Bernays Project: Text No. 16

On current methodological questions of Hilbert's proof theory (1938)

Paul Bernays

(Sur les questions methodologiques actuelles de la theorie hilbertienne de la demonstration)

Translation by: *Bernd Buldt and Gerhard Heinzmann*

Comments:

Translated by Bernd Buldt & Gerhard Heinzmann. Please note the following points. (i) This is not the final, but the pre-final version, still awaiting the blessings of Gerhard's final proofreading. (ii) Since this lecture has close parallels with the exposition given in Hilbert/Bernays II, §5.3 b)+c), we first did a German translation; our hope was—by cross-checking the French text with the relevant paragraphs from HB II—to arrive at a better understanding of the text and a more 'Bernaysian' wording in the translation. So, whoever checks this translation might also download the German translation, since the latter one borrows some 'authority' from parallels in HB II. Nevertheless, some details(?) of the translation remained (and most probably will remain) controversial between the two of us. (iii) It became especially apparent, that the French "intuitif/intuitivement" has to be translated partly with "anschaulich/intuitive(ly)," partly with "inhaltlich/contentual(ly)." (iv) Any emendation/insertion to the text or its translation is included in [square brackets]. (v) A translation of the discussion following Bernays' lecture will be posted soon.
DS : Handwritten corrections by Heinzmann (11/2001) are incorporated in this text. Exception : replacement of "natural numbers" by "integers."

Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration

On current methodological questions of Hilbert's proof theory

Mon rapport sur la situation actuelle de la théorie hilbertienne de la démonstration s'accompagne de certaines observations de principe. Tout d'abord, il me faut remarquer que les vues exposées ci-dessous ne doivent pas être envisagées comme représentant simplement la position de l'école hilberienne quant à la situation actuelle. La nécessité d'entrer dans certaines considérations méthodologiques en liaison même avec l'éxposé de l'état actuel de la théorie de la démonstration ressort de cet état lui-même.

My report on the current situation of Hilbert's proof theory comes with certain principled observations. First of all, I have to remark that the views presented below can't simply be understood as the stance taken by the Hilbert school concerning the current situation. The necessity to enter—in connection with an exposition of the current status of proof theory—into certain methodological considerations emerges from the status [of proof theory] itself.

Comme vous le savez, la théorie de la démonstration vient de passer par une sorte de crise, et plusieurs en ont pris déjà prétexte pour déclarer que l'enterprise hilbertienne avait échouté. Cette opinion

As you know, proof theory has recently suffered from a kind of crisis, and some have taken this already as a pretext to declare that the Hilbertian enterprise has foundered. This opinion is explained by s'explique du fait que le programme proposé par Hilbert pour la théorie de la démonstration, et exposé dans ses publications de 1922–1927, a besoin, selon toute apparence, d'être révisé ; la révision portant avant tout sur les fondements méthodiques.

the fact that the program for the proof theory as proposed by Hilbert and expounded in his publications from 1922–1927 is, to all appearances, in need of revision. And this revision affects especially the methodological foundations.

En termes techniques, il s'agit de ceci : Pour les raisonnements métamathématique, on a besoin de moyens plus forts que ceux auxquels Hilbert envisageait tout d'abord de se restreindre, dans le sens de la « finite Einstellung » (pensée finie). Le besoin d'un tel élargissement des méthodes se fit déjà sentir à propos du problème – qu'on croyait avoir déjà élucidé – de la non-contradiction du formalisme arithmétique intégral. A ce propos, il se révéla que le point de vue finitiste de Hilbert n'est pas équivalent, comme il avait paru tout d'abord, au point de vue intuitionniste de Brouwer. Gödel a pu montrer que, dans le domaine de la théorie des nombres entiers, tous les raisonnements classiques peuvent [144]||[145] être transformés en rai-

Technically speaking, it concerns the following: For metamathematical reasoning one needs stronger means than those Hilbert first thought he could confine himself to in the sense of his "finite Einstellung" (finitary attitude). The need for such an extension of methods was felt already on occasion of a problem, which was thought to be already solved: the consistency of formal number theory. In this context it turned out that Hilbert's finitary standpoint is not equivalent to Brouwer's intuitionistic standpoint, as it first had seemed. Gödel has been able to prove, that, within the realm of the natural numbers and with help of a new but rather simple interpretation, all classical reasoning can || be transformed into reasoning accepted by intuitionism.

sonnements admis par l'intuitionnisme, à l'aide d'une nouvelle interprétation relativement simple. Ainsi donc, la non-contradiction de la théorie des nombres entiers résulte sans autre [condition] du point de vue intuitionniste, moyennant cette interprétation.

