\{\pm a \pm b \pm c \cdots \pm n \pm (\pm n \pm a)\}} = \frac{\pm n \cdot (\pm n \pm a)}{\pm b} \pm (\pm n \pm a)$$

$$= \frac{\pm n \cdot (\pm n \pm a) \pm b \cdot (\pm n \pm a)}{\pm b} = \frac{(\pm n \pm a) \cdot (\pm n \pm b)}{\pm b}.$$

Observation 2. Since the inductive process has sense only if it is possible to write $((\pm n) \pm a)$, there is no complete induction when the number closing the series is $(\pm n)$.

Rule 2. Complete induction can be applied only when $(\pm n)$ has a successor.

Corollary 4. Induction is complete if, given $\pm n$, derived from $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ and $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$, it is still possible to write $(\pm n \pm a)$.

With $a = 1$, Δ and Γ as arrangements of directed numbers, **V** as the existential quantifier and $\neg$ (negation), we obtain:

$$\underset{x}{\mathbf{V}}((x)=(n)) \supset ((\Delta\ ((\pm a) \ldots (\pm x)) \wedge \neg (\Gamma\ ((\pm a) \ \ldots\ (\pm x \pm a))))).$$

Definition 8. When, given $\{(\pm a) \wedge (\pm b) \wedge (\pm c) \ldots \wedge (\pm n)\}$, it is not possible to write $((\pm n) \pm a)$, the arrangement is called a finite distribution.

Definition 9. On the assumption of a finite distribution (composed of a limited number of elements), it not being allowed to write $((\pm n) \pm a)$, complete induction is said to be impossible.

5. L'INSIEME FINITO E L'UNIVERSO ESIGUO

Definizione 1. Si chiama insieme finito escludente $(n+a)$, l'insieme di numeri relativi $\{(\pm a)\wedge(\pm b)\wedge(\pm c), \ldots \wedge (\pm n)\}$ per il quale non si applica l'induzione completa.

Corollario 1. Da $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ e $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ derivano termini $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, $\ldots$, $\pm n$, che, interrotta l'induzione, vanno a disporsi fuori della serie monotona.

Lemma 1. Esternamente alla successione seriale, i termini stanno come $\pm\{(b), (c), (d), (a), (\ldots)\}$, oppure $\pm\{(b), (c), (a), (d), (\ldots)\}$, o $\pm\{(d), (a), (c), (b), (\ldots)\}\ldots$, quindi indipendentemente dalla successione iterativa di $\pm a$.

Definizione 2. Dicesi *insieme banale* la successione monotona per iterazione di $\pm a$.

Osservazione 1. Nell'insieme finito i numeri si collegano indipendentemente dalla successione banale.

Quando è conosciuto il maggiore dei numeri compresi in un insieme finito, altri sono derivabili con procedimento che non è quello dell'iterazione di $\pm a$. Su quel procedimento ci si soffermerà nel lemma 2.

Osservazione 2. Faremo uso di insiemi non banali di 6 numeri derivati da φ e ν di 0.

Definizione 3. Diciamo $\mathfrak{U}$ l'*universo esiguo* che comprende

5. FINITE DISTRIBUTION AND SMALL UNIVERSE

Definition 1. We may define as a finite distribution excluding $(n+a)$, the group of directed numbers $\{(\pm a) \wedge (\pm b) \wedge (\pm c) \ldots \wedge (\pm n)\}$ for which complete induction does not apply.

Corollary 1. From $\overset{\varphi}{\underset{0=\varphi}{k_0}}$ and $\overset{\nu}{\underset{0=\nu}{k_0}}$ there derive the terms $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, . . , $\pm n$, which whenever complete induction is interrupted, begin to arrange themselves outside the monotonic sets.

Lemma 1. Outside serial sequences the terms are as $\pm\{(b), (c), (d), (a), (\ldots)\}$, or $\pm\{(b), (c), (a), (d), (\ldots)\}$, or $\pm\{(d), (a), (c), (b), (\ldots)\}$. . , therefore independent of the iterative sequence of $\pm a$.

Definition 2. We define the monotonous sequence by iteration of $\pm a$ as a *trivial set*.

Observation 1. In a finite distribution the numbers are linked together independently of the trivial sequence.

When the greatest of the numbers comprised within a finite arrangement is known, others can be derived by a process which is not one of the iteration of $\pm a$. We shall dwell on that process in lemma 2.

Observation 2. We shall make use of non-trivial distributions of 6 numbers, derived from φ and ν of 0.

Definition 3. We may define as $\mathfrak{U}$ the *small universe* which

commutativamente non più di 6 numeri relativi, di cui il maggiore sia uguale a ± 6 $(=\pm f)$.

Lemma 2. Se $(f=(e+a))$, allora $((f-a)=e)$, $((e-a)=d)$, $((d-a)=c)$, $((c-d)=-a)$, $((-a+c)=b)$. . . Come si è visto, b consegue tanto da $(a+a)$ che da $(-a+c)$, $(f-d)$. Per le stesse ragioni, diremo che i restanti numeri positivi e negativi compresi in $\mathfrak{U}$ derivano da altro che dalla iterazione monotona.

Se infatti si sostituiscono x e y a termini le cui somme sono comprese in f, con

x, y, f, v, z, 2, $\mathbf{V}$ (quantificatore esistenziale), $\mathbf{\Lambda}$ (quantificatore universale), ϵ , $\mathbf{C}$ (complemento), $\wedge$, $\supset$, $<$, $+$, $-$, $\dashv$, $=$ (,), ponendo prima $x=(a+0)$ e $y=(a+d)$, poi $y=(a+0)$ e $x=(a+d)$,

avremo:

$$\mathop{\mathbf{V}}_{x}\mathop{\mathbf{V}}_{y}\mathop{\mathbf{V}}_{v}((((x\epsilon\ \mathbf{C}_y f)\wedge(x+y)=f)\wedge(x<y)\wedge(x+v)=y)\supset(2x+v)=f))\dashv(2x+v)=x+y;$$

$$\mathop{\mathbf{V}}_{x}\mathop{\mathbf{V}}_{y}\mathop{\mathbf{V}}_{z}((((y\epsilon\ \mathbf{C}_x f)\wedge(y+x)=f)\wedge(y<x)\wedge(y+z)=x)\supset(2y+z)=f))\dashv(2y+z)=y+x;$$

$$\mathop{\mathbf{V}}_{x}\mathop{\mathbf{V}}_{y}\mathop{\mathbf{V}}_{v}\mathop{\mathbf{V}}_{z}((((x\epsilon\ \mathbf{C}_y f)\wedge(x<y)\wedge(x+v=y)\wedge(2y+v)=f)\wedge$$
$$\wedge(y\epsilon\ \mathbf{C}_x f)\wedge(y<x)\wedge(y+z)=x\wedge(2y+z)=f))\supset(x+v)=(y+z)))\dashv$$
$$\dashv(x+y)=(y+x);$$

$$\mathop{\mathbf{\Lambda}}_{x}\mathop{\mathbf{\Lambda}}_{y}(((x+v)=(y+z)\wedge(f-(x+v)=f-(y+z)))\supset((x=y)\wedge$$
$$\wedge(f-x)=(f-y)))\dashv(-x-y)=(-y-x).$$

Lemma 3. Poiché, nell'insieme finito $\mathfrak{U}$, il segno non è collocato fra antecedenti e successori, nè va "messo dopo" un antecedente, nella progressione di quest'ultimo verso il successore (da $(0+\ \ .)$ si passa, poniamo, a $(0+a)$, e da $(a+)$ ad $(a+1)$), ogni numero relativo dell'universo esiguo dispone del segno come di una proprietà.

comprises commutatively not more than 6 numbers, of which the greatest is equal to $\pm$ 6 $(=\pm f)$.

Lemma 2. If $(f=(e+a))$, then $((f-a)=e)$, $((e-a)=d)$, $((d-a)=c), ((c-d)=-a), ((-a+c)=b)$. . . As we know, b follows as much from $(a+a)$ as from $(-a+c)$, $(f-d)$. For the same reasons, we shall say that the remaining positive and negative numbers comprised in $\mathfrak{U}$ derive otherwise than from monotonous iteration.

In fact if terms whose sums are contained within f are substituted by x and y, then by using the terms and symbols

x, y, f, v, z, 2, $\mathbf{V}$ (existential quantifier), $\mathbf{\Lambda}$ (universal quantifier), ϵ , $\mathbf{C}$ (complement), $\wedge$, $\supset$, $<$, $+$, $-$, $\dashv$, $=$ (,),

one can get:

with $x = (a+0)$ and $y= (a+d)$ firstly, then with $y = (a+0)$ and $x = (a+d)$,

$$\mathop{\mathbf{V}}_{x}\mathop{\mathbf{V}}_{y}\mathop{\mathbf{V}}_{v}\ ((((x\epsilon\ \mathbf{C}_y f)\wedge (x+y) = f)\wedge(x<y)\wedge(x+v)=y)\supset(2x+v)= f))\dashv (2x+v)=x+y;$$

$$\mathop{\mathbf{V}}_{x}\mathop{\mathbf{V}}_{y}\mathop{\mathbf{V}}_{z}\ ((((y\epsilon\ \mathbf{C}_x f)\wedge(y+x)=f)\wedge(y<x)\wedge(y+z)=x)\supset(2y+z)= =f))\dashv(2y+z)=y+x;$$

$$\mathop{\mathbf{V}}_{x}\mathop{\mathbf{V}}_{y}\mathop{\mathbf{V}}_{v}\mathop{\mathbf{V}}_{z}\ ((((x\epsilon\ \mathbf{C}_y f)\wedge(x<y)\wedge(x+v=y)\wedge(2y+v)=f)\wedge \wedge(y\epsilon\ \mathbf{C}_x f)\wedge\ (y<x)\wedge\ (y+z)=x\wedge\ (2y+z)=f))\supset\ (x+v)=(y+z)))\dashv \dashv(x+y)=(y+x);$$

$$\mathop{\mathbf{\Lambda}}_{x}\mathop{\mathbf{\Lambda}}_{y}\ (((x+v)=(y+z)\wedge(f-(x+v)=f-(y+z)))\supset((x=y)\wedge \wedge(f-x)=(f-y)))\dashv(-x-y)=(-y-x).$$

Lemma 3. Since, in the finite distribution $\mathfrak{U}$, the sign is not placed between antecedents and successors, nor "put after" an antecedent in the progression of the latter towards its successor (in the sense that from $(0+\ .\ .)$, one passes, for instance, to $(0+a)$ and from $(a+)$ to $(a+1)$), every directed number of the small universe disposes of the sign as of a property.

6. INTERI POSITIVI E NEGATIVI. TRASFORMAZIONE DI SOMME E DIFFERENZE

Lemma 1. Nell'insieme $\mathfrak{U}$ termini indifferenti all'ordine di successione hanno segni positivi e negativi come simboli di appartenenza. Il segno che appartiene ad un numero relativo esiguo viene cambiato ed il numero assume segno opposto, se esiste un termine intermediario (s) fra quel numero ed il suo correlato.

Lemma 2. Scriviamo $(+a-b)=-a$, con a $(=1)$ e b $(=2)$. Esiste sempre, in $\mathfrak{U}$, un intermediario intero positivo s che consente il passaggio da $(a-b)$ a $(a+b)$ e viceversa.

Definizione 1. *Somma* e *differenza* derivano dal rapporto intermediato fra numeri relativi di segno opposto.

Definizione 2. Diremo *intero intermediario* il numero relativo che trasforma la differenza in una somma o cambia la somma in una differenza.

Definizione 3. Si chiamano *somme* e *somme algebriche,* rispettivamente, i rapporti intermediati fra numeri relativi entrambi di segno positivo oppure ambedue di segno negativo.

Regola 1. In un rapporto fra due numeri relativi di segno opposto, la differenza è trasformata in somma quando esiste un intero intermediario positivo che, addizionato a se stesso, in s, e sottratto da entrambi i termini della differenza, cambia quest'ultima in una somma. Tale s è uguale alla somma del primo termine con se stesso.

6. POSITIVE AND NEGATIVE INTEGERS. TRANSFORMATION OF SUMS AND DIFFERENCES

Lemma 1. In distribution $\mathfrak{U}$ the terms, independently of their order of sequence, have positive and negative signs as symbols of affinity. The sign belonging to a small directed number changes, and the number takes on the opposite sign, if there is an intermediate term (s) between that number and its correlative.

Lemma 2. One writes $(+a-b)=-a$, where a $(=1)$ and b $(=2)$. There always exists in $\mathfrak{U}$ a positive intermediate integer s which makes it possible to pass from $(a-b)$ to $(a+b)$ and vice versa.

Definition 1. *Sum* and *difference* derive from an intermediate relationship between numbers directed by opposite signs.

Definition 2. We shall use the term *intermediate integer* for the directed number which transforms the difference into a sum or changes the sum into a difference.

Definition 3. *Sum* and *algebraic sum* are the names respectively for the relationship between numbers both directed by positive sign or both signed by negative sign.

Rule 1. In a relationship between two numbers directed by opposite signs, the difference is transformed into a sum when there exists a positive intermediate integer, which when added to itself, in s, and subtracted from both the terms of the difference, changes the latter into a sum. This s is equal to the sum of the first term with itself.

Regola 2. Dato il rapporto addizionale fra due numeri con segno positivo, la somma si trasforma in differenza quando il primo addendo sommato con se stesso dà un intero intermediario s che si sottrae alla somma dei due termini.

Teorema 1. Trasformazione di segno di interi opposti, di cui il primo, con segno positivo, ha valore assoluto minore del valore assoluto del secondo:

Ip. $((|+a|)<(|-b|)\wedge(a=1)\wedge(-b=-2))$;
$(a-b)=-a$ (siano dati $(a-b)$ ed $(a-b)=-a$);
Th. $(a+a)=s=b \wedge b-(a-b)$ (esiste un s uguale al primo termine addizionato a se stesso ed $s=b$, e $b-(a-b)=a+b$):
Dim. $b-(-a)=a+b$ (ma b, che si sottrae al risultato di $(a-b)$, è uguale appunto a $(a+b)$).

Il procedimento si generalizza esternamente ad $\mathfrak{U}$ con numeri maggiori di $\pm f$ $(=\pm 6)$ dell'universo esiguo.

$((|+m|)<(|-n|))\wedge(m-n)\neq 0$;
$(m-n)=-p$;
$(m+m)=s$;
$s-(-p)=(m+n)$.

Teorema 2. Trasformazione di interi positivi in differenza fra un intero positivo e un intero negativo:

$(|+a)<(|+b|)\wedge(a=1)\wedge(b=2)\wedge(c=3)$;
$(a+b)=c$;
$(a+a)=b$;
$b-(+c)=(a-b)$.

Rule 2. In the additional relationship between two numbers directed by $+$, the sum becomes a difference when the first addendum added to itself gives an intermediate integer s which is subtracted from the sum of the two terms.

Theorem 1. Sign transformation of opposite integers, the first of which has a positive sign and is of lesser absolute value than the absolute value of the second:

Hyp. $((|+a|)<(|-b|)\wedge(a=1)\wedge(-b=-2))$;
$(a-b)=-a$ ($(a-b)$ and $(a-b)=-a$ being given);
Th. $(a+a)=s=b \wedge b-(a-b)$ (there exists an $s=b$ equal to the first term added to itself and $s=b$, and $b-(a-b)=a+b$);
Dem. $b-(-a)=a+b$ (but b, which is subtracted from the result of $(a-b)$, is equal to $(a+b)$).

The process is generalized externally $\mathfrak{U}$ for numbers greater than $\pm f$ $(=\pm 6)$ from the small universe.

$((|+m|)<(|-n|)\wedge(m-n)\neq 0)$;
$(m-n)=-p$;
$(m+m)=s$;
$s-(-p)=(m+n)$.

Theorem 2. Transformation of positive integers into a difference between a positive and a negative number;

$(|+a)<(|+b|)\wedge(a=1)\wedge(b=2)\wedge(c=3)$;
$(a+b)=c$;
$(a+a)=b$;
$b-(+c)=(a-b)$.

Il procedimento viene generalizzato per numeri non inclusi in $\mathfrak{U}$:

$$((|+m|)<(|+n|))\wedge\ (m+n)\neq 0;$$
$$(m+n)=q;$$
$$(m+m)=s;$$
$$s-(+q)=(m-n).$$

Regola 3. Per trasformare in una differenza la somma algebrica di due numeri relativi negativi, diversi da 0, si opera con un s che si aggiunge al risultato della somma algebrica dei termini. La s corrisponde alla somma del minuendo, mutato di segno, con se stesso.

Con

$$((|-m|)>(|-n|))\wedge(-m-n)\neq\ 0;$$
$$(-m-n)=-r;$$
$$(m+m)=s;$$
$$s+(-r)=(m-n).$$

Con $(|-b|)>(|-a|)\wedge(-b=-2)\wedge(-a=-1)\wedge(-c=-3)$, in $\mathfrak{U}$:

$$(-b-a)=-c;$$
$$(b+b)=d;$$
$$d+(-c)=(b-a).$$

Osservazione 1. Trasformazioni di somme e differenze di due numeri relativi sono il risultato dell'intermediazione del primo termine del rapporto, compreso nell'intero positivo s. Somme algebriche di due interi negativi possono essere trasformate in differenze.

Corollario 1. Le operazioni di somma e differenza sono il risultato di intermediazioni del primo termine del rapporto fra numeri relativi, quando s sia derivato da quel termine preso come intero positivo.

The process is generalized for numbers not included in $\mathfrak{U}$:

$$((|+m|)<(|+n|))\wedge(m+n)\neq 0;$$
$$(m+n)=q;$$
$$(m+m)=s;$$
$$s-(+q)=(m-n).$$

Rule 3. In order to transform into a difference an algebraic sum of two negative numbers different from 0, one proceeds by s which is added to the result of the algebraic sum of the terms. This s corresponds to the addition of the minuend to itself with its sign changed.

With

$$((|-m|)>(|-n|))\wedge(-m-n)\neq 0;$$
$$(-m-n)=-r;$$
$$(m+m)=s;$$
$$s+(-r)=(m-n).$$

With $(|-b|)>(|-a|)\wedge(-b=-2)\wedge(-a=-1)\wedge(-c=-3)$, in $\mathfrak{U}$:

$$(-b-a)=-c;$$
$$(b+b)=d;$$
$$d+(-c)=(b-a).$$

Observation 1. Transformations of sums and differences of two directed numbers are the result of the intermediation by the first term in the relationship always included in the positive integer s. Algebraic sums of two negative integers can be transformed into differences.

Corollary 1. The operations of finding the sum and the difference are the result of intermediation by the first term of the relationship between directed numbers, when s is derived from that term considered as a positive integer.

Regola 4. La differenza fra due interi, rispettivamente positivo e negativo, è trasformata in somma algebrica fra interi negativi, quando esiste un numero intermediario t, uguale alla somma algebrica del secondo termine.

Teorema 3.

$$((|+a|)<(|-b|)\wedge(+a=1)\wedge(-b=-2);$$
$$(a-b)=-a;$$
$$(-b-b)=-d;$$
$$-d-(-a)=(-a-b).$$

Teorema 4.

$$((|+m|)<(|-n|))\wedge\ (m-n)\neq 0;$$
$$(m-n)=-s;$$
$$(-n-n)=-t;$$
$$-t-(-s)=(-m-n).$$

Teorema 5. Per collegamento delle regole di trasformazione in $\mathfrak{U}$:

$$(|\pm a|)<(|\pm b|)\wedge(\ \pm a=\pm 1)\wedge(\pm b=\pm 2)\wedge(\pm c=\pm 3);$$
$$(a-b);$$
$$(a-b)=-a;$$
$$(a+a)=b;$$
$$b-(-a)=a+b;$$
$$(a+b);$$
$$(a+b)=c;$$
$$(a+a)=b;$$
$$b-(+c)=(a-b).$$
$$(-b-a);$$
$$(-b-a)=-c;$$
$$(b+b)=d;$$
$$d+(-c)=(b-a).$$

Rule 4. The difference between two integers respectively positive and negative is transformed into the algebraic sum of negative integers, when there exists an intermediate number t, equal to the algebraic sum of the second term.

Theorem 3.

$$((|+a|)<(|-b|)\wedge(+a=1)\wedge(-b=-2);$$
$$(a-b)=-a;$$
$$(-b-b)=-d;$$
$$-d-(-a)=(-a-b).$$

Theorem 4.

$$((|+m|)<(|-n|))\wedge(m-n)\neq 0;$$
$$(m-n)=-s;$$
$$(-n-n)=-t;$$
$$-t-(-s)=(-m-n).$$

Theorem 5. By connection with the rules of transformation in $\mathfrak{U}$:

$$(|\pm a|)<(|\pm b|)\wedge(\pm a=\pm 1)\wedge(\pm b=\pm 2)\wedge(\pm c=\pm 3);$$
$$(a-b);$$
$$(a-b)=-a;$$
$$(a+a)=b;$$
$$b-(-a)=a+b;$$
$$(a+b);$$
$$(a+b)=c;$$
$$(a+a)=b;$$
$$b-(+c)=(a-b).$$
$$(-b-a);$$
$$(-b-a)=-c;$$
$$(b+b)=d;$$
$$d+(-c)=(b-a).$$

$$(a-b);$$
$$(a-b)=-a;$$
$$(-b-b)=-d;$$
$$-d-(-a)=(-a-b).$$

Teorema 6. Per collegamento delle regole di trasformazione in un universo finito maggiore di $\mathfrak{U}$:

$$(|\pm m|)<(|\pm n|)\wedge((\pm m)\wedge(\pm n)\neq 0);$$

$$(m-n);$$
$$(m-n)=-p;$$
$$(m+m)=s;$$
$$s-(-p)=m+n;$$
$$(m+n);$$
$$(m+n)=q;$$
$$(m+m)=r;$$
$$r-(+q)=m-n.$$
$$(-n-m);$$
$$(-n-m)=-s;$$
$$(n+n)=t;$$
$$t+(-s)=n-m.$$
$$(m-n);$$
$$(m-n)=-u;$$
$$(-n-n)=-v;$$
$$-v-(-m)=-m-n.$$

Osservazione 2. Sulla base di interi intermediari positivi e negativi, le differenze, trasformate in somme, si cambiano in differenze. Queste ultime poi si mutano in somme algebriche di interi negativi, di nuovo trasformabili in somma. Gli intermediari sono gli interi

$$(a-b);$$
$$(a-b)=-a;$$
$$(-b-b)=-d;$$
$$-d-(-a)=(-a-b).$$

Theorem 6. By connection with the rules of transformation for a finite universe greater than $\mathfrak{U}$:

$$(|\pm m|)<(|\pm n|)\wedge((\pm m)\wedge(\pm n)\neq 0);$$

$$(m-n);$$
$$(m-n)=-p;$$
$$(m+m)=s;$$
$$s-(-p)=m+n;$$
$$(m+n);$$
$$(m+n)=q;$$
$$(m+m)=r;$$
$$r-(+q)=m-n.$$
$$(-n-m);$$
$$(-n-m)=-s;$$
$$(n+n)=t;$$
$$t+(-s)=n-m.$$
$$(m-n);$$
$$(m-n)=-u;$$
$$(-n-n)=-v;$$
$$-v-(-m)=-m-n.$$

Observation 2. On the basis of positive and negative intermediate integers, differences, transformed into sums, are changed into differences. The latter are then changed into algebraic sums of negative integers once again transformable into a sum. The intermediaries

positivo e negativo s e t. . . Somma, somma algebrica e differenza dipendono dai segni che sono proprietà di interi positivi e negativi intermediari. La trasformazione di somme algebriche e differenze costituisce carattere rapportuale interno alla struttura operativa dei numeri relativi.

Corollario 2. A tutti i numeri relativi, in un insieme finito, appartiene, con la proprietà del cambiamento dei segni, quella della derivazione della somma e della differenza.

7. UNIVERSO ESIGUO E NUMERI INDEFINITI

Osservazione 1. Si scrive universo esiguo $\mathfrak{U}$ l'insieme finito, non serialmente monotono, di numeri relativi distribuiti: $\{(\pm a), (\pm b), (\pm c), (\pm d), (\pm e), (\pm f)\}$, oppure $\{(\pm b), (\pm a), (\pm d), (\pm c), (\pm f), (\pm e)\}$, . . $\{(\pm e), (\pm f), (\pm c), (\pm d), (\pm a), (\pm b)\}$, . . , che, a due a due, possono mutare il segno di appartenenza.

Lemma 1. Non ogni numero dell'universo esiguo $\mathfrak{U}$ è addizionabile agli altri, che ad esso si correlano aritmeticamente o per somma algebrica. Per alcuni dei valori assoluti, distribuiti nell'universo $\mathfrak{U}$, somma aritmetica e algebrica non hanno, in quanto maggiori di f, alcun risultato possibile. Di fatto i risultati delle operazioni consentite in $\mathfrak{U}$, sui numeri relativi $\{(\pm a), (\pm b), (\pm c), (\pm d), (\pm e), (\pm f)\}$, . . $\{(\pm e), (\pm f), (\pm c), (\pm d), (\pm a), (\pm b)\}$. . , non possono superare la quantità o grandezza del valore numerico $\pm f$, che si dice limite di distribuzione $(\pm \delta)$, dell'insieme finito. Con x, δ, a, b, c, d, e, f, $\mathbf{V}$, $\vee$, $\in$, $\wedge$, $\neg$, . . , (,),

$$\underset{x}{\mathbf{V}}(x \in \delta) \supset \delta \wedge \neg\ (a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee f)\ .\ .\ (e \vee f \vee c \vee d \vee a \vee b)\ .\ .$$

are the positive and negative integers s and t. . . Sum, algebraic sum and difference depend upon the signs that are a property of intermediate positive and negative integers. The transformation of sums, algebraic sums and differences constitutes a capacity for relationship inherent in the working structure of directed numbers.

Corollary 2. All the directed numbers in a finite distribution possess, together with the property of changing their signs, that of deriving sums and differences.

7. SMALL UNIVERSE AND INDEFINITE NUMBERS

Observation 1. The small universe $\mathfrak{U}$ has been defined as the non-serially monotonic finite distribution of directed numbers: $\{(\pm a), (\pm b), (\pm c), (\pm d), (\pm e), (\pm f)\}$ or $\{(\pm b), (\pm a), (\pm d), (\pm c), (\pm f), (\pm e)\}, \ldots, \{(\pm e), (\pm f), (\pm c), (\pm d), (\pm a), (\pm b)\}, \ldots$ which, two by two, can change their signs of affinity.

Lemma 1. Not all the numbers of the small universe $\mathfrak{U}$ can be added together arithmetically or algebraically. In $\mathfrak{U}$, for some of the absolute values distributed, the arithmetic or algebraic sum – greater than f – does not give a possible result. In fact, results of the permissible operations upon the directed numbers $\{(\pm a), (\pm b), (\pm c), (\pm d), (\pm e), (\pm f\}, \ldots \{(\pm e), (\pm f), (\pm c), (\pm d), (\pm a), (\pm b)\}$. . do not exceed, in $\mathfrak{U}$, the numerical value of $\pm f$, which is the limit $(+\delta)$ of the finite arrangement. By $x, \delta, a, b, c, d, e, f, \mathbf{V}, \vee, \in, \wedge, \neg, \ldots, (\ ,\ )$, we can write

$$\underset{x}{\mathbf{V}}(x \in \delta) \supset \delta \wedge \neg\ (a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee f) \ldots (e \vee f \vee c \vee d \vee a \vee b) \ldots$$

Definizione 1. Limite di quantità, o grandezza distribuita dell'insieme finito $\mathfrak{U}$, è il numero $(\pm f)$ oltre il quale non si leggono numeri relativi definiti. Dopo $(\pm f)$ si trova $(\pm \delta)$ che esprime appunto l'impossibilità di calcolare ancora definitamente nella distribuzione. Si dice $(\pm \delta)$ il numero inconsistente che stabilisce la finitezza dell'insieme distribuibile.

Lemma 2. In $\mathfrak{U}$ è consentito scrivere $((\pm x)\pm y)$, con $(((\pm x)\pm y) = \pm z > f)$, soltanto come $(\pm \delta)$.

Definizione 2. Diremo $(\pm \delta)$ primo numero inconsistente (indefinito) dopo $(\pm f)$ in $\mathfrak{U}$. Di tale numero non si conosce, per ipotesi, la quantità o la grandezza.

Corollario 1. Il numero indefinito $(\pm \delta)$ indica il valore numerico che non appartiene all'insieme $\mathfrak{U}$ del calcolo.

Corollario 2. Nell'universo $\mathfrak{U}$, $((f)+a)$ non rappresenta un numero cui appartenga definitamente quantità o grandezza. Non viene così applicato, in $\mathfrak{U}$, il procedimento dell'induzione completa. Per cui la calcolabilità è consentita solo dentro $\pm f$; e si può scrivere

$$((\pm a)\pm a),\ ((\pm b)\pm a),\ ((\pm b)\pm b),\ ((\pm b)\pm c),$$
$$((\pm c)\pm c),\ ((\pm d)\pm a),\ ((\pm e)\pm a)\ \ldots,$$

ma non

$$((+a)+f),\quad ((-a)-f),\quad ((+b)+e),\quad ((-b)-e),\quad ((+b)+f),$$
$$((-b)-f),\quad ((+c)+d),\quad ((-c)-d),\quad ((+c)+e),\quad ((-c)-e),$$
$$((+f)+f),\ ((-f)-f).$$

Definition 1. The limit of quantity or magnitude for the finite distribution $\mathfrak{U}$ is the number $(\pm f)$ beyond which no definite directed number is read. After $(\pm f)$ there is $(\pm \delta)$ which indicates that definite computation is impossible. We may define $(\pm \delta)$ as the inconsistent directed number that establishes the finiteness of the arrangement.

Lemma 2. In $\mathfrak{U}$ given $(((\pm x) \pm y) = \pm z > f)$, we cannot write $((\pm x) \pm y)$, except as $(\pm \delta)$.

Definition 2. We will define $(\pm \delta)$ as the first inconsistent (indefinite) directed number in $\mathfrak{U}$ after $(\pm f)$, assuming that we do not know the value or the magnitude of such a number.

Corollary 1. The indefinte number $(\pm \delta)$ indicates the numerical value that no longer belongs to the consistent distribution $\mathfrak{U}$ on which one is calculating.

Corollary 2. In the universe $\mathfrak{U}$, $((f)+a)$ is not a number to which a definite quantity or magnitude belong. Therefore, the complete induction process does not apply in $\mathfrak{U}$: computation is possible only within $\pm f$. We can write:

$$((\pm a) \pm a),\ ((\pm b) \pm a),\ ((\pm b) \pm b),\ ((\pm b) \pm c),$$
$$((\pm c) \pm c),\ ((\pm d) \pm a),\ ((\pm e) \pm a)\ \ldots,$$

but we are not allowed to write

$$((+a)+f),\quad ((-a)-f),\quad ((+b)+e),\quad ((-b)-e),\quad ((+b)+f),$$
$$((-b)-f),\quad ((+c)+d),\quad ((-c)-d),\quad ((+c)+e),\quad ((-c)-e),$$
$$((+f)+f),\ ((-f)-f).$$

8. COMPLEMENTARIETÀ DEI NUMERI RELATIVI E SOTTOINSIEMI FINITI

Lemma 1. Nell'insieme finito S maggiore di $\mathfrak{U}$, sono possibili operazioni con risultati uguali o minori di $(\pm n)$. Tuttavia aggiungere algebricamente a $(+n)$ qualche numero contenuto in $(+n)$, oppure a $(-n)$ un numero contenuto in $(-n)$, non significa cercare risultati distribuiti in maniera monotona.

Regola 1. In un universo finito (S), maggiore di $\mathfrak{U}$ e costituito di n elementi di cui $(\pm n)$ sia limite (nel senso che ne rappresenti l'estremo conosciuto), nessun numero $(\pm x)$ che compaia in S potrà venir sommato ad n. Sarà invece possibile calcolare sui termini minori o uguali a $(\pm n)$, qualora dalle operazioni derivino risultati contenuti in $(\pm n)$.

Regola 2. Ciascun numero relativo positivo (x) o (y) potrà venir sottratto da n, se x ed y appartengono all'insieme finito S, che si chiude in n. Le differenze $((-n)+x)$ e $((-n)+y)$, con x e y minori di n, consentono di scrivere

$$((-n)+x) = -s < n$$
$$((-n)+y) = -t < n.$$

Regola 3. Con $(((n)-x)=y)$ ed $(((n)-y)=x)$, le correlazioni $(((n)-x)=y)$ e $(((n)-y)=x)$ stanno all'origine della derivazione di un complemento (**C**), in S, che è x rispetto a y ed è y rispetto a x.

Definizione 1. Ciascun numero relativo positivo minore di $(\pm n)$ si dice complemento di $(\pm n)$ in S. In un insieme finito $\mathfrak{U}$, il cui limite definito è rappresentato da $(\pm f)$, diremo che $(\pm a)$, $(\pm b)$, $(\pm c)$, $(\pm d)$, $(\pm e)$, sono complementi di $(\pm f)$, contenuti in $\mathfrak{U}$.

8. COMPLEMENTARITY OF DIRECTED NUMBERS AND FINITE SUBDISTRIBUTIONS

Lemma 1. In the finite distribution S, greater than $\mathfrak{U}$, operations are possible that give as results numbers equal to or less than $(\pm n)$. But to add algebraically to $(+n)$ some number equal to or less than $(+n)$ or to $(-n)$ a number contained in $(-n)$ does not mean looking for results monotonously arranged.

Rule 1. In a finite universe (S) greater than $\mathfrak{U}$ and made up of n elements, of which $(\pm n)$ is the limit (in the sense that it is the last one known), no number $(\pm x)$ which appears in S can be added to n. It will be possible, on the contrary, to calculate on the terms less than or equal to $(\pm n)$, if the operations yield results contained in $(\pm n)$.

Rule 2. A positive number (x) or (y) can be subtracted from n, if x and y belong to the finite distribution S which ends with n. The differences $((-n)+x)$ and $((-n)+y)$, with x and y less than n, allow us to write

$$((-n)+x) = -s < n$$
$$((-n)+y) = -t < n.$$

Rule 3. With $(((n)-x)=y)$ and $(((n)-y)=x)$, the correlations $(((n)-x)=y)$ and $(((n)-y)=x)$ lie at the origin of the derivation of a complement (**C**), in S, which is x with respect to y and is y with respect to x.

Definition 1. All the directed positive numbers less than $(\pm n)$ are said to be complements of $(\pm n)$ in S. In a finite distribution $\mathfrak{U}$ whose definite limit is represented by $(\pm f)$, it can be said that $(\pm a)$, $(\pm b)$, $(\pm c)$, $(\pm d)$, $(\pm e)$, are complements of $(\pm f)$, contained in $\mathfrak{U}$.

Lemma 2. Siano x e y complementi di n in S. Essi vengono detti sottoinsiemi di n in S. Ogni complemento di n in S è sottoinsieme finito di n. Quando n viene sottratto da uno dei termini che costituiscono sottoinsiemi di n, il risultato è un numero relativo negativo:

$$((x)-n)=-z;$$
$$((y)-n)=-w.$$

Diremo inoltre che $(n-n)$ è il complemento nullo di n in S, come $(f-f)$ è il complemento nullo di f in $\mathfrak{U}$. Esso rappresenta quanto manca ad n per essere n, e ad f per essere f (complemento vuoto).

Teorema 1. Esiste almeno un x, appartenente a $\{(a), \ldots, (n)\}$, tale che $(n-x)$ dia y e $(n-y)$ dia x. Qualora nell'universo finito $S_{\{(\pm a),\ (\pm b),\ (\pm c),\ \ldots,\ (\pm n)\}}$, esista un x che è complemento di y rispetto ad n, ed esista un y che è complemento di x rispetto ad n, sarà possibile talvolta scrivere $x=y$. Allora,

$$n=2x,$$
$$n=2y,$$

ossia x e y verranno moltiplicati per 2, per ottenere n.

Prova.

$$((x\in \mathbf{C}_y n)\sim(y\in \mathbf{C}_x n))\supset(n=((2x)\wedge n=(2y)))$$

(x è il complemento di y rispetto ad n, come y è il complemento di x, se n è uguale a $(2x)$ e a $(2y)$).

Esempio:

$$((5\in \mathbf{C}_5 10)\sim(3+2)\in \mathbf{C}_5 10))\supset(10=2\times 5)\wedge(10=2\times(3+2)).$$

Lemma 2. Let x and y be complements of n in S. They are said to be subdistributions of n in S. Any complement of n in S is a finite subdistribution of n. If n is subtracted from one of the terms constituting sub-arrangements of n, the result is a negative directed number:

$$((x)-n)=-z;$$
$$((y)-n)=-w.$$

It will be said furthermore that $(n-n)$ is the nil complement of n in S, just as $(f-f)$ is the nil complement of f in $\mathfrak{U}$. It represents what is lacking to n in order to be n, and to f in order to be f (empty complement).

Theorem 1. There exists at least one x, belonging to $\{(a), \ldots, (n)\}$, such that $(n-x)$ gives y and $(n-y)$ gives x. If in the finite universe $S_{\{(\pm a), (\pm b), (\pm c), \ldots (\pm m)\}}$, there exists an x which is the complement of y with respect to n, and there exists a y which is the complement of x with respect to n, it is possible sometimes to write $x=y$. Then,

$$n=2x,$$
$$n=2y,$$

i.e. x and y will be multiplied by 2, in order to have n.

Proof.

$$((x\in \mathbf{C}_y n)\sim(y\in \mathbf{C}_x n))\supset(n=((2x)\wedge n=(2y)))$$

(x is the complement of y with respect to n, just as y is the complement of x if n is equal to $(2x)$ and to $(2y)$).

Example:

$$((5\in \mathbf{C}_5 10)\sim(3+2)\in \mathbf{C}_5 10))\supset(10=2\times 5)\wedge(10=2\times(3+2)).$$

Quando

$$(n=(2x)\wedge n=(2y))\leftrightarrow x=y;$$

allora, con $y<x$ o $y>x$,

$$\begin{aligned} n&=((x)+y),\\ x&=((n)-y),\\ y&=((n)-x); \end{aligned}$$

e si scriverà

$$\neg(((x\in \mathbf{C}_y n)\sim(y\in \mathbf{C}_x n))\supset(n=(2x))),$$

$$\neg(((x\in \mathbf{C}_y n)\sim(y\in \mathbf{C}_x n))\supset\ (n=(2y))).$$

(Se x è complemento che si esprima con numero diverso da y, allora n non equivale a $(2x)$ come non è equivalente a $(2y)$).

Corollario 1. Se x e y sono diversi fra loro, la somma degli stessi deve essere tuttavia uguale ad n. Quando la loro somma è maggiore di n, x e y non solo non sono complementi di n, ma non appartengono, insieme, all'universo finito S di n.

Definizione 2. Si dice universo esiguo $\mathfrak{U}$ l'universo che contiene tutti i complementi che sono addizionabili fra loro, senza che dalla somma derivi $(\pm\delta)$.

Definizione 3. Quando n è il limite dell'insieme S maggiore di $\mathfrak{U}$, però finito, diremo che x e y sono sottoinsiemi di n in S. Nell'insieme finito $\mathfrak{U}$ esistono f sottoinsiemi di f, e da $(f-f)$ deriva il sottoinsieme vuoto (0).

Lemma 3. Ogni sottoinsieme di f è incluso in f, ed f esclude δ.

If

$$(n=(2x)\wedge n=(2y))\leftrightarrow x=y,$$

then with $y<x$ or $y>x$,

$$n=((x)+y),$$
$$x=((n)-y),$$
$$y=((n)-x);$$

and we shall write

$$\neg(((x\in \mathbf{C}_y n)\sim(y\in \mathbf{C}_x n))\supset(n=(2x))),$$
$$\neg(((x\in \mathbf{C}_y n)\sim(y\in \mathbf{C}_x n))\supset\ (n=(2y)))$$

(if x is the complement that is expressed by a number different from y, then n is not equivalent to $(2x)$ just as it is not equivalent to $(2y)$).

Corollary 1. If x and y are different from each other, their sum must nonetheless be equal to n. When their sum is greater than n, x and y not only are not complements of n, but they do not belong together to the finite universe S of n.

Definition 2. The small universe $\mathfrak{U}$ is defined as the universe that contains all the complements that can be added to one another without their sum resulting in $(\pm\delta)$.

Definition 3. If n is the limit of the finite distribution S but greater than $\mathfrak{U}$, x and y are said to be subdistributions of n. In the finite $\mathfrak{U}$ there exist f sub-arrangements of f, and from $(f-f)$ the empty sub-arrangement (0) derives.

Lemma 3. Every sub-arrangement of f is included in f, and f excludes δ.

9. COMPLEMENTARIETÀ DEGLI INSIEMI ESIGUI

Definizione 1. Nell'universo esiguo $\mathfrak{U}$, appartiene a ciascun termine, da a sino a f, la proprietà d'essere sottraibile da f, ultimo numero di tale insieme finito. Quella proprietà è detta complementarietà dei numeri relativi esigui.

Corollario 1. Non appartiene ad a, in $\mathfrak{U}$, la proprietà d'essere complemento $(f+a)$, nè appartiene a b la proprietà d'essere complemento $(f+b)$ di f, perché non c'è alcun numero su cui si possa calcolare consistentemente dopo f. Tuttavia, se, nell'universo esiguo, a è complemento di $(\delta-a)$ e b è complemento di $(\delta-b)$, si potrà scrivere

$$f=((\delta)-a);$$
$$-f=((-\delta)+a);$$
$$f=((\delta)-b);$$
$$-f=((-\delta)+b).$$

Lemma 1. A δ appartiene un segno perché

$$((f)+a)=+\delta;$$
$$((-f)-a)=-\delta.$$

L'indefinitezza riguarda infatti la quantità e non il segno espresso da δ. Si può quindi scrivere $(+\delta)$ e $(-\delta)$, da cui

$$((+a\delta)+a\delta)=b\delta,$$
$$((-a\delta)-c\delta)=-d\delta,$$

che però sono privi di senso per quanto si riferisce alla determinazione delle misure. Tuttavia

$$\delta/\delta\rightarrow a,$$

9. COMPLEMENTARITY OF SMALL DISTRIBUTIONS

Definition 1. In the small universe $\mathfrak{U}$, each term, from a to f, possesses the property of being subtractable from f, which is the last number of such a finite distribution. This property is called the complementarity of small directed numbers.

Corollary 1. a does not have the property of being the complement $(f+a)$, in $\mathfrak{U}$, nor does b possess the property of being the complement $(f+b)$ of f, because there is no number after f on which it is possible to calculate consistently. However, if in the small universe a is the complement of $(\delta-a)$ and b is the complement of $(\delta-b)$, it will be possible to write

$$f=((\delta)-a);$$
$$-f=((-\delta)+a);$$
$$f=((\delta)-b);$$
$$-f=((-\delta)+b).$$

Lemma 1. δ has a sign because

$$((f)+a)=+\delta;$$
$$((-f)-a)=-\delta.$$

The indefiniteness concerns the quantity, not the sign expressed by δ. We can therefore write $(+\delta)$ and $(-\delta)$, whence

$$((+a\delta)+a\delta)=b\delta,$$
$$((-a\delta)-c\delta)=-d\delta,$$

which however are devoid of sense from the point of view of determining their values. However

$$\delta/\delta\rightarrow a,$$

può esprimere la tendenza al ritorno al numero relativo esiguo più piccolo (e non 0) dell'insieme finito $\mathfrak{U}$.

Lemma 2. In quanto $(\pm f)$, nella inclusione di $(\pm a)$, $(\pm b)$, $(\pm c)$ . . , contiene tutti i termini da $\pm a$ a $\pm f$ e δ tende a ritornare ad a, diremo anche che f si pone come $\bar{M}$.

Definizione 2. Si dice $\bar{M}$ o *sostegno* il numero che contiene i sottoinsiemi che intrafinitisticamente ne sono inclusi:

$$\{(a)\wedge(b)\wedge(c)\ .\ .\ \wedge(f)\}\subset\bar{M}\,.$$

Definizione 3. $\bar{M}$ è il sostegno delle operazioni possibili contenute in $\mathfrak{U}$, sulla base dei sottoinsiemi nella loro distribuzione intrafinita. $\bar{M}$ esclude che il risultato delle operazioni intrafinite superi f.

Definizione 4. Si dice M il sostegno contenuto in $\bar{M}$, quando M è minore di $\bar{M}$, ovvero quando l'insieme finito si restringe rispetto ad f.

Lemma 3. Si dirà $(x+\bar{M})=\delta$ il superamento della massima estensione $\bar{M}$ dell'insieme finito dei numeri intrafiniti di $\mathfrak{U}$. Anche tale superamento è privo di senso ai fini della determinazione delle grandezze nel calcolo.

Lemma 4. Nessun sotto-sostegno M di $\bar{M}$ è diverso da qualche numero intrafinito che sia complemento di f. L'aggiungere un numero esiguo ad M può significare recuperare $\bar{M}$, ma chi aggiunge un numero intrafinito a $\bar{M}$ perde l'insieme intrafinito $\mathfrak{U}$.

Lemma 5. Se in U^* (insieme finito però $>\mathfrak{U}$), esiste $(f+a)$, avremo un $\bar{M}^*\neq\bar{M}$ ($\bar{M}^*$ è più esteso di $\bar{M}$), che rappresenta un

can express the tendency to return to the smallest directed number (and not 0) of the finite distribution $\mathfrak{U}$.

Lemma 2. Since $(\pm f)$, in the inclusion of $(\pm a)$, $(\pm b)$, $(\pm c)$, . . , contains all the terms from $\pm a$ to $\pm f$ and δ tends back to a, we may say that f too is equivalent to $\bar{M}$.

Definition 2. Let us define as $\bar{M}$ or *support* the number that contains the subdistributions that are intrafinitistically included in it:

$$\{(a)\wedge(b)\wedge(c)\ .\ .\ \wedge(f)\}\subset \bar{M}.$$

Definition 3. $\bar{M}$ is the support for all possible operations contained in $\mathfrak{U}$, in that the subdistributions are in an intrafinite arrangement. $\bar{M}$ precludes the possibility that the result of the intrafinite operations should exceed f.

Definition 4. We may define M as the support contained in $\bar{M}$, when M is less than $\bar{M}$, or when the finite distribution contracts with respect to f.

Lemma 3. We shall define $(x+\bar{M})=\delta$ as going beyond the maximum extension $\bar{M}$ for the finite arrangement of the intrafinite numbers in $\mathfrak{U}$. This passing beyond is also without any sense, for the purpose of determining magnitudes during computation.

Lemma 4. No sub-support M of $\bar{M}$ is different from any intrafinite number that is a complement of f. Adding a small number to M means obtaining $\bar{M}$ once more, but adding an intrafinite number to $\bar{M}$ means losing the intrafinite arrangement $\mathfrak{U}$.

Lemma 5. If in U^* (a finite distribution but $>\mathfrak{U}$), there exists $(f+a)$, we shall have an $\bar{M}^*\neq\bar{M}$ ($\bar{M}^*$ is more extended than $\bar{M}$),

altro insieme finito, ossia un universo chiuso, però diverso da $\mathfrak{U}$.

Corollario 2. Esiste sempre un U^*, maggiore di $\mathfrak{U}$, eppure finito, tale che in U^*, sulla base $\sigma \sim \bar{M}^*$ o $\sigma \sim M^*$, si contino più oggetti numerabili che non in $\mathfrak{U}$.

Osservazione 1. Siano $\bar{M}^*$ e M^* rispettivamente il sostegno ed il sub-sostegno dell'insieme finito $U^*_{\{(\pm a),(\pm b),\ldots(\pm n)\}}$. Si dica M^* il sostegno compreso in $\bar{M}^*$ dell'insieme finito, in cui si distribuiscono i sottoinsiemi, da a fino ad n. $\bar{M}^*$ sarà il sostegno della distribuzione di $\{(\pm a), (\pm b), (\pm c), (\pm d), \ldots, (\pm n)\}$, quindi il numero maggiore che consente di collocare $\{(\pm a), (\pm b), (\pm c), (\pm d), \ldots, (\pm n)\}$, all'interno dell'insieme $\{(a) \ldots (n)\}$, senza che si abbia $(n+\delta)$, ovvero qualche superamento della massima estensione possibile dell'insieme U^*. Nessun sottoinsieme di $\bar{M}^*$ e di M^* sarà diverso da un complemento di n.

Corollario 3. In un insieme finito U^*, con $\bar{M}^*$, si dirà che a è il complemento a di b, il complemento b di c, il complemento d di e, il complemento $(n-a)$ di n, come b è il complemento b di d, il complemento d di f, il complemento $(n-b)$ di n.

$$
\begin{gathered}
0 \in \mathbf{C}_a a; \\
a \in \mathbf{C}_a b; \\
a \in \mathbf{C}_b c; \\
a \in \mathbf{C}_c d; \\
a \in \mathbf{C}_d e; \\
a \in \mathbf{C}_e f; \\
\ldots \\
a \in \mathbf{C}_{(n-a)} n;
\end{gathered}
$$

e ancora:

$$
\begin{gathered}
b \in \mathbf{C}_b d; \\
b \in \mathbf{C}_d f; \\
\ldots \\
b \in \mathbf{C}_{(n-b)} n.
\end{gathered}
$$

which represents another finite arrangement, i.e. a universe that is closed, but different from $\mathfrak{U}$.

Corollary 2. There still exists a U^*, greater than $\mathfrak{U}$, and yet finite, such that in U^*, since $\sigma \sim \bar{M}^*$ or $\sigma \sim M^*$, one can count more numerable objects than in $\mathfrak{U}$.

Observation 1. Let $\bar{M}^*$ and M^* be respectively the support and the sub-support for the finite arrangement $U^*_{\{(\pm a),\ (\pm b),\ ..\ (\pm n)\}}$. We may define M^* as the support comprised in $\bar{M}^*$ for the finite distribution, in which the subarrangements are distributed from a to n. $\bar{M}^*$ will be the support for the distribution of $\{(\pm a), (\pm b), (\pm c), (\pm d), \ldots, (\pm n)\}$, and therefore the greatest number that makes it possible to place $\{(\pm a), (\pm b), (\pm c), (\pm d), \ldots, (\pm n)\}$, within the arrangement $\{(a) \ldots (n)\}$, without there being $(n+\delta)$, which is to say a passing beyond the maximum possible extension of the distribution U^*. No subarrangement of $\bar{M}^*$ or M^* will differ from any complement of n.

Corollary 3. In a finite distribution U^* with $\bar{M}^*$, we shall say that a is the complement a of b, the complement b of c, the complement c of d, the complement d of e, the complement $(n-a)$ of n, just as b is the complement b of d, the complement d of f, the complement $(n-b)$ of n.

$$0 \in \mathbf{C}_a a;$$
$$a \in \mathbf{C}_a b;$$
$$a \in \mathbf{C}_b c;$$
$$a \in \mathbf{C}_c d;$$
$$a \in \mathbf{C}_d e;$$
$$a \in \mathbf{C}_e f;$$
$$\ldots$$
$$a \in \mathbf{C}_{(n-a)} n;$$

and again:

$$b \in \mathbf{C}_b d;$$
$$b \in \mathbf{C}_d f;$$
$$\ldots$$
$$b \in \mathbf{C}_{(n-b)} n.$$

Corollario 4. Ogni complemento, così come ogni somma nella correlazione addizionale di sottoinsiemi $\{(a), (b), (c), \ldots, (n)\}$, sul sostegno di $\overline{M}^*$ e di M^*, non sarà maggiore di n.

Definizione 5. Se $(M=m)$ è il sub-sostegno di un insieme finito, ed a e b sono sottoinsiemi di m, si dirà che nell'insieme $\{(a)\wedge(b)\wedge(c)\wedge \ldots \wedge(m)\}$ esistono m sottoinsiemi di $(m=M)$ e che $(m-m)$ ne rappresenta il sottoinsieme vuoto, con $(M=0)$.

Corollario 5. Non c'è alcun insieme finito $U^{*\cdot\cdot}$, dove ad $(n=\overline{M})$ succeda $(n+1=\overline{M})$. Ogni sottoinsieme di n, minore o uguale ad n, è incluso in n, in modo che esistano tanti sottoinsiemi di n quanti n ne rappresenta.

Corollario 6. Alla distribuzione dei numeri relativi dell'insieme finito corrispondono collezioni di oggetti numerabili.

10. COLLEZIONE ESIGUA E NUMERABILITÀ DEGLI OGGETTI

Definizione 1. L'insieme degli oggetti rappresentabile numericamente mediante termini contenuti in $\mathfrak{U}$, si dice *collezione esigua*.

Lemma 1. La collezione corrisponde alla serie monotona nell'ordinamento distributivo degli oggetti numerabili.

Lemma 2. All'universo esiguo composto, si è ipotizzato, oltre che dallo 0, da $(\pm a)$, $(\pm b)$, $(\pm c)$, $(\pm d)$, $(\pm e)$, $(\pm f)$, può farsi corrispondere la collezione di oggetti numerabili (p, q, r, s, t, u). Se (p) sta con (q), (r), (s), (t), (u), ossia se un oggetto della collezione

Corollary 4. No complement, nor likewise any sum in the additional correlation of subarrangements $\{(a), (b), (c), \ldots, (n)\}$, on the support of $\overline{\mathrm{M}}^*$ and of M^*, may be greater than n.

Definition 5. If $(\mathrm{M}=m)$ is the subsupport for a finite distribution, and a and b are subarrangements of m, we will say that in $\{(a)\wedge(b)\wedge(c)\wedge \ldots \wedge(m)\}$ there exist m subdistributions of $(m=\mathrm{M})$ and that $(m-m)$ represents its empty subarrangement, with $(\mathrm{M}=0)$.

Corollary 5. There is no finite distribution $U^{*\cdot\cdot}$, where $(n=\overline{\mathrm{M}})$ is followed by $(n+1=\overline{\mathrm{M}})$. Every subarrangement of n, less than or equal to n, is included in n so that there exist as many subarrangements of n as n represents.

Corollary 6. To the arrangement of directed numbers in a finite distribution there correspond collections of numerable objects.

10. SMALL COLLECTION AND THE NUMERABILITY OF OBJECTS

Definition 1. The group of objects that can be represented numerically by the terms contained in $\mathfrak{U}$, is called a *small collection*.

Lemma 1. The collection may take over from monotonic series in the distributive arrangement of the numerable objects.

Lemma 2. The small universe composed, as has been assumed, not only of 0, but of 6 numbers $(\pm a)$, $(\pm b)$, $(\pm c)$, $(\pm d)$, $(\pm e)$, $(\pm f)$, can be made to correspond to the collection of numerble objects (p, q, r, s, t, u). If (p) goes with (q), (r), (s), (t), (u), i.e. if an

viene combinato con altri cinque, a ciascuno degli oggetti è attribuito il numero relativo ($\pm a$). Se a qualcuno degli oggetti (p), (q), (r), (s), (t), (u) si attribuisce un numero maggiore di $\pm a$, ad almeno uno degli oggetti appartiene il numero 0, ovvero almeno un oggetto ha un x, che è insieme positivo e negativo.

Teorema 1. A (p) si correlino ((q), (r), (s), (t), (u)), ed a (p) sia attribuito il numero relativo f. In questo caso a ((q), (r), (s), (t), (u)) sarà fatto corrispondere lo 0. Se (p) è numerabile con f, allora ((q), (r), (s), (t), (u)) sono ciascuno $(a-a)=0$. Se ((q), (r), (s), (t), (u)) appaiono 0 volte, (p) corrisponde ad f. Se gli oggetti sono numerati con numeri relativi negativi e (p) è $(=-f)$, si dirà che ((q), (r), (s), (t), (u)) sono 0 in quanto ciascuno è $(-a+a)=0$.

Osservazione 1. $\overline{\mathrm{M}}$ esclude che ad un oggetto numerabile appartenga un numero definito (oltre lo 0), quando ad altri oggetti della collezione esigua vengano attribuiti numeri la cui somma o differenza sia uguale ad $\overline{\mathrm{M}}$.

Corollario 1. Nella collezione esigua di oggetti, a ciascuno dei quali corrisponde un numero dell'universo esiguo, diremo che ad ogni oggetto numerabile collezionato si fa corrispondere un $\pm a$ che può diventare 0.

Lemma 3. Quando nella collezione compaiono oggetti che vengono numerati con segno positivo ed altri numerati con segno negativo, la loro differenza o somma algebrica trasforma gli oggetti in oggetti neutri, ovvero in oggetti che si correlano indipendentemente dalla specificità qualitativa (tipo).

Corollario 2. Si scrive σ il risultato della correlazione operativa di oggetti neutri mediante ($\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, $\pm e$, $\pm f$), sulla base dei sostegni $\overline{\mathrm{M}}$ e M, e σ non può essere maggiore di $\overline{\mathrm{M}}$.

object from the collection combines with the other five, it is possible to attribute to each the directed number $(\pm a)$. If any of the objects (p), (q), (r), (s), (t), (u) has a number greater than $\pm a$ referred to it, the number 0 belongs to at least one of the objects, or at least one object has an x, which is both positive and negative.

Theorem 1. Let (p) be correlated to ((q), (r), (s), (t), (u)), and let the directed number f be attributed to (p). In this case ((q), (r), (s), (t), (u)) will be made to correspond to 0. If (p) is numerable with f, then ((q), (r), (s), (t), (u)) are each $(a-a)=0$. If ((q), (r), (s), (t), (u)) appear 0 times, (p) corresponds to f. If the objects are numbered with negative directed numbers and (p) is $(=-f)$, we shall say that ((q), (r), (s), (t), (u)) are 0 since each is $(-a+a)=0$.

Observation 1. $\bar{M}$ precludes that a definite number (besides 0), should belong to a numerable object, when numbers whose sum or difference is equal to $\bar{M}$ are attributed to other objects from the small collection.

Corollary 1. In the small collection of objects, to each of which a number from the small universe corresponds, we shall say that for each collected numerable object, $\pm a$ is made to correspond, which can become 0.

Lemma 3. If objects appear in the collection that are numbered positively and others that are numbered negatively, their difference or algebraic sum transforms the objects into neutral objects, that is into objects that correlate independently of their specific qualities.

Corollary 2. We can write σ as the result of the mathematical correlation of neutral objects through $(\pm a, \pm b, \pm c, \pm d, \pm e, \pm f)$, supported by $\bar{M}$ and M, and σ cannot be greater than $\bar{M}$.

Lemma 4. Indipendentemente dall'attribuzione di questo o quel numero relativo a ((p), (q), (r), (s), (t), (u)), diremo che ((p), (q), (r), (s), (t), (u)) si dispongono multi-ordinatamente nelle loro posizioni.

Infatti ((p), (q), (r), (s), (t), (u)), oltre che nei rapporti indicati nella successione alfabetica, stanno in altri modi di collegamento, cui è possibile attribuire un numero relativo uguale, ovvero maggiore o minore di 0.

Lemma 5. Si consideri la collezione di 6 oggetti numerabili in $\mathfrak{U}$, dopo 0. Se (p) sta con (q) e con (r), (s), (t), (u), in una serie di corrispondenze, si potrà attribuire a ciascun oggetto un numero relativo $\pm a$, oppure numeri relativi maggiori di $\pm a$, le cui differenze o somme algebriche non superino $\bar{M}$.

Definizione 2. Si chiama **G** della collezione esigua la linea distributiva delle combinazioni degli oggetti numerabili.

Osservazione 2. Data la collezione

$$\mathbf{G}_1 \ ((p) \wedge (q) \wedge (r) \wedge (s) \wedge (t) \wedge (u)),$$

ci sono altri collegamenti possibili. Gli oggetti si dispongono con ordine diverso sulla linea **G**, che è la linea ideale in cui vengono collocati.

Esempio.

$$\mathbf{G}_2 \quad (p, q, r, u, t, s).$$

Con una collezione di 6 oggetti numerabili con $\pm a$, quanti se ne contano nell'universo esiguo, si hanno almeno sei gruppi di linee **G** di combinazioni:

Lemma 4. Independently of the attribution of this or of that directed number to ((p), (q), (r), (s), (t), (u)), it will be said that ((p), (q), (r), (s), (t), (u)) are arranged tidily in their positions.

In fact ((p), (q), (r), (s), (t), (u)), apart from the relationships indicated by alphabetical order, link up in other ways, to which it is possible to attribute a directed number equal to, or greater or less than 0.

Lemma 5. Let us consider the collection of 6 numerable objects in $\mathfrak{U}$, beyond 0. If (p) stands with (q) and with (r), (s), (t), (u), in a series of correspondences, it will be possible to attribute to each object a directed number $\pm a$, or directed numbers greater than $\pm a$ whose differences or algebraic sums do not exceed $\overline{M}$.

Definition 2. In the small collection the line of distribution for the numerable objects is called **G**.

Observation 2. Given the collection

$$\mathbf{G}_1 \ ((p) \wedge (q) \wedge (r) \wedge (s) \wedge (t) \wedge (u)),$$

there are other linkages possible. The objects are arranged in a different order on line **G**, which is the ideal line on which they are placed.

Example.

$$\mathbf{G}_2 \quad (p, q, r, u, t, s).$$

With a collection of 6 objects numerable by $\pm a$, as many as are counted in the small universe, we have at least six groups of **G** lines of combinations:

$\mathbf{G}_1$	p	q	r	s	t	u
$\mathbf{G}_2$	p	q	r	u	t	s
$\mathbf{G}_3$	p	q	r	s	u	t
$\mathbf{G}_4$	p	q	r	t	u	s
$\mathbf{G}_5$	p	q	r	u	s	t
$\mathbf{G}_6$	p	q	r	t	s	u

Gli oggetti si dispongono in **G** in numero di 6 nei rapporti lineari di gruppo:

p	q	s	r	u	t		p	q	t	u	s	r
p	q	s	t	r	u		p	q	t	u	r	s
p	q	s	u	t	r		p	q	t	r	u	s
p	q	s	u	r	t		p	q	t	s	u	r
p	q	s	r	t	u		p	q	t	r	s	u
p	q	s	t	u	r		p	q	t	s	r	u

p	q	u	r	s	t		p	q	r	t	s	u
p	q	u	t	s	r		p	q	s	u	t	r
p	q	u	r	t	s		p	q	r	s	t	u
p	q	u	s	t	r		p	q	s	r	u	t
p	q	u	t	r	s		p	q	r	u	t	s
p	q	u	s	r	t		p	q	s	t	r	u

G_1	p	q	r	s	t	u
G_2	p	q	r	u	t	s
G_3	p	q	r	s	u	t
G_4	p	q	r	t	u	s
G_5	p	q	r	u	s	t
G_6	p	q	r	t	s	u

The objects are arranged in 6's in the line-groupings:

p	q	s	r	u	t		p	q	t	u	s	r
p	q	s	t	r	u		p	q	t	u	r	s
p	q	s	u	t	r		p	q	t	r	u	s
p	q	s	u	r	t		p	q	t	s	u	r
p	q	s	r	t	u		p	q	t	r	s	u
p	q	s	t	u	r		p	q	t	s	r	u

p	q	u	r	s	t		p	q	r	t	s	u
p	q	u	t	s	r		p	q	s	u	t	r
p	q	u	r	t	s		p	q	r	s	t	u
p	q	u	s	t	r		p	q	s	r	u	t
p	q	u	t	r	s		p	q	r	u	t	s
p	q	u	s	r	t		p	q	s	t	r	u

p	q	t	u	r	s
p	q	u	r	s	t
p	q	t	r	s	u
p	q	u	t	r	s
p	q	t	r	u	s
p	q	u	s	t	r

Corollario 3. Ci sono in **G** 6 combinazioni di oggetti numerabili per linea, e si conta una distribuzione di 36 posizioni per ogni gruppo di 6 linee.

Osservazione 3. Le linee di ciascuno degli ordinamenti {p, q, r, s, t, u} indicano il trasporto sui 'posti' disponibili per gli oggetti collezionati. Sulla base delle 6 combinazioni di 6 oggetti numerabili, si contano, fuori dell'universo esiguo, 216 'posti' in cui si collocano, in 216 modi diversi, gli oggetti da numerare, anche se 216 (ovvero 36×6) non è un numero che per l'insieme esiguo indichi qualcosa di definito.

Corollario 4. All'interno dell'universo esiguo ($\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, $\pm e$, $\pm f$), l'attribuibilità di un numero relativo ad una delle 216 posizioni degli oggetti collezionati si arresta in $\pm f$. Altri modi possibili di collegamento esterno all'insieme esiguo degli oggetti collezionabili, sono tuttavia:

p	t	s	q	r	u	p	s	t	u	q	r
p	s	t	q	u	r	p	q	u	r	s	t
p	t	r	q	s	u	p	r	t	q	u	s
p	r	u	s	q	t	p	r	u	q	s	t
p	u	r	t	q	s	p	u	s	t	q	r
p	s	u	q	r	t	q	r	s	t	p	u

p	q	t	u	r	s
p	q	u	r	s	t
p	q	t	r	s	u
p	q	u	t	r	s
p	q	t	r	u	s
p	q	u	s	t	r

Corollary 3. There are in **G** 6 combinations of numerable objects for each line, and a distribution of 36 positions can be counted for each group of 6 lines.

Observation 3. The lines of each of the arrangements {p, q, r, s, t, u} indicate a transporting onto the "places" available for the collected objects. On the basis of the 6 combinations of 6 numerable objects, one can count, outside the small universe, 216 "places" and 216 different ways in which it is possible to place the objects to be numbered, even if 216 (or 36×6) is not a number that, for the small distribution, indicates anything definite.

Corollary 4. Within the small universe ($\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, $\pm e$, $\pm f$), the possibility of assigning a directed number to one of the 216 positions of the collected objects stops at $\pm f$. Other possible ways of linking the objects outside the small arrangement of the collections are however:

p	t	s	q	r	u	p	s	t	u	q	r
p	s	t	q	u	r	p	q	u	r	s	t
p	t	r	q	s	u	p	r	t	q	u	s
p	r	u	s	q	t	p	r	u	q	s	t
p	u	r	t	q	s	p	u	s	t	q	r
p	s	u	q	r	t	q	r	s	t	p	u

p	q	r	t	u	s		p	s	r	t	u	q
p	r	q	s	u	t		p	q	r	s	u	t
p	q	s	r	u	t		p	q	r	s	t	u
q	p	r	s	t	u		r	p	q	s	u	t
r	t	u	s	p	q		s	p	q	u	t	r
s	p	r	q	t	u		t	u	s	q	p	r

p	q	r	s	t	u
q	p	r	s	t	u
r	p	q	s	t	u
s	p	q	r	t	u
t	p	q	r	s	u
u	p	q	r	s	t

Lemma 6. La collezione di oggetti in posti diversi, sulle differenti linee e colonne, si conta, in U, solo per collezioni di *f* oggetti. Si possono contare *f* insiemi di collezioni.

Corollario 5. Per chi conta al di fuori dell'universo esiguo, le posizioni sono non soltanto 216, ma 216×6; e 1296 è ancora moltiplicabile. Raggruppamenti seiposizionali di oggetti sono:

u	p	t	q	s	r		u	r	p	s	t	q
t	q	u	p	s	r		t	r	q	s	u	p
s	p	u	q	t	r		s	r	p	t	u	q
r	p	u	q	t	s		r	s	p	t	u	q
q	p	u	r	t	s		q	s	p	t	u	r
p	q	u	r	t	s		p	s	q	t	u	r

p	q	r	t	u	s
p	r	q	s	u	t
p	q	s	r	u	t
q	p	r	s	t	u
r	t	u	s	p	q
s	p	r	q	t	u

p	s	r	t	u	q
p	q	r	s	u	t
p	q	r	s	t	u
r	p	q	s	u	t
s	p	q	u	t	r
t	u	s	q	p	r

p	q	r	s	t	u
q	p	r	s	t	u
r	p	q	s	t	u
s	p	q	r	t	u
t	p	q	r	s	u
u	p	q	r	s	t

Lemma 6. Only collections of up to *f* objects may be distributed and counted along the lines and down the columns of an arrangement in U. No more than *f* arrangements of collections may be counted.

Corollary 5. For one counting outside the small universe, there are not only 216 positions, but 216×6; and 1296 is yet again multipliable. Six-position groupings of objects are:

u	p	t	q	s	r
t	q	u	p	s	r
s	p	u	q	t	r
r	p	u	q	t	s
q	p	u	r	t	s
p	q	u	r	t	s

u	r	p	s	t	q
t	r	q	s	u	p
s	r	p	t	u	q
r	s	p	t	u	q
q	s	p	t	u	r
p	s	q	t	u	r

u	q	r	t	p	s	u	s	p	q	r	t
t	p	r	u	s	q	t	q	p	s	r	u
s	q	r	u	p	t	s	t	q	p	r	u
r	q	s	u	p	t	r	t	q	p	s	u
q	r	s	p	t	u	q	u	r	t	s	p
p	r	s	u	q	t	p	q	r	s	t	u

u	t	s	r	q	p	p	t	s	r	q	u
t	u	s	r	p	q	u	t	s	r	q	p
s	u	t	r	q	p	t	u	s	p	q	r
r	u	t	s	q	p	s	t	u	q	r	p
q	u	t	s	r	p	u	s	t	p	q	r
p	u	t	s	r	q	u	r	t	s	p	q

Definizione 3. Poiché, per chi calcola nell'universo esiguo, il crescente numero delle combinazioni non è che combinazione seiposizionale, $\overline{M}=f$ indica il sostegno delle combinazioni numerabili in **G**.

Corollario 6. Nell'universo U di (p, q, r, s, t, u), la distribuzione di oggetti è sempre seiposizionale. Notevole è la collocazione intesa come ricombinazione di possibilità seiposizionali non ripetitive (sulle colonne o sulle linee) di uno stesso oggetto.

p	q	r	s	u	t	p	q	r	u	t	s
q	p	s	u	t	r	q	s	t	r	u	p
r	s	t	q	p	u	r	t	u	p	s	q
s	r	u	t	q	p	s	u	q	t	p	r
t	u	p	r	s	q	t	p	s	q	r	u
u	t	q	p	r	s	u	r	p	s	q	t

u	q	r	t	p	s
t	p	r	u	s	q
s	q	r	u	p	t
r	q	s	u	p	t
q	r	s	p	t	u
p	r	s	u	q	t

u	s	p	q	r	t
t	q	p	s	r	u
s	t	q	p	r	u
r	t	q	p	s	u
q	u	r	t	s	p
p	q	r	s	t	u

u	t	s	r	q	p
t	u	s	r	p	q
s	u	t	r	q	p
r	u	t	s	q	p
q	u	t	s	r	p
p	u	t	s	r	q

p	t	s	r	q	u
u	t	s	r	q	p
t	u	s	p	q	r
s	t	u	q	r	p
u	s	t	p	q	r
u	r	t	s	p	q

Definition 3. Since for anyone calculating in the small universe the growing number of combinations is nothing but six-position iteration, $\overline{M}=f$ indicates the support for the numerable combinations along **G**.

Corollary 6. In the U universe of (p, q, r, s, t, u), the distribution of objects is always six-positional. Noteworthy is the arrangement of recombining non-repetitive six-positional possibilities (down the columns or along the lines) for one and the same object.

p	q	r	s	u	t
q	p	s	u	t	r
r	s	t	q	p	u
s	r	u	t	q	p
t	u	p	r	s	q
u	t	q	p	r	s

p	q	r	u	t	s
q	s	t	r	u	p
r	t	u	p	s	q
s	u	q	t	p	r
t	p	s	q	r	u
u	r	p	s	q	t

p	u	t	r	s	q
q	t	r	p	u	s
r	s	p	q	t	u
s	q	u	t	r	p
t	p	s	u	q	r
u	r	q	s	p	t

p	r	q	t	u	s
q	u	p	s	r	t
r	s	t	u	q	p
s	t	r	q	p	u
t	p	u	r	s	q
u	q	s	p	t	r

p	q	t	s	r	u
q	r	u	t	p	s
r	s	q	u	t	p
s	p	r	q	u	t
t	u	p	r	s	q
u	t	s	p	q	r

Definizione 4. Si dicono *collezioni coerenti* o *notevoli* quelle in cui non c'è oggetto che appaia due volte sulle colonne o sulle linee.

Lemma 7. Alla tipicità combinatoria delle collezioni coerenti o notevoli corrisponde il concetto dell'*esclusione*: un oggetto (p)$\vee$ (q)$\vee$ (r)$\vee$ (s)$\vee$ (t)$\vee$ (u) può apparire una volta. Se compare due volte, sulla linea o sulla colonna non si troverà traccia di uno degli oggetti collezionati. Se l'oggetto compare tre volte, scompaiono due oggetti dell'ordinamento. Se un oggetto sta quattro volte sulla linea (o sulla colonna), resta, contiguamente ad esso, solo una coppia di altri oggetti. Se l'oggetto occupa cinque posti, resta un sito numerabile da *a* ad *f* per collocarne un altro. Poi, occupandone sei, l'oggetto elimina tutte le altre presenze numerabili diversamente da 0 sulla linea o colonna. Quello che si dice di (p), vale per (q), (r), (s), (t),

p	u	t	r	s	q
q	t	r	p	u	s
r	s	p	q	t	u
s	q	u	t	r	p
t	p	s	u	q	r
u	r	q	s	p	t

p	r	q	t	u	s
q	u	p	s	r	t
r	s	t	u	q	p
s	t	r	q	p	u
t	p	u	r	s	q
u	q	s	p	t	r

p	q	t	s	r	u
q	r	u	t	p	s
r	s	q	u	t	p
s	p	r	q	u	t
t	u	p	r	s	q
u	t	s	p	q	r

Definition 4. We may define as *coherent* or *noteworthy* those *collections* where no object appears twice in the columns or on the lines.

Lemma 7. Just as coherent or noteworthy collections show typical patterns of combining, so are they linked by the concept of *exclusion*: an object (p)$\vee$ (q)$\vee$ (r)$\vee$ (s)$\vee$ (t)$\vee$ (u) can appear once. If it appears twice on the line or down the column, no trace will be found of one of the other collected objects. If the object appears three times, two objects disappear from the arrangement. If an object appear four times on a line (or down a column), only one couple of other objects remain next to it. If the object occupies five places, there remains one numerable position from *a* to *f* in which to place another. Then, when occupying six places, the object eliminates all the other objects numerable otherwise than by 0 on the line or down the column. What we say for (p), is valid also for (q), (r), (s),

(u). Basta disporre più volte gli stessi oggetti sulle 6 linee, eliminando qualcuno degli altri oggetti numerabili, per trovare la corrispondenza fra oggetto e numero. Quanto avviene sulle linee si ripete nelle colonne.

Esempio.

Se (p) è contato una volta, vi sono anche (q), (r), (s), (t), (u). Se (p) è dato due volte, restano (q), (r), (s), (t); se lo si conta tre volte, si hanno (q), (r), (s). Se (p) occupa quattro posti, dopo (p) stanno solo (q) ed (r). Se (p) occupa cinque posizioni, c'è solo (q) accanto a (p).

11. CORRISPONDENZE FRA NUMERI E OGGETTI

Lemma 1. Gli oggetti {p, q, r, s, t, u} stanno su linee e colonne. Se le linee si curvano, può accadere che tre oggetti stiano sulla semicurva destra e tre su quella sinistra. Si vede allora che gli oggetti non si combinano più solamente su di una linea **G** (che li collochi orizzontalmente) uno dopo l'altro.

Teorema 1. Gli oggetti possono presentarsi in maniera che stiano in punti diversi di una linea **G** curva. Le collocazioni possono essere proiettate su di una linea *t*, nei punti (p′), (q′), (r′). Altre appaiono su di una linea *s*, nei punti (u′), (t′), (s′). Quindi, sommando i punti di *t* a quelli di *s*, si ha

$$((s'), (t'), (u')) + ((r'), (q'), (p')).$$

Di qui si ritorna a {p, q, r, s, t, u}, distribuiti su colonna invece che su linea.

(t), (u). It is sufficient to arrange the same objects several times on the six lines, eliminating one of the other numerable objects, to find the correspondence between object and number. What happens on the lines is repeated down the columns.

Example.

If (p) is counted once, there are also (q), (r), (s), (t), (u). If (p) is given twice, there remain (q), (r), (s), (t); if it is counted three times, we have (q), (r), (s). If (p) occupies four places, after (p) there are only (q) and (r). If (p) occupies five places, there is only (q) beside (p).