Thus, by this interpretation, the consistency of number theory follows without presupposing the intuionistic standpoint.

Par formalisme arithmétique (ou théorie des nombres entiers) nous entendons le système de déduction formelle qu'on obtinent, à partir du calcul logique du 1^{er} ordre (calcul des prédicats, ou aussi « engerer Funktionenkalkül ») en lui adjoignant :

a) les axioms de l'égalité ;

b) les axiomes arithmétiques

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \rightarrow a = b$$

(où a' représente le nombre venant immédiatement après a)[;]

c) le schéma de l'induction complète ;

d) les définitions récurrentes élémentaires.

We call a formal deductive system an arithmetical formalism (or theory of natural numbers), if it is obtained from adding to a logic calculus of first order (predicate calculus or "engerer Funktionenkalkül"):

a) the axioms of equality;

b) the axioms of arithmetic

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \rightarrow a = b$$

(where a' denotes the immediate succesor of a)[;]

c) the schema of complete induction;

d) the elementary recursive definitions.

(La notion du « plus petit nombre ayant une certaine propriété », qui intervient

(The notion of the "least number of a certain property," which occurs in arithdans les déductions arithmétiques peut être écartée des recherches sur la non-contradiction, par le procédé de l'élimination des termes tels que : celui qui...)

Ce calcul dépasse déjà les moyens absolument nécessaires pour formaliser l'arithmétique des entiers. En effect, il suffit, dans ce but, comme Skolem l'a montré le premier, d'un formalisme plus restreint de l'« arithmétique récurrente », qui est encore susceptible d'une interprétation directe finiste.

Le formalisme dont nous parlons ici se distingue de l'arithmétique récurrente et aussi de l'arithmetique intuitionniste par l'emploi inconditionnel des notions « tous » et « il existe ».

Cependant, dans le domaine des raisonnements qui se laissent représenter dans le formalisme arithmétique, l'accord peut s'établir entre les partisans des mathématiques classiques, qui considèrent tous ces raisonnements comme légitimes, et les intuitionnistes qui ne reconnaissent pas généralement le prin-

metical deductions, can be removed from investigations into consistency by the elimination procedure for such terms like "that, which ...")

This calculus exceeds already what is absolutely necessary to formalize the arithmetic of natural numbers. In fact, as Skolem first showed it, for this purpose the more restricted formalism of "recursive arithmetic" suffices, which is moreover capable of a direct finitary interpretation.

The formalism we are here talking about differs from recursive as well as from intuitionistic arithmetic by an unrestricted employment of the notions "[for] all" and "there is."

However, an agreement concerning the domain of reasoning which admits of representation in the arithmetical formalism can be established between the adherents of classical mathematics (who regard as legitimate all these modes of reasoning) and the intuitionists (who do not in general acknowledge the principle of cipe du tiers exclu : Les premiers n'auront qu'à déclarer : Une proposition telle que « Il y a un x possédant la propriété A » ne doit être qu'une variante de la seconde proposition que voici : « La négation de A ne vaut certainement pas pour tous les x« . Et de même, une pro[145]||[146]position de la forme « A ou B » ne doit être qu'une variante de la proposition « non-A et non-B ne subsistent pas simultanément ».

excluded middle). The former only have to declare that a proposition like "There is an x with the property A" should merely be a variant of a second proposition, namely, "The negation of A doesn't apply to all x." Likewise, a pro||position of the form "A or B" should merely be a variant of the proposition "non-A and non-B aren't simultanously true."

Avec cette interprétation du jugement existentiel et de la disjonction, l'intuitionniste doit admettre comme légitimes tous les raisonnements du domaine susindiqué des mathématiques classiques, tout au moins s'il accepte les régles systématiques du raisonnement intuitionniste indiquées par Heyting.

With this interpretation of existential judgement and disjunction, the intuitionist must acknowledge as legitimate all the reasoning of the above mentioned domain of classical mathematics—at the very least, if he accepts the systematic rules of intuitionistic reasoning devised by Heyting.