11. CORRESPONDENCES BETWEEN NUMBERS AND OBJECTS

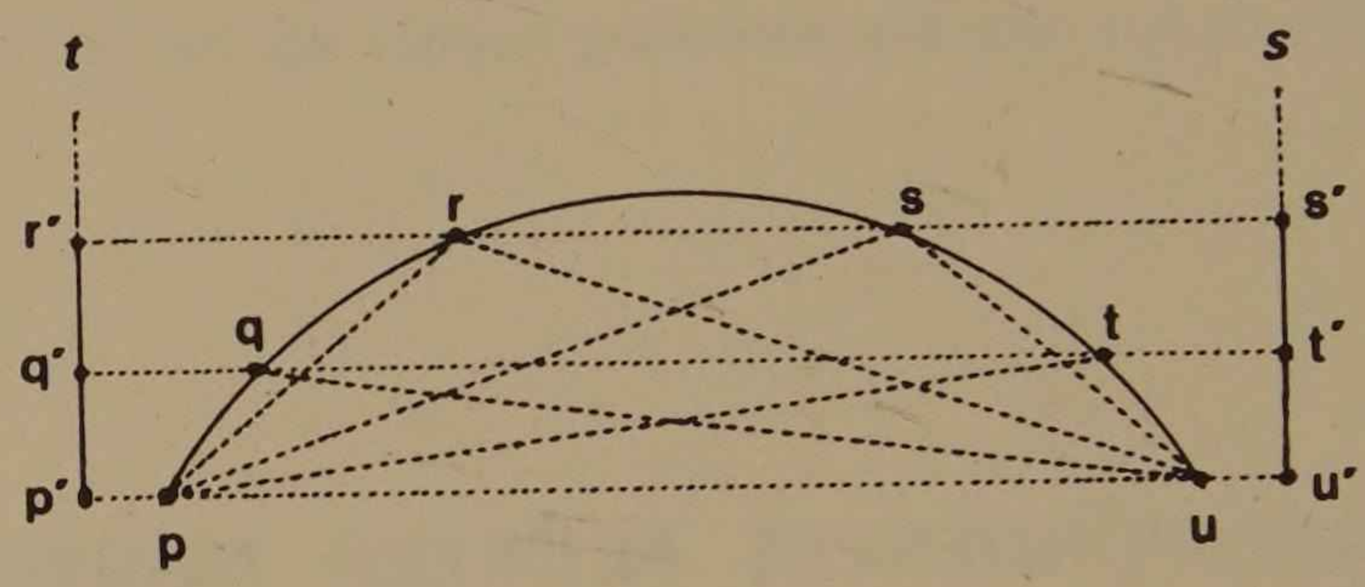
Lemma 1. The objects {p, q, r, s, t, u} are along lines and down columns. If the lines are curved, it may happen that three objects lie on the right half-curve and three on the left. It can be seen then that the objects no longer combine solely on a line **G** (which arranges them horizontally) one after the other.

Theorem 1. The objects can be so presented that they lie at different points of a curved **G** line. The arrangements can be projected on a line *t*, at the points (p′), (q′), (r′). Others appear on an *s*, at the points (u′), (t′), (s′). Therefore by adding the points of *t* to those of *s*, we have

$$((s'), (t'), (u')) + ((r'), (q'), (p')).$$

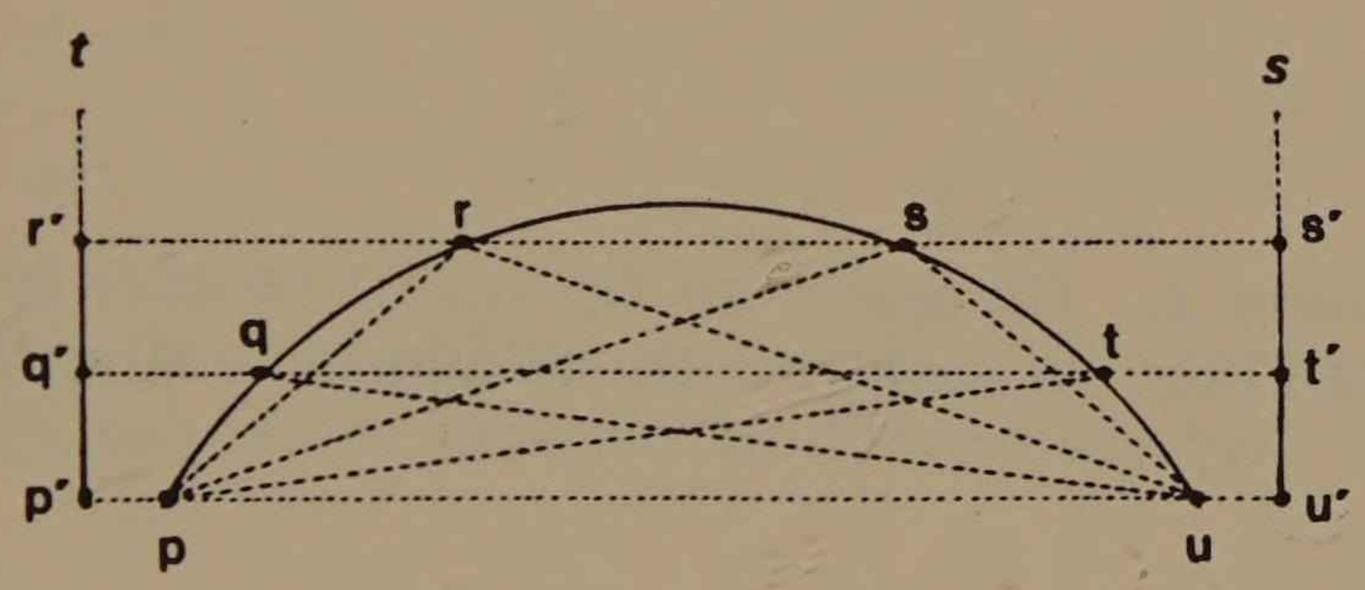
From which we return to {p, q, r, s, t, u}, distributed down a column instead of on a line;

Osservazione 1. Nella distribuzione per ritrasporto da linee curve su colonne, sempre in modo che non compaia per ogni linea e colonna più d'una volta la stessa lettera, derivano collegamenti che aumentano il numero delle possibilità combinatorie.

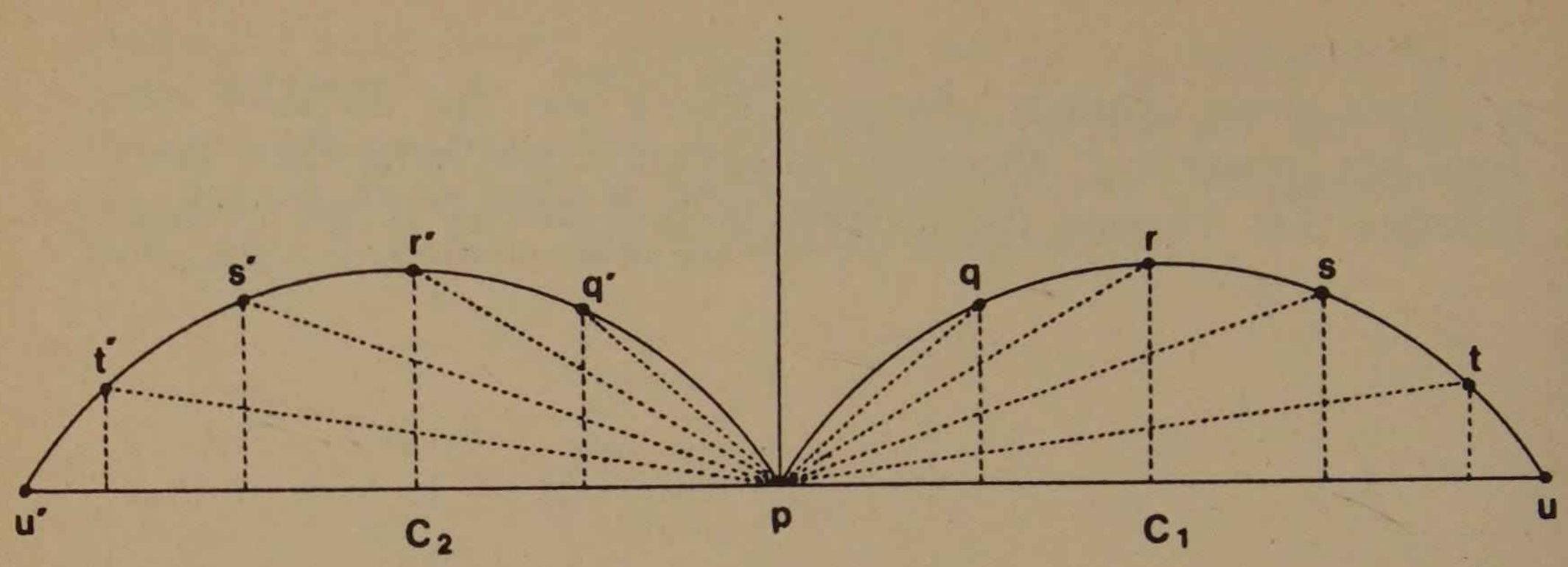


Corollario 1. Le congiunzioni rettilinee, da una semicurva all'altra, indicano il passaggio dell'oggetto alla linea obliqua e da questa alla colonna. Le linee oblique di congiunzione consentono la ricombinazione degli oggetti nei posti in cui si collezionano. Se si sposta la linea *t* perpendicolare a (p) e la si tende obliquamente a sinistra, in modo che i punti vengano proiettati da C_1 a C_2, gli oggetti (p′), (q′), (r′), (s′), (t′), (u′) sono simmetrici a (p), (q), (r), (s), (t), (u), e gli stessi oggetti (p′), (q′), (r′), (s′), (t′), (u′) stanno nell'anticampo di C_1.

Observation 1. In the distribution by transference from curved lines down columns, always in such a way that the same letter does not appear more than once in each line or column, there derive linkages that increase the number of possibilities of combination.



Corollary 1. The straight-line conjunctions, from one half-curve to the other, indicate the passage of the object to the oblique line and from this to the column. The oblique lines of conjunction make it possible to recombine the objects in the places where they are collected. If the perpendicular line *t* is shifted to (p) and the line leans obliquely to the left, in such a way that the points are projected from C_1 to C_2, the objects (p′), (q′), (r′), (s′), (t′), (u′) are symmetrical to (p), (q), (r), (s), (t), (u), and the objects (p′), (q′), (r′), (s′), (t′), (u′) themselves lie in the anti-field of C_1.

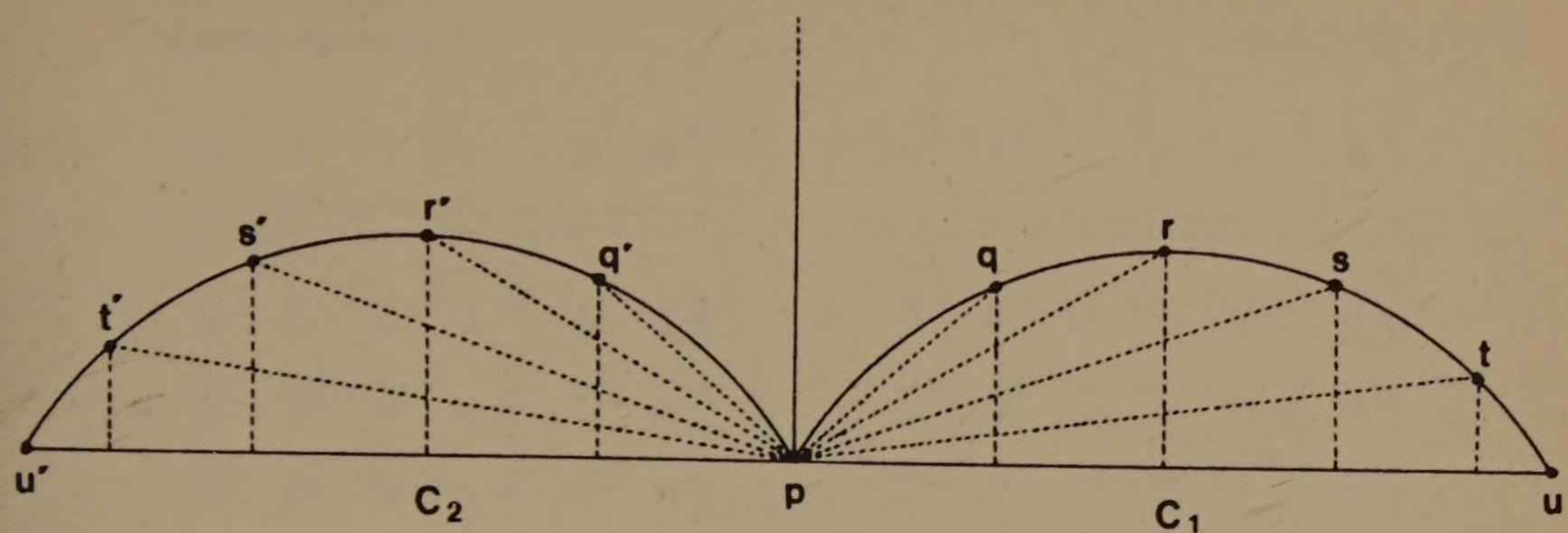


Corollario 2. Gli oggetti (p), (q), (r), (s), (t), (u) e (p′), (q′), (r′), (s′), (t′), (u′) possono venir indicati coi numeri relativi dell'universo esiguo.

Corollario 3. Gli oggetti, che si dispongono sulle linee curve di due campi C_1 e C_2, sono numerabili.

Osservazione 2. A ciascun oggetto in C_1 e C_2 può essere attribuito un numero maggiore di $\pm a$. Alcuni oggetti possono apparire più volte in un punto della linea **G**. Il ripetersi della loro presenza implica la rarefazione di altri oggetti in **G**. Alcuni oggetti possono apparire in **G** con numeri relativi negativi, perché trasferiti dalla collezione simmetrica.

Esempio. Se ogni oggetto è presente una volta sulla linea **G**, a ciascun oggetto va attribuito il valore ($\pm a(=\pm 1)$), ma se l'oggetto (p) ha, poniamo, 6 presenze ($\pm f(=\pm 6)$), scompaiono da **G** i restanti 5 oggetti prima numerabili con $\pm a$. Quando (p) è presente cinque volte ($\pm e(=\pm 5)$), un valore $\pm a$ può essere attribuito ad un altro degli oggetti collezionati. Quando (p) appare quattro volte ($\pm d(=\pm 4)$), si dispone di un valore residuo $\pm b$.



Corollary 2. The objects (p), (q), (r), (s), (t), (u) and (p′), (q′), (r′), (s′), (t′), (u′) can be indicated by directed numbers in the small universe.

Corollary 3. The objects that are arranged along the curved lines of two fields C_1 and C_2 are numerable.

Observation 2. A number greater than $\pm a$ can be attributed to each object in C_1 and C_2. Some objects may appear several times at one point on the **G** line. Their repeated appearance implies a rarefaction of other objects in **G**. Some objects may appear in **G** numbered by negative directed numbers, in that they have been transferred from the symmetric collection.

Example. If each object appears once on the **G** line, the value ($\pm a(=\pm 1)$) is attributed to each object, but if the object (p) appears, for instance, 6 times ($\pm f(=\pm 6)$), the remaining 5 objects formerly numerable with $\pm a$ disappear from **G**. If (p) appears four times ($\pm e(=\pm 5)$), a value $\pm a$ can be attributed to one other of the collected objects. If (p) appears four times ($\pm d(=\pm 4)$), a residual value $\pm b$ is available.

Dimostrazione:

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	$\pm a$	0	0	0	0
$\pm d$	$\pm b$	0	0	0	0
$\pm c$	$\pm c$	0	0	0	0
$\pm b$	$\pm d$	0	0	0	0
$\pm a$	$\pm e$	0	0	0	0

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	0	$\pm a$	0	0	0
$\pm d$	0	$\pm b$	0	0	0
$\pm c$	0	$\pm c$	0	0	0
$\pm b$	0	$\pm d$	0	0	0
$\pm a$	0	$\pm e$	0	0	0

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	0	0	$\pm a$	0	0
$\pm d$	0	0	$\pm b$	0	0
$\pm c$	0	0	$\pm c$	0	0
$\pm b$	0	0	$\pm d$	0	0
$\pm a$	0	0	$\pm e$	0	0

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	0	0	0	$\pm a$	0
$\pm d$	0	0	0	$\pm b$	0
$\pm c$	0	0	0	$\pm c$	0
$\pm b$	0	0	0	$\pm d$	0
$\pm a$	0	0	0	$\pm e$	0

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	0	0	0	0	$\pm a$
$\pm d$	0	0	0	0	$\pm b$
$\pm c$	0	0	0	0	$\pm c$
$\pm b$	0	0	0	0	$\pm d$
$\pm a$	0	0	0	0	$\pm e$

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	$\pm a$	0	0	0	0
$\pm d$	$\pm a$	$\pm a$	0	0	0
$\pm c$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	0	0
$\pm b$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	0
$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$

Demonstration:

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	$\pm a$	0	0	0	0
$\pm d$	$\pm b$	0	0	0	0
$\pm c$	$\pm c$	0	0	0	0
$\pm b$	$\pm d$	0	0	0	0
$\pm a$	$\pm e$	0	0	0	0

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	0	$\pm a$	0	0	0
$\pm d$	0	$\pm b$	0	0	0
$\pm c$	0	$\pm c$	0	0	0
$\pm b$	0	$\pm d$	0	0	0
$\pm a$	0	$\pm e$	0	0	0

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	0	0	$\pm a$	0	0
$\pm d$	0	0	$\pm b$	0	0
$\pm c$	0	0	$\pm c$	0	0
$\pm b$	0	0	$\pm d$	0	0
$\pm a$	0	0	$\pm e$	0	0

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	0	0	0	$\pm a$	0
$\pm d$	0	0	0	$\pm b$	0
$\pm c$	0	0	0	$\pm c$	0
$\pm b$	0	0	0	$\pm d$	0
$\pm a$	0	0	0	$\pm e$	0

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	0	0	0	0	$\pm a$
$\pm d$	0	0	0	0	$\pm b$
$\pm c$	0	0	0	0	$\pm c$
$\pm b$	0	0	0	0	$\pm d$
$\pm a$	0	0	0	0	$\pm e$

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	$\pm a$	0	0	0	0
$\pm d$	$\pm a$	$\pm a$	0	0	0
$\pm c$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	0	0
$\pm b$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	0
$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$	$\pm a$

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	$\pm a$	0	0	0	0
$\pm d$	$\pm a$	$\pm a$	0	0	0
$\pm c$	$\pm b$	$\pm a$	0	0	0
$\pm b$	$\pm b$	0	0	$\pm a$	$\pm a$
$\pm a$	$\pm b$	0	$\pm b$	0	$\pm a$

Corollario 4. Se (p)$=f$, allora ((q)+(r)+(s)+(t)+(u))$=0$. Se (q)$=f$, allora ((p)+(r)+(s)+(t)+(u))$=0$, e così di seguito:

p	q	r	s	t	u
0	$\pm f$	0	0	0	0
$\pm a$	$\pm e$	0	0	0	0
$\pm b$	$\pm d$	0	0	0	0
$\pm c$	$\pm c$	0	0	0	0
$\pm d$	$\pm b$	0	0	0	0
$\pm e$	$\pm a$	0	0	0	0

p	q	r	s	t	u
0	0	$\pm f$	0	0	0
0	$\pm a$	$\pm e$	0	0	0
0	$\pm b$	$\pm d$	0	0	0
0	$\pm c$	$\pm c$	0	0	0
0	$\pm d$	$\pm b$	0	0	0
0	$\pm e$	$\pm a$	0	0	0

p	q	r	s	t	u
0	0	0	$\pm f$	0	0
0	0	$\pm a$	$\pm e$	0	0
0	0	$\pm b$	$\pm d$	0	0
0	0	$\pm c$	$\pm c$	0	0
0	0	$\pm d$	$\pm b$	0	0
0	0	$\pm e$	$\pm a$	0	0

p	q	r	s	t	u
0	0	0	0	0	$\pm f$
0	0	0	0	$\pm a$	$\pm e$
0	0	0	0	$\pm b$	$\pm d$
0	0	0	0	$\pm c$	$\pm c$
0	0	0	0	$\pm d$	$\pm b$
0	0	0	0	$\pm e$	$\pm a$

p	q	r	s	t	u
$\pm f$	0	0	0	0	0
$\pm e$	$\pm a$	0	0	0	0
$\pm d$	$\pm a$	$\pm a$	0	0	0
$\pm c$	$\pm b$	$\pm a$	0	0	0
$\pm b$	$\pm b$	0	0	$\pm a$	$\pm a$
$\pm a$	$\pm b$	0	$\pm b$	0	$\pm a$

Corollary 4. If (p)$=f$, then ((q)+(r)+(s)+(t)+(u))$=0$. If (q)$=f$, then ((p)+(r)+(s)+(t)+(u))$=0$, and so on:

p	q	r	s	t	u
0	$\pm f$	0	0	0	0
$\pm a$	$\pm e$	0	0	0	0
$\pm b$	$\pm d$	0	0	0	0
$\pm c$	$\pm c$	0	0	0	0
$\pm d$	$\pm b$	0	0	0	0
$\pm e$	$\pm a$	0	0	0	0

p	q	r	s	t	u
0	0	$\pm f$	0	0	0
0	$\pm a$	$\pm e$	0	0	0
0	$\pm b$	$\pm d$	0	0	0
0	$\pm c$	$\pm c$	0	0	0
0	$\pm d$	$\pm b$	0	0	0
0	$\pm e$	$\pm a$	0	0	0

p	q	r	s	t	u
0	0	0	$\pm f$	0	0
0	0	$\pm a$	$\pm e$	0	0
0	0	$\pm b$	$\pm d$	0	0
0	0	$\pm c$	$\pm c$	0	0
0	0	$\pm d$	$\pm b$	0	0
0	0	$\pm e$	$\pm a$	0	0

p	q	r	s	t	u
0	0	0	0	0	$\pm f$
0	0	0	0	$\pm a$	$\pm e$
0	0	0	0	$\pm b$	$\pm d$
0	0	0	0	$\pm c$	$\pm c$
0	0	0	0	$\pm d$	$\pm b$
0	0	0	0	$\pm e$	$\pm a$

Lemma 2. Quando a ciascun numero attribuito all'oggetto collezionato, numerabile in un universo esiguo, è possibile aggiungere un numero corrispondente ad un altro oggetto (e la somma dei due numeri non supera il sostegno $\overline{M}$), la grandezza o valore assoluto del numero attribuito all'oggetto numerabile fa diminuire la grandezza dei numeri attribuibili ai restanti oggetti numerabili.

Regola 1. Per ciascun numero dell'universo esiguo, i segni '+' e '−' rappresentano la condizione per la quale, in $\mathfrak{G}$, ad un numero 'aumentato' corrisponde sempre un numero 'diminuito'. I segni '+' e '−' non sono solo proprietà dei numeri, ma anche condizione della loro congruenza rispetto ad $\overline{M}$. Se $(p)=f$, allora

$$((q)\wedge(r)\wedge(s)\wedge(t)\wedge(u))=0.$$

Se $(q)=a$ e $(p)=e$, allora

$$((r)\wedge(s)\wedge(t)\wedge(u))=0.$$

Corollario 5. Se $(r)=b$ e $(p)=d$, gli altri oggetti compaiono in **G** zero volte. Se $(s)=c$, e $(p)=c$, si dirà che (s) e (p) sono i due oggetti della collezione **G** e che entrambi compaiono tre volte in un luogo definito di **G**.

Lemma 3. Se (p), che appare f volte in **G**, si considera come combinazione di parti dell'oggetto, esso può essere indicato anche come correlazione di numeri relativi positivi o negativi la cui somma algebrica sia ancora $\pm f$.

Lemma 2. If each number attributed to the collected object, numerable in a small universe, can have a number added to it corresponding to another object (and the sum of the two numbers does not exceed the support $\overline{M}$), the magnitude or absolute value of the number corresponding to the numerable object leads to a lesser magnitude of the numbers attributable to the remaining numerable objects.

Rule 1. For each number in the small universe, the signs '+' and '−' represent the condition whereby every 'increased' number in **G** always has a corresponding 'diminished' number. The signs '+' and '−' are not only properties of numbers, they are also the condition of their congruence with respect to $\overline{M}$. If $(p)=f$, then

$$((q)\wedge(r)\wedge(s)\wedge(t)\wedge(u))=0.$$

If $(q)=a$ and $(p)=e$, then

$$((r)\wedge(s)\wedge(t)\wedge(u))=0.$$

Corollary 5. If $(r)=b$ and $(p)=d$, the other objects appear zero times in **G**. If $(s)=c$, and $(p)=c$, it will be said that (s) and (p) are the two objects in collection **G** and that both appear three times in a definite place of **G**.

Lemma 3. If (p), which appears f times in **G**, is considered as a combination of parts of the object, it can also be indicated as a correlation of positive or negative directed numbers whose algebraic sum is still $\pm f$.

	p	q	r	s	t	u
f	0	0	0	0	0	0
$(a+e)$	0	0	0	0	0	0
$(b+d)$	0	0	0	0	0	0
$(c+c)$	0	0	0	0	0	0
$(d+b)$	0	0	0	0	0	0
$(e+a)$	0	0	0	0	0	0

Simmetricamente:

u′	t′	s′	r′	q′	p′
0	0	0	0	0	$-f$
0	0	0	0	0	$(-e-a)$
0	0	0	0	0	$(-d-b)$
0	0	0	0	0	$(-c-c)$
0	0	0	0	0	$(-b-d)$
0	0	0	0	0	$(-a-e)$

Regola 2. Dato (p) $\not\leftarrow f$, ciò significa che se in un ordinamento la numerosità di (p) corrispondeva a $\pm e$, e quella di (q) a $\pm a$, (p), divenuto corrispondente a $\pm f$, ha assorbito, nel nuovo ordinamento, il numero $\pm a$ di (q). Allora si dice che (q) è diventato zero: (q) si toglie come $(a-a)$, ovvero

$$(((e \rightarrow f) \supset (e+a)) \supset (a-a))$$

	p	q	r	s	t	u
f	0	0	0	0	0	0
$(a+e)$	0	0	0	0	0	0
$(b+d)$	0	0	0	0	0	0
$(c+c)$	0	0	0	0	0	0
$(d+b)$	0	0	0	0	0	0
$(e+a)$	0	0	0	0	0	0

Symmetrically:

u′	t′	s′	r′	q′	p′
0	0	0	0	0	$-f$
0	0	0	0	0	$(-e-a)$
0	0	0	0	0	$(-d-b)$
0	0	0	0	0	$(-c-c)$
0	0	0	0	0	$(-b-d)$
0	0	0	0	0	$(-a-e)$

Rule 2. Given (p) $\not\leftarrow f$, if in an arrangement the numerousness of (p) was corresponding to $\pm e$, and that of (q) to $\pm a$, then (p), having become correspondent to $\pm f$, has absorbed the number $\pm a$ of (q) in the new arrangement. It is then said that (q) has become zero: (q) is taken away as $(a-a)$, that is

$$(((e \rightarrow f) \supset (e+a)) \supset (a-a))$$

(che si legge: se e diventa f, allora $((e+a)=f)$ implica $(a-a)$).

Regola 3. Nella serie infinita dei numeri naturali o reali, un possibile oggetto (p) numerabile con n, può aumentare di a, per cui si scrive $(n+a)$ indefinitamente, senza sottrarre nulla ai valori numerici corrispondenti agli oggetti (q), (r), (s), (t), (u), perché ogni numero, che corrisponde alla numerosità di (q), (r), (s), (t), (u) dell'universo transfinito, possiede un successore. Nell'universo esiguo ($a, b, c, d, e, f,$), invece, non vi è numero relativo alla numerosità di (p), (q), (r), (s), (t), (u), che possa aumentare senza produrre diminuzione di qualche altro numero (uno o più numeri) raccolto sulla linea $\mathfrak{S}$. In quest'ultima, (a, b, c, d, e, f) si rappresentano come σ (ovvero come somma o differenza di $a, b, c, d, e, f,$ in modo che dal loro calcolo non risulti qualche numero maggiore di $\bar{M}$).

Definizione 1. Dicesi $\bar{M}$ il *sostegno* di una collezione, ossia il numero oltre il quale non è possibile calcolare l'ordinamento sulla base dell'universo esiguo. $\bar{M}$ è il numero trans-intrafinito che chiude la progressione esigua.

Definizione 2. Diremo σ la determinazione effettiva di una distribuzione dei termini nel calcolo in $\mathfrak{S}$ sostenuto da $\bar{M}$.

Corollario 6. In un insieme esiguo $\mathfrak{U}$, quando si permuti la distribuzione dei numeri, la loro somma o differenza (però anche prodotto o quoziente), deve mantenersi minore o uguale ad $\bar{M}$. Ogni 'luogo' occupato da un numero nella relazione operativa, distribuita in σ, diminuisce la numerosità che appartiene a qualche altro 'posto', se un oggetto aumenta la propria numerosità.

Esempi.

Con

$$\bar{M} = \pm f$$

(which reads: if e becomes f, then $((e+a)=f)$ implies $(a-a)$).

Rule 3. In the infinite set of natural or real numbers, a possible object (p) numerable as n, can be increased by a units, so that we can write $(n+a)$ indefinitely, without subtracting anything from the numerical values corresponding to the objects (q), (r), (s), (t), (u), because every number that corresponds to the numerousness of (q), (r), (s), (t), (u) in the transfinite universe, has a successor. In the small universe $(a, b, c, d, e, f,)$, on the contrary, there is no number relating to the numerousness of (p), (q), (r), (s), (t), (u), that can increase its own magnitude without causing a decrease in some other number (one or more) gathered along line $\mathfrak{S}$. In the latter, (a, b, c, d, e, f) are represented as σ (i.e. as the sum or difference of a, b, c, d, e, f, but in such a way that from the computation a number greater than $\bar{M}$ should not appear).

Definition 1. $\bar{M}$ is called the *support* for a collection, that is the number beyond which it is not possible to calculate its arrangement on the basis of a small universe. $\bar{M}$ is the trans-intrafinite number that ends a small progression.

Definition 2. By σ we mean the real determination of an arrangement of terms through computation in $\mathfrak{S}$, where $\mathfrak{S}$ is supported by $\bar{M}$.

Corollary 6. In a small distribution $\mathfrak{U}$, even if we change the arrangement of the numbers, their sum or difference (but also their product or quotient), must result less than or equal to $\bar{M}$. Each 'place' occupied by a number in the mathematical relationship distributed in σ, diminishes the numerousness that belongs to some other 'place', if an object increases its numerousness.

Examples.

Given

$$\bar{M} = \pm f$$

si avrà

$$\sigma = \pm a \pm b \pm c; \quad \sigma = \pm c \pm a \pm b; \quad \sigma = \pm b \pm a \pm c;$$

$$\sigma = \pm c \pm b \pm a; \quad \sigma = \pm a \pm c \pm b; \quad \sigma = \pm b \pm c \pm a;$$

$$\sigma = d + b + 0; \qquad \sigma = e + a + 0.$$

Con

$$\bar{M} = \pm f$$

scriveremo, anche,

$$\begin{aligned}
\sigma &= (b \cdot b) + b, \\
\sigma &= (-b \cdot b) - b, \\
\sigma &= (b \cdot a) + c + a, \\
\sigma &= (b \cdot a) + d, \\
\sigma &= (b \cdot -a) - d, \\
\sigma &= (d - b) + a + c, \\
\sigma &= c \cdot b, \\
\sigma &= (b \cdot a) + a + c, \\
\sigma &= c \cdot (d : b)..
\end{aligned}$$

12. MODELLI OMOLOGHI

Lemma 1. Nell'universo esiguo, le collezioni possono appartenere a modelli omologhi.

Definizione 1. Si ha modello omologo di $\mathfrak{U}$ quando, variando la relazione dei termini del rapporto in (σ_1) e (σ_2), i risultati sono equivalenti, e restano uguali i sostegni M_1 e M_2 di $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$.

$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$
$M_1 = c$	$M_2 = c$
$\sigma_1 = (b + a)$	$\sigma_2 = (d - a)$

we shall have

$$\sigma = \pm a \pm b \pm c; \ \sigma = \pm c \pm a \pm b; \ \sigma = \pm b \pm a \pm c;$$

$$\sigma = \pm c \pm b \pm a; \ \sigma = \pm a \pm c \pm b; \ \sigma = \pm b \pm c \pm a;$$

$$\sigma = d + b + 0; \ \sigma = e + a + 0.$$

With

$$\bar{\mathrm{M}} = \pm f$$

we shall also write

$$\begin{aligned}
\sigma &= (b \cdot b) + b, \\
\sigma &= (-b \cdot b) - b, \\
\sigma &= (b \cdot a) + c + a, \\
\sigma &= (b \cdot a) + d, \\
\sigma &= (b \cdot -a) - d, \\
\sigma &= (d - b) + a + c, \\
\sigma &= \ c \cdot b, \\
\sigma &= (b \cdot a) + a + c, \\
\sigma &= c \cdot (d : b). .
\end{aligned}$$

12. HOMOLOGOUS MODELS

Lemma 1. In the small universe, the collections can belong to homologous models.

Definition 1. We shall speak of a homologous model of $\mathfrak{U}$ when, even if we vary the relationship between the terms of the ratio in (σ_1) and (σ_2), the results are equivalent, and the supports M_1 and M_2 for $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ remain the same.

$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$
$\mathrm{M}_1 = c$	$\mathrm{M}_2 = c$
$\sigma_1 = (b+a)$	$\sigma_2 = (d-a)$.

La rappresentazione omomorfa di due modelli omologhi di un insieme esiguo pone $((\sigma_1 = \sigma_2) = (M_1 = M_2))$.

Corollario 1. Se ad un numero che indica una grandezza della distribuzione operativa σ in $\mathfrak{S}$, si aggiunge il numero di un'altra grandezza, la somma deve risultare minore o uguale alla M di $\mathfrak{S}$.

Osservazione 1. Se due insiemi $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$, di un modello esiguo $\mathfrak{U}$, sono omologhi, è evidente per entrambi l'equivalenza di σ_1 e σ_2 in ciascun $\mathfrak{S}$.

$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$
$M_1 = e$	$M_2 = e$
$\sigma_1 = (a+d)$	$\sigma_2 = (f-a)$.

Corollario 2. Se un numero di σ aumenta di grandezza, in un insieme $\mathfrak{S}$, diminuiscono le grandezze degli altri numeri compresi in σ, nell'insieme $\mathfrak{S}$ del modello omologo. C'è sempre in $\mathfrak{U}$ un $\overline{M}$ la cui grandezza non può venir superata. Essa si dice il massimo sostegno di σ in $\mathfrak{S}$ del modello omologo.

Lemma 2. Nessun sostegno di $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{U}$ può estendersi oltre $\pm f$. Data l'ipotesi fondamentale dell'universo $\mathfrak{U}$, quando $M = \sigma$, si ha

$$(M \times M) = (\sigma \times \sigma);$$

e, se

$$((M_1) = (M_2) = (M_3) = (M_4)),$$

The homomorphous representation of two homologous models of a small distribution supposes $((\sigma_1 = \sigma_2) = (M_1 = M_2))$.

Corollary 1. If to a number indicating a magnitude of the operative distribution σ in $\mathfrak{S}$, a number of another magnitude is added, then the sum must be less than or equal to M of $\mathfrak{S}$.

Observation 1. If two distributions $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ of a small model $\mathfrak{U}$ are homologous, the equivalence of σ_1 and σ_2 in each $\mathfrak{S}$ is evident for both.

$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$
$M_1 = e$	$M_2 = e$
$\sigma_1 = (a+d)$	$\sigma_2 = (f-a)$.

Corollary 2. If a σ number increases its value in a $\mathfrak{S}$ distribution, then the magnitudes of the other numbers included in σ decrease in the $\mathfrak{S}$ distribution of the homologous model. There is always an $\bar{M}$ in $\mathfrak{U}$ whose magnitude cannot be exceeded. It is called the maximun support for σ in $\mathfrak{S}$ of the homologous model.

Lemma 2. No support for $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{U}$ can be extended over $\pm f$. Given the universe $\mathfrak{U}$ as our basic hypothesis, when $M = \sigma$, we shall have

$$(M \times M) = (\sigma \times \sigma);$$

and if

$$((M_1) = (M_2) = (M_3) = (M_4)),$$

risulterà

$$((\sigma_1) = (\sigma_2) = (\sigma_3) = (\sigma_4))$$

$$(M_1 \pm M_2) = (\sigma_1 \pm \sigma_2)$$

$$(M_2 \pm M_3) = (\sigma_2 \pm \sigma_3)$$

$$(M_3 \pm M_4) = (\sigma_3 \pm \sigma_4)$$

$$(M_1 \times M_2) = (\sigma_1 \times \sigma_2)$$

$$(M_2 \times M_3) = (\sigma_2 \times \sigma_3)$$

$$(M_3 \times M_4) = (\sigma_3 \times \sigma_4)$$

$$(M_1 : M_2) = (\sigma_1 : \sigma_2)$$

. .

13. CALCOLO DEI NUMERI RELATIVI IN $\mathfrak{G}$, σ, M E NEUTRALITÀ DEGLI OGGETTI NUMERABILI

Osservazione 1. Quando si sceglie la corrispondenza fra numeri ed oggetti, su ogni **G** di $\mathfrak{U}$ possono apparire f oggetti differenti, ma dal momento che si possono situare, in **G**, anche meno di f oggetti, a qualcuno di questi ultimi appartiene un numero maggiore di a. Se la numerosità di un oggetto aumenta, si restringe la numerabilità > 0 degli altri oggetti numerabili.

Teorema 1. Se a (p) si attribuisce numerosità maggiore di a, allora (q), oppure (r), ovvero (s) o anche (t) o infine (u), sono uguali a 0. Lo stesso vale per (q) e per gli altri oggetti della collezione esigua.

we will obtain

$$((\sigma_1) = (\sigma_2) = (\sigma_3) = (\sigma_4))$$

$$(M_1 \pm M_2) = (\sigma_1 \pm \sigma_2)$$

$$(M_2 \pm M_3) = (\sigma_2 \pm \sigma_3)$$

$$(M_3 \pm M_4) = (\sigma_3 \pm \sigma_4)$$

$$(M_1 \times M_2) = (\sigma_1 \times \sigma_2)$$

$$(M_2 \times M_3) = (\sigma_2 \times \sigma_3)$$

$$(M_3 \times M_4) = (\sigma_3 \times \sigma_4)$$

$$(M_1 : M_2) = (\sigma_1 : \sigma_2)$$

. .

13. COMPUTATION BY DIRECTED NUMBERS IN $\mathfrak{G}$, σ, M AND NEUTRALITY OF NUMERABLE OBJECTS

Observation 1. When the correspondence between numbers and objects is chosen, along every **G** of $\mathfrak{U}$ there may appear f different objects, but, since it is also possible to place fewer than f objects in **G**, some of these latter will be denoted by a number greater than a. If the numerousness of an object increases, then the numerability > 0 of the other numerable objects is restricted.

Theorem 1. If a numerousness greater than a is attributed to (p), then (q), or (r), or (s) or (t), or finally (u), are equal to 0. The same is true for (q) and for the other objects in the small collection.

$$(p > a) = ((q) \vee (s) \vee (t) \vee (u)) = 0$$

$$(q > a) = ((p) \vee (s) \vee (t) \vee (u)) = 0.$$

Rispetto alla distribuzione σ sulle linee **G**, non può aversi che la somma dei numeri corrispondenti a ((p), (q), (r), (s), (t), (u)) si estenda oltre $\pm f$, anche se in **G** vi sono collezioni di oggetti presi in qualche numero incluso in $\pm f$:

p	q	r	s	t	u
c	0	0	b	0	0

p	q	r	s	t	u
a	0	0	c	0	0

Si dovrà quindi dire che $\pm f$ è uguale al sostegno ($\bar{M}$) della massima distribuzione in **G** della struttura di f linee in $\mathfrak{U}$, mentre un numero minore di $\pm f$ può sempre definire la distribuzione dei posti in **G**, su base $M = x < f$, non essendo necessaria, in tutti i casi, la corrispondenza fra M ed operatori (perché possono venir situati sulla linea numeri la cui somma sia compresa in $\bar{M} = \pm f$).

Corollario 1. Dal momento che si possono far corrispondere due **G**, collegando collezioni simmetriche, come nel caso di

p	q	r	s	t	u
0	0	0	0	b	d

u	t	s	r	q	p
$-d$	$-b$	0	0	0	0

i due $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$ avranno lo stesso sostegno (M), ma diverso σ.

$$(p > a) = ((q) \vee (s) \vee (t) \vee (u)) = 0$$

$$(q > a) = ((p) \vee (s) \vee (t) \vee (u)) = 0.$$

Concerning the arrangement σ on the **G** lines, the sum of the numbers corresponding to ((p), (q), (r), (s), (t), (u)) cannot be extended over $\pm f$, even when the total amount of the collections of objects in **G** is included in $\pm f$:

p	q	r	s	t	u
c	0	0	b	0	0

p	q	r	s	t	u
a	0	0	c	0	0

We shall therefore say that $\pm f$ is equal to the support ($\bar{M}$) for the maximum distribution in **G** of the structure of f lines in $\mathfrak{U}$, while a number less than $\pm f$ can always constitute the distribution of the places in **G**, on the basis of $M = x < f$, the correspondence between M and the operators not being necessary in all cases (since numbers whose sum is included in $\bar{M} = \pm f$ may be placed on the lines).

Corollary 1. Since it is possible to make two **G** lines correspond by linking symmetrical collections, as in the case of

p	q	r	s	t	u
0	0	0	0	b	d

u	t	s	r	q	p
$-d$	$-b$	0	0	0	0

the two $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ will have same support (M), but a different σ.

Definizione 1. M è il risultato di σ (per questo si dice appunto sostegno trans-intrafinito di σ in $\mathfrak{U}$). M come sostegno trans-intrafinito è il risultato di numeri relativi che si riferiscono ad oggetti neutri distribuiti in σ di U. Per mezzo di M, diremo che (p), (q), (r), (s), (t), (u) sono divenuti, in σ, oggetti neutri di riferimento. Si dirà che σ corrisponde ad M ($\sigma \sim$ M), in quanto il valore numerico di M ed il risultato della somma della distribuzione numerale in σ sono uguali. Si dirà anche che M e σ sono entrambi indifferenti alla specificità qualitativa degli oggetti (p), (q), (r), (s), (t), (u). Per cui ogni σ distribuisce i corrispondenti numerici degli oggetti numerabili che contiene, in modo che il risultato dell'operazione fra σ sia indipendente dalla combinazione degli oggetti.

p	q	r	s	t	u
$+a$	0	0	0	$-c$	0
0	$-b$	0	0	0	0
$+a$	$-b$	0	0	$-c$	0

t	u	r	s	q	p
$+a$	0	0	0	$-c$	0
0	$-b$	0	0	0	0
$+a$	$-b$	0	0	$-c$	0

Corollario 2. Possono appartenere a $\mathfrak{U}$ più linee $\mathfrak{S}$ e quindi più σ che contengono numeri sia positivi che negativi:

	p	q	r	s	t	u		u	t	s	r	q	p	
A	0	0	0	$-c$	$-b$	$-a$		a	$+b$	$+c$	0	0	0	B
	0	0	0	$+b$	$+a$	$+c$		$-c$	$-a$	$-b$	0	0	0	

Lemma 1. Poiché la somma o differenza dei termini che compaiono in $\mathfrak{U}$ è talvolta minore di $\overline{M} = f$, si hanno, in $\mathfrak{S}$, sub-reticoli

Definition 1. M is the result of σ (which is precisely why it is called the trans-intrafinite support for σ in $\mathfrak{U}$). M as the trans-intrafinite support is the result of directed numbers that refer to neutral objects distributed in σ of U. By means of M, we shall say that (p), (q), (r), (s), (t), (u) have become neutral reference objects in σ. It will be said that σ corresponds to M ($\sigma \sim$ M), in that the numerical value of M and the result of the numeral arrangement in σ are equal. We shall also say that M and σ are both indifferent to the specific qualitative nature of the objects (p), (q), (r), (s), (t), (u). So that each σ distributes its numerical terms corresponding to objects, in such a way that the result of the operation among σ is independent of the combination of the objects.

p	q	r	s	t	u
$+a$	0	0	0	$-c$	0
0	$-b$	0	0	0	0
$+a$	$-b$	0	0	$-c$	0

t	u	r	s	q	p
$+a$	0	0	0	$-c$	0
0	$-b$	0	0	0	0
$+a$	$-b$	0	0	$-c$	0

Corollary 2. Several $\mathfrak{S}$ lines can belong to $\mathfrak{U}$ and therefore several σ which contain both positive and negative numbers:

	p	q	r	s	t	u		u	t	s	r	q	p	
A	0	0	0	$-c$	$-b$	$-a$		a	$+b$	$+c$	0	0	0	B
	0	0	0	$+b$	$+a$	$+c$		$-c$	$-a$	$-b$	0	0	0	

Lemma 1. Since the sum or difference of the terms appearing in $\mathfrak{U}$ is sometimes less than $\bar{M} = f$, $\mathfrak{S}$ will have sublattices or

o sottoinsiemi di numeri relativi, in rapporto ad oggetti neutri. Con $\mathfrak{S}_2$ si avrà che il sottogruppo o sottoinsieme $\mathfrak{S}_2$ di A ed il sottogruppo $\mathfrak{S}_2$ di B sono simmetrici.

Definizione 2. Con i termini *sottogruppo* o *sottoinsieme* s'intende che nel rapporto fra $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ si hanno σ_1 e σ_2 con il sostegno di M non estensibile oltre f.

Corollario 3. Se $((\sigma)=(\bar{M})=(f))$, allora $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ contengono insiemi o reticoli di $\mathfrak{U}$.

Definizione 3. Si dice *oggetto neutro*, corrispettivo di un numero, ogni (p), (q), (r), (s), (t), (u), privato delle proprie connotazioni e ricondotto ad essere luogo di riferimento del numero relativo.

Corollario 4. L'*oggetto neutro* non riferito equivale a 0, fino a quando non viene fatto ad esso corrispondere un numero relativo diverso da 0. Lo 0 è numero che, indipendentemente dalla disposizione seriale, può comparire in $\mathfrak{S}$, per la distribuzione ordinaria dei numeri relativi di σ.

Osservazione 2. Nell'universo transfinito, con $M=\infty$, i numeri relativi cominciano ad essere quando, fra i valori assoluti, vengono posti i segni '+' e '−'. In quel caso, i numeri relativi non rivelano proprietà che non siano effetto dell'attribuzione a numeri naturali, interi, razionali, dei segni stessi del '+' e del '−', con cui si indicano quantità da aggiungere o quantità da levare (Maclaurin 1796). Allora i segni di addizione e sottrazione di una grandezza data non dipendono dal rapporto fra insiemi definiti. Sono inclusi nella classe delle quantità come segni di "relazione fra" (Cauchy 1821). Nell'insieme infinito i segni sono semplicemente la connotazione aggiunta di un operatore (perchè il '+' ed il '−' appartengono alle operazioni sui numeri, e non ai numeri). Il significato che ad essi appartiene si dice addizionale e sottrattivo (Peano 1908, III, 6, 83).

subdistributions of directed numbers in relation to neutral objects. With $\mathfrak{S}_2$ we shall find that the subgroup or subdistribution $\mathfrak{S}_2$ of A and the subgroup $\mathfrak{S}_2$ of B are symmetrical.

Definition 2. By the terms *subgroup* or *subdistribution* we mean that in the relationship between $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ we have σ_1 and σ_2 supported by M only extensible within *f*.

Corollary 3. If $((\sigma)=(\bar{M})=(f))$, then $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ contain distributions or lattices of $\mathfrak{U}$.

Definition 3. Every (p), (q), (r), (s), (t), (u) deprived of its own connotations and reduced to being a place of reference for a directed number is called a *neutral object,* correlative of a number.

Corollary 4. The *neutral object* non-referred equals 0, until it is made to correspond to a directed number different from 0. 0 is the number which, regardless of the serial arrangement, can appear in $\mathfrak{S}$, through the orderly distribution of the directed numbers of σ.

Observation 2. In the transfinite universe, with $M=\infty$, the directed numbers begin to exist when the signs '+' and '−' are placed among the absolute values. In this case, the directed numbers do not reveal properties that are not the effect of the attribution to integers and natural, rational numbers, of the signs '+' and '−', which go to indicate quantities to be added or quantities to be taken away (Maclaurin 1796). Thus the signs for addition and subtraction of a given number do not depend upon the relationship between definite distributions. They are included in the class of quantities as signs of "relationship between" (Cauchy 1821). In the infinite set the signs are simply the added connotation of an operator (because '+' and '−' belong to operations upon numbers, and not to numbers). The meaning that belongs to them is called additional and subtractive (Peano 1908, III, 6, 83).

In un insieme finito, invece, il rapporto fra progressione aritmetica e progressione matematica (Stifel 1544) non si risolve in una serie di aggiunte, quindi in un *continuum* interminabile. Nell'universo esiguo si riconosce un limite nell'indefinito relativo ($\pm\delta$), ma ogni numero è investito della proprietà di aggiungersi e di togliersi all'altro (i segni '+' e '−' diventano segni di "appartenenza" e non di semplice "relazione fra").

14. LE DISTRIBUZIONI DEI NUMERI RELATIVI SEISEMICI

Definizione 1. Sulla base della corrispondenza fra numeri ed oggetti numerabili, si chiama 0 il numero che esprime, in $\mathfrak{S}$, con il sostegno M, un risultato σ nullo.

Lemma 1. Sono possibili con $(0,a)$ e fino a $(0,f)$ distribuzioni in $\mathfrak{U}$ che chiameremo seisemiche del tipo

$$0\wedge(\pm 0\,,a)\wedge(\pm 0\,,b)\wedge(\pm 0\,,c)\wedge(\pm 0\,,d)\wedge(\pm 0\,,e)\wedge(\pm 0\,,f);$$
$$(\pm 0\,,b)\wedge(\pm 0\,,a)\wedge(\pm 0\,,d)\wedge(\pm 0\,,c)\wedge(\pm 0\,,f)\wedge(\pm 0\,,e);\ldots$$

Definizione 2. Diremo numeri seisemici distribuiti i numeri che, nei reticoli e subreticoli $\mathfrak{S}$, si presentino con parte seisemica da $\pm a$ a $\pm f$.

Definizione 3. Diremo numeri seisemici esigui i numeri relativi da $\pm 0{,}a$ a $\pm 0{,}f$.

Lemma 2. Fra i numeri seisemici (quelli che nell'insieme finito $\mathfrak{U}$ debbono sostituire i decimali della serie infinita) non sono possibili le operazioni:

In a finite distribution, on the contrary, the relationship between arithmetic progression and mathematical progression (Stifel 1544) is not resolved in a series of additions, and hence in an unending *continuum*. In the small universe a limit is recognized, in the indefinite directed number ($\pm\delta$), but every number takes on the property of adding or of subtracting itself from another (the signs '+' and '−' become signs of "belonging" and not simply of "relationship between").

14. THE DISTRIBUTIONS OF HEXADIC DIRECTED NUMBERS

Definition 1. On the basis of the correspondence between numerable objects and numbers, 0 is called the number that in $\mathfrak{G}$ is supported by M, and expresses a nil σ result.

Lemma 1. With $(0.a)$ and up to $(0.f)$ distributions in $\mathfrak{U}$ are possible of a kind we shall call hexadic:

$$0\wedge(\pm 0.a)\wedge(\pm 0.b)\wedge(\pm 0.c)\wedge(\pm 0.d)\wedge(\pm 0.e)\wedge(\pm 0.f);$$
$$(\pm 0.b)\wedge(\pm 0.a)\wedge(\pm 0.d)\wedge(\pm 0.c)\wedge(\pm 0.f)\wedge(\pm 0.e);\ldots$$

Definition 2. We shall define as hexadic arranged numbers those numbers that appear in the $\mathfrak{G}$ lattices and sublattices with the hexadic part from $\pm a$ to $\pm f$.

Definition 3. We shall give the name of small hexadic numbers to the directed numbers from $\pm 0.a$ to $\pm 0.f$.

Lemma 2. Among the hexadic numbers (i.e. those that in the finite $\mathfrak{U}$ distribution have to replace the decimals of the infinite set) the following operations are not possible:

$(\pm 0, c \pm 0, d)$; $(\pm 0, c \pm 0, e)$; $(\pm 0, c \pm 0, f)$;
$(\pm 0, b \pm 0, e)$; $(\pm 0, b \pm 0, f)$; $(\pm 0, f \pm 0, a)$;

e le successive:

$$(\pm a, a \pm a, f);\ (\pm a, c \pm a, d);\ (\pm b, a \pm b, f);\ \ldots$$

Osservazione 1. In un universo transfinito i segni '+' e '—' non appartengono ai numeri decimali, ma sono simboli di relazioni addizionali e sottrattive fra termini della serie decimale da 0,1 all'infinito.

Nell'insieme seisemico e in un universo finito compreso in $\pm f$ e con $\overline{M} = \pm n$, ogni numero, da $\pm 0{,}1$ a $\pm 0{,}n$ e da $\pm 1{,}1$ a $\pm m, n$ (con $\pm m, n$ e $\pm 0{,}n$ come limite dell'insieme) è un numero relativo con proprietà di segno.

Corollario 1. Nella serie decimale infinita c'è sempre un numero decimale di cui non si conosce la quantità. Inoltre la relatività del numero decimale transfinito è fatta dipendere da qualcosa d'altro dal numero (dipende infatti dal segno di operazione).

Lemma 3. In un universo finito di numeri, la teoria generale dei numeri relativi interi e seisemici è possibile in quanto il segno è proprietà dei numeri, e ci si riferisce sempre a grandezze note.

Corollario 2. Se i segni non fossero una proprietà dei numeri di σ in $\mathfrak{S}$, ed appartenesse ad ogni a e a ciascun b solo la capacità di aggiungersi o togliersi, per mezzo degli operatori '+' e '—', da un altro numero letterale, l'insieme non sarebbe esiguo, bensí ancora transfinito.

Corollario 3. In un insieme numerico che va da $\pm a$ a $\pm f$, non appaiono numeri decimali, ma solo numeri seisemici che, dopo la virgola, si contano fino a $\pm f$, ossia

$(\pm\ 0.c \pm 0.d)$; $(\pm\ 0.c \pm 0.e)$; $(\pm\ 0.c \pm 0.f)$;
$(\pm\ 0.b \pm 0.e)$; $(\pm\ 0.b \pm 0.f)$; $(\pm\ 0.f \pm 0.a)$;

and the following too:

$$(\pm\ a.a \pm a.f);\ (\pm\ a.c \pm a.d);\ (\pm\ b.a \pm b.f);\ \ldots$$

Observation 1. In a transfinite universe the signs '+' and '−' do not belong to decimal numbers, but are symbols of relationships of addition and subtraction among terms in the decimal series from 0.1 to infinity.

In the hexadic distribution, given a finite universe included in $\pm f$ ($\bar{M} = \pm n$), every number from ± 0.1 to $\pm 0.n$, and from ± 1.1 to $\pm m.n$ (where $\pm m.n$ and $\pm 0.n$ are the bounds of the distribution) is a directed number with sign as its property.

Corollary 1. In the infinite decimal series there is always a decimal number whose quantity is unknown. Moreover the directedness of the transfinite decimal number is made to depend on something other than the number (it depends in fact upon the sign of the operation).

Lemma 3. In a finite universe of numbers the general theory of integers and hexadic directed numbers is possible in that the sign is a property of the numbers and always refers to known quantities.

Corollary 2. If the signs were not a property of the σ numbers in $\mathfrak{G}$, and there belonged to each a and to each b only the operation of adding or subtracting itself, by means of the operators '+' and '−', to or from another literal number, the distribution would not be small but once again transfinite.

Corollary 3. In a numerical distribution ranging from $\pm a$ to $\pm f$, the decimals do not appear, but only hexadic numbers which are counted after the comma up to $\pm f$, that is

$(\pm a, a)$, $(\pm a, b)$, $(\pm a, c)$, $(\pm a, d)$, $(\pm a, e)$, $(\pm a, f)$;
$(\pm b, a)$, $(\pm b, b)$, $(\pm b, c)$, . . , $(\pm b, f)$;
$(\pm c, a)$,$(\pm c, b)$, . . , $(\pm c, f)$;
$(\pm d, a)$, . . , $(\pm d, f)$;
$(\pm e, a)$, . . , $(\pm e, f)$.

In $\mathfrak{U}$ non è possibile scrivere $(1{,}6 + 0{,}1 = 1{,}7)$.

15. L'INDEFINITO RELATIVO

Teorema 1. L'indefinito δ è solo relativamente tale, perché se ne conosce almeno il segno. Infatti, come si è visto,

$$(f+a)=\delta, \qquad (-f-a)=-\delta,$$

mentre in un universo infinito di numeri, l'indefinito coincide subito con l'impossibile.

Se in un universo transfinito si pone un qualsiasi numero naturale (N) in rapporto con 0, in modo che si abbia (N:0), il risultato non può essere $((+\delta)\vee(-\delta))$, ma proprio l'impossibilità di scrivere un numero. Infatti, si pone $((N:0)=\delta)$, se e solo se $((\delta\times 0)=N)$; ma non c'è alcun δ che, moltiplicato per 0, dia qualcosa di diverso da 0 o da δ. Si dovrebbe allora ammettere che δ sia l'unico numero che, moltiplicato per 0, dà per risultato N invece che 0. Se un simile numero esiste (o se si può dire che $(\delta\times 0=N)$), deve valere, per sostituzione di δ con (N:0), la correlazione $((N:0)\times 0=N)$. Ora $((N:0)\times 0=N)$ sarà ammissibile solo se $((N:0)\times 0)$ è uguale a δ; ma ciò è in contrasto con l'ipotesi che δ sia uguale semplicemente a (N:0). Non è quindi possibile che per N della serie transfinita, δ sia un numero. L'operazione con δ in N è priva di senso.

In un universo infinito, δ non ha alcun segno, ma deriva genericamente da (n:0) (non è positivo, nè negativo, come invece il numero $\pm\delta$ di $\mathfrak{U}$; è semplicemente impossibile).

$(\pm a.a)$, $(\pm a.b)$, $(\pm a.c)$, $(\pm a.d)$, $(\pm a.e)$, $(\pm a.f)$;
$(\pm b.a)$, $(\pm b.b)$, $(\pm b.c)$, . . , $(\pm b.f)$;
$(\pm c.a)$,$(\pm c.b)$, . . , $(\pm c.f)$;
$(\pm d.a)$, . . , $(\pm d.f)$;
$(\pm e.a)$, . . , $(\pm e.f)$.

In $\mathfrak{U}$ it is not possible to write $(1.6+0.1=1.7)$.

15. THE INDEFINITE DIRECTED NUMBER

Theorem 1. The indefinite δ is indefinite only in part. The sign at least is known. In fact we can have

$$(f+a)=\delta, \qquad (-f-a)=-\delta,$$

while in an infinite set, the indefinite coincides immediately with the impossible.

If in a transfinite universe any natural number (N) is placed in relationship with 0, in such a way that we have (N:0), the result cannot be $((+\delta)\vee(-\delta))$, but simply it is impossible to write a result. In fact, suppose $((N:0)=\delta)$, if and only if $((\delta\times 0)=N)$; but there is no δ which gives anything other than 0 or δ when multiplied by 0. It must then be admitted that δ is the only number which, when multiplied by 0, gives the result N instead of 0. If such a number exists (or if it can be said that $(\delta\times 0=N)$), then substituting δ by (N:0), the correlation $((N:0)\times 0=N)$ must apply. Now $((N:0)\times 0=N)$ will be allowed only if $((N:0)\times 0)$ is equal to δ; but this contradicts the hypothesis that δ is simply equal to (N:0). Therefore, δ is not a number N of the transfinite series. The operation by means of δ in the N series is without any sense.

In an infinite set δ has no sign; it derives generically from (n:0) (neither positive nor negative, as is, on the contrary, the number $\pm\delta$ of $\mathfrak{U}$; δ is simply impossible).

Corollario 1. Diremo che δ, pur non avendo quantità o grandezza definita in $\mathfrak{U}$, possiede tuttavia un segno.

Teorema 2. La distribuzione degli elementi costitutivi di $\mathfrak{U}$ si completa con l'ingresso dell'elemento neutro (zero) e dell'indefinito (δ), per il quale valgono le regole dei segni.

Con $\sigma = \mathrm{M}$

e

$$(\sigma + a) > \mathrm{M},$$

ponendo $(\sigma + a) + b > \bar{\mathrm{M}}$, e

$$(\sigma + a) + b = \delta$$

e

$$(-\sigma - a) - b = -\delta,$$

si ha anche

$$(\bar{\mathrm{M}} + c) = \delta; \quad (-\bar{\mathrm{M}} - c) = -\delta$$

e, indicando con x un numero qualsiasi contenuto in $\bar{\mathrm{M}}$, si deve scrivere

$$(\bar{\mathrm{M}} + x) = \delta; \quad (-\bar{\mathrm{M}} - x) = -\delta.$$

Ancora si ha:

$$(\mathrm{M} + \bar{\mathrm{M}}) = \delta; \qquad (-\mathrm{M} - \bar{\mathrm{M}}) = -\delta;$$
$$(\mathrm{M} \times \bar{\mathrm{M}}) = \delta; \qquad (-\mathrm{M} \times -\bar{\mathrm{M}}) = +\delta;$$

e, d'altra parte,

$$\delta \times (\mathrm{M} : \mathrm{M}) = \delta; \qquad -\delta \times (-\mathrm{M} : -\mathrm{M}) = -\delta;$$

Corollary 1. We shall say that, though not having a definite quantity or magnitude in $\mathfrak{U}$, δ does, however, possess a sign.

Theorem 2. The arrangement of the elements making up $\mathfrak{U}$ is completed by the inclusion in it of the neutral (zero) element and the indefinite number (δ), for which the rules of signs obtain.

Given $\sigma = \mathrm{M}$

and

$$(\sigma + a) > \mathrm{M},$$

assuming $(\sigma + a) + b > \bar{\mathrm{M}}$, and

$$(\sigma + a) + b = \delta$$

and

$$(-\sigma - a) - b = -\delta,$$

we also have

$$(\bar{\mathrm{M}} + c) = \delta; \quad (-\bar{\mathrm{M}} - c) = -\delta$$

and using x to indicate any number contained in $\bar{\mathrm{M}}$, we must write

$$(\bar{\mathrm{M}} + x) = \delta; \quad (-\bar{\mathrm{M}} - x) = -\delta$$

We have once again:

$$(\mathrm{M} + \bar{\mathrm{M}}) = \delta; \qquad (-\mathrm{M} - \bar{\mathrm{M}}) = -\delta;$$
$$(\mathrm{M} \times \bar{\mathrm{M}}) = \delta; \qquad (-\mathrm{M} \times -\bar{\mathrm{M}}) = +\delta;$$

and on the other hand

$$\delta \times (\mathrm{M} : \mathrm{M}) = \delta; \qquad -\delta \times (-\mathrm{M} : -\mathrm{M}) = -\delta;$$

poi, con $\sigma = M$,

$$((\delta - \delta) \pm (M - \sigma)) = 0; \; ((\delta - \delta) \pm (\sigma - M)) = 0;$$
$$((\delta - \delta) \pm (\sigma - \sigma)) = 0; \; ((\delta - \delta) \pm (M - M)) = 0;$$

quindi, con $(\sigma_1 = M_1)$ e $(\sigma_2 = M_2)$ e $(M_1 = M_2)$:

$$((\delta - \delta) \pm (\sigma_1 - \sigma_2)) = 0; \; ((\delta - \delta) \pm (M_1 - \sigma_1)) = 0;$$
$$((\delta - \delta) \pm (M_2 - \sigma_2)) = 0; \; ((\delta - \delta) \pm (M_1 - M_2)) = 0.$$

In $\mathfrak{U}$, la forma più banale di distribuzione dall'oggetto vuoto o nullo (0) sino all'indefinito (relativamente indefinito, ossia privo di quantità ma non di segno) è la seguente:

$$(0 \wedge a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e \wedge f \wedge \delta)$$

e la distribuzione, in rapporto al segno, è tale che ad essa corrisponde

$$(0 \wedge -a \wedge -b \wedge -c \wedge -d \wedge -e \wedge -f \wedge -\delta).$$

Si dice che in $\mathfrak{U}$ esiste un elemento 0 tale che 0 è compreso in $\mathfrak{S}$, in modo che

$$(\sigma + 0) = (\sigma - 0)) = \sigma;$$
$$(0 + M) = (M - 0) = M;$$

e, per ogni elemento di σ, da $\pm a$ a $\pm f$ e a δ,

$$((a + 0) = -(0 - a)); \; ((f + 0) = -(0 - f));$$
$$((\delta + 0) = -(0 - \delta)),$$

in modo che 0 indica l'esistenza dell'elemento neutro, anche fuori di f, ovvero in δ.

Osservazione 1. Rispetto a $\mathfrak{U}$, l'elemento δ indica allora che esiste un numero, indefinito per grandezza o quantità, ma segnato positivamente o negativamente, tale che continua, oltre $\overline{M}$ e 0, la determinazione del segno.

then given $\sigma = M$, we obtain

$$((\delta-\delta)\pm(M-\sigma))=0;\ ((\delta-\delta)\pm(\sigma-M))=0;$$
$$((\delta-\delta)\pm(\sigma-\sigma))=0;\ ((\delta-\delta)\pm(M-M))=0;$$

hence given $(\sigma_1 = M_1)$ and $(\sigma_2 = M_2)$ and $(M_1 = M_2)$, one has:

$$((\delta-\delta)\pm(\sigma_1-\sigma_2))=0;\ ((\delta-\delta)\pm(M_1-\sigma_1))=0;$$
$$((\delta-\delta)\pm(M_2-\sigma_2))=0;\ ((\delta-\delta)\pm(M_1-M_2))=0.$$

In $\mathfrak{U}$ the most trivial form of arrangement, from the empty or nil object up to the indefinite (but only relatively so, in that it lacks quantity but has a sign) is the following:

$$(0\wedge a\wedge b\wedge c\wedge d\wedge e\wedge f\wedge\delta),$$

and with respect to the sign, the arrangement corresponds to

$$(0\wedge -a\wedge -b\wedge -c\wedge -d\wedge -e\wedge -f\wedge -\delta).$$

One can say that in $\mathfrak{U}$ there exists an element 0 that is comprised in $\mathfrak{S}$, so that

$$(\sigma+0)=(\sigma-0))=\sigma;$$
$$(0+M)=(M-0)=M;$$

and for every σ element, from $\pm a$ up to $\pm f$ and to δ,

$$((a+0)=-(0-a));\ ((f+0)=-(0-f));$$
$$((\delta+0)=-(0-\delta)),$$

where 0 shows the existence of the neutral element even outside of f, i.e. in δ.

Observation 1. With respect to $\mathfrak{U}$, the element δ thus indicates that there exists a number, indefinite as to quantity or magnitude, but positively or negatively signed, such that it continues the determination of the sign beyond $\bar{M}$ and 0.

Corollario 2. Benchè non si abbia alcuna grandezza attribuibile determinatamente a δ, tale elemento possiede un segno che gli deriva da $\bar{M} \pm x$, $M + M$, $\sigma \pm x$.

Oltre il limite dell'universo esiguo sarà così ammissibile scrivere $(-b\delta + a\delta = -a\delta)$; $(b\delta + a\delta = +c\delta)$. . . , ma affermare che dopo $a\delta$ si trova $b\delta$ non sembra significhi niente che si riferisca alla determinazione di quantità o grandezze, intendendosi semplicemente stabilire la continuità di appartenenza del segno a qualsiasi grandezza (o quantità) esso inerisca.

16. ISOMORFISMO DELLA DISTRIBUZIONE IN $\mathfrak{S}$

Osservazione 1. In un universo finito la distribuzione è sempre equilibrio isomorfico. Gli elementi che vi ineriscono hanno la proprietà di aggiungersi perché possiedono la proprietà di togliersi l'uno dall'altro.

Ad ogni termine di σ si può aggiungere, in $\mathfrak{S}$, un altro termine, fino a coprire il sostegno $\bar{M}$, ma si può farlo, se, a ciascuno degli elementi aggiunti, si attribuisce un numero che venga tolto da un altro degli elementi che fanno parte di σ in $\mathfrak{S}$, e, comunque, quando si rispetti il sostegno $\bar{M}$ (ciò significa che nell'insieme finito niente si aggiunge, se intanto non si toglie qualcosa).

Definizione 1. Le operazioni coi numeri relativi dipendono dalla distribuzione dei termini contenuti in σ, su di un sostegno M (finito). Si dice che, in ogni $\mathfrak{S}$, togliere un numero da un altro, sempre in modo che la differenza risulti compresa in M, significa aggiungere quel numero ad un altro compreso in M.

Lemma 1. Nell'insieme finito, la relatività del numero non dipende soltanto dalle grandezze dei numeri segnati positivamente o negativamente, ma anche dalla distribuzione dei termini. I segni di (a, b, c, d, e, f), in $\mathfrak{S}$, derivano dalla distribuzione equilibrata (isomorfica) dei numeri. Sono le distribuzioni degli elementi σ in $\mathfrak{S}$ a determinare il segno di un qualsiasi termine dell'insieme $\mathfrak{U}$. Tenuto

Corollary 2. Though no magnitude can be attributed determinately to δ, this element possesses a sign deriving to it from $\overline{M} \pm x$, $M + M$, $\sigma \pm x$.

Beyond the limit of the small universe, it will be permissible to write $(-b\delta + a\delta = -a\delta)$; $(b\delta + a\delta = +c\delta)$. . . , but to affirm that after $a\delta$ there is $b\delta$ has nothing to do with the determining of quantities or magnitude: it simply means that the sign continues to belong to quantities.

16. ISOMORPHISM OF THE DISTRIBUTION IN $\mathfrak{S}$

Observation 1. In a finite universe the distribution is always isomorphic equilibrium. The inhering elements have the property of adding themselves to each other because they have the property of subtracting themselves from one another.

To each σ term it is possible to add another term in $\mathfrak{S}$, to the point of covering the support $\overline{M}$, provided that each element added has a corresponding number taken from another of the elements belonging to σ in $\mathfrak{S}$. In any case, the support $\overline{M}$ must be respected (this means that in a finite distribution nothing can be added unless at the same time something is subtracted).

Definition 1. Operations by means of directed numbers depend on the arrangement of the terms contained in σ, by an M (finite) support. In any $\mathfrak{S}$, taking one number away from another, always assuming that the result of the difference is contained in M, means adding that number to another included in M.

Lemma 1. In a finite distribution, the directedness of the number does not depend solely on the numerical values positively and negatively signed, but also on the arrangement of the terms. The signs of (a, b, c, d, e, f) in $\mathfrak{S}$ derive from the equilibrated (isomorphic) arrangement of the numbers. It is the arrangement of the σ elements in $\mathfrak{S}$ that determines the sign of any term. Considering

conto che i segni appartengono alle grandezze distribuite e derivano dalla loro distribuzione, essi determinano l'equilibrio (isomorfico) degli enti numerici della distribuzione stessa. Si ha così una nuova definizione di numero relativo in un insieme finito.

Definizione 2. Si dice numero relativo di un universo finito ogni numero che ha la proprietà del segno come effetto della grandezza distribuita per equilibrio isomorfico.

Lemma 3. La variazione di segno di un numero relativo non dipende solo dalla quantità o grandezza del valore assoluto, ma anche dalla distribuzione isomorfica di ogni numero in $\mathfrak{S}$.

Osservazione 2. Sappiamo che quando l'oggetto (p) è considerato c volte in un luogo definito di $\mathfrak{U}$, e l'oggetto (q) è anch'esso preso c volte definitamente in $\mathfrak{U}$, se il numero di (p) diventa e (come $(c+b)$), il numero di (q) si riduce a $(-a+b)=a$, e non è più $(a+b)=c$.

Corollario 1. Dati $a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e \wedge f$, con $(b=(a+a))$, $(c=(b+a))\ldots$, si dirà che a b manca b per diventare d, e che bisogna togliere b da $c(=(b+a))$ ed aggiungere b ad $(a+a)=b))$, per avere $(b+b)=d$, cui addizionare $(f-(e-a))$.

17. SOMME E DIFFERENZE DI NUMERI RELATIVI

Definizione 1. Si dicono differenza, somma e somma algebrica di numeri relativi in $\mathfrak{U}$, gli inversi congiunti di operazioni di equilibrio isomorfico.

Corollario 1. Operazioni fra numeri relativi per equilibrio seiposizionale isomorfico danno sempre risultati in cui $\sigma=\mathrm{M}$.

that the signs belong to the values and derive from their arrangement, these signs determine the (isomorphic) equilibrium of the numerical values in the arrangement itself. We thus have a new definition of directed number in a finite distribution.

Definition 2. A directed number in a finite universe may be defined as every numbers that has the property of having a sign as effect of the magnitude distributed through isomorphic equilibrium.

Lemma 3. The variation in sign of a directed number does not depend solely on the quantity or magnitude of the absolute value, but also on the isomorphic distribution of each number in $\mathfrak{S}$.

Observation 2. We know that when the object (p) is considered c times in a definite point of $\mathfrak{U}$, and the object (q) is also taken definitely c times in $\mathfrak{U}$, if the number attributed to (p) becomes e (as $(c+b)$), the number corresponding to (q) is reduced to $(-a+b)=a$, and is no longer $(a+b)=c$.

Corollary 1. Given $a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e \wedge f$ and $(b=(a+a))$, $(c=(b+a))\ldots$, we shall say that b lacks b in order to become d, and that it is necessary to subtract b from $c(=(b+a))$ and to add b to $(a+a)=b$, in order to have $(b+b)=d$ and to add $(f-(e-a))$ to it.

17. SUMS AND DIFFERENCES OF DIRECTED NUMBERS

Definition 1. The linked opposites of operations of isomorphic equilibrium are said to be the difference, sum and algebraic sum of directed numbers in $\mathfrak{U}$.

Corollary 1. Operations between directed numbers through isomorphic hexadic equilibrium always give results in which $\sigma=\mathrm{M}$.

Definizione 2. Si dicono operazioni derivative dal cambiamento dei segni le operazioni sui numeri prodotti per equilibrio isomorfico.

Teorema 1. Si rappresentino in $\mathfrak{S}_1$ e in $\mathfrak{S}_2$ di $\mathfrak{U}$, i numeri relativi $+f$ (che corrisponde all'oggetto (p) di $\mathfrak{S}_1$) e $-b$ e $-d$ (corrispondenti rispettivamente a (p) di $\mathfrak{S}_2$ e a (s) di $\mathfrak{S}_2$). Si avrà una rappresentazione dell'equilibrio isomorfico nella distribuzione su base M_1, M_2, f di $\mathfrak{U}$. Per cui scriveremo:

p	q	r	s	t	u	
f	0	0	0	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=f$, $\bar{M}=f$
$-b$	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-b-d)$, $\bar{M}=-f$
d	0	0	$-d$	0	0	

Se $+f$, attribuendo una quantità o grandezza ad un oggetto (p), occupa il primo posto nella possibile distribuzione $\mathfrak{S}_1$ dei termini in $\mathfrak{U}$, gli altri numeri rappresentabili (a, b, c, d, e) corrispondenti a (q, r, s, t, u) in $\mathfrak{S}_1$ sono nulli e σ_1 di $\mathfrak{S}_1$ è soltanto $+f$:

p	q	r	s	t	u	
f	0	0	0	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=f$, $\bar{M}_1=f$.

Corollario 2. L'attribuzione di $\pm f$ ad un oggetto, o di $\pm b \wedge \pm d$ a due oggetti numerabili in $\mathfrak{S}$, esclude una numerosità maggiore di 0 da far corrispondere agli altri oggetti rappresentabili in $\mathfrak{S}$.

Definition 2. We define as operations deriving from change of sign those operations on numbers produced as a result of isomorphic equilibrium.

Theorem 1. Let there be represented on $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ of $\mathfrak{U}$, the directed numbers $+f$, (which corresponds to the object (p) of $\mathfrak{S}_1$) and $-b$ and $-d$ (corresponding respectively to (p) of $\mathfrak{S}_2$ and to (s) of $\mathfrak{S}_2$). We shall have a representation of the isomorphic equilibrium in the arrangement supported by M_1, M_2, and f in $\mathfrak{U}$. We shall then write:

p	q	r	s	t	u	
f	0	0	0	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=f$, $\bar{M}=f$
$-b$	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-b-d)$, $\bar{M}=-f$
d	0	0	$-d$	0	0	

If one attributes a quantity to an object (p), and $+f$ occupies the first position in the possible distribution $\mathfrak{S}_1$ of the terms in $\mathfrak{U}$, the other representable numbers (a, b, c, d, e) corresponding to (q, r, s, t, u) in $\mathfrak{S}_1$ are nil and σ_1 in $\mathfrak{S}_1$ is only $+f$:

p	q	r	s	t	u	
f	0	0	0	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=f$, $\bar{M}_1=f$.

Corollary 2. The assignment of $\pm f$ to an object, or of $\pm b \wedge \pm d$ to two numerable objects in $\mathfrak{S}$, rules out all possibility of making a value greater than 0 correspond to the other objects representable in $\mathfrak{S}$.