La constatation d'un rapport aussi intime entre les raisonnements de l'arithmétique intuitionniste et ceux de l'arithmétique classique permet d'abord de conclure immédiatement à la non-contradiction du formalisme arithmétique ordi-

The realization of this close relationship between the modes of reasoning in intuitionistic arithmetic and those in classical arithmetic admits first, from the intuitionistic standpoint, to infer directly the consistency of the usual arithmetical fornaire du point de vue de l'intuitionnisme. On voit en même temps qu'il existe une différence essentielle entre les points de vue intuitionniste et finitiste. En particulier, on remarquera la différence suivante concernant les propositions générales : Tandis que l'intuitionnisme se borne à contester l'application du tiers exclu à de pareilles propositions, la méthode finitiste évite par principe la négation de toute proposition générale, de même que son emploi comme antécédent dans une proposition hypothétique.

Du point de vue finiste, la négation d'une proposition n'a de sens que si elle équivaut à une proposition affirmative. Ainsi par exemple, la proposition négative que voici : Le chiffre a n'est pas identique au chiffre b, signifie la même chose que la proposition affirmative : « Le chiffre a est différent du chiffre b ». Et de même, une condition ou une hypothèse n'est à considérer comme finie que si elle est relative à une configuration ou à une opération intuitivement données ou aussi au résultat d'une opération de ce genre.

malism. At the same time one sees that there is an essential difference between the intuitionistic and finitary standpoint. In particular, one will note the following difference as to general propositions. While intuitionisms is content with contesting the application of the excluded third to general propositions, the finite method avoids, on principal, the negation of all general propositions and also their employment as a premiss in conditional sentences.

According to the finitary standpoint, the negation of a proposition makes sense only if it is equivalent to an affirmative proposition. Thus, e. g., the negated proposition "The numeral a is not identical with the numeral b" denotes the same as the affirmative proposition "The numeral a is different from the numeral b." Likewise, a condition or a hypothesis can be considered as finite only if it is related to an intuitively given configuration or operation or else the result of such an operation. Thus, e. g., the assump-

Ainsi par exemple, la supposition que le (grand) théorème de Fermat est vrai, n'est pas finie ; en revanche, la supposition que a, b, c, n soient quatre chiffres tels que $n > 2$ et $a^n + b^n = c^n$ – en un mot, la supposition que les quatre chiffres, a, b, c, n fournissent un contre-exemple pour le théorème de Fermat – est finie. Ou bien encore : L'hypothèse de la déductibilité de ce même théorème au moyen du formalisme arithmétique est finie en ce sens que l'on imaginerait donnée une figure de formules ayant les propriétés d'une déduction formelle dans le formalisme arithmétique dont la formule terminale représenterait le théorème de Fermat. En re[146]‖[147]vanche, la supposition que l'on aurait simplement donné quelque démonstration convaincante du grand théorème der Fermat n'est pas finie.

tion that Fermat's great theorem is true isn't finite. The assumption however, that a, b, c, n are four numerals such that $n > 2$ and $a^n + b^n = c^n$—in short, the assumption the four numerals a, b, c, n provided a counter-example to Fermat's theorem—is finite. Or, to give another example, the hypothesis that this very same theorem is deducible by means of the arithmetical formalism, is finite in the following sense: One might imagine a figure of formulas having the properties of a formal deduction within the arithmetical formalism whose terminal formula represented Fermat's theorem. How‖ever, the assumption one had simply given a compelling proof of Fermat's great theorem, isn't finite.

Il est vrai que les négations et par conséquent les négations de propositions générales peuvent être éliminées des raisonnements intuitionnistes. En distinguant arbitrairement une propo-

It is true that negations and hence the negations of general propositions can be eliminated from the modes of intuitionistic reasoning. By an arbitrary choice of an elementary false sentence, e. g., sition élémentaire fausse, par exemple $0 = 1$, on peut interpréter la négation $\overline{A}$ d'une proposition A par l'implication $A \to 0 = 1$. (L'hypothèse A a pour conséquence $0 = 1$.)

$0 = 1$, one is able to interpret the negation $\overline{A}$ of a sentence A by the implication $A \to 0 = 1$. (The hypothesis A results in $0 = 1$.)

Moyennant cette interprétation, les raisonnements intuitionnistes employant la négation se transforment en de nouveaux raisonnements égalment recevables du point de vue intuitionniste et ne contenant plus de négation. Mais l'élimination de la négation ainsi obtenue n'est qu'apparente, car on se voit obligé d'introduire des hypothèses irréelles. En d'autres termes, il s'introduit des implications $A \to B$, qui sont à interpréter dans un sens irréel imaginaire : à supposer que A fût, B s'ensuivrait.

On this interpretation, the intuitionistic modes of reasoning which employ negation transform themselves into new modes of reasoning, which are equally admissable from the intuitionistic point of view and no longer contain negations. But the elimination of negation one gains is only apparent, since one finds oneself forced to introduce unreal