Prova. Se $-b$ occupa il primo posto in $\mathfrak{S}_2$, e $-d$ sta nel quarto posto della distribuzione (finita) espressa in $\mathfrak{S}_2$, dopo $-b$ si trovano due posizioni, occupate dallo 0 e due posizioni anch'esse nulle staranno dopo $-d$, con σ_2 di $\mathfrak{S}_2=(-b-d)=-f$:

p	q	r	s	t	u	
$-b$	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-b-d)$, $\bar{M}_2=-f$.

La somma fra i numeri relativi contenuti in $\mathfrak{S}_1$ e quelli contenuti in $\mathfrak{S}_2$ si legge in $\mathfrak{S}_3$: qui come risultato di $(+d-d)=0$.

p	q	r	s	t	u	
d	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(+d-d)$, $M_3=0$.

Si dirà allora che $(d-d)$ di $\mathfrak{S}_3$ indica che la somma fra i termini di $\mathfrak{S}_1$ e quelli di $\mathfrak{S}_2$ è nulla perché derivazione del risultato nullo di $\sigma_1+\sigma_2$.

Regola 1. Quando $\mathfrak{S}_3=0$, la differenza fra i termini contenuti in $\mathfrak{S}_1$ e quelli contenuti in $\mathfrak{S}_2$ è tale che, per avere $|\mathfrak{S}_1|=|\mathfrak{S}_2|$ non si deve aggiungere o togliere niente maggiore di 0 a σ_1 e σ_2 e scriveremo

Ip.	p	q	r	s	t	u	
	f	0	0	0	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=f$, $\bar{M}_1=f$,
	$-b$	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-b-d)$, $\bar{M}_2=-f$,
	$+d$	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(d-d)$, $M_3=0$;

Proof. If $-b$ occupies the first place in line $\mathfrak{S}_2$, and $-d$ the fourth place of the (finite) distribution expressed on $\mathfrak{S}_2$, after $-b$ two positions are found to be occupied by 0 and two positions, they too nil, will occur after $-d$, with σ_2 of $\mathfrak{S}_2=(-b-d)=-f$:

p	q	r	s	t	u	
$-b$	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-b-d)$, $\bar{M}_2=-f$

The sum between directed numbers contained in $\mathfrak{S}_1$ and those contained in $\mathfrak{S}_2$ is read in $\mathfrak{S}_3$: in the example above it is the result of $(+d-d)=0$.

p	q	r	s	t	u	
d	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(d-d)$, $M_3=0$.

We shall thus say that $(d-d)$ in line $\mathfrak{S}_3$ indicates that the sum between the terms on $\mathfrak{S}_1$ and those on $\mathfrak{S}_2$ is nil because it derives from the nil result of $\sigma_1+\sigma_2$.

Rule 1. When $\mathfrak{S}_3=0$, the difference between the terms contained in $\mathfrak{S}_1$ and those contained in $\mathfrak{S}_2$ is such that in order to obtain $|\mathfrak{S}_1|=|\mathfrak{S}_2|$ nothing greater than 0 must be added to or subtracted from σ_1 and σ_2 and we shall write

Hyp.	p	q	r	s	t	u	
	f	0	0	0	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=f$, $\bar{M}_1=f$,
	$-b$	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-b-d)$, $\bar{M}_2=-f$,
	$+d$	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(d-d)$, $M_3=0$;

Th. $(d-d)=0$, ovvero σ_3
$0 \rightarrow 0=0, -M_3 \sim -\sigma_3,$
$f \pm 0=f, (\sigma_1-\sigma_3)=\sigma_1,$
$(-b-d) \pm 0=-f, (\sigma_2-\sigma_3)=\sigma_2,$
$f-f=0, (\sigma_1-\sigma_3)-(\sigma_2-\sigma_3).$

Si dice allora che M_1 e M_2 di $\mathfrak{U}$ hanno valori assoluti uguali.

Teorema 2. Siano M_1 e M_2 il sostegno di σ_1 e σ_2 in cui i numeri relativi non sono opposti. Se in $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$ si attribuiscono agli oggetti (p, q, r, s, t, u) numeri letterali (*a, b, c, d, e, f*), in modo che σ_1 di $\mathfrak{G}_1$ sia maggiore o minore di σ_2 in $\mathfrak{G}_2$ (ovvero M_1 di $\mathfrak{G}_1$ risulti maggiore o minore di M_2 di $\mathfrak{G}_2$), la somma fra $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$ è maggiore o minore di 0.

Esempio.

$$\begin{array}{cccccc l}
0 & 0 & 0 & +b & 0 & 0 & \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1=b,\ M_1=b, \\
+d & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(d-a),\ M_2=c, \\
\hline
d & 0 & 0 & +a & 0 & 0 & \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(d+a),\ M_3=e>0.
\end{array}$$

Regola 2. I termini contenuti in $\mathfrak{G}_3$ valgono come intermediari per calcolare la differenza in valore assoluto fra i numeri contenuti in $\mathfrak{G}_1$ e quelli contenuti in $\mathfrak{G}_2$. Si prende, infatti, il risultato in $\mathfrak{G}_3$ e lo si inverte con i simboli $\overset{\varphi}{\rightarrow}$ e $\overset{\nu}{\rightarrow}$, che esprimono l'inversione segnica rispettivamente dal negativo al positivo e dal positivo al negativo. Se il risultato dei termini $(d+a)$, di $\mathfrak{G}_3$, risulta e, come nell'esempio più sopra, invertendo e in $-e$, per mezzo del simbolo $\overset{\nu}{\rightarrow}$, avremo:

$(d+a)=e,\ \sigma_3$
$e \overset{\nu}{\rightarrow} -e,\ -M_3 \sim -\sigma_3,$
$(b-e)=-c,\ (\sigma_1-\sigma_3)=-\sigma_2,$
$(d-a)-e=-b,\ (\sigma_2-\sigma_3)=-\sigma_1,$
$(-c-b)=-e, (-\sigma_2-\sigma_1)=-\sigma_3.$

Th. $(d-d)=0$, that is σ_3
$0\rightarrow 0=0, -M_3 \sim -\sigma_3$
$f\pm 0=f,\ (\sigma_1-\sigma_3)=\sigma_1,$
$(-b-d)\pm 0=-f,\ (\sigma_2-\sigma_3)=\sigma_2,$
$f-f=0,\ (\sigma_1-\sigma_3)-(\sigma_2-\sigma_3).$

It is therefore said that the absolute values of M_1 and M_2 in $\mathfrak{U}$ are equal.

Theorem 2. Let M_1 and M_2 be the supports for σ_1 and σ_2 in which the directed numbers are not opposite. If along $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ one assigns literal numbers (a, b, c, d, e, f) to the objects (p, q, r, s, t, u), in such a way that σ_1 in $\mathfrak{G}_1$ is greater or lesser than σ_2 in $\mathfrak{G}_2$ (that is M_1 in $\mathfrak{G}_1$ is found to be greater or lesser than M_2 in $\mathfrak{G}_2$), the sum between $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ is greater or lesser than 0.

Example.

0	0	0	$+b$	0	0	$\mathfrak{G}_1,\ \sigma_1=b,\ M_1=b,$
$+d$	0	0	$-a$	0	0	$\mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(d-a),\ M_2=c,$
d	0	0	$+a$	0	0	$\mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(d+a),\ M_3=e>0.$

Rule 2. The terms contained in $\mathfrak{G}_3$ serve as intermediaries for calculating the difference in absolute value between the numbers contained in $\mathfrak{G}_1$ and those contained in $\mathfrak{G}_2$. One takes the result in $\mathfrak{G}_3$ and inverts it via the symbols $\overset{\varphi}{\rightarrow}$ and $\overset{\nu}{\rightarrow}$, which express the inversion of sign respectively from the negative to the positive and from the positive to the negative. If the result of the terms $(d+a)$ in $\mathfrak{G}_3$, is e, as in the example given above, by changing e into $-e$, by means of the symbol $\overset{\nu}{\rightarrow}$, we shall have:

$(d+a)=e,\ \sigma_3$
$e\overset{\nu}{\rightarrow}-e,\ -M_3\sim-\sigma_3,$
$(b-e)=-c,\ (\sigma_1-\sigma_3)=-\sigma_2,$
$(d-a)-e=-b,\ (\sigma_2-\sigma_3)=-\sigma_1,$
$(-c-b)=-e, (-\sigma_2-\sigma_1)=-\sigma_3.$

Proprio $-e$ è quanto rende, in questo caso, uguali i σ_1 e σ_2 di $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$, in $\mathfrak{U}$, perché invertendo ancora $-e$ in e ossia con $(-e \xrightarrow{\varphi} e)$, e sottraendo da e i termini di σ_1 e σ_2, avremo

$$e-(+b)=(d-a),$$

ed

$$e-(d-a)=b.$$

Si consideri poi il caso seguente:

$$\begin{array}{cccccc l}
f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1=f,\ \overline{\mathrm{M}}_1=f, \\
-a & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-a-d),\ \mathrm{M}_2=-e, \\
\hline
e & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(e-d),\ \mathrm{M}_3=a.
\end{array}$$

Qui, per il cambiamento del segno del risultato di $(e-d)=a$ in $\mathfrak{G}_3$, si ha

$$a \xrightarrow{\nu} -a,\ -\mathrm{M}_3,$$

quindi

$$\begin{gathered}
f-a=e,\ \sigma_1-\mathrm{M}_3, \\
(-a-d)-a=-f, \\
e-f=-a;
\end{gathered}$$

$(e-f)$ è tramite del complemento della differenza fra $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$, perché invertendo ancora il segno da $-a \xrightarrow{\varphi} a$, avremo

$$\begin{gathered}
a-(+f)=(-a-d), \\
a-(-a-d)=f.
\end{gathered}$$

And indeed $-e$ is what, in this case, equalizes the σ_1 and σ_2 from $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$, in $\mathfrak{U}$, because by once again inverting $-e$ into e $(-e \xrightarrow{\varphi} e)$, and subtracting from e the σ_1 and σ_2 terms, we shall have

$$e-(+b)=(d-a),$$

and

$$e-(d-a)=b.$$

Consider also the following case:

$$\begin{array}{cccccc l}
f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1=f,\ \overline{\mathrm{M}}_1=f, \\
-a & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-a-d),\ \mathrm{M}_2=-e, \\
\hline
e & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(e-d),\ \mathrm{M}_3=a.
\end{array}$$

Here, as a result of the change of sign of $(e-d)=a$ in $\mathfrak{G}_3$, we have

$$a \xrightarrow{\nu} -a, -\mathrm{M}_3$$

and hence

$$\begin{gathered}
f-a=e,\ \sigma_1-\mathrm{M}_3, \\
(-a-d)-a=-f, \\
e-f=-a;
\end{gathered}$$

$(e-f)$ is the mediator of the complement of the difference between $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$, because by once again inverting the sign via $-a \xrightarrow{\varphi} a$, we shall have

$$\begin{gathered}
a-(+f)=(-a-d), \\
a-(-a-d)=f.
\end{gathered}$$

Definizione 3. Dicesi complemento fra numeri relativi in $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$ la somma, somma algebrica o differenza dei numeri in $\mathfrak{G}_3$, quando il numero che se ne ricava viene cambiato di segno e si sottrae a σ_1 e σ_2 per ottenere, dalla differenza dei rispettivi risultati, quanto manca (o si deve aggiungere) rispettivamente a σ_1 e σ_2 perché siano equivalenti in termini assoluti.

Teorema 3. Siano $(a+b+c, 0, 0, 0)$ e $(-a-c+b, 0, 0, 0)$ rispettivamente $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$

$$\begin{array}{cccccc l}
+a & +b & +c & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1=(a+b+c),\ \overline{\mathrm{M}}_1=f, \\
-a & -c & +b & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-a-c+b),\ \mathrm{M}_2=-b, \\
\hline
0 & -a & +e & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(-a+e),\ \mathrm{M}_3=d.
\end{array}$$

Scriveremo:

$$\begin{aligned}
&(-a+e)=d,\ \sigma_3 \\
&d \overset{\nu}{\rightarrow} -d, -\mathrm{M}_3 \sim -\sigma_3, \\
&(a+b+c)-d=b,\ \sigma_1-\sigma_3=-\sigma_2, \\
&(-a-c+b)-d=-f,\ \sigma_2-\sigma_3=-\sigma_1, \\
&(b-f)=-d,\ (\sigma_1-\sigma_3)-(\sigma_2-\sigma_3)=-\sigma_3, \\
&-d \overset{\varphi}{\rightarrow} d, \mathrm{M}_3, \\
&d-(a+b+c)=(d-a-b-c),\ \mathrm{M}_3-(\sigma_1)=(\mathrm{M}_3-\sigma_1)=\sigma_2,
\end{aligned}$$

ma

$$(d-a-b-c)=(-a-c+b),\ (\mathrm{M}_3-\sigma_1)=\sigma_2$$

e, per sostituzione di $(d-a-b-c)$ con $(-a-c+b)$,

avremo

$$d-(a+b+c)=(-a-c+b),\ \mathrm{M}_3-(\sigma_1)=\sigma_2;$$

Definition 3. The complement between directed numbers in $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ may be defined as the sum, algebraic sum or difference of the numbers in $\mathfrak{G}_3$, when the result obtained has its own sign changed and is subtracted from σ_1 and σ_2. From the difference between these two results we obtain what is lacking from (or is to be added to) σ_1 and σ_2 in order to make them equivalent as absolute terms (regardless of their sign).

Theorem 3. Let $(a+b+c, 0, 0, 0)$ and $(-a-c+b, 0, 0, 0)$ be respectively $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$

$$\begin{array}{cccccc l}
+a & +b & +c & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1=(a+b+c),\ \overline{\mathrm{M}}_1=f, \\
-a & -c & +b & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-a-c+b),\ \mathrm{M}_2=-b, \\
\hline
0 & -a & +e & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(-a+e),\ \mathrm{M}_3=d.
\end{array}$$

We shall write:

$$\begin{aligned}
&(-a+e)=d,\ \sigma_3 \\
&\mathrm{d}\overset{\nu}{\rightarrow} -d,\ -\mathrm{M}_3\sim -\sigma_3, \\
&(a+b+c)-d=b,\ \sigma_1-\sigma_3=-\sigma_2, \\
&(-a-c+b)-d=-f,\ \sigma_2-\sigma_3=-\sigma_1, \\
&(b-f)=-d,\ (\sigma_1-\sigma_3)-(\sigma_2-\sigma_3)=-\sigma_3, \\
&-d\overset{\rho}{\rightarrow} d,\ \mathrm{M}_3, \\
&d-(a+b+c)=(d-a-b-c),\ \mathrm{M}_3-(\sigma_1)=(\mathrm{M}_3-\sigma_1)=\sigma_2,
\end{aligned}$$

but

$$(d-a-b-c)=(-a-c+b),\ (\mathrm{M}_3-\sigma_1)=\sigma_2$$

and by replacement of $(d-a-b-c)$ by $(-a-c+b)$,

we shall have

$$d-(a+b+c)=(-a-c+b),\ \mathrm{M}_3-(\sigma_1)=\sigma_2;$$

però si deve scrivere anche

$$d-(-a-c+b)=(d+a)+(c-b), M_3-(\sigma_2)=(M_3-\sigma_2),$$

da cui

$$(d+a)+(c-b)=(a+b+c),\ (M_3-\sigma_2)=\sigma_1,$$

quindi, per sostituzione di $(d+a+c-b)$ con $(a+b+c)$,

$$d-(-a-c+b)=(a+b+c).$$

Esempio con numeri non letterali.

+2	+2	+1	0	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=(2+2+1)$, $M_1=5$,
−1	−1	−1	0	−3	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-1-1-1-3)$, $\overline{M}_2=-6$,
+1	+1	0	0	−3	0	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(1+1-3)$, $M_3=-1$;

$$\mathfrak{S}_3=(+1+1-3)=-1$$

$$-1 \overset{\varphi}{\to} 1$$
$$(2+2+1)+1=6,$$
$$(-1-1-1-3)+1=-5,$$
$$6-5=1;$$
$$1 \overset{\nu}{\to} -1$$
$$-1-(2+2+1)=(-1-2-2-1),$$

ma

$$(-1-2-2-1)=(-1-1-1-3),$$

e, per sostituzione di $(-1-2-2-1)$ con $(-1-1-1-3)$, si ha

$$-1-(2+2+1)=(-1-1-1-3);$$

inoltre,

$$-1-(-1-1-1-3)=(-1+1+1+1+3),$$

and also we shall write

$$d-(-a-c+b)=(d+a)+(c-b), M_3-(\sigma_2)=(M_3-\sigma_2),$$

from where

$$(d+a)+(c-b)=(a+b+c),\ (M_3-\sigma_2)=\sigma_1,$$

therefore by replacement of $(d+a+c-b)$ by $(a+b+c)$, we shall obtain

$$d-(-a-c+b)=(a+b+c).$$

Example by means of non-literal numbers .

+2	+2	+1	0	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=(2+2+1)$, $M_1=5$,
−1	−1	−1	0	−3	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-1-1-1-3)$, $\bar{M}_2=-6$,
+1	+1	0	0	−3	0	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(1+1-3)$, $M_3=-1$;

$$\mathfrak{S}_3=(+1+1-3)=-1$$

$-1 \overset{\varphi}{\rightarrow} 1$
$(2+2+1)+1=6,$
$(-1-1-1-3)+1=-5,$
$6-5=1;$
$1 \overset{\nu}{\rightarrow} -1$
$-1-(2+2+1)=(-1-2-2-1),$

but

$$(-1-2-2-1)=(-1-1-1-3),$$

and by replacement of $(-1-2-2-1)$ by $(-1-1-1-3)$, one has

$$-1-(2+2+1)=(-1-1-1-3);$$

moreover

$$-1-(-1-1-1-3)=(-1+1+1+1+3),$$

ma

$$(-1+1+1+1+3)=(2+2+1),$$

e per sostituzione di $(-1+1+1+1+3)$ con $(2+2+1)$, si ha

$$-1-(-1-1-1-3)=(2+2+1).$$

In questo caso ± 1 è quanto si deve aggiungere e togliere rispettivamente a $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ perchè σ_1 e σ_2 siano equivalenti.

Definizione 4. Si dicono derivati i numeri relativi che risultano dal rapporto con numeri relativi intermediari mutati di segno.

Corollario 3. Sulla base dei numeri relativi derivati si restituisce la distribuzione in $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$.

Teorema 4. Si ipotizzi che, in $\mathfrak{U}$, si abbia una distribuzione σ_1 in tre posti (a), (b), (c) di $\mathfrak{S}_1$. Se in $\mathfrak{S}_2$ si ha una distribuzione σ_2 di un solo elemento $(-b)$,

$$\begin{array}{cccccc l}
+a & 0 & +b & 0 & +c & 0 & \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(a+b+c),\ \overline{\mathrm{M}}_1=f, \\
-b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-b),\ \mathrm{M}_2=-b, \\
\hline
-a & 0 & +b & 0 & +c & 0 & \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(-a+b+c),\ \mathrm{M}_3=d.
\end{array}$$

Con

$$\mathfrak{S}_3=(-a+b+c)=d,$$

per cambiamento del segno $(\overset{\nu}{\rightarrow})$ di d, avremo:

but

$$(-1+1+1+1+3)=(2+2+1),$$

and by replacement of $(-1+1+1+1+3)$ by $(2+2+1)$, one has

$$-1-(-1-1-1-3)=(2+2+1).$$

In this case ± 1 is what must be added to and taken from $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ respectively in order to make σ_1 and σ_2 equivalent.

Definition 4. Derived numbers are said to be those directed numbers that result from the relationship with intermediaries directed numbers whose sign has been changed.

Corollary 3. The distribution in $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ is restored on the basis of the derived directed numbers.

Theorem 4. Let $\mathfrak{U}$ contain a distribution σ_1 in three places (a), (b), (c) along $\mathfrak{S}_1$. If along $\mathfrak{S}_2$ a single element $(-b)$ is distributed,

$$\begin{array}{cccccc l}
+a & 0 & +b & 0 & +c & 0 & \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(a+b+c),\ \bar{\mathrm{M}}_1=f, \\
-b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-b),\ \mathrm{M}_2=-b, \\
\hline
-a & 0 & +b & 0 & +c & 0 & \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(-a+b+c),\ \mathrm{M}_3=d.
\end{array}$$

With

$$\mathfrak{S}_3=(-a+b+c)=d,$$

by changing the sign $(\overset{\nu}{\rightarrow})$ of d, we shall get:

$$d \overset{\nu}{\rightarrow} -d,$$
$$(a+b+c)-d=b,$$
$$(-b-d)=-f,$$
$$(b-f)=-d;$$

$$-d \overset{\varphi}{\rightarrow} d$$
$$d-(a+b+c)=(d-a-b-c),$$

però

$$(d-a-b-c)=-b,$$

quindi, per sostituzione di $(d-a-b-c)$ con $-b$, si ha

$$d-(a+b+c)=-b;$$

inoltre

$$d-(-b)=(d+b),$$

ma

$$(d+b)=(a+b+c),$$

per cui, sostituendo $(d+b)$ con $(a+b+c)$, si ottiene

$$d-(-b)=(a+b+c).$$

Esempio di numeri non letterali:

3	0	2	0	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=(3+2)$, $M_1=5$,
−2	0	0	−3	0	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-2-3)$, $M_2=-5$,
+1	0	+2	−3	0	0	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(1+2-3)$, $M_3=0$,

$$d \overset{\nu}{\rightarrow} -d,$$
$$(a+b+c)-d=b,$$
$$(-b-d)=-f,$$
$$(b-f)=-d;$$

$$-d \overset{\varphi}{\rightarrow} d$$
$$d-(a+b+c)=(d-a-b-c),$$

but

$$(d-a-b-c)=-b,$$

therefore on replacing $(d-a-b-c)$ by $-b$, we have

$$d-(a+b+c)=-b;$$

and besides

$$d-(-b)=(d+b),$$

but

$$(d+b)=(a+b+c),$$

so that on replacing $(d+b)$ by $(a+b+c)$, we obtain

$$d-(-b)=(a+b+c).$$

Example by means of non-literal numbers.

3	0	2	0	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=(3+2)$, $M_1=5$,
−2	0	0	−3	0	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-2-3)$, $M_2=-5$,
+1	0	+2	−3	0	0	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(1+2-3)$, $M_3=0$,

$$(1+2-3)=0,$$
$$0 \overset{\nu}{\rightarrow} -0$$
$$-0-(3+2)=(-0-3-2),$$

ma

$$(-0-3-2)=(-2-3),$$

e, per sostituzione di $(-0-3-2)$ con $(-2-3)$, si ha

$$-0-(3+2)=(-2-3);$$

inoltre

$$-0-(-2-3)=(-0+2+3),$$

tuttavia

$$(-0+2+3)=(3+2),$$

per cui, sostituendo $(-0+2+3)$ con $(3+2)$, si ottiene

$$-0-(-2-3)=(3+2).$$

Teorema 5. Quando il numero intermediario è 0, esso segue, poi precede con il segno '$-$' i termini di σ_1 e σ_2.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & a & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & 0 & -b & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(a-b),\ \mathrm{M}_1=-a, \\ \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=a,\ \mathrm{M}_2=a, \\ \\ \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(b-b),\ \mathrm{M}_3=0; \end{array}$$

$$(b-b)=0,$$
$$0 \overset{\nu}{\rightarrow} -0$$
$$(a-b)-0=-a,$$
$$(a-0)=a,$$
$$(-a+a)=0;$$
$$0 \overset{\nu}{\rightarrow} -0$$
$$-0-(a-b)=(-0-a+b),$$

$$(1+2-3)=0,$$
$$0 \overset{\nu}{\rightarrow} -0$$
$$-0-(3+2)=(-0-3-2),$$

but

$$(-0-3-2)=(-2-3),$$

and by replacement of $(-0-3-2)$ by $(-2-3)$, one has

$$-0-(3+2)=(-2-3);$$

moreover

$$-0-(-2-3)=(-0+2+3),$$

but

$$(-0+2+3)=(3+2),$$

so that, replacing $(-0+2+3)$ by $(3+2)$, we have

$$-0-(-2-3)=(3+2).$$

Theorem 5. When the mediating numbers is 0, it follows, then precedes the terms of σ_1 and σ_2 and carries the sign '$-$'.

$$0 \quad a \quad 0 \quad -b \quad 0 \quad 0 \qquad \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(a-b),\ \mathrm{M}_1=-a,$$
$$0 \quad a \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \qquad \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=a,\ \mathrm{M}_2=a,$$

$$0 \quad b \quad 0 \quad -b \quad 0 \quad 0 \qquad \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(b-b),\ \mathrm{M}_3=0;$$

$$(b-b)=0,$$
$$0 \overset{\nu}{\rightarrow} -0$$
$$(a-b)-0=-a,$$
$$(a-0)=a,$$
$$(-a+a)=0;$$
$$0 \overset{\nu}{\rightarrow} -0$$
$$-0-(a-b)=(-0-a+b),$$

ma

$$(-0-a+b)=a,$$

quindi, per sostituzione di $(-0-a+b)$ con a, si ha

$$-0-(a-b)=a;$$

inoltre

$$-0-(a)=(-0-a);$$

e con

$$(-0-a)=(a-b),$$

sostituendo $(-0-a)$ con $(a-b)$, deriva

$$-0-(a)=(a-b).$$

Corollario 4. Anche il segno '$-$' appartiene allo zero, in quanto -0 è un operatore rispetto a σ_1 e σ_2.

Osservazione 1. Necessita, per i termini di σ_1 e σ_2, l'uso appropriato di parentesi.

18. USO DELLE PARENTESI

Definizione 1. Dicesi *raccoglimento in parentesi* dei numeri relativi, nella distribuzione esigua, l'applicazione della proprietà associativa ai termini dell'insieme.

Regola 1. L'uso delle parentesi è richiesto quando in $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$,

but

$$(-0-a+b)=a,$$

therefore, replacing $(-0-a+b)$ by a, the result is

$$-0-(a-b)=a;$$

moreover

$$-0-(a)=(-0-a);$$

and with $\quad (-0-a)=(a-b),$

on replacing $(-0-a)$ by $(a-b)$, we derive

$$-0-(a)=(a-b).$$

Corollary 4. Also the sign '$-$' belongs to zero, in that -0 is an operator with respect to σ_1 and σ_2.

Observation 1. Proper use of brackets is required for the terms of σ_1 and σ_2.

18. THE USE OF BRACKETS

Definition 1. We may define a *collection between brackets* of directed numbers in a small distribution as the application of the associative property to the terms of the arrangement.

Rule 1. The use of brackets is required when numbers appear

$\mathfrak{S}_3$ appaiono numeri che, se addizionati indipendentemente dalle parentesi, superano il sostegno $\bar{M}$.

Lemma 1. Se non viene introdotto l'uso delle parentesi, avverrà che, su di uno stesso $\mathfrak{S}$, σ risulti dalla combinazione di numeri positivi e negativi, dando un $\pm\delta$.

Teorema 1. Con l'uso delle parentesi, si procede come nel seguente esempio:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
b & +b & +c & -d & 0 & 0 & \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(b+b)+(c-d),\ M_1=c, \\
-a & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-a-b),\ M_2=-c, \\
\hline
+a & +b & +c & -d & 0 & -b & \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(a+b+c)+(-d-b),\ M_3=0,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)+(-d-b)=0 \\
&0 \overset{\nu}{\rightarrow} -0 \\
&(b+b)+(c-d)-0=c, \\
&(-a-b)-0=-c, \\
&(c-c)=0; \\
&0 \overset{\nu}{\rightarrow} -0 \\
&-0-((b+b)+(c-d))=(-0-b-b)-c+d,
\end{aligned}$$

ma

$$(-0-b-b)-c+d=(-a-b),$$

quindi, per sostituzione di $(-0-b-b)-c+d$ con $(-a-b)$, si ha

$$-0-((b+b)+(c-d))=(-a-b);$$

inoltre

$$-0-(-a-b)=(-0+a+b),$$

in $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, and $\mathfrak{G}_3$ whose sum might otherwise exceed the support $\overline{M}$.

Lemma 1. Suppose brackets are not used; in that case along one and the same $\mathfrak{G}$, σ might have a combination of positive and negative numbers giving $\pm\delta$ as result.

Theorem 1. Using brackets one proceeds as in the following example:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
b & +b & +c & -d & 0 & 0 & \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1=(b+b)+(c-d),\ M_1=c, \\
-a & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-a-b),\ M_2=-c, \\
\hline
+a & +b & +c & -d & 0 & -b & \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(a+b+c)+(-d-b),\ M_3=0,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)+(-d-b)=0; \\
&0 \overset{\nu}{\rightarrow} -0 \\
&(b+b)+(c-d)-0=c, \\
&(-a-b)-0=-c, \\
&(c-c)=0; \\
&0 \overset{\nu}{\rightarrow} -0 \\
&-0-((b+b)+(c-d))=(-0-b-b)-c+d,
\end{aligned}$$

but

$$(-0-b-b)-c+d=(-a-b),$$

therefore, replacing $(-0-b-b)-c+d$ by $(-a-b)$, we have

$$-0-((b+b)+(c-d))=(-a-b);$$

and also

$$-0-(-a-b)=(-0+a+b),$$

però

$$(-0+a+b)=((b+b)+(c-d)),$$

e, sostituendo $(-0+a+b)$ con $((b+b)+(c-d))$, scriveremo

$$-0-(-a-b)=(b+b)+(c-d),$$
$$-0-(-a-b)=c.$$

Corollario 1. Se in $\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=(b+d-f)=0$, ed in $\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(f-f)=0$, allora $M_1=0$ e $M_2=0$, ossia i sostegni M_1 e M_2 di $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ sono nulli. Si dirà allora che fra somma algebrica dei termini contenuti in σ_1 e quella dei termini contenuti in σ_2 non c'è differenza (nè complemento di differenza da ricercare), sebbene i termini in σ_1 e σ_2 siano distribuiti in maniera diversa.

Lemma 2. Se in $\mathfrak{S}_1$ e in $\mathfrak{S}_2$ trovano posto elementi le cui somme algebriche non siano equivalenti, e $\sigma_2>\sigma_1$, si può scrivere $M_1<M_2\neq M_3$.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
a & 0 & 0 & +c & 0 & -b & \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(a+c-b),\ M_1=b, \\
-b & 0 & 0 & +a & 0 & +e & \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=-b+(a+e),\ M_2=d, \\
\hline
-a & 0 & 0 & +d & 0 & +c & \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(-a+d)+c,\ M_3=f;
\end{array}$$

però anche

$$\sigma_1<\sigma_2;$$
$$\sigma_2<\sigma_3;$$
$$\sigma_1<\sigma_3.$$

Definizione 2. Il sostegno M_1 di $\mathfrak{S}_1$ si dice minore del sostegno M_2 di $\mathfrak{S}_2$ se $\sigma_1<\sigma_2$. Il sostegno M_1 di $\mathfrak{S}_1$ si dice maggiore del sostegno M_2 di $\mathfrak{S}_2$, se $\sigma_1>\sigma_2$.

but

$$(-0+a+b)=((b+b)+(c-d)),$$

and replacing $(-0+a+b)$ by $((b+b)+(c-d))$, one has

$$-0-(-a-b)=(b+b)+(c-d),$$
$$-0-(-a-b)=c.$$

Corollary 1. If on $\mathfrak{G}_1$, $\sigma_1=(b+d-f)=0$, and along $\mathfrak{G}_2$, $\sigma_2=(f-f)=0$, then $M_1=0$ and $M_2=0$, i.e. the supports M_1 and M_2 for $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ are nil. It will then be said that between the algebraic sum of the terms contained in σ_1 and that of the terms contained in σ_2 there is no difference (nor complement of difference to look for), though the terms in σ_1 and σ_2 be distributed in a different way.

Lemma 2. If along $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ elements are located whose algebraic sums are not equivalent, and $\sigma_2>\sigma_1$, we can write $M_1<M_2\neq M_3$.

a	0	0	$+c$	0	$-b$	$\mathfrak{G}_1$, $\sigma_1=(a+c-b)$, $M_1=b$,
$-b$	0	0	$+a$	0	$+e$	$\mathfrak{G}_2$, $\sigma_2=-b+(a+e)$, $M_2=d$,
$-a$	0	0	$+d$	0	$+c$	$\mathfrak{G}_3$, $\sigma_3=(-a+d)+c$, $M_3=f$;

and also

$$\sigma_1<\sigma_2;$$
$$\sigma_2<\sigma_3;$$
$$\sigma_1<\sigma_3.$$

Definition 2. The support M_1 for $\mathfrak{G}_1$ is said to be lesser than the support M_2 for $\mathfrak{G}_2$ if $\sigma_1<\sigma_2$. The support M_1 for $\mathfrak{G}_1$ is said to be greater than the support M_2 for $\mathfrak{G}_2$ if $\sigma_1>\sigma_2$.

Esempio con uso delle parentesi.

5	0	0	+6	0	−5	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=5+(6-5)$, $\bar{M}_1=6$,
−4	0	0	0	0	+2	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-4+2)$, $M_2=-2$,
1	0	0	+6	0	−3	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=1+(6-3)$, $M_3=4$;

$$(1+(6-3))=4,$$
$$4 \overset{\nu}{\rightarrow} -4$$
$$(5+(6-5))-4=2,$$
$$((-4+2)-4)=-6,$$
$$(2-6)=-4;$$
$$-4 \overset{\varphi}{\rightarrow} 4$$
$$4-(5+(6-5))=(4-5)-6+5,$$

ma

$$(4-5)-6+5=(-4+2),$$

e per sostituzione di $(4-5)-6+5$ con $(-4+2)$,

$$4-(5+(6-5))=(-4+2);$$

inoltre

$$4-(-4+2)=4+(4-2),$$

però

$$4+(4-2)=5+(6-5),$$

e per sostituzione di $4+(4-2)$ con $(5+(6-5))$, si ha

$$4-(-4+2)=(5+(6-5)).$$

Si consideri anche l'esempio seguente:

3	0	0	6	−5	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=3+(6-5)$, $M_1=4$,
−3	0	0	0	+2	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-3+2)$, $M_2=-1$,
0	0	0	6	−3	0	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(6-3)$, $M_3=3$;

Example using brackets.

$$\begin{array}{rrrrrr l}
5 & 0 & 0 & +6 & 0 & -5 & \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=5+(6-5),\ \bar{M}_1=6, \\
-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-4+2),\ M_2=-2, \\
\hline
1 & 0 & 0 & +6 & 0 & -3 & \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=1+(6-3),\ M_3=4;
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&(1+(6-3))=4, \\
&4 \overset{\vee}{\rightarrow} -4 \\
&(5+(6-5))-4=2, \\
&((-4+2)-4)=-6, \\
&(2-6)=-4; \\
&-4 \overset{\varphi}{\rightarrow} 4 \\
&4-(5+(6-5))=(4-5)-6+5,
\end{aligned}$$

but

$$(4-5)-6+5=(-4+2),$$

and replacing $(4-5)-6+5$ by $(-4+2)$, we get

$$4-(5+(6-5))=(-4+2);$$

and also

$$4-(-4+2)=4+(4-2),$$

but

$$4+(4-2)=5+(6-5),$$

and replacing $4+(4-2)$ by $(5+(6-5))$, one has

$$4-(-4+2)=(5+(6-5).$$

Consider also the following:

$$\begin{array}{rrrrrr l}
3 & 0 & 0 & 6 & -5 & 0 & \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=3+(6-5),\ M_1=4, \\
-3 & 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-3+2),\ M_2=-1, \\
\hline
0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 & \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(6-3),\ M_3=3;
\end{array}$$

$$(6-3)=3,$$
$$3 \overset{\nu}{\rightarrow} -3$$
$$(3+(6-5))-3=1,$$
$$(-3+2)-3=-4,$$
$$(1-4)=-3;$$
$$-3 \overset{\varphi}{\rightarrow} 3$$
$$3-(3+(6-5))=(3-3-6+5),$$

ma

$$(3-3-6+5)=(-3+2),$$

quindi, per sostituzione, si ha

$$3-(3+(6-5))=(-3+2);$$

inoltre

$$3-(-3+2)=(3+3-2),$$

però

$$(3+3-2)=3+(6-5)),$$

e, sostituendo $(3+3-2)$ con $(3+(6-5))$,

$$3-(-3+2)=(3+(6-5)).$$

Osservazione 1. I procedimenti applicati sulla base di $\overline{M}=f$ valgono anche per ogni universo finito maggiore di $\mathfrak{U}$.

Teorema 2.

Con

$$\overline{M}=8\ (a, b, c, d, e, f, g, h),$$

ovvero con un insieme finito costituito da 8 elementi, quindi maggiore di $\mathfrak{U}$, si avrà:

$$(6-3)=3,$$
$$3 \overset{\vee}{\rightarrow} -3$$
$$(3+(6-5))-3=1,$$
$$(-3+2)-3=-4,$$
$$(1-4)=-3;$$
$$-3 \overset{\varphi}{\rightarrow} 3$$
$$3-(3+(6-5))=(3-3-6+5),$$

but

$$(3-3-6+5)=(-3+2),$$

therefore by replacement we have

$$3-(3+(6-5))=(-3+2);$$

and also

$$3-(-3+2)=(3+3-2),$$

but

$$(3+3-2)=(3+(6-5)),$$

and replacing $(3+3-2)$ by $(3+(6-5))$, we get

$$3-(-3+2)=(3+(6-5)).$$

Observation 1. The procedures applied on the basis of $\bar{M}=f$ are applicable also to every finite universe greater than $\mathfrak{U}$.

Theorem 2.

Let

$$\bar{M}=8\,(a, b, c, d, e, f, g, h),$$

that is a finite distribution containing 8 elements, and hence greater than $\mathfrak{U}$. We shall have:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & a & 0 & 0 & -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c & 0 & 0 & -e & 0 & 0 \end{array}$$

$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=(a-d)$, $M_1=-c$,

$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-d-a)$, $M_2=-e$,

$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(-c-e)$, $\overline{M}_3=-h$;

$$\begin{aligned} &(-c-e)=-h, \\ &-h \overset{\varphi}{\rightarrow} h \\ &(a-d)+h=e, \\ &(-d-a)+h=c, \\ &e+c=h; \\ &h \overset{\nu}{\rightarrow} -h \\ &-h-(a-d)=-h+(-a+d), \end{aligned}$$

ma

$$-h+(-a+d)=(-d-a),$$

e, per sostituzione di $-h+(-a+d)$ con $(-d-a)$, si scrive

$$-h-(a-d)=(-d-a);$$

inoltre

$$-h-(-d-a)=(-h+d+a),$$

però

$$(-h+d+a)=(a-d);$$

quindi, sostituendo $(-h+d+a)$ con $(a-d)$, si ha

$$-h-(-d-a)=(a-d).$$

Regola 2. Per calcolare somme, somme algebriche e differenze di numeri relativi, in due diversi $\mathfrak{S}$ di insiemi finiti anche maggiori

0	0	a	0	0	$-d$	0	0	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1=(a-d)$, $M_1=-c$,
0	0	$-d$	0	0	$-a$	0	0	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(-d-a)$, $M_2=-e$,
0	0	$-c$	0	0	$-e$	0	0	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(-c-e)$, $\overline{M}_3=-h$;

$$
\begin{aligned}
&(-c-e)=-h,\\
&-h \overset{\varphi}{\rightarrow} h\\
&(a-d)+h=e,\\
&(-d-a)+h=c,\\
&e+c=h;\\
&h \overset{\nu}{\rightarrow} -h\\
&-h-(a-d)=-h+(-a+d),
\end{aligned}
$$

but

$$-h+(-a+d)=(-d-a),$$

and, replacing $-h+(-a+d)$ by $(-d-a)$, we get

$$-h-(a-d)=(-d-a);$$

and also

$$-h-(-d-a)=(-h+d+a),$$

but

$$(-h+d+a)=(a-d);$$

therefore, replacing $(-h+d+a)$ by $(a-d)$, we have

$$-h-(-d-a)=(a-d).$$

Rule 2. In order to calculate sums, algebraic sums and differences of directed numbers located along two different $\mathfrak{S}$ lines of

di $\mathfrak{U}$, opereremo in modo che, ottenuto il risultato della somma, somma algebrica o differenza, in $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$, si calcoli anche la somma, somma algebrica e differenza ottenute in $\mathfrak{S}_3$. Si trasforma poi il segno di σ_3, perchè $\mathfrak{S}_3$ diventi tramite del complemento. Infine, sottraendo il termine intermediario da σ_1 e σ_2, deriva un numero che indica il complemento di σ_1 e σ_2, nell'insieme finito, ossia la complementarietà di somma, somma algebrica e differenza, rispetto alle regole dei segni e della loro inversione.

Definizione 3. Se $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ contengono la distribuzione di σ_1 e σ_2, i termini distribuiti in σ_3 di $\mathfrak{S}_3$ rappresentano il valore intermediario dal quale far seguire il numero complementare della distribuzione.

Osservazione 2. Poiché il valore intermediario può risultare con segno positivo o negativo, anche il termine concorrente alla determinazione del complemento distribuito è un numero relativo.

19. SOMME E DIFFERENZE DI NUMERI SEISEMICI, RADICALI E POTENZE

Teorema 1. Sono impiegabili numeri seisemici (corrispondenti ai numeri decimali dell'universo transfinito) per ottenere, nell'universo esiguo, risultati che si conformino alle regole esposte.

Prova.

$+0{,}b \quad 0{,}0 \quad 0{,}0 \quad 0{,}0 \quad 0{,}d \quad 0{,}0 \quad \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(0{,}b+0{,}d),\ \overline{M}_1=0{,}f,$

$-0{,}a \quad 0{,}0 \quad -0{,}a \quad 0{,}0 \quad 0{,}0 \quad 0{,}0 \quad \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-0{,}a-0{,}a),\ M_2=-0{,}b,$

$+0{,}a \quad 0{,}0 \quad -0{,}a \quad 0{,}0 \quad 0{,}d \quad 0{,}0 \quad \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(0{,}a-0{,}a)+0{,}d,\ M_3=0{,}d;$

distributions that are finite as well as greater than $\mathfrak{U}$, we will proceed in the following way: we calculate the sum, the algebraic sum or the difference, in $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$, and then calculate the sum, algebraic sum and difference in $\mathfrak{S}_3$. The sign of σ_3 is then transformed, so that $\mathfrak{S}_3$ becomes the intermediary of the complement. Finally subtracting the mediating term from σ_1 and σ_2, one obtains a number that indicates the complement of σ_1 and σ_2, in the finite distribution, which is to say the complementarity of sum, algebraic sum and difference with respect to the rules of signs and their inversion.

Definition 3. If $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ contain the distribution of σ_1 and σ_2, the terms arranged in σ_3 of $\mathfrak{S}_3$ represent the mediating value from which the complementary number of the arrangement is made to follow.

Observation 2. Since the intermediary value may be found to bear a positive or negative sign, the term contributing to the determination of the complement distributed is also a directed number.

19. SUMS AND DIFFERENCES OF HEXADIC NUMBERS, ROOTS AND POWERS

Theorem 1. Hexadic numbers (corresponding to the decimals in the transfinite universe) can be used in order to obtain, in the small universe, results that conform to the rules laid down.

Proof.

$$
\begin{array}{lllllll}
+0.b & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.d & 0.0 & \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(0.b+0.d),\ \overline{\mathrm{M}}_1=0.f, \\
-0.a & 0.0 & -0.a & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-0.a-0.a),\ \mathrm{M}_2=-0.b, \\
\hline
+0.a & 0.0 & -0.a & 0.0 & 0.d & 0.0 & \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(0.a-0.a)+0.d,\ \mathrm{M}_3=0.d;
\end{array}
$$

$$0,d \overset{\nu}{\rightarrow} -0,d$$
$$(0,b+0,d)-0,d=0,b,$$
$$(-0,a-0,a)-0,d=-0,f,$$
$$(0,b-0,f)=-0,d;$$
$$-0,d \overset{\varphi}{\rightarrow} 0,d$$
$$0,d-(0,b+0,d)=0,d-0,b-0,d=-0,b;$$

ma

$$-0\,,b=(-0\,,a-0\,,a),$$

e, sostituendo $(0,d-(0\,,b+0\,,d))$ con $(-0\,,a-0\,,a)$, si ha

$$0\,,d-(-0\,,a-0\,,a)=0\,,d+0\,,a+0\,,a,$$

però

$$0\,,d+0\,,a+0\,,a=0\,,b+0\,,d$$

quindi

$$0\,,d-(0\,,a-0\,,a)=0\,,b+0\,,d.$$

Corollario 1. Operazioni in $\mathfrak{U}$ sono eseguibili con potenze, radicali e radicali con potenze di numeri relativi.

Teorema 2. Dati (a^b+b^b-a) in $\mathfrak{G}_1$ e $(-a^b)$ in $\mathfrak{G}_2$,

$$\begin{array}{rrrrrrl}
a^b & 0 & 0 & b^b & -a & 0 & \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1=(a^b+b^b-a),\ \mathrm{M}_1=d, \\
-a^b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=-a^b,\ \mathrm{M}_2=a, \\
\hline
b & 0 & 0 & b^b & -a & 0 & \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(b+b^b-a),\ \mathrm{M}_3=e;
\end{array}$$

$$0.d \overset{\nu}{\rightarrow} -0.d$$
$$(0.b+0.d)-0.d=0.b,$$
$$(-0.a-0.a)-0.d=-0.f,$$
$$(0.b-0.f)=-0.d;$$
$$-0.d \overset{\varphi}{\rightarrow} 0.d$$
$$0.d-(0.b+0.d)=0.d-0.b-0.d=-0.b;$$

but

$$-0.b=(-0.a-0.a),$$

and replacing $(0.d-(0.b+0.d))$ by $(-0.a-0.a)$, we have

$$0.d-(-0.a-0.a)=0.d+0.a+0.a,$$

but

$$0.d+0.a+0.a=0.b+0.d$$

therefore

$$0.d-(0.a-0.a)=0.b+0.d.$$

Corollary 1. Operations in $\mathfrak{U}$ can be effected with powers, roots and roots with directed numbers as exponents.

Theorem 2. Given (a^b+b^b-a) in $\mathfrak{G}_1$ and $(-a^b)$ in $\mathfrak{G}_2$,

$$\begin{array}{ccccccl}
a^b & 0 & 0 & b^b & -a & 0 & \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1=(a^b+b^b-a),\ \mathrm{M}_1=d, \\
-a^b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=-a^b,\ \mathrm{M}_2=+a, \\
\hline
b & 0 & 0 & b^b & -a & 0 & \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(b+b^b-a),\ \mathrm{M}_3=e;
\end{array}$$

$$(b+b^b-a)=e,$$
$$e \overset{\nu}{\rightarrow} -e$$
$$(a^b+b^b-a)-e=-a,$$
$$(-a^b-e)=-d,$$
$$(-a-d)=-e;$$
$$-e \overset{\varphi}{\rightarrow} e$$
$$e-(a^b+b^b-a)=e-d=a \sim -a^b;$$
$$e-(-a^b)=e-a=d.$$

Corollario 2. Per insiemi finiti maggiori di $\mathfrak{U}$ si possono impiegare esponenti maggiori di b^b. Per tali insiemi è possibile usare anche radici diverse dalla radice quadrata.

Teorema 3. Dati $-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b}$, in un insieme finito con sostegno $\bar{\mathrm{M}}=i\ (=9)$, si ha

$$0\ 0\ -\sqrt{a^c}\quad 0\ 0\ +\sqrt{c^b}\ 0\ 0\ 0\quad \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b}),$$
$$0\ 0\quad 0\quad -c\ 0\quad 0\quad 0\ 0\ 0\quad \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-c),$$

$$0\ 0\ -\sqrt{a^c}\ -c\ 0\ +\sqrt{c^b}\ 0\ 0\ 0\quad \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(-\sqrt{a^c}-c+\sqrt{c^b});$$

$$(-\sqrt{a^c}-c+\sqrt{c^b})\rightarrow(\sqrt{a^c}+c-\sqrt{c^b})$$
$$(-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b})+(\sqrt{a^c}+c-\sqrt{c^b})=+c,$$
$$-c+(\sqrt{a^c}+c-\sqrt{c^b})=\sqrt{a^c}-\sqrt{c^b},$$
$$(c+\sqrt{a^c}-\sqrt{c^b});$$
$$(c+\sqrt{a^c}-\sqrt{c^b})\rightarrow(-c-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b})$$
$$(-c-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b})-(-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b})=-c,$$
$$(-c-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b})-(-c)=-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b}.$$

$$(b+b^b-a)=e,$$
$$e \xrightarrow{\nu} -e$$
$$(a^b+b^b-a)-e=-a,$$
$$(-a^b-e)=-d,$$
$$(-a-d)=-e;$$
$$-e \xrightarrow{\varphi} e$$
$$e-(a^b+b^b-a)=e-d=a \sim -a^b;$$
$$e-(-a^b)=e-a=d.$$

Corollary 2. For finite distributions greater than $\mathfrak{U}$ it is possible to use exponents greater than b^b and also roots other than square roots.

Theorem 3. Given $-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b}$, in a finite arrangement supported by $\bar{\mathrm{M}}=i\ (=9)$, we have

$$0\ 0\ -\sqrt{a^c}\quad 0\ 0\ +\sqrt{c^b}\ 0\ 0\ 0\quad \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b}),$$
$$0\ 0\quad 0\quad -c\ 0\quad 0\quad 0\ 0\ 0\quad \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-c),$$

$$0\ 0\ -\sqrt{a^c}\ -c\ 0\ +\sqrt{c^b}\ 0\ 0\ 0\quad \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(-\sqrt{a^c}-c+\sqrt{c^b});$$

$$(-\sqrt{a^c}-c+\sqrt{c^b})\rightarrow(\sqrt{a^c}+c-\sqrt{c^b})$$
$$(-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b})+(\sqrt{a^c}+c-\sqrt{c^b})=+c,$$
$$-c+(\sqrt{a^c}+c-\sqrt{c^b})=\sqrt{a^c}-\sqrt{c^b},$$
$$(c+\sqrt{a^c}-\sqrt{c^b});$$
$$(c+\sqrt{a^c}-\sqrt{c^b})\rightarrow(-c-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b})$$
$$(-c-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b})-(-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b})=-c,$$
$$(-c-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b})-(-c)=-\sqrt{a^c}+\sqrt{c^b}.$$

20. MOLTIPLICAZIONI E DIVISIONI DI NUMERI RELATIVI E DIFFERENZA DEI VALORI ASSOLUTI DEI PRODOTTI E DEI QUOZIENTI

Osservazione 1. Anche i segni di moltiplicazione e divisione indicano un tipo di relatività dei numeri.

Lemma 1. Ad alcuni numeri relativi (vedremo specificatamente quali nel cap. 22) appartiene il segno della moltiplicazione o della divisione.

Definizione 1. Due numeri relativi si moltiplicano in $\mathfrak{S}$ quando siano riferiti a due oggetti numerabili.

Regola 1. Siano collegati numeri relativi in $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ con il segno della moltiplicazione. Tali numeri si riferiscono ad oggetti numerabili, non neutri, della collezione $\{p, q, r, s, t, u\}$. Quindi vanno disposti in colonna a formare coppie di moltiplicandi e moltiplicatori verticalmente allineate. La differenza dei valori assoluti dei prodotti di numeri relativi in $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ è ottenibile per intermediazione di $\mathfrak{S}_3$, con il procedimento seguente.

In un universo finito $S > \mathfrak{U}$, con

$$(m+p) > (-n+q),$$

$$\begin{array}{llll}
..0.. & (m)\times(-n) & ..0.. & \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1=(m\times -n), \\
..0.. & (p)\times(q) & ..0.. & \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(p\times q), \\
\hline
..0.. & (m+p)+(-n+q) & ..0.. & \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=(m+p)+(-n+q),\ M_3=s;
\end{array}$$

20. MULTIPLICATION AND DIVISION OF DIRECTED NUMBERS AND DIFFERENCE BETWEEN ABSOLUTE VALUES OF PRODUCTS AND QUOTIENTS

Observation 1. The directedness of numbers is also indicated by signs of multiplication and division.

Lemma 1. Signs of multiplication and of division belong to a certain kind of directed numbers (as we shall see in ch. 22).

Definition 1. Two directed numbers are multiplied in $\mathfrak{G}$ if they refer to two numerable objects.

Rule 1. Let directed numbers in $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ be linked by the sign of multiplication. These numbers refer to non-neutral numerable objects of the collection {p, q, r, s, t, u}. Therefore they must be arranged in a column to form pairs of multiplicands and multipliers vertically aligned. The difference between the absolute values of products of directed numbers in $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$ is obtained through $\mathfrak{G}_3$ as intermediary, in the following way.

In a finite universe $S > \mathfrak{U}$,with

$$(m+p) > (-n+q),$$

$$\begin{array}{llll}
..0.. & (m)\times(-n) & ..0.. & \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1=(m\times -n), \\
..0.. & (p)\times(q) & ..0.. & \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(p\times q), \\
\hline
..0.. & (m+p)+(-n+q) & ..0.. & \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(m+p)+(-n+q),\ M_3=s;
\end{array}$$

$(m+p)+(-n+q)=s,$
$s \overset{\nu}{\rightarrow} -s$
$-s-|(m\times -n)|=|\pm t|,$
$-s-|(p\times q)|=|\pm u|,$
$|\pm t|-|\pm\ u|=v$ (differenza dei valori assoluti dei prodotti σ_1 e σ_2 con intermediario $-s$).

Esempi con numeri non letterali.

..0..	$(5)\times(-2)$	..0..	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1,=(5\times -2)$, $M_1=-10$,
..0..	$(3)\times(1)$	..0..	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(3\times 1)$, $M_2=3$,
..0..	$8-1$	..0..	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(8-1)$, $M_3=7$;

$7 \overset{\nu}{\rightarrow} -7$
$(-7-10)=-17,$
$(-7-3)=-10,$
$|17|-|10|=7$ (differenza dei valori assoluti dei prodotti σ_1 e σ_2 con intermediario -7).

..0..	$(5)\times(-10)$	..0..	$\mathfrak{S}_1$, $\sigma_1,=(5\times -10)$, $M_1=-50$,
..0..	$(3)\times(5)$	..0..	$\mathfrak{S}_2$, $\sigma_2=(3\times 5)$, $M_2=15$,
..0..	$8-5$	..0..	$\mathfrak{S}_3$, $\sigma_3=(8-5)$, $M_3=3$;

$3 \overset{\nu}{\rightarrow} -3$
$(-3-50)=-53,$
$(-3-15)=-18,$
$|53|-|18|=35$ (differenza dei valori assoluti dei prodotti σ_1 e σ_2 con intermediario -3).

Regola 2. Siano dati i prodotti di coppie di numeri relativi distribuiti in $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$. Si ottiene nell'intermediario $\mathfrak{S}_3$ un risultato

$(m+p)+(-n+q)=s,$
$s \overset{\nu}{\rightarrow} -s$
$-s-|(m\times -n)|=|\pm t|,$
$-s-|(p\times q)|=|\pm u|,$
$|\pm t|-|\pm u|=v$ (difference between the absolute values of the products σ_1 and σ_2 with $-s$ as intermediary).

Example with non-literal numbers.

..0..	$(5)\times(-2)$	..0..	$\mathfrak{G}_1$, $\sigma_1,=(5\times -2)$, $M_1=-10$,
..0..	$(3)\times(1)$	..0..	$\mathfrak{G}_2$, $\sigma_2=(3\times 1)$, $M_2=3$,
..0..	$8-1$	..0..	$\mathfrak{G}_3$, $\sigma_3=(8-1)$, $M_3=7$;

$7 \overset{\nu}{\rightarrow} -7$
$(-7-10)=-17,$
$(-7-3)=-10,$
$|17|-|10|=7$ (difference between the absolute values of the products σ_1 and σ_2 with -7 as intermediary).

..0..	$(5)\times(-10)$	..0..	$\mathfrak{G}_1$, $\sigma_1,=(5\times -10)$, $M_1=-50$,
..0..	$(3)\times(5)$	..0..	$\mathfrak{G}_2$, $\sigma_2=(3\times 5)$, $M_2=15$,
..0..	$8-5$	..0..	$\mathfrak{G}_3$, $\sigma_3=(8-5)$, $M_3=3$;

$3 \overset{\nu}{\rightarrow} -3$
$(-3-50)=-53,$
$(-3-15)=-18,$
$|53|-|18|=35$ (difference between the absolute values of the products σ_1 and σ_2 with -3 as intermediary).

Rule 2. Let the products of pairs of numbers be distributed in $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$. A result (s) is obtained through the intermediary

(s). Quando si inverte s in $-s$ e quest'ultimo viene sottratto dai rispettivi prodotti di $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$, derivano due numeri (di cui l'uno minuendo e l'altro sottraendo), che, presi come valori assoluti, danno la differenza dei prodotti.

Corollario 1. La somma dei valori assoluti dei prodotti in $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ dipende dal rapporto dei numeri relativi. Il valore assoluto di un numero derivato (somma) è costruito per la relatività dei numeri.

Regola 3. La differenza fra i valori assoluti dei quozienti di numeri relativi distribuiti in $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$, è ottenibile per intermediazione della s di $\mathfrak{S}_3$, sottraendo s, cambiato di segno, rispettivamente dai quozienti di $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$.

Corollario 2. La differenza fra i valori assoluti di quozienti in $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ dipende dalla relatività dei segni, ovvero il valore assoluto di un numero derivato (differenza) viene costruito con la relatività dei numeri.

Prova.

Con

$$(m:n)\wedge(p:q)\wedge(m>n)\wedge|(-p>-q)|\wedge(m>-p)\wedge(m-p)>(n-q),$$

$$\begin{array}{llll}
..0.. & (m):(n) & ..0.. & \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1,=(m:n), \\
..0.. & (-p):(-q) & ..0.. & \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-p:-q), \\
\hline
..0.. & (m-p)+(n-q) & ..0.. & \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=s;
\end{array}$$

$\mathfrak{S}_3$. The s is inverted into $-s$ which, when subtracted respectively from the products of $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$, gives two numbers (that is, the minuend and the subtrahend), which, when considered irrespective of their sign, give the difference between those products.

Corollary 1. The sum of the absolute values of the products in $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ depends on the relationship between directed numbers. The absolute value of the derived sum is obtained through the directedness of the numbers involved.

Rule 3. The difference between the absolute values of the quotients of directed numbers distributed in $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ is obtained in $\mathfrak{S}_3$, by means of s as intermediary, subtracting s, with its sign changed, respectively from the quotients on $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$.

Corollary 2. The difference between the absolute values of the quotients on $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ depends upon the direction of signs, that is the absolute value of a derived number (difference) is obtained through the directedness of the numbers involved.

Proof.

With

$$(m:n)\wedge(p:q)\wedge(m>n)\wedge|(-p>-q)|\wedge(m>-p)\wedge(m-p)>(n-q),$$

$$\begin{array}{llll}
..0.. & (m):(n) & ..0.. & \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1,=(m:n), \\
..0.. & (-p):(-q) & ..0.. & \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2=(-p:-q), \\
\hline
..0.. & (m-p)+(n-q) & ..0.. & \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3=s;
\end{array}$$

$(m-p)+(n-q)=s,$
$s \overset{\nu}{\rightarrow} -s$
$(-s+(m:n)=|\pm t|$
$(-s+(-p:-q)=|\pm u|$
$|t|-|u|=v$ (differenza fra valori assoluti dei quozienti σ_1 e σ_2, con intermediario $-s$).

Esempi con numeri non letterali.

..0..	(20) : (2)	..0..	$\mathfrak{S}_1$, σ_1,=(20 : 2), $M_1=10$,
..0..	(−15) : (−1)	..0..	$\mathfrak{S}_2$, σ_2 =(−15 : −1), $M_2=15$,
..0..	5 + 1	..0..	$\mathfrak{S}_3$, σ_3 =(5+1), $M_3=6$;

$6 \overset{\nu}{\rightarrow} -6$
$(-6+10)=4,$
$(-6+15)=9,$
$|9|-|4|=5$ (differenza fra i valori assoluti dei quozienti σ_1 e σ_2, con intermediario -6).

..0..	(125) : (5)	..0..	$\mathfrak{S}_1$, σ_1,=(125 : 5), $M_1=25$,
..0..	(−12) : (−2)	..0..	$\mathfrak{S}_2$, σ_2 =(−12 : −2), $M_2=6$,
..0..	113 + 3	..0..	$\mathfrak{S}_3$, σ_3 =(113+3), $M_3=116$;

$116 \overset{\nu}{\rightarrow} -116$
$(-116+25)=-91,$
$(-116+6)=-110,$
$|110|-|91|=19$ (differenza fra i valori assoluti dei quozienti σ_1 e σ_2, con intermediario -116).

$(m-p)+(n-q)=s,$
$s \overset{\nu}{\rightarrow} -s$
$(-s+(m:n)=|\pm t|$
$(-s+(-p:-q)=|\pm u|$
$|t|-|u|=\nu$ (difference between the absolute values of the quotients σ_1 and σ_2 with $-s$ as intermediary).

Examples with non-literal numbers.

..0..	(20) : (2)	..0..	$\mathfrak{S}_1$, σ_1,=(20 : 2), $M_1=10$,
..0..	(−15) : (−1)	..0..	$\mathfrak{S}_2$, σ_2 =(−15 : −1), $M_2=15$,
..0..	5 + 1	..0..	$\mathfrak{S}_3$, σ_3 =(5+1), $M_3=6$;

$6 \overset{\nu}{\rightarrow} -6$
$(-6+10)=4,$
$(-6+15)=9,$
$|9|-|4|=5$ (difference between the absolute values of the quotients σ_1 and σ_2 with -6 as intermediary).

..0..	(125) : (5)	..0..	$\mathfrak{S}_1$, σ_1,=(125 : 5), $M_1=25$,
..0..	(−12) : (−2)	..0..	$\mathfrak{S}_2$, σ_2 =(−12 : −2), $M_2=6$,
..0..	113 + 3	..0..	$\mathfrak{S}_3$, σ_3 =(113+3), $M_3=116$;

$116 \overset{\nu}{\rightarrow} -116$
$(-116+25)=-91,$
$(-116+6)=-110,$
$|110|-|91|=19$ (difference between the absolute values of the quotients σ_1 and σ_2 with -116 as intermediary).

..0..	(40) : (2)	..0..	$\mathfrak{S}_1$, σ_1,=(40 : 2), $M_1=20$,
..0..	(−15) : (−2)	..0..	$\mathfrak{S}_2$, σ_2 =(−15 : −2), $M_2=7{,}5$,
..0..	25 + 0	..0..	$\mathfrak{S}_3$, σ_3 =(25), $M_3=25$;

$25 \overset{\nu}{\rightarrow} -25$
$(-25+20)=-5$,
$(-25+7{,}5)=-17{,}5$
$|17{,}5|-|5|=12{,}5$ (differenza dei valori assoluti dei quozienti σ_1 e σ_2 con intermediario -25).

Definizione 2. Dati $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$, tali che $\mathfrak{S}_1$ esprima il quoziente-minuendo e $\mathfrak{S}_2$ il quoziente-sottraendo, si dice *s* in $\mathfrak{S}_3$ il termine intermediario della differenza dei valori assoluti dei quozienti di numeri relativi.

Corollario 3. Esiste almeno un altro termine che è intermediario della differenza dei valori assoluti dei quozienti di numeri relativi.

Definizione 3. Numeri relativi interi o seisemici, oppure numeri frazionari esprimibili in radicali, contenuti in $\mathfrak{U}$, e distribuiti in σ_1 e σ_2 nella $\mathfrak{S}_1$ e nella $\mathfrak{S}_2$, sono numeri da cui, in $\mathfrak{U}$, per mezzo di $\mathfrak{S}_3$, è derivabile il valore assoluto della somma o della differenza dei rispettivi prodotti e quozienti.

Teorema 1. Trovare la differenza dei valori assoluti di quozienti fra numeri relativi $((-m) : (n))$ e $((-p) : (q))$ in $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$, e introdurre $\pm\nu$ come intermediario da sottrarre da $(-m : n)$ e da $(-p : q)$, con funzione di riprova.

..0..	(40) : (2)	..0..	$\mathfrak{G}_1$, σ_1,=(40 : 2), $M_1=20$,
..0..	(−15) : (−2)	..0..	$\mathfrak{G}_2$, σ_2 =(−15 : −2), $M_2=7{,}5$,
..0..	25 + 0	..0..	$\mathfrak{G}_3$, σ_3 =(25), $M_3=25$;

$25 \overset{2}{\rightarrow} -25$
$(-25+20)=-5$,
$(-25+7{,}5)=-17{,}5$
$|17{,}5|-|5|=12{,}5$ (difference between the absolute values of the quotients σ_1 and σ_2 with -25 as intermediary).

Definition 2. Given $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$, such that $\mathfrak{G}_1$ expresses the quotient-minuend and $\mathfrak{G}_2$ the quotient-subtrahend, we may define s in $\mathfrak{G}_3$ as the mediating term of difference between the absolute values of the quotients of directed numbers.

Corollary 3. There exists at least another term which is the intermediary of difference between such values relating to the quotients of directed numbers.

Definition 3. Integers or hexadic directed numbers or fractional numbers expressable in roots, contained in $\mathfrak{U}$, and distributed in σ_1 and σ_2 on $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$, are numbers from which one may derive in $\mathfrak{U}$, and by means of $\mathfrak{G}_3$, the absolute value of the sum or difference between the respective products (and quotients).

Theorem 1. Find the difference between the absolute values of quotients of the directed numbers $((-m):(n))$ and $((-p):(q))$ in $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$, and introduce $\pm v$ as intermediary to be subtracted from $(-m:n)$ and from $(-p:q)$, by way of a cross-check.

Prova.

Con $(-m-p)<(n+q)$,

$$..0..\quad (-m):(n)\quad ..0..\quad \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1 = (-m:n),$$
$$..0..\quad (-p):(q)\quad ..0..\quad \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2 = (-p:q),$$

$$..0..\ (-m-p)+(n+q)\ ..0..\quad \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3 = (-m-p)+(n+q),\ M_3=s;$$

$s \overset{\nu}{\rightarrow} -s$
$(-s-(-m:n)=\pm t,$
$(-s-(-p:q)=\pm u,$
$((\pm t)-(\pm u)=\pm v,$
$(\pm v-(-m:n))=\pm w,$
$(\pm v-(-p:q)=\pm y,$
$|w|-|y|=z$ (differenza fra i valori assoluti dei quozienti σ_1 e σ_2, con intermediario $-s$ e $\pm v$).

Esempi con numeri non letterali.

$$..0..\quad (-30):(2)\quad ..0..\quad \mathfrak{S}_1,\ \sigma_1 = (-30:2),\ M_1=-15,$$
$$..0..\quad (-50):(5)\quad ..0..\quad \mathfrak{S}_2,\ \sigma_2 = (-50:5),\ M_2=-10,$$

$$..0..\quad -80+7\quad ..0..\quad \mathfrak{S}_3,\ \sigma_3 = (-80+7),\ M_3=-73;$$

$-73 \overset{\varphi}{\rightarrow} 73$
$73-(-15)=98,$
$73-(-10)=83,$
$98+83=181,$
$181-(-15)=196,$
$181-(-10)=191,$
$|196|-|191|=5$ (differenza dei valori assoluti dei quozienti σ_1 e σ_2, con intermediari 73 e 181).

Proof.

With $(-m-p)<(n+q)$,

$$..0..\quad (-m):(n)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1,=(-m:n),$$
$$..0..\quad (-p):(q)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-p:q),$$

$$..0..(-m-p)+(n+q)\ ..0..\quad \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(-m-p)+(n+q),\ M_3=s;$$

$s \xrightarrow{\nu} -s$
$(-s-(-m:n)=\pm t,$
$(-s-(-p:q)=\pm u,$
$((\pm t)-(\pm u)=\pm v,$
$(\pm v-(-m:n))=\pm w,$
$(\pm v-(-p:q)=\pm y,$
$|w|-|y|=z$ (difference of the absolute values of the quotients σ_1 and σ_2 with $-s$ and $\pm v$ as intermediaries).

Examples with non-literal numbers.

$$..0..\quad (-30):(2)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1,=(-30:2),\ M_1=-15,$$
$$..0..\quad (-50):(5)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-50:5),\ M_2=-10,$$

$$..0..\quad -80+7\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(-80+7),\ M_3=-73;$$

$-73 \xrightarrow{\varphi} +73$
$73-(-15)=98,$
$73-(-10)=83,$
$98+83=181,$
$181-(-15)=196,$
$181-(-10)=191,$
$|196|-|191|=5$ (difference between the absolute values of the quotients σ_1 and σ_2 with 73 and 181 as intermediaries).

$$..0..\quad (-10):(5)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1,=(-10:5),\ M_1=-2,$$

$$..0..\quad (-100):(2)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-100:2),\ M_2=-50,$$

$$..0..\quad -110+7\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(-110+7),\ M_3=-103;$$

$-103 \xrightarrow{\varphi} 103$
$103-(-2)=105,$
$103-(-50)=153,$
$105+153=258,$
$258-2=256,$
$258-50=208,$
$|256|-|208|=48$ (differenza dei valori assoluti dei quozienti σ_1 e σ_2, con intermediari 103 e 258).

Teorema 2. Con dividendi e divisori, entrambi con segno negativo, $((-m):(-n))$ e $((-p):(-q))$, in $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$, si trova la differenza dei valori assoluti dei quozienti, sottraendo anche $\pm v$ da $(-m:-n)$ e da $(-p:-q)$.

$$..0..\quad (-m):(-n)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1,=(-m:-n),$$

$$..0..\quad (-p):(-q)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-p:-q),$$

$$..0..\quad (-m-p)+(-n-q)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(-m-p)+(-n-p),\ M_3=-s;$$

$-s \xrightarrow{\varphi} s$
$(s-(-m:-n))=\pm t,$
$(s-(-p:-q))=\pm u,$
$(\pm t)-(\pm u)=\pm v,$
$(\pm v-((-m):(-n)))=\pm w,$
$(\pm v-((-p):(-q)))=\pm y,$
$|w|-|y|=z.$

..0..	$(-10):(5)$	..0..	$\mathfrak{G}_1$, $\sigma_1,=(-10:5)$, $M_1=-2$,
..0..	$(-100):(2)$	..0..	$\mathfrak{G}_2$, $\sigma_2=(-100:2)$, $M_2=-50$,
..0..	$-110+7$	..0..	$\mathfrak{G}_3$, $\sigma_3=(-110+7)$, $M_3=-103$;

$-103 \xrightarrow{\varphi} 103$
$103-(-2)=105$,
$103-(-50)=153$,
$105+153=258$,
$258-2=256$,
$258-50=208$,
$|256|-|208|=48$ (difference between the absolute values of the quotients σ_1 and σ_2 with 103 and 258 as intermediaries).

Theorem 2. Given dividends and divisors, both negatively directed $((-m):(-n))$ and $((-p):(-q))$, in $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$, the difference between the absolute values of the quotients is also found by subtracting $\pm v$ from $(-m:-n)$ and from $(-p:-q)$.

..0..	$(-m):(-n)$	..0..	$\mathfrak{G}_1$, $\sigma_1,=(-m:-n)$,
..0..	$(-p):(-q)$	..0..	$\mathfrak{G}_2$, $\sigma_2=(-p:-q)$,
..0..	$(-m-p)+(-n-q)$	..0..	$\mathfrak{G}_3$, $\sigma_3=(-m-p)+(-n-p)$, $M_3=-s$;

$-s \xrightarrow{\varphi} s$
$(s-(-m:-n))=\pm t$,
$(s-(-p:-q))=\pm u$,
$(\pm t)-(\pm u)=\pm v$,
$(\pm v-((-m):(-n)))=\pm w$,
$(\pm v-((-p):(-q)))=\pm y$,
$|w|-|y|=z$.

Esempi con numeri non letterali.

$$..0..\quad (-25):(-5)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1,=(-25:-5),\ M_1=5,$$
$$..0..\quad (-\ 5):(-1)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-5:-1),\ M_2=5,$$

$$..0..\quad -30\ -\ 6\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(-30-6),\ M_3=-36;$$

$-36 \overset{\varphi}{\rightarrow} 36$
$36-(-25:-5)=31,$
$36-(-5:-1)=31;$
$31-31=0$
$0-(-25:-5)=5,$
$0-(-5:-1)=5,$
$|5|-|5|=0$ (differenza fra i valori assoluti dei quozienti σ_1 e σ_2, con intermediari 36 e 0).

Teorema 3. Si trova la differenza fra i valori assoluti dei quozienti dei numeri relativi $((m):(-n))$ e $((p):(-q))$, ossia con divisori (in $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$) entrambi con segno negativo, e con $(\pm v)$ come secondo intermediario.

Con $(m+p)>(-n-q)$,

$$..0..\quad (m):(-n)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1,=(m:-n),$$
$$..0..\quad (p):(-q)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(p:-q),$$

$$..0..\ (m+p)+(-n-q)\ ..0..\quad \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(m+p)+(-n-q),\ M_3=s;$$

$s \overset{v}{\rightarrow} -s$
$-s-(m:-n)=\pm t,$
$-s-(p:-q)=\pm u,$
$(\pm t)-(\pm u)=\pm v,$
$(\pm v-((m):(-n)))=\pm w,$
$(\pm v-((p):(-q)))=\pm y,$
$|w|-|y|=z.$

Example with non-literal numbers.

$$..0..\quad (-25):(-5)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1,=(-25:-5),\ M_1=5,$$
$$..0..\quad (-\ 5):(-1)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(-5:-1),\ M_2=5,$$

$$..0..\quad -30\ -\ 6\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(-30-6),\ M_3=-36;$$

$-36 \overset{\circ}{\to} 36$
$36-(-25:-5)=31,$
$36-(-5:-1)=31;$
$31-31=0$
$0-(-25:-5)=5,$
$0-(-5:-1)=5,$
$|5|-|5|=0$ (difference between the absolute values of the quotients σ_1 and σ_2 with 36 and 0 as intermediaries).

Theorem 3. The difference is found between absolute values of the quotients of the directed numbers $((m):(-n))$ and $((p):(-q))$, that is with divisors (in $\mathfrak{G}_1$ and $\mathfrak{G}_2$) both negatively signed, and with $(\pm v)$ as second intermediary added.

With $(m+p)>(-n-q)$,

$$..0..\quad (m):(-n)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_1,\ \sigma_1,=(m:-n),$$
$$..0..\quad (p):(-q)\quad ..0..\quad \mathfrak{G}_2,\ \sigma_2=(p:-q),$$

$$..0..\ (m+p)+(-n-q)\ ..0..\ \mathfrak{G}_3,\ \sigma_3=(m+p)+(-n-q),\ M_3=s;$$

$s \overset{\circ}{\to} -s$
$-s-(m:-n)=\pm t,$
$-s-(p:-q)=\pm u,$
$(\pm t)-(\pm u)=\pm v,$
$(\pm v-((m):(-n)))=\pm w,$
$(\pm v-((p):(-q)))=\pm y,$
$|w|-|y|=z.$

Esempio con numeri non letterali.

..0..	(16) : (−4)	..0..	$\mathfrak{S}_1$, σ_1,=(16 : −4), $M_1=-4$,
..0..	(15) : (−3)	..0..	$\mathfrak{S}_2$, σ_2 =(15 : −3), $M_2=-5$,
..0..	31 − 7	..0..	$\mathfrak{S}_3$, σ_3 =(31−7), $M_3=24$;

$24 \overset{\nu}{\rightarrow} -24$
$-24-(16 : -4)=-20,$
$-24-(15 : -3)=-19,$
$(-20)+(-19)=-39,$
$-39-4=-43,$
$-39-5=-44,$
$|43|-|44|=1$ (differenza fra i valori assoluti dei quozienti σ_1 e σ_2 con intermediari −24 e −39).

Definizione 4. Negli insiemi finiti, numeri relativi frazionari, radicali e potenze si dispongono in modo che derivi sempre un $\mathfrak{S}_3$ che consenta di calcolare la differenza fra il σ_1 di $\mathfrak{S}_1$ ed il σ_2 di $\mathfrak{S}_2$, con estensibilità ad almeno un intermediario aggiunto.

Corollario 4. Negli insiemi finiti c'è sempre un numero relativo posto come intermediario fra prodotti o quozienti di numeri relativi, se esiste complementarietà fra σ_1, σ_2, σ_3 e quando esista un altro numero intermediario.

21. NUMERI RELATIVI ESPONENZIALI E CALCOLO DEGLI INCREMENTI

Regola 1. Nell'universo esiguo, ogni numero relativo può essere elevato a potenza da termini (esponenti) che rappresentano anch'essi numeri relativi minori di f, tali che l'elevamento a potenza del numero che costituisce la base della potenza sia ancora minore di f.

In $\mathfrak{U}$ ogni elevamento a potenza dei termini in $\mathfrak{S}$ esclude esponenti maggiori di f e basi maggiori di a e di b (con b^b). Per cui si scrive:

Example with non-literal numbers.

..0..	(16) : (−4)	..0..	$\mathfrak{G}_1$, σ_1,=(16 : −4), $M_1=-4$,
..0..	(15) : (−3)	..0..	$\mathfrak{G}_2$, σ_2 =(15 : −3), $M_2=-5$,
..0..	31−7	..0..	$\mathfrak{G}_3$, σ_3 =(31−7), $M_3=24$;

$24 \overset{\vee}{\rightarrow} -24$
$-24-(16 : -4)=-20,$
$-24-(15 : -3)=-19,$
$(-20)+(-19)=-39,$
$-39-4=-43,$
$-39-5=-44,$
$|43|-|44|=1$ (difference between the absolute values of the quotients σ_1 and σ_2 with −24 and −39 as intermediaries).

Definition 4. In the finite distributions, fractional directed numbers, roots and powers are arranged in such a way that there always derives a $\mathfrak{G}_3$ which makes it possible to calculate the difference between σ_1 of $\mathfrak{G}_1$ and σ_2' of $\mathfrak{G}_2$, by the application of at least one added intermediary.

Corollary 4. In finite arrangements there is always a directed number which is assumed as intermediary between products and quotients of directed numbers, if complementarity exists among σ_1, σ_2, σ_3 and provided there exists another intermediary number.

21. EXPONENTIAL DIRECTED NUMBERS AND COMPUTATION OF INCREMENTS

Rule 1. In the small universe every directed number can be raised to a power by terms (exponents) that are also directed numbers less than *f*, such that the power of the number representing the base is still less than *f*.

In $\mathfrak{U}$ when any terms in $\mathfrak{G}$ are raised to a power there cannot be indices greater than *f* or bases greater than *a* and *b* (with b^b). We thus write:

$$a^0 = a;$$

$$a^a \; ; a^{-a} = \frac{1}{a^a} \; ;$$

$$a^b \; ; a^{-b} = \frac{1}{a^b} \; ;$$

$$a^f \; ; a^{-f} = \frac{1}{a^f} \; ;$$

$$b^0 = a;$$

$$b^a = b \; ; b^{-a} = \frac{1}{b^a} \; ;$$

$$b^b = d \; ; b^{-b} = \frac{1}{b^b} \; ;$$

$$c^0 = a;$$

$$c^a = c \; ;$$

$$c^{-a} = \frac{1}{c^a} \; ;$$

$$d^0 = a \; ;$$

$$d^a = d \; ; d^{-a} = \frac{1}{d^a} \; ;$$

$$e^0 = a \; ;$$

$$e^a = e \; ; e^{-a} = \frac{1}{e^a} \; ;$$

$$f^0 = a \; ;$$

$$f^a = f \; ; f^{-a} = \frac{1}{f^a} \, .$$

Ad ogni a di $\mathfrak{U}$ appartengono, inoltre, esponenti della forma frazionaria

$$a^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{a} \; \ldots ; \; a^{\frac{1}{f}} = \sqrt[f]{a} \; .$$

$$a^0 = a;$$

$$a^a \; ; \; a^{-a} = \frac{1}{a^a} \; ;$$

$$a^b \; ; \; a^{-b} = \frac{1}{a^b} \; ;$$

$$a^f \; ; \; a^{-f} = \frac{1}{a^f} \; ;$$

$$b^0 = a;$$

$$b^a = b \; ; \; b^{-a} = \frac{1}{b^a} \; ;$$

$$b^b = d \; ; \; b^{-b} = \frac{1}{b^b} \; ;$$

$$c^0 = a;$$

$$c^a = c \; ;$$

$$c^{-a} = \frac{1}{c^a} \; ;$$

$$d^0 = a \; ;$$

$$d^a = d \; ; \; d^{-a} = \frac{1}{d^a} \; ;$$

$$e^0 = a \; ;$$

$$e^a = e \; ; \; e^{-a} = \frac{1}{e^a} ;$$

$$f^0 = a \; ;$$

$$f^a = f \; ; \; f^{-a} = \frac{1}{f^a} .$$

Furthermore every a of $\mathfrak{U}$ has fractional exponents such as the following

$$a^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{a} \; . \; . \; ; \; a^{\frac{1}{f}} = \sqrt[f]{a} \; .$$

Lemma 1. Se da a^a si va nella direzione di a^{a+a}, a^{a+b}, a^{a+c}, diremo che a aumenta rispetto alle sue potenze.

Definizione 1. In $\mathfrak{U}$, esiste un f che rappresenta l'ultimo aumento possibile degli esponenti di a. Quel numero è il limite massimo dell'esponenziazione di a nella $\mathfrak{G}$ di $\mathfrak{U}$.

Teorema 1. Si indica, in un universo finito però maggiore di $\mathfrak{U}$, con $\overset{n+b}{\underset{n+a}{l_m}}$ la differenza dell'incremento degli esponenti di m, da m^{n+a}a m^{n+b}. Scriveremo

$$\overset{n+b}{\underset{n+a}{l_m}} = ((n+b)-(n+a)) = (b-a).$$

Si dice allora che l'incremento di m è uguale alla differenza fra i suoi esponenti.

Esempio.

Da c^{n+c} a c^{n+f} la differenza degli esponenti è

$$\overset{n+f}{\underset{n+c}{l_c}} = ((n+f)-(n+c) = (f-c).$$

Si legge $(f-c)$ l'incremento di c da $(n+c)$ a $(n+f)$.

Definizione 2. Dicesi incremento di un numero relativo, in un insieme finito, la differenza fra gli esponenti di quel numero compresa nel valore $\overline{M}$ dell'insieme.

Corollario 1. Esiste sempre un sottoinsieme finito M in cui gli elementi esponenziali hanno incrementi minori di $\overline{M}$.

Lemma 1. If from a^a one goes in the direction of a^{a+a}, a^{a+b}, a^{a+c}, we may say that a increases with respect to its powers.

Definition 1. In $\mathfrak{U}$, there exists an f that represents the last possible exponentiation of the indices of a. That number is said to be the upper indexing bound of a in the line $\mathfrak{G}$ of $\mathfrak{U}$.

Theorem 1. In a universe that is finite but greater than $\mathfrak{U}$, the difference between the indices of m, from m^{n+a} to m^{n+b}, is indicated by $\overset{n+b}{\underset{n+a}{l_m}}$. We shall write

$$\overset{n+b}{\underset{n+a}{l_m}} = ((n+b)-(n+a)) = (b-a).$$

We can say that the increment of m is equal to the difference between its indices.

Example.

From c^{n+c} to c^{n+f} the difference between the indices is

$$\overset{n+f}{\underset{n+c}{l_c}} = ((n+f)-(n+c) = (f-c).$$

The increment of c from $(n+c)$ to $(n+f)$ reads as $(f-c)$.

Definition 2. In a finite distribution, the difference between the exponents of a directed number comprised within the value $\overline{\mathrm{M}}$ of the arrangement is called the increment of that number.

Corollary 1. There is always a finite subgroup M in which the indices have increments less than $\overline{\mathrm{M}}$.

Lemma 2. Sono operazioni di misura della differenza di incremento l fra esponenti di e:

$$e^{n+b} \;..\; e^{n+d}$$

$$\overset{n+d}{\underset{n+b}{l_e}} = ((n+d)-(n+b)) = (d-b);$$

$$e^{n+a} \;..\; e^{n+e}$$

$$\overset{n+e}{\underset{n+a}{l_e}} = ((n+e)-(n+a)) = (e-a).$$

Definizione 3. Il numero che ha esponente $\overline{M}$ indica in $\overline{M}$ il limite per il calcolo degli incrementi.

Teorema 2. Supponiamo che un corpo P si muova alla velocità e^n (dove e è un numero determinato ed ^{n} il suo esponente). Si supponga che la velocità del corpo P aumenti nel momento t_x, in modo che la velocità stessa si scriva e^{n+a}. Si ammetta che in t_{x+a} la velocità di P sia maggiore e la si misuri con e^{n+f}. La differenza degli esponenti di e ovvero $((n+a)$ e $(n+f))$ è l'incremento che si riferisce ad e in quanto stabilisce l'aumento di accelerazione $e^{\cdot\cdot}$ di P. Quella differenza appartiene alla relazione fra gli esponenti di e, indipendentemente da e. La differenza fra esponenti risulta così misura dell'incremento di esponenti abasici, ossia di esponenti per i quali occorre provvisoriamente prescindere dalla base, perché chi calcola valuta solo la misura dell'aumento esponenziale.

Teorema 3. In un insieme finito maggiore di $\mathfrak{U}$, per stabilire l'incremento esponenziale di m, rispetto a m, in due posizioni (o momenti) di m, corrispondenti ad aumenti di misura di un oggetto P, si procede per differenza fra le posizioni o momenti di m.

Con

$$\overset{n+q}{\underset{n+p}{l_m}}$$

Lemma 2. Operations in order to calculate the difference between exponential increments of e are the following:

$$e^{n+b} \;..\; e^{n+d}$$

$$\overset{n+d}{\underset{n+b}{l_e}} = ((n+d)-(n+b)) = (d-b);$$

$$e^{n+a} \;..\; e^{n+e}$$

$$\overset{n+e}{\underset{n+a}{l_e}} = ((n+e)-(n+a)) = (e-a).$$

Definition 3. When the exponent of a number is $\overline{M}$, then $\overline{M}$ is the bound for reckoning the increments.

Theorem 2. Let us suppose that a body P is moving at the speed of e^n (where e is a definite number and ^{n} its exponent). Then suppose that the speed of the body P is increasing at time t_x, in such a way that the velocity is now e^{n+a}. Let us assume finally that at t_{x+a} P's velocity is still greater, that is e^{n+f}. The difference between the indices of e, i.e. $((n+a)$ and $(n+f))$ represents the increment which refers to e in that it establishes the increasing acceleration $e^{\cdot\cdot}$ of P. Such a difference is computed on the basis of the relationship between the indices of e, i.e. independently of e itself. The difference between indices corresponds to the amount of increment that refers to the exponents alone, that is leaving aside provisorily the basic values: the calculator is solely interested in assessing the degree of exponential increase.

Theorem 3. In a finite distribution greater than $\mathfrak{U}$, in order to establish the exponential increment of m, with respect to m, at two positions (or moments) of m, corresponding to increasing values of an object P, one proceeds by calculating the difference between the positions or moments of m.

With $\overset{n+q}{\underset{n+p}{l_m}}$

si indica l'incremento degli esponenti di m, con

$$m^{n+p} \,.\,.\, m^{n+q}\,.$$

Si scrive

$$\overset{n+q}{\underset{n+p}{l_m}} = ((n+q)-(n+p)) = (q-p),$$

e $(q-p)$ è la differenza fra gli esponenti.

Esempio.

Con $(p=5)$ e $(q=8)$, $\overset{n+8}{\underset{n+5}{l_m}}$ indica quante volte è stato incrementato m, da m^{n+p} a m^{n+q}. Esso indica anche il rapporto fra gli esponenti abasici aumentati.

$$\overset{n+8}{\underset{n+5}{l_m}} = ((n+8)-(n+5)) = 3.$$

Regola 2. Per stabilire l'incremento esponenziale abasico $(n+p) \rightarrow ((n+p)+a)$ di m, potremo prescindere da m e considerare la differenza fra $(n+p)$ e $((n+p)+a)$. Con $+a$ viene indicato il passaggio da m^{n+p} a $m^{(n+p)+a}$,

$$((n+p)+a)-(n+p) = a.$$

Osservazione 1. Per ogni m, in un insieme finito maggiore di $\mathfrak{U}$, si hanno anche decrementi abasici degli esponenti.

Definizione 4. Dicesi decremento abasico degli esponenti da $r^p \rightarrow r^{p-n}$ la differenza esponenziale quando è espressa indipendentemente da r.

Teorema 4. Indichiamo con $\overset{(n+p)-a}{\underset{n+p}{d_m}}$ il decremento degli espo-

the exponential increment of m is indicated by the relationship

$$m^{n+p} \,.\,.\, m^{n+q}.$$

We write

$$\overset{n+q}{\underset{n+p}{l_m}} = ((n+q)-(n+p)) = (q-p),$$

where $(q-p)$ is the difference between the indices of m.

Example.

With $(p=5)$ and $(q=8)$, $\overset{n+8}{\underset{n+5}{l_m}}$ indicates how many times m has been increased, from m^{n+p} to m^{n+q}. It also indicates the relationship between the increased a-basic exponents.

$$\overset{n+8}{\underset{n+5}{l_m}} = ((n+8)-(n+5)) = 3.$$

Rule 2. In order to establish the a-basic exponential increment $(n+p) \rightarrow ((n+p)+a)$ of m, it is possible to leave aside m and only consider the difference between $(n+p)$ and $((n+p)+a)$. By $+a$ we indicate the passage from m^{n+p} to $m^{(n+p)+a}$,

$$((n+p)+a)-(n+p) = a.$$

Observation 1. For each m, in a finite arrangement greater than $\mathfrak{U}$, there are also a-basic decrements of the indices.

Definition 4. The a-basic decrement of the indices from $r^p \rightarrow r^{p-n}$ is called the exponential difference when it is expressed independently of r.

Theorem 4. Let $\overset{(n+p)-a}{\underset{n+p}{d_m}}$ be the exponential decrement of m in a

nenti di m in un universo finito maggiore di $\mathfrak{U}$, che indichiamo con $\mathfrak{U}_n$. Si calcola il decremento degli esponenti di m in $\mathfrak{U}_n > \mathfrak{U}$, $m^{n+p} \,..\, m^{(n+p)-a}$

$$\overset{(n+p)-a}{\underset{n+p}{d_m}} = (((n+p)-a)-(n+p)) = -a.$$

Segue un esempio di decremento esponenziale in forma numerica non letterale:

$$s^{n+6} \,..\, s^{(n+6)-2}, \quad \overset{(n+6)-2}{\underset{n+6}{d_s}} = (((n+6)-2)-(n+6)) = -2.$$

Corollario 2. Diremo che fra gli esponenti $(n+6)$ e $((n+6)-2)$ di m esiste un decremento abasico (-2).

Osservazione 2. Sono possibili altri modi di operazioni con decrementi di incrementi del tipo

$$r^{n+m} \,..\, r^{((n+m)+a)-b}.$$

Definizione 5. Si dice incremento nullo ($\mathfrak{i}$) di esponenti incrementati la differenza degli esponenti di una stessa base, se al primo ed al secondo incermento esponenziale abasico ($\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{i}_2$) si aggiunge rispettivamente uno stesso numero relativo.

Definizione 6. Diremo decremento nullo ($\mathfrak{d}$) il rapporto fra gli esponenti di una stessa base, se al primo e al secondo decremento esponenziale ($d_1 = d_2$) si aggiunge, o toglie, rispettivamente uno stesso numero relativo.

Corollario 3. Incrementi e decrementi nulli definiscono lo 0 come misura dell'aumento o della diminuzione di numeri esponenziali in $\mathfrak{i}$ e in d:

$$\mathfrak{i}_r = 0; \qquad \mathfrak{d}_r = 0.$$

finite universe greater than $\mathfrak{U}$, which we indicate by $\mathfrak{U}_n$. The decrement of m's indices in $\mathfrak{U}_n > \mathfrak{U}$, $m^{n+p} \,..\, m^{(n+p)-a}$ is then calculated

$$\overset{(n+p)-a}{\underset{n+p}{d_m}} = (((n+p)-a)-(n+p)) = -a.$$

An example follows of exponential decrement by non-literal numbers:

$$s^{n+6} \,..\, s^{(n+6)-2}, \quad \overset{(n+6)-2}{\underset{n+6}{d_s}} = (((n+6)-2)-(n+6)) = -2.$$

Corollary 2. We may say that there exists an a-basic decrement (-2) between the indices $(n+6)$ and $((n+6)-2)$ of m.

Observation 2. Other operations are possible with decrements of increments of the type

$$r^{n+m} \,..\, r^{((n+m)+a)-b}.$$

Definition 5. The difference between exponents of one and the same base is said to be nil increment ($\mathfrak{t}$) of increased indices ($l_1 = l_2$), if one and the same directed number is respectively added to them.

Definition 6. The relation between indices of one and the same base is said to be a nil decrement ($\mathfrak{d}$) if the first and second exponential decrement ($d_1 = d_2$) have the same directed number respectively added or subtracted.

Corollary 3. Nil increments and nil decrements define 0 as the measure of increasing or decreasing exponents in l and in d:

$$\mathfrak{t}_r = 0; \qquad \mathfrak{d}_r = 0.$$

Esempio.

$$\underset{(((n+m)+a)+s)}{\overset{(((n+m)+a)+s)}{t_r}} = (((n+m)+a)+s)-((n+m)+a)+s) = (s-s);$$

$$\underset{(((n+m)+a)-s)}{\overset{(((n+m)+a)-s)}{d_r}} = (((n+m)+a)-s)-((n+m)+a)-s) = (-s+s).$$

Corollario 4. I numeri relativi promuovono incrementi, decrementi, incrementi di incrementi, decrementi di incrementi, incrementi (e decrementi) nulli, nella distribuzione dei termini esponenziali abasici.

Lemma 3. Posto che il decremento, nell'universo esiguo $\mathfrak{U}$, per ogni numero relativo $\pm\ a$, si esprime nella forma

$$\underset{a+x}{\overset{(a+x)-y}{d_a}} = (((a+x)-y)-(a+x)) = -y,$$

con

$$(a+x) < f \wedge ((a+x)-y) < (a+x),$$

e si dirà decremento di un incremento il rapporto:

$$\frac{\left(\underset{(a+x)}{\overset{((a+x)-y)}{d_r}}\right)}{\left(\underset{(n+m)+a}{\overset{((n+m)+a)+x}{l_r}}\right)}$$

che si scrive:

$$l_r^{d_r} = (((n+m)+a)+x)-((n+m)+a)^{((a+x)-y)-(a+x)} = x^{-y}$$

Corollario 5. Sono possibili incrementi di numeri esponenziali decrementati:

Example.

$$\underset{(((n+m)+a)+s)}{\overset{(((n+m)+a)+s)}{t_r}} = (((n+m)+a)+s)-((n+m)+a)+s) = (s-s);$$

$$\underset{(((n+m)+a)-s)}{\overset{(((n+m)+a)-s)}{d_r}} = (((n+m)+a)-s)-((n+m)+a)-s) = (-s+s).$$

Corollary 4. Directed numbers promote increments, decrements, increments of increments, decrements of increments, nil increments (and decrements), within the distribution of a-basic exponential terms.

Lemma 3. Since the decrement, in the small universe $\mathfrak{U}$, for every directed number $\pm\ a$, is expressed in the form

$$\underset{a+x}{\overset{(a+x)-y}{d_a}} = (((a+x)-y)-(a+x)) = -y$$

with

$$(a+x) < f \setminus ((a+x)-y) < (a+x),$$

and the following expression will be said to be a decrement of an increment:

$$\left[\underset{(n+m)+a}{\overset{((n+m)+a)+x}{l_r}}\right]^{\left[\underset{(a+x)}{\overset{((a+x)-y)}{d_r}}\right]}$$

which is written:

$$l_r^{d_r} = (((n+m)+a)+x)-((n+m)+a)^{((a+x)-y)-(a+x)} = x^{-y}$$

Corollary 5. Increments are possible for decremented exponential numbers:

$$\begin{pmatrix} ((n+m)+a)+x \\ l_r \\ (n+m)+a \end{pmatrix}^{\begin{pmatrix} (a+x)-y \\ d_r \\ (a+x) \end{pmatrix}^{\begin{pmatrix} (a+b)+z \\ l_r \\ (a+b) \end{pmatrix}}}$$

$$l_r^{d_r^{l_r}} = (((n+m)+a)+x)-((n+m)+a)^{((a+x)-y)-(a+x)^{((a+b)+z)-(a+b)}}$$

Corollario 6. Sono possibili somme e differenze di incrementi e somme e differenze di incrementi con decrementi. Sono anche possibili somme e differenze fra decrementi incrementati di incrementi.

Lemma 4. Un incremento può essere espresso attraverso il segno di moltiplicazione. Un decremento è esprimibile con il segno di divisione.

Corollario 7. Sono possibili radici di numeri esponenziali abasici incrementati e decrementati.

Teorema 5.

Con

$$p^{n\times\frac{1}{r}} \,..\, p^{n\times\frac{1}{t}} \,,$$

se $r<t$, $p^{n\times\frac{1}{r}}$ può essere scritto nella forma $\sqrt[r]{p^n}$, mentre $p^{n\times\frac{1}{t}}$ corrisponde a $\sqrt[t]{p^n}$.

Si porrà allora

$$l_{p^{n\times\frac{1}{t}}}^{n\times\frac{1}{r}} = (\sqrt[r]{n} - \sqrt[t]{n}\,).$$

$$\begin{pmatrix} (a+b)+z \\ l_r \\ (a+b) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (a+x)-y \\ d_r \\ (a+x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ((n+m)+a)+x \\ l_r \\ (n+m)+a \end{pmatrix}$$

$$l_r^{d_r^{l_r}} = (((n+m)+a)+x)-((n+m)+a)^{((a+x)-y)-(a+x)^{((a+b)+z)-(a+b)}}$$

Corollary 6. It is possible to reckon sums and differences of increments and sums and differences between increments and decrements. One can also compute sums and differences between decrements increased by increments.

Lemma 4. An increment can be expressed through the multiplication sign. A decrement may be expressed by means of the division sign.

Corollary 7. It is possible to reckon roots of decreased and increased a-basic indices.

Theorem 5.

With

$$p^{n\times\frac{1}{r}} \,..\, p^{n\times\frac{1}{t}},$$

if $r<t$, $p^{n\times\frac{1}{r}}$ can be written in the form $\sqrt[r]{p^n}$, while $p^{n\times\frac{1}{t}}$ corresponds to $\sqrt[t]{p^n}$.

We can then write

$$l_{p^{n\times\frac{1}{t}}}^{n\times\frac{1}{r}} = (\sqrt[r]{n} - \sqrt[t]{n}\,).$$

Esempio. Il rapporto esponenziale di $p^{n\times\frac{1}{3}}$ rispetto a $p^{n\times\frac{1}{6}}$ sarà

$$\overset{n\times\frac{1}{6}}{\underset{n\times\frac{1}{3}}{d_p}} = (\sqrt[6]{n} - \sqrt[3]{n}).$$

Definizione 7. Ogni incremento, o decremento, in $\mathfrak{U}$ di esponenti frazionari (oppure in un insieme finito maggiore di $\mathfrak{U}$), è la differenza di radici il cui radicando è dato dal denominatore dell'esponente frazionario.

Lemma 5. Forme di incremento di incrementi si possono scrivere elevando a potenza le potenze (incrementate).

Esempio.

$$m^{(n+a)^{(n+b)}} \ldots m^{(n+c)^{(n+d)}};$$

$$\overset{(n+c)^{(n+d)}}{\underset{(n+a)^{(n+b)}}{l_m}} = ((n+c)^{(n+d)} - (n+a)^{(n+b)}).$$

Teorema 6. Supponiamo che un corpo si muova nello spazio ad una velocità p^{n+a} in t_1, velocità che, in prossimità di t_2, tenda ad un potenziamento, e che aumenti ancora in t_3. Esiste allora un istante t_n, in cui l'incremento dell'esponente si arresta o trapassa in δ.

$$\overset{n+\bar{M}}{\underset{n+a}{l_p}} = \delta$$

Lemma 6. Potremo calcolare un incremento se va verso δ, ma si esaurisce in $\bar{M}$.

Example. The exponential relation of $p^{n\times\frac{1}{3}}$ with respect to $p^{n\times\frac{1}{6}}$ will be

$$\underset{n\times\frac{1}{3}}{\overset{n\times\frac{1}{6}}{d_p}} = (\sqrt[6]{n} - \sqrt[3]{n}).$$

Definition 7. Every increment or decrement of fractional indices in $\mathfrak{U}$ (or in a finite distribution greater than $\mathfrak{U}$), is the difference of roots whose radicand is given by the denominator of the fractional index.

Lemma 5. Increments of increments can be written by raising the (already incremented) indices to a power.

Example.

$$m^{(n+a)^{(n+b)}} \ldots m^{(n+c)^{(n+d)}};$$

$$\underset{(n+a)^{(n+b)}}{\overset{(n+c)^{(n+d)}}{l_m}} = ((n+c)^{(n+d)} - (n+a)^{(n+b)}).$$

Theorem 6. A body is moving in space at a speed of p^{n+a} at t_1, this velocity, in the vicinity of t_2, tends to increase, and increases still further at t_3. There thus exists an instant t_n, during which the increment of the exponent stops or passes on into δ.

$$\underset{n+a}{\overset{n+\bar{M}}{l_p}} = \delta$$

Lemma 6. It is possible to reckon an increment if it goes towards δ, but is confined within $\bar{M}$.

Corollario 8. Se l'incrementando

$$p^{q^{n^{n \cdots}}}$$

interrompe l'universo finito, non vi è calcolo possibile, perché l'esponenziazione supera il sostegno $\overline{M}$, ed entra in δ.

Definizione 8. Diremo somme, differenze, prodotti e quozienti possibili fra incrementi o decrementi esponenziali abasici di un insieme finito, i risultati delle operazioni possibili in cui non appaia alcun numero indefinito δ ad interrompere la definitezza dell'insieme.

Corollario 9. I numeri relativi di un insieme finito introducono il limite dell'esponenziazione.

22. NUMERI RELATIVI MOLTIPLICATORI E DIVISORI

Definizione 1. Si chiama *numero relativo moltiplicatore* l'esponente calcolabile in rapporto ad un altro esponente abasico, in modo che risulti fattore dell'operazione.

Esempi.

Con

$$(m^{n+p}) \;..\; (m^{((n+p)+(\times s)}),$$

l'incremento esponenziale abasico è

$$\underset{n+p}{\overset{(n+p)+(\times s)}{l_m}} = (n+p)+(\times s)-(n+p)=(\times s),$$

e $(\times s)$è un numero esponenziale abasico moltiplicatore.

Corollary 8. If the incrementing index

$$p^{q^{n^{n \cdots}}}$$

interrupts the finite universe, no reckoning is possible, because the exponentiation exceeds the support $\bar{M}$ entering into δ.

Definition 8. The results of the possible operations in which no indefinite number δ occurs to interrupt the determinacy of the distribution are defined as sums, differences, products and quotients between a-basic exponential increments or decrements in a finite arrangement.

Corollary 9. The directed numbers in a finite distribution introduce a bound to exponentiation.

22. NUMBERS DIRECTED BY THE SIGNS $\times$ AND :

Definition 1. We may define as a *directed multiplying number* the index that is calculated in relation to another a-basic index, in such a way as to appear as a term bearing the multiplication sign.

Examples.

With

$$(m^{n+p}) \;..\; (m^{((n+p)+(\times \mathbf{s})}),$$

the a-basic exponential increment is

$$\overset{(n+p)+(\times \mathbf{s})}{\underset{n+p}{l_m}} = (n+p)+(\times \mathbf{s})-(n+p)=(\times \mathbf{s}),$$

and $(\times \mathbf{s})$ is an a-basic exponential multiplying number.

Con

$$m^{(n+p+r)^{n^{(n+q)}}} \,..\, m^{\left((n+p+r)^{n^{(n+q)}}\right)\times(r+t)}$$

l'incremento esponenziale moltiplicatore abasico è

$$\times(r+t)=\times\mathbf{u}.$$

I numeri $(\times(p+q))$ e $(\times(r+t))$, che si scrivono rispettivamente $(\times\mathbf{s})$ e $(\times\mathbf{u})$, si chiamano *numeri relativi moltiplicatori* e indicano un incremento nella distribuzione esponenziale abasica.

Corollario 1. Numeri esponenziali moltiplicatori abasici, che indichiamo con $(\times\mathbf{s})$, $(\times\mathbf{t})$, $(\times\mathbf{u})$, $(\times\mathbf{v})$, $(\times\mathbf{w})$, $(\times\mathbf{z})$, sono quei numeri relativi che stanno in rapporto moltiplicatorio con altri numeri dell'incremento allineati esponenzialmente.

Lemma 1. Ci sono anche *numeri relativi divisori*.

Definizione 2. I numeri relativi divisori sono numeri che hanno come proprietà il segno della divisione.

Esempio.

$$r^{(n+q)} \,..\, r^{(n+q)+(:\mathbf{s})};\ d=(n+q)+(:\mathbf{s})-(n+q)=(:\mathbf{s})$$

Lemma 2. Numeri moltiplicatori e divisori del tipo $(\times\mathbf{s})$ e $(:\mathbf{t})$, nell'esponenziazione

$$((n+p+r^n+q)+(\times\mathbf{s})$$

e

$$((n+p+r^n+q+r)+(:\mathbf{t}),$$

Given

$$m^{(n+p+r)^{n^{(n+q)}}} \,..\, m^{\left((n+p+r)^{n^{(n+q)}}\right)\times(r+t)}$$

the a-basic exponential multiplying increment is

$$\times(r+t)=\times\mathbf{u}.$$

The numbers $(\times(p+q))$ and $(\times(r+t))$, which are respectively written $(\times\mathbf{s})$ and $(\times\mathbf{u})$, are called directed multiplying numbers and indicate an increment in the a-basic exponential distribution.

Corollary 1. A-basic exponential multiplying numbers, which we indicate by $(\times\mathbf{s})$, $(\times\mathbf{t})$, $(\times\mathbf{u})$, $(\times\mathbf{v})$, $(\times\mathbf{w})$, $(\times\mathbf{z})$, are those directed numbers that stand in a multiplicatory relationship with other exponentially aligned numbers of the increment.

Lemma 1. There are also *numbers directed by the sign of division.*

Definition 2. Dividing numbers are numbers possessing the division sign as a property.

Example.

$$r^{(n+q)} \,..\, r^{(n+q)+(:\mathbf{s})};\ d=(n+q)+(:\mathbf{s})-(n+q)=(:\mathbf{s})$$

Lemma 2. Multiplying and dividing numbers of the $(\times\mathbf{s})$ and $(:\mathbf{t})$ type in the exponential expressions

$$((n+p+r^n+q)+(\times\mathbf{s})$$

and

$$((n+p+r^n+q+r)+(:\mathbf{t}),$$

possono essere addizionati o sottratti fra loro.

Esempio.

$$(\times \mathbf{t}) \pm (\times \mathbf{s});$$
$$(:\mathbf{t}) \pm (:\mathbf{s}).$$

Lemma 3. Si applicano ai numeri relativi moltiplicatori e divisori nuove regole dei segni che sono esposte nel cap. 23.

Lemma 4. I numeri relativi divisori sono numeri esponenziali decrementanti abasici, che possono essere indicati con (: **s**), (: **t**), (: **u**), (: **v**), (: **w**), (: **z**). Sono numeri che stanno in rapporto con altri numeri, per stabilire un decremento successivo ad un incremento.

Esempio di differenza fra valori esponenziali decrementati abasici, con introduzione di un numero relativo divisore:

$$\underset{(n+p+r^{n^2}+q)}{\overset{((+n+p+r^{n^2}+q)+(:\mathbf{s})}{d_m}} = (n+p+r^{n^2}+q)+(:\mathbf{s})-(n+p+r^{n^2}+q)=(:\mathbf{s})$$

Lemma 5. I numeri esponenziali relativi moltiplicatori e divisori possono essere addizionati, sottratti, moltiplicati, divisi fra loro, per mezzo di nuove regole che predispongono i mutamenti dei segni.

Teorema 1. Dati $(\times \mathbf{s}) \wedge (\times \mathbf{u})$, si procede alla loro somma, differenza, prodotto e se ne indica il quoziente.

Prova.

Scriveremo

can be added to or subtracted from each other.

Example.

$$(\times \mathbf{t}) \pm (\times \mathbf{s});$$
$$(:\mathbf{t}) \pm (:\mathbf{s}).$$

Lemma 3. New rules for signs apply to directed multiplying and dividing numbers, and these are set out in ch. 23.

Lemma 4. The dividing numbers are a-basic exponential decreasing numbers which can be indicated by (: **s**), (: **t**), (: **u**), (: **v**), (: **w**), (: **z**). They are numbers that stand in relationship with other numbers in order to establish a decrement following on an increment.

Example of difference between a-basic decreased exponential values, with the introduction of a number directed by " : "

$$\underset{(n+p+r^{n^2}+q)}{d_m}{}^{((+n+p+r^{n^2}+q)+(:\mathbf{s})} = (n+p+r^{n^2}+q)+(:\mathbf{s})-(n+p+r^{n^2}+q)=(:\mathbf{s})$$

Lemma 5. Exponential numbers directed by $\times$ and : can be added, subtracted, multiplied and divided among them by means of new rules which lay down the changes in sign.

Theorem 1. Given $(\times \mathbf{s}) \wedge (\times \mathbf{u})$, one obtains their sum, difference or product and indicates their quotient.

Proof.

We shall write

$$(\times \mathbf{s})+(\times \mathbf{u})=\times(\mathbf{s}+\mathbf{u}),$$

perché

$$((\times \mathbf{s})+(\times \mathbf{u})-(\times \mathbf{u}))=\times \mathbf{s},$$

dal momento che si scrive anche

$$(\times \mathbf{s})-(\times \mathbf{u})=\times(\mathbf{s}-\mathbf{u}),$$

in quanto

$$(\times \mathbf{s})-(\times \mathbf{u})+(\times \mathbf{u})=(\times \mathbf{s}).$$

Si ha

$$(\times \mathbf{s})\times(\times \mathbf{u})=(\times \mathbf{z}),$$

perché

$$(\times \mathbf{z}):(\times \mathbf{u})=(\times \mathbf{s}),$$

e si ottiene

$$(\times \mathbf{s}) \quad \frac{\llcorner\ (\times \mathbf{u})}{(\times \mathbf{z})},$$

in quanto, dalla prova della divisione, appunto,

$$(\times \mathbf{z})\times(\times \mathbf{u})=(\times \mathbf{s}).$$

Lemma 6. Scriveremo inoltre

$$(:\mathbf{s})+(:\mathbf{z})=:(\mathbf{s}+\mathbf{z}),\ (\sim:\mathbf{u});$$
$$(:\mathbf{s})-(:\mathbf{t})=:(\mathbf{s}-\mathbf{t}),\ (\sim:-\mathbf{w});$$

e

$$(\times \mathbf{u})\times(:\mathbf{z})=(:\mathbf{v}),$$

$$(\times \mathbf{s})+(\times \mathbf{u})=\times(\mathbf{s}+\mathbf{u}),$$

since

$$((\times \mathbf{s})+(\times \mathbf{u})-(\times \mathbf{u}))=\times \mathbf{s},$$

and we also write

$$(\times \mathbf{s})-(\times \mathbf{u})=\times(\mathbf{s}-\mathbf{u}),$$

because

$$(\times \mathbf{s})-(\times \mathbf{u})+(\times \mathbf{u})=(\times \mathbf{s}).$$

We have

$$(\times \mathbf{s})\times(\times \mathbf{u})=(\times \mathbf{z}),$$

since

$$(\times \mathbf{z}) : (\times \mathbf{u})=(\times \mathbf{s}),$$

and we obtain

$$(\times \mathbf{s}) \quad \frac{\llcorner (\times \mathbf{u})}{(\times \mathbf{z})},$$

since, from the cross-check of division, we indeed find

$$(\times \mathbf{z})\times(\times \mathbf{u})=(\times \mathbf{s}).$$

Lemma 6. We also write

$$(: \mathbf{s})+(: \mathbf{z})= : (\mathbf{s}+\mathbf{z}),\ (\sim : \mathbf{u});$$
$$(: \mathbf{s})-(: \mathbf{t})= : (\mathbf{s}-\mathbf{t}),\ (\sim : -\mathbf{w});$$

and

$$(\times \mathbf{u})\times(: \mathbf{z})=(: \mathbf{v}),$$

perché

$$\frac{\begin{array}{c}(\times\mathbf{u})\times\\(:\mathbf{z})\end{array}}{(:\mathbf{v})} \qquad \frac{(:\mathbf{z})}{(\times\mathbf{u})}.$$

Poi

$$((:\mathbf{s})\times(\times\mathbf{t}))=(:\mathbf{u}),$$

in quanto

$$\frac{\begin{array}{c}(:\mathbf{s})\times\\(\times\mathbf{t})\end{array}}{(:\mathbf{u})} \qquad \text{e} \qquad (:\mathbf{u}) \quad \frac{(\times\mathbf{t})}{(:\mathbf{s})},$$

come

$$((:\mathbf{s}):(:\mathbf{z}))=(\times\mathbf{t}),$$

perché

$$(:\mathbf{s}) \quad \frac{(:\mathbf{z})}{(\times\mathbf{t})} \qquad \text{e} \qquad ((\times\mathbf{t})\times(:\mathbf{z}))=(:\mathbf{s}).$$

Esempi con numeri non letterali.

$$((\times 15)+(\times 10))=\times(15+10)=(\times 25)$$
$$((\times 15)-(\times 10))=\times(15-10)=(\times 5)$$
$$((:15)-(:10))=:(15-10)=(:5)$$
$$((:15)+(:10))=:(15+10)=(:25)$$
$$((\times 15)\times(\times 10))=\times(15\times 10)=(\times 150)$$

because

$$\frac{\begin{array}{l}(\times\mathbf{u})\times\\(:\mathbf{z})\end{array}}{(:\mathbf{v})} \quad \frac{(:\mathbf{z})}{(\times\mathbf{u})}.$$

Then

$$((:\mathbf{s})\times(\times\mathbf{t}))=(:\mathbf{u}),$$

since

$$\frac{\begin{array}{l}(:\mathbf{s})\times\\(\times\mathbf{t})\end{array}}{(:\mathbf{u})} \quad \text{and} \quad (\mathbf{u}) \quad \frac{(\times\mathbf{t})}{(:\mathbf{s})},$$

just as

$$((:\mathbf{s}):(:\mathbf{z}))=(\times\mathbf{t}),$$

because

$$(:\mathbf{s}) \quad \frac{(:\mathbf{z})}{(\times\mathbf{t})} \quad \text{and} \quad ((\times\mathbf{t})\times(:\mathbf{z}))=(:\mathbf{s}).$$

Examples with non-literal numbers.

$$((\times 15)+(\times 10))=\times(15+10)=(\times 25)$$
$$((\times 15)-(\times 10))=\times(15-10)=(\times\ 5)$$
$$((:15)+(:10))=\ :(15+10)=\ (:25)$$
$$((:15)-(:10))=\ :(15-10)=(:5)$$
$$((\times 15)\times(\times 10)=\times(15\times 10)=(\times 150)$$

Infatti,

$$\frac{\begin{matrix}(\times\ 15)\times\\(\times\ 10)\end{matrix}}{(\times 150)} \quad \text{e} \quad (\times 150)\ \underline{|\ (\times 10)}_{(\times 15)}\ .$$

Inoltre,

$$((\times 15) : (\times 10)) = \times (15 : 10)$$

dal momento che

$$(\times 15)\ \underline{|\ (\times 10)}_{(\times 1{,}5)} \quad \text{e} \quad \frac{\begin{matrix}(\times\ 1{,}5)\times\\(\times 10)\end{matrix}}{(\times 15)}\ ;$$

$$((\times 15)\times(\ :\ 10)) = \ :(15\times 10) = (\ :\ 150)$$

perché

$$\frac{\begin{matrix}(\times\ 15)\times\\(\ :\ 10)\end{matrix}}{(\ :\ 150)} \quad \text{e} \quad (\ :\ 150)\ \underline{|\ (\ :\ 10)}_{(\times 15)}\ ;$$

$$((\ :\ 15)\times(\times 10)) = \ :(15\times 10) = (\ :\ 150)$$

perché

$$\frac{\begin{matrix}(\ :\ \ 15)\times\\(\times\ 10)\end{matrix}}{(\ :\ 150)} \quad \text{e} \quad (\ :\ 150)\ \underline{|\ (\times 10)}_{(\ :\ 15)}\ ;$$

$$((\ :\ 15) : (\ :\ 10)) = \times (15 : 10) = (\times 1{,}5)$$

In fact,

$$\frac{\begin{matrix}(\times\ 15)\times\\(\times\ 10)\end{matrix}}{(\times 150)} \quad \text{and} \quad (\times 150)\ \frac{\llcorner\ (\times 10)}{(\times 15)}\ .$$

Furthermore,

$$((\times 15) : (\times 10)) = \ \times(15 : 10)$$

since

$$(\times 15)\ \frac{\llcorner\ (\times 10)}{(\times 1{,}5)} \quad \text{and} \quad \frac{\begin{matrix}(\times 1{,}5)\times\\(\times 10)\end{matrix}}{(\times 15)}\ ;$$

$$((\times 15)\times(\ :\ 10)) = \ :(15\times 10) = (\ :\ 150)$$

because

$$\frac{\begin{matrix}(\times\ 15)\times\\(:\ 10)\end{matrix}}{(:\ 150)} \quad \text{and} \quad (:\ 150)\ \frac{\llcorner\ (:\ 10)}{(\times 15)}\ ;$$

$$((\ :\ 15)\times(\times 10)) = \ :(15\times 10) = (\ :\ 150)$$

because

$$\frac{\begin{matrix}(:\ 15)\times\\(\times\ 10)\end{matrix}}{(:\ 150)} \quad \text{and} \quad (:\ 150)\ \frac{\llcorner\ (\times 10)}{(:\ 15)}\ ;$$

$$((\ :\ 15) : (\ :\ 10)) = \times(15 : 10) = (\times 1{,}5)$$

in quanto

$$(:15)\ \underline{\llcorner\ (:10)}_{(\times 1{,}5)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\begin{matrix}(\times 1{,}5)\times\\(:10)\end{matrix}}{(:15)}\ ;$$

$$((:15)\times(:10)) = \times(15\times 10) = (\times 150)$$

dal momento che

$$\frac{\begin{matrix}(:\ 15)\times\\(:\ 10)\end{matrix}}{(\times 150)} \qquad \text{e} \qquad (\times 150)\ \underline{\llcorner\ (:10)}_{(:15)}\ .$$

23. REGOLE DEI SEGNI DEI NUMERI RELATIVI MOLTIPLICATORI E DIVISORI

Lemma 1. Le regole dei segni dei numeri esponenziali abasici moltiplicatori e divisori sono le seguenti:

Se ad un numero moltiplicatore al segno ($\times$) si aggiunge il ($\times$) di un altro numero moltiplicatore, la somma porta il segno ($\times$);

se ad un numero divisore il segno (:) si aggiunge al (:) di un altro divisore, si ha, nella somma, il segno (:);

se da un numero moltiplicatore il segno ($\times$) si toglie a ($\times$), otteniamo la differenza con segno ($\times$);

se da un numero divisore si toglie un numero con segno (:), si ottiene la differenza con segno (:).

Inoltre,

since

$$(:15)\ \underline{\llcorner\ (:10)}_{(\times 1{,}5)} \qquad \text{and} \qquad \frac{\begin{array}{l}(\times\ 1{,}5)\times\\ (:10)\end{array}}{(:15)};$$

$$((:15)\times(:10)) = \times(15\times 10) = (\times 150)$$

since

$$\frac{\begin{array}{l}(:\ 15)\times\\ (:\ 10)\end{array}}{(\times 150)} \qquad \text{and} \qquad (\times 150)\ \underline{\llcorner\ (:10)}_{(:15)}$$

23. RULES FOR THE SIGNS OF DIRECTED MULTIPLYING AND DIVIDING NUMBERS

Lemma 1. The rules for the signs of a-basic exponential multiplying and dividing numbers are the following:

If a multiplying number ($\times$) is added to the sign ($\times$) of another multiplying number, the sum bears the sign ($\times$);

if a dividing number, (:) is added to the sign (:) of another dividing number, the sum bears the sign (:);

if ($\times$) is taken away from a multiplying number, we obtain the difference with the sign ($\times$);

if a number with the sign (:), is taken away from a dividing number the difference is obtained with the sign (:).

Besides,

$(\times)$ moltiplicato $(\times)$ dà $(\times)$;
$(\times)$ moltiplicato $(:)$ dà $(:)$;
$(:)$ moltiplicato $(\times)$ dà $(:)$;
$(:)$ diviso $(\times)$ dà $(:)$;
$(\times)$ diviso $(:)$ dà $(:)$;
$(:)$ diviso $(:)$ dà $(\times)$;
$(:)$ moltiplicato $(:)$ dà $(\times)$;
$(\times)$ diviso $(\times)$ dà $(\times)$.

Osservazione 1. Quando si addizionano o sottraggono numeri esponenziali abasici, i segni di moltiplicazione e di divisione restano uguali. I segni (di moltiplicazione e divisione) di numeri esponenziali abasici si possono moltiplicare e dividere reciprocamente. Allora, se sono entrambi segni di moltiplicazione, danno un segno di moltiplicazione; se sono entrambi segni di divisione, recano come risultato un segno di moltiplicazione.

Se il primo è un segno di moltiplicazione che divide un segno di moltiplicazione, il risultato è un segno di moltiplicato; il segno di divisione moltiplicato per il segno della moltiplicazione dà un segno di divisione. Invece il segno di divisione diviso o moltiplicato per il segno di divisione dà un segno di moltiplicazione.

Teorema 1. Diremo che $(\times):(\times)$ dà $(\times)$.

Prova.

Con $(\times 10):(\times 5)=\times 2$, si ha

$$\begin{array}{l|l} (\times 10) & (\times 5) \\ \hline & (\times 2) \end{array}$$

perché

$$(\times 2)\times(\times 5)=(\times 10).$$

$(\times)$ multiplied by $(\times)$ gives $(\times)$;
$(\times)$ multiplied by $(:)$ gives $(:)$;
$(:)$ multiplied by $(\times)$ gives $(:)$;
$(:)$ divided by $(\times)$ gives $(:)$;
$(\times)$ divided by $(:)$ gives $(:)$;
$(:)$ divided by $(:)$ gives $(\times)$;
$(:)$ multiplied by $(:)$ gives $(\times)$;
$(\times)$ divided by $(\times)$ gives $(\times)$.

Observation 1. When a-basic exponential numbers are added or subtracted, the signs of multiplication and division remain the same. The signs (of multiplication and of division) of a-basic exponential numbers can be reciprocally multiplied and divided. If both are signs of multiplication, they produce a sign of multiplication; if both are signs of division, they give as a result a sign $\times$.

If the first is a sign of multiplication which divides a sign of multiplication, the result is a sign of multiplication; the sign of division multiplied by the sign of multiplication gives a sign of division. On the other hand, the sign of division divided or multiplied by the sign of division gives a sign of multiplication.

Theorem 1. We shall say that $(\times):(\times)$ gives $(\times)$.

Proof.

With $(\times 10):(\times 5)=\times 2$, we have

$$(\times 10) \quad \frac{\llcorner\ (\times 5)}{(\times 2)}$$

because

$$(\times 2)\times(\times 5)=(\times 10).$$

Altri esempi con numeri non letterali.

$$(\times 10) : (: 5) = (: 2)$$

Prova.

$$(\times 10) \quad \underline{\llcorner \; (: 5)} \\ \quad\quad (: 2)$$

perché

$$(: 2) \times (: 5) = (\times 10);$$

$$(: 20) : (\times 10) = (: 2)$$

Prova.

$$(: 20) \quad \underline{\llcorner \; (\times 10)} \\ \quad\quad (: 2)$$

perché

$$(: 2) \times (\times 10) = (: 20).$$

Quando si dispongono complessivamente le combinazioni dei segni moltiplicatori e divisori si avrà:

Regole 1-14.

$$(\times) + (\times) = (\times);$$
$$(\times) - (\times) = (\times);$$
$$(\times) - (\times) = ({}^{-}\times);$$
$$(:) + (:) = (:);$$
$$(:) - (:) = (:);$$
$$(:) - (:) = ({}^{-} :);$$
$$(\times) \times (\times) = (\times);$$
$$(:) \times (:) = (\times);$$
$$(\times) \times (:) = (:);$$
$$(:) \times (\times) = (:);$$
$$(\times) : (\times) = (\times);$$
$$(:) : (:) = (\times);$$
$$(\times) : (:) = (:);$$
$$(:) : (\times) = (:).$$

Other examples with non-literal numbers.

$$(\times 10) : (: 5) = (: 2)$$

Proof:

$$(\times 10) \quad \frac{(: 5)}{(: 2)}$$

because

$$(: \ 2) \times (: \ 5) = (\times 10);$$

$$(: 20) : (\times 10) = (: \ 2)$$

Proof:

$$(: 20) \quad \frac{(\times 10)}{(: 2)}$$

because

$$(: 2) \times (\times 10) = (: 20)$$

When the combinations of multiplying and dividing signs are arranged all together we shall have:

Rules 1-14.

$$(\times)+(\times)=(\times);$$
$$(\times)-(\times)=(\times);$$
$$(\times)-(\times)=({}^{-}\times);$$
$$(:)+(:)=(:);$$
$$(:)-(:)=(:);$$
$$(:)-(:)=({}^{-} :);$$
$$(\times)\times(\times)=(\times);$$
$$(:)\times(:)=(\times);$$
$$(\times)\times(:)=(:);$$
$$(:)\times(\times)=(:);$$
$$(\times) : (\times)=(\times);$$
$$(:) : (:)=(\times);$$
$$(\times) : (:)=(:);$$
$$(:) : (\times)=(:).$$

Corollario 1. I numeri moltiplicatori e divisori negativi si scrivono $(^{-}\times \mathbf{s})$, $(^{-}\times \mathbf{t})$, $(^{-}\times \mathbf{u})$, . . , $(^{-} : \mathbf{s})$, $(^{-} : \mathbf{t})$, $(^{-} : \mathbf{u})$, . .

Osservazione 2. Con i numeri moltiplicatori e divisori positivi e negativi le regole dei segni si esprimono con $(^{(+)}\times)$, $(^{-}\times)$, $(^{(+)} :)$, $(^{-} :)$.

Regole 15-52.

$(\times)+(^{-}\times)=(^{+}\times)$, se il valore assoluto del primo termine è $>$ del valore assoluto del secondo;

$(\times)+(^{-}\times)=(^{-}\times)$, se il valore assoluto del secondo termine è $>$ del valore assoluto del primo;

$(:)+(^{-} :)=(^{+} :)$, se il valore assoluto del primo termine è $>$ del valore assoluto del secondo;

$(:)+(^{-} :)=(^{+} :)$, se il valore assoluto del secondo termine è $>$ del valore assoluto del primo;

$(^{-} :)+(^{-} :)=(^{-} :)$;
$(^{-}\times)+(^{-}\times)=(^{-}\times)$;

$(^{-}\times)+(\times)=(^{+}\times)$, con il valore assoluto del primo termine $<$ del valore assoluto del secondo;

$(^{-}\times)+(\times)=(^{-}\times)$, con il valore assoluto del primo $>$ del valore assoluto del secondo;

$(^{-} :)+(:)=(^{+} :)$, con il valore assoluto del primo $<$ del secondo;

$(^{-} :)+(:)=(^{-} :)$, con il valore assoluto del primo termine $>$ del valore assoluto del secondo;

$(:)-(^{-} :)=(^{+} :)$,

Corollary 1. The negative signs of $\times$ and : are written $({}^{-}\times \mathbf{s})$, $({}^{-}\times \mathbf{t})$, $({}^{-}\times \mathbf{u})$, . . , $({}^{-} : \mathbf{s})$, $({}^{-} : \mathbf{t})$, $({}^{-} : \mathbf{u})$, . .

Observation 2. With negative multiplying and dividing numbers the signs are expressed by $({}^{(+)}\times)$, $({}^{-}\times)$, $({}^{(+)} :)$, $({}^{-} :)$.

Regole 15-52.

$(\times)+({}^{-}\times)=({}^{+}\times)$, If the absolute value, i.e. irrespective of sign of the first term, is $>$ than the absolute value of the second;

$(\times)+({}^{-}\times)=({}^{-}\times)$, if the absolute value of the second term is $>$ than the absolute value of the first;

$(:)+({}^{-} :)=({}^{+} :)$, if the absolute value of the first term is $>$ than the absolute value of the second;

$(:)+({}^{-} :)=({}^{-} :)$, if the absolute value of the second term is $>$ than the absolute value of the first;

$({}^{-} :)+({}^{-} :)=({}^{-} :)$;

$({}^{-}\times)+({}^{-}\times)=({}^{-}\times)$;

$({}^{-}\times)+(\times)=({}^{+}\times)$, if the absolute value of the first term is $<$ than the absolute value of the second;

$({}^{-}\times)+(\times)=({}^{-}\times)$, if the absolute value of the first is $>$ than the absolute value of the second;

$({}^{-} :)+(:)=({}^{+} :)$, if the absolute value of the first is $<$ than the second;

$({}^{-} :)+(:)=({}^{-} :)$, if the absolute value of the first is $>$ than the absolute value of the second;

$(:)-({}^{-} :)=({}^{+} :)$,

$(\times)-({}^{-}\times)=({}^{+}\times)$,

$({}^{-}\times)-({}^{-}\times)=({}^{+}\times)$, con il valore assoluto del primo termine $<$ del valore assoluto del secondo;

$({}^{-}\times)-({}^{-}\times)=({}^{-}\times)$, con il valore assoluto del primo termine $>$ del valore assoluto del secondo;

$({}^{-}:)-({}^{-}:)=({}^{+}:)$, con il valore assoluto del primo termine $<$ del valore assoluto del secondo;

$({}^{-}:)-({}^{-}:)=({}^{-}:)$, con il valore assoluto del primo termine $>$ del valore assoluto del secondo;

$$
\begin{gathered}
({}^{-}:)-(:)=({}^{-}:);\\
({}^{-}\times)-(\times)=({}^{-}\times),\\
(\times)\times({}^{-}\times)=({}^{-}\times);\\
(:)\times({}^{-}:)=({}^{-}\times);\\
(\times)\times({}^{-}:)=({}^{-}:);\\
(:)\times({}^{-}\times)=({}^{-}:);\\
({}^{-}\times)\times({}^{-}\times)=({}^{+}\times);\\
({}^{-}:)\times({}^{-}:)=({}^{+}\times);\\
({}^{-}\times)\times(\times)=({}^{-}\times);\\
({}^{-}\times)\times(:)=({}^{-}\times);\\
({}^{-}:)\times(:)=({}^{-}\times);\\
({}^{-}:)\times(\times)=({}^{-}:);\\
(\times):({}^{-}\times)=({}^{-}\times);\\
(:):({}^{-}:)=({}^{-}\times);\\
(\times):({}^{-}:)=({}^{-}:);\\
(:):({}^{-}\times)=({}^{-}:);\\
({}^{-}:):({}^{-}:)=({}^{+}\times);\\
({}^{-}\times):({}^{-}\times)=({}^{+}\times);
\end{gathered}
$$

$(\times)-({}^{-}\times)=({}^{+}\times)$,

$({}^{-}\times)-({}^{-}\times)=({}^{+}\times)$, if the absolute value of the first is $<$ than the absolute value of the second;

$({}^{-}\times)-({}^{-}\times)=({}^{-}\times)$, if the absolute value of the first is $>$ than the absolute value of the second;

$({}^{-}:)-({}^{-}:)=({}^{+}:)$, if the absolute value of the first is $<$ than the absolute value of the second;

$({}^{-}:)-({}^{-}:)=({}^{-}:)$, if the absolute value of the first is $>$ than the absolute value of the second;

$({}^{-}:)-(:)=({}^{-}:)$;
$({}^{-}\times)-(\times)=({}^{-}\times)$;
$(\times)\times({}^{-}\times)=({}^{-}\times)$;
$(:)\times({}^{-}:)=({}^{-}\times)$;
$(\times)\times({}^{-}:)=({}^{-}:)$;
$(:)\times({}^{-}\times)=({}^{-}:)$;
$({}^{-}\times)\times({}^{-}\times)=({}^{+}\times)$;
$({}^{-}:)\times({}^{-}:)=({}^{+}\times)$;
$({}^{-}\times)\times(\times)=({}^{-}\times)$;
$({}^{-}\times)\times(:)=({}^{-}\times)$;
$({}^{-}:)\times(\times)=({}^{-}:)$;
$({}^{-}:)\times(:)=({}^{-}\times)$;
$(\times):({}^{-}\times)=({}^{-}\times)$;
$(:):({}^{-}:)=({}^{-}\times)$;
$(\times):({}^{-}:)=({}^{-}:)$;
$(:):({}^{-}\times)=({}^{-}:)$;
$({}^{-}:):({}^{-}:)=({}^{+}\times)$;
$({}^{-}\times):({}^{-}\times)=({}^{+}\times)$;

$$({}^{-}\times):(\times)=({}^{-}\times);$$
$$({}^{-}:):(:)=({}^{-}\times);$$
$$({}^{-}\times):(:)=({}^{-}:);$$
$$({}^{-}:):(\times)=({}^{-}:).$$

Osservazione 3. Con i numeri moltiplicatori e divisori che portano il segno negativo si applicano le regole dei segni moltiplicatori o divisori congiuntamente a quelle dei segni negativi e positivi.

Es.: $(:\mathbf{s})\times({}^{-}:\mathbf{u})={}^{-}\times\mathbf{z};$

$$({}^{-}\times\mathbf{u}):(:\mathbf{z})={}^{-}:\mathbf{w}.$$

Corollario 2. Con le regole esposte vengono calcolati tutti i rapporti che intercorrono fra numeri relativi moltiplicatori e divisori che siano esponenziali abasici. Applicazioni del calcolo sono possibili quando si debbono ottenere somme, differenze, prodotti e quozienti di tali numeri, sulla linea esponenziale di incrementi o decrementi.

Esempi. Sia $(\times\mathbf{t})$ l'incremento abasico che nel punto S verifica un aumento di velocità di un corpo C. Vi sia un ulteriore aumento $(\times\mathbf{s})$ del corpo C in Q. Qui $(\times\mathbf{s})$ va ad aggiungersi all'altro incremento esponenziale $(\times\mathbf{s})+(\times\mathbf{t})$. Il corpo rivela un aumento di velocità dato dalla somma di $(\times\mathbf{s})+(\times\mathbf{t})$. Allora il risultato sarà $\times(\mathbf{s}+\mathbf{t})$.

Si consideri un incremento di C_1 in S, incremento $(\times\mathbf{s})$, che a sua volta divide un incremento abasico $(\times\mathbf{u})$ di C_1 in T. In conseguenza dell'applicazione delle regole dei numeri relativi moltiplicatori e divisori, avremo:

$$(\times\mathbf{s}):(\times\mathbf{u})=\times\mathbf{z}.$$

Osservazione 4. L'uso del calcolo con i segni moltiplicatori e divisori rende possibile una rapida misura dei rapporti incrementati o decrementati fra numeri relativi abasici.

$$({}^{-}\times):(\times)=({}^{-}\times);$$
$$({}^{-}:):(:)=({}^{-}\times);$$
$$({}^{-}\times):(:)=({}^{-}:);$$
$$({}^{-}:):(\times)=({}^{-}:).$$

Observation 3. With multiplying and dividing numbers bearing a negative sign one applies the rules of multiplication and division signs together with those of negative and positive signs.

E.g. $$(:\mathbf{s})\times({}^{-}:\mathbf{u})={}^{-}\times\mathbf{z};$$

$$({}^{-}\times\mathbf{u}):(:\mathbf{z})={}^{-}:\mathbf{w}.$$

Corollary 2. By the rules set out above all the relations can be calculated that exist between directed multiplying and dividing numbers that are a-basic exponents. These applications to the calculus are possible whenever one must obtain sums, differences, products and quotients of such numbers on the exponential level of increments or decrements.

Example. Let $(\times\mathbf{t})$ be the a-basic increment when at the point (or at the time) S there occurs an increase in velocity of a body C. Let there be a further correlated increase $(\times\mathbf{s})$ of the body C in Q. Here $(\times\mathbf{s})$ is added to the other exponential increment $(\times\mathbf{s})+(\times\mathbf{t})$. The body thus reveals a final velocity given by the sum of $(\times\mathbf{s})+(\times\mathbf{t})$. And the result will be $\times(\mathbf{s}+\mathbf{t})$.

Consider an increment of C_1 in S, that is $(\times\mathbf{s})$ which, in its turn, divides an a-basic increment $(\times\mathbf{u})$ of C_1 in T. By application of the rules for directed multiplying and dividing numbers, we shall have:

$$(\times\mathbf{s}):(\times\mathbf{u})=\times\mathbf{z}.$$

Observation 4. The use of such a calculus with multiplying and dividing signs speeds up computation of the increased or decreased expressions comprised of a-basic directed numbers.

La teoria generale dei numeri relativi, se costruita in un universo finito, mostra le sue prime pratiche conseguenze, nella determinazione di calcoli sugli incrementi esponenziali.

The general theory of directed numbers, construed in a finite universe, shows its first practical results in determining calculus upon exponential increments.

BIBLIOGRAFIA - BIBLIOGRAPHY

M. STIFEL, *Arithmetica Integra, die Vollkommne Rechenkunst, mit Vorrede von Ph. Melanchton*, Nürnberg, 1544.

M. STIFEL, *Die Deutsche Arithmetica*, Nürnberg, 1545.

C. MACLAURIN, *Traité d'Algèbre et de la manière de l'appliquer*, chez Charles-Antoine Jombert, Paris, 1753 (*A Treatise of Algebra*, 6th ed., London, 1796).

A. CAUCHY, *Cours d'Analyse. Ière Partie: Analyse Algébrique*, Debure, Paris, 1821.

G. CANTOR, «Ein Beitrag zur Manningfaltigkeitslehre», in *Journ. Reine Angew. Math.*, 84, 1878.

C. BURALI-FORTI, *Logica Matematica*, Hoepli, Milano, 1894.

L. COUTURAT, *De l'Infini Mathématique*, Alcan, Paris, 1896.

C. BURALI-FORTI, «Una questione sui Numeri Transfiniti», in *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 11, Palermo, 1897.

A. PADOA, *Algebra Elementare Logicamente Esposta*, Università di Pavia, 1899.

G. PEANO, *Formulaire de Mathématiques*, publié par la *Révue de Mathématiques (Rivista di Matematica)*, t. II, n. 3, ed. Bocca-Clausen, Torino, 1899.

A. PADOA, *Numeri Interi Relativi, «Révue de Mathématiques*, t. 7, Torino, 1901.

E. HUNTINGTON, «A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitude», in *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 3, New York, 1902.

G. PEANO, *Aritmetica Generale e Algebra Elementare*, ed. Paravia, Torino, 1902.

B. RUSSELL, «Théorie Générale des Séries bien Ordonnées», in *Révue de Mathématiques*, t. 8, ed. Bocca-Clausen, Torino, 1902.

A.N. WHITEHEAD, «The Logic of Relations, Logical Substitution Groups and Cardinal Numbers», in *American Journal of Mathematics*, t. 25, Baltimore, 1903.

M. BOCHER, «The Fundamental Conceptions and Methods of Mathematics», in *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. XI, New York, 1904.

C. BURALI-FORTI, *Teoria Generale delle Grandezze e dei Numeri*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, Torino, 1904.

L. COUTURAT, *L'Algèbre de la Logique*, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

P.H. JOURDAIN, «De Infinito in Mathematica», in *Révue de Mathématiques*, t. 8, ed. Bocca-Clausen, Torino, 1905.

P.H. JOURDAIN, «The Development of the Theory of Transfinite Numbers», in *Archiv. d. Math. und Phys.*, tt. 10-22, 1905-1914.

E. HUNTINGTON, «The Fundamental Laws of Addition and Multiplication in Elementary Algebra», in *Transaction of the American Math. Soc.*, New York, 1906.

G. PEANO, *Sulle Differenze Finite*, Accademia dei Lincei, Roma, 1907.

G. PEANO, *Formulario Mathematico*, Bocca, Torino, 1908.

S. CATANIA, *Elementi di Aritmetica ed Algebra*, Giannotta, Catania, 1908.

E. ZERMELO, «Sur les Ensembles Finis et le Principe d'Induction Complète», in *Acta Mathematica*, t. 3, 1909.

A. PADOA, «Théorie des Nombres Entiers Absolus», in *Révue de Mathématiques*, t. 8, ed. Bocca-Clausen, Torino, 1909.

D. HILBERT, «Axiomatisches Denken», in *Math. Annalen*, 58, 1918.

H. WEYL, *Das Kontinuum*, Veit Verlag, Leipzig, 1918.

D. HILBERT, *Die Grundlagen der Mathematik* (Hamburger Math. Einzelschriften H. 5), B.C. Teubner Verlag, Leipzig, 1928.

P. BERNAYS-D. HILBERT, *Grundlagen der Mathematik*, J. Springer, Berlin, vol. I, 1934, vol. II, 1939.

A. CHURCH-S.C. KLEENE, «Formal Definitions of the Theory of Ordinal Numbers», in *Foundations of Mathematics*, 28, 1937.

B.H. NEUMANN, «Some Remarks on Infinite Groups», in *Journal of London Mathematical Society*, 12, 1937.

R. CARNAP, *Foundations of Logic and Mathematics*, University of Chicago Press, Chicago, 1939.

H. WEYL, *Algebraic Theory of Numbers*, Princeton University Press, Princeton, 1940.

S.C. KLEENE, «On Notations for Ordinal Numbers», in *Transactions of American Mathematical Society*, 53, 1943.

S.C. KLEENE, *Introduction to Mathematics*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, P. Noordhoff, Groningen, 1952.

L.L. DAVIS, «The Number of Structures of Finite Relations», in *Proceedings of American Mathematical* Society, 4, 1953.

N. BOURBAKI, *Théorie des Ensembles*, Hermann & C., Paris, 1954.

P.M. COHN, «Groups of Order Automorphisms of Ordered Sets», in *Mathematika*, 4, 1957.

P. BERNAYS-A.A. FRAENKEL, *Axiomatic Set Theory*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1958.

T. EVANS, «Endomorphisms of Abstract Algebras», in *Proceedings of the Royal Soc. Edinburgh*, A. 66, 1961-62.

J. CAVAILLÈS, *Remarques sur la Formation de la Théorie Abstraite des Ensembles. Correspondence Cantor-Dedekind*, Philosophie Mathématique, Hermann, Paris, 1962.

C. CURTIS-I. REINER, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, ed. by J. Wiley & Sons, New York-London, 1962.

H. EYRAUD, *Le Problème de l'Infini. Transfinis et Alephs*, Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, presenté par F. Le Lionnais, éd. A. Blanchard, Paris, 1962.

P.M. COHN, *Universal Algebra*, Harper & Row Ltd., London, 1964.

J.D. DIXON, «Complete Reducibility of Infinite Groups», in *Canadian Journal of Mathematics*, 16, 1964.

P.J. COHEN, *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (Mathematics Lecture Note Series), W.A. Benjamin, New York, 1966.

K. CHANDRASEKHARAN, *Introduction to Analytic Number Theory* (Die Grundlehe-

ren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 148), Springer-Verlag, Berlin, 1968.

C. LANCZOS, *Numbers Without End*, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1968.

G. SHIMURA, *Automorphic Functions and Number Theory* (Lecture Notes in Mathematics n. 54), Springer-Verlag, Berlin, 1968.

A. MOSTOWSKI, *Constructible Sets with Applications* (Studies in Logic and Foundations of Mathematics), North Holland Publ. Co., Warszawa-Amsterdam, 1969.

H.L. MONTGOMERY, *Topics in Multiplicative Number Theory* (Lecture Notes in Mathematics n. 227), Springer-Verlag, Berlin, 1971.

J.C. KEMENY-A. Jr. SCHLEIFER-J.L. SNELL-G.L. THOMPSON, *Finite Mathematics*, Englewood C., Prentice-Hall, 1972.

B.I. PLOTKIN, *Groups of Automorphisms of Algebraic Systems*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.

A. GRZEGORCZYK, *An Outline of Mathematical Logic*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht-Boston, 1974.

D. BOSTOCK, *Logic and Arithmetic. Natural Numbers*, Clarendon Press, Oxford, 1974.

W. NARKIEWICZ, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers* (Monografic Matematyczne tom 57), Polish Scientific Publ., Warszawa, 1974.

E.W. WETTE, «Contradiction Within Pure Number Theory Because of a System. Internal 'Consistency' Deduction», in *International Logic Review*, 9, June, 1974.

L.E.J. BROUWER, *Philosophy and Foundations of Mathematics, Collected Works I*, ed. by A. Heyting, North Holland and American Elsevier, Amsterdam-New York, 1975.

D.J. BUONTEMPO, *A Foundation Course in Modern Algebra*, The MacMillan Press, London, 1975.

J.T. MOORE, *Introduction to Abstract Algebra*, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1975.

E.W. WETTE, *The Refutation of Number Theory I*, Centro Superiore di Logica e Scienze Comparate, Bologna-Wurzburg, 1975.

F. KAUFMANN, *The Infinite in Mathematics*, ed. by Brian McGuinness (Vienna Circle Collection 9), The Queen's University, Oxford, D. Reidel Publ. Co., 1978.

Y.N. MOSCHOVAKIS, *Descriptive Set Theory*, North Holland Publ., Amsterdam, 1980.

P.M. SIMONS, «Against the Aggregate Theory of Number», in *Journal of Philosophy*, 79, March 1982.

INDICE DEI SIMBOLI – INDEX OF SYMBOLS

N	numero naturale; natural number;
R	numero relativo; number directed by sign.
$\mathfrak{U}$	univero finito ipotizzato dei numeri relativi da $\pm a$ a $\pm f$; finite hypothized universe of directed numbers from $\pm a$ to $\pm f$;
U	universo finito di numeri relativi; finite universe of directed numbers;
Γ	serie numerica monotona con applicazione di induzione matematica; numerical monotonic set from mathematical induction;
Δ	insieme numerico per induzione completa; number set from complete induction;
S	insieme finito maggiore di $\mathfrak{U}$ con limite $\pm n$; finite arrangement greater than $\mathfrak{U}$ with $\pm n$ as bound;
U^*	insieme finito di numeri relativi maggiore di U e diverso da $\mathfrak{U}$; finite distribution of directed numbers greater than U and different from $\mathfrak{U}$;
M^*	sub-sostegno di un insieme U^*; sub-support for U^* distribution;
$\bar{M}^*$	sostegno di una distribuzione U, maggiore di $\bar{M}$ in $\mathfrak{U}$; support for a distribution U, greater than $\bar{M}$ in $\mathfrak{U}$;
$\mathfrak{G}$	linea di distribuzione di numeri relativi; distribution line of directed numbers;
G	linea di distribuzione di oggetti numerabili non numerici; distribution line of numerable objects not numerical;
a, b, c, d, e, f	numeri inclusi nell'universo finito $\mathfrak{U}$, dove a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5, f = 6; numbers included in the finite universe $\mathfrak{U}$, where a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5, f = 6;
m, n, p, q, r	numeri di grandezza variabile inclusi in un universo finito U maggiore di $\mathfrak{U}$; numbers with variable magnitude included in a finite universe U greater than $\mathfrak{U}$;

s, t, u, v, w, z numeri relativi moltiplicatori e divisori; multiplying and dividing numbers;

p, q, r, s, t, u oggetti numerabili non numerici; numerable objects not numerical;

σ risultato delle operazioni fra termini numerici distribuiti in ciascuna $\mathfrak{S}$; result of operations among numerical terms distributed along each $\mathfrak{S}$;

M sostegno di una linea di distribuzione $\mathfrak{S}$, ossia limite entro cui i numeri sono racchiusi; support for $\mathfrak{S}$ line of distribution, i.e. bound within which numbers are confined;

$\bar{M}$ sostegno coincidente con σ, ossia col risultato di una linea $\mathfrak{S}$; support coinciding with σ, i.e. with the result of a $\mathfrak{S}$ line;

k base delle incrementabilità di 0; basis of 0's incrementability;

φ 0 verso + ; 0 towards plus;

ν 0 verso − ; 0 towards minus;

δ numero indefinito o quantitativamente indeterminato; indefinite or quantitatively indeterminate number;

∞ infinito; infinity;

l incremento esponenziale; exponential increment;

d decremento esponenziale; exponential decrement;

$\not{l}$ incremento esponenziale nullo; nil exponential increment;

$\not{d}$ decremento esponenziale nullo; nil exponential decrement;

$\bar{M}$ sostegno esponenziale che limita l'elevazione a potenza; exponential support which bounds the exponentiation;

$\not\rightarrow$ corrispondenza; correspondence;

$\rightarrow$ inversione di segno in combinazioni di numeri relativi; inversion of sign for differently combined directed numbers;

$\xrightarrow{\varphi}$ inversione di segno dal − al + ; inversion of sign from − to + ;

$\overset{\vee}{\rightarrow}$ inversione di segno dal + al − ; inversion of sign from + to − ;

$\leftrightarrow$ implicazione stretta: 'se e solo se'; strict implication: 'if and only if';

$'$ apice; index;

$\wedge$ congiunzione; conjunction;

$\dashv$ derivazione; derivation;

$\vee$ disgiunzione; disjunction;

$\sim$ 'vale a dire'; 'that means';

$\neg$ negazione; negation;

$\supset$ implicazione; implication;

$\subset$ inclusione; inclusion;

$\mathbf{\wedge}$ quantificatore universale; universal quantifier;

$\mathbf{\vee}$ quantificatore esistenziale; existential quantifier;

$>$ 'maggiore di'; 'greater than';

$<$ 'minore di'; 'less than';

ϵ simbolo di 'appartenenza a'; symbol of 'belonging to';

$\mathbf{C}$ complemento; complement;

$|\ |$ denotazione del valore assoluto di un numero; denotation of the absolute value of a number;

$..$ simbolo di *continuum* con estensione finita; symbol of *continuum* with finite extension;

$...$ simbolo di *continuum* con estensione infinita; symbol of *continuum* with infinite extension.

PUBBLICAZIONI A CURA DEL CENTRO SUPERIORE
DI LOGICA E SCIENZE COMPARATE

R. BORSARI, *Relativity and Motion*, Bologna, 1971.
G. CASANOVA, *Renversement du Temps et Nouvelle théorie de l'Electron*, Bologna, 1971.
B. SESIC, *Logic of Change*, Bologna, 1972.
F. SPISANI, *The Meaning and Structure of Time, Significato e Struttura del Tempo*, ed. bilingue, Bologna, 1972.
G. PONCELET, *Considérations Epistémiques sur la Théorie de la Relativité*, Bologna, 1972.
E. WETTE, *The Refutation of Number Theory*, I, 1975.
F. SPISANI, *Philosophical Foundations of Autogenetic Logic*, Bologna, 1975.
F. SPISANI, *Implication, Endometry and Universe of Discourse, Implicazione, Endometria e Universo del Discorso*, edizione bilingue, Bologna, 1977.
G. RUSSO, *Annibale Pastore: Istanze e Limiti della Logica del Potenziamento, Annibale Pastore: Proposals and Limitations of the Logic of the Raising to Power*, ed. bilingue, Catania, 1982.
F. SPISANI, *General Theory of Directed Numbers - Teoria Generale dei Numeri Relativi* vol. I, ed. bilingue, Bologna, 1983.
A. RUTIGLIANO, *Le Strutture dello Spazio-Tempo Autocostitutivo nella Matematica e nella Fisica* (forthcoming).
E. WETTE, *The Refutation of Number Theory*, II (forthcoming).

Finito di stampare
nel marzo 1983
dalla Tip. Leonelli - Castenaso (Bologna)
Fotocomposto dalla Linotipia B.M. - Castenaso (Bologna)
con sistema FOTO3 Simoncini - Rastignano (Bologna)

Prima ristampa 30 giugno 1983
First reprint 30 June 1983

CENTRO SUPERIORE DI LOGICA E SCIENZE COMPARATE

Via Belmeloro, 3 - Bologna - Italia

Presidente: Prof. Franco Spisani

Direttori di Ricerca: Prof. Irving M. Copi, Prof. Carl G. Hempel, Prof. André Martinet, Prof. Ernest Nagel, Prof. Karl Popper, Prof. Paul Ricoeur, Prof. Patrick Suppes.

Comitato consultativo: Prof. G. Balandier, Prof. C. Bessire, Prof. L. Chiusano, Prof. P. Gochet, Ing. A. Godard, Ing. J. L. Fobelets, Prof. J. Hartnack, Dr. M. Mikaelian, Prof. O. Reiser, Prof. B. M. Kedrov, Prof. O. Onicescu, Prof. M. Sanchez-Mazas.

Aims:

a) Support and assist studies of Logic by means of the « Rassegna Internazionale di Logica »;

b) contribute to make known articles, research and initiatives carried out in this field throughout the world.

Members of the Advisory Committee are consulted about subject matters in their own field of knowledge; in their turn they can submit propositions to the Centre.

Les finalités du Centre sont:

a) d'encourager les études de Logique par la diffusion de la « Rassegna Internazionale di Logica »;

b) de faire connaître les publications, les recherches et les initiatives ayant lieu dans ce domaine dans tous les pays du monde.

Les Membres du Comité Consultatif seront requis de donner leur avis au sujet de questions et de problèmes concernant le domaine de leur ressort et de soumettre à leur, tour leurs propositions au Centre.

L. 30.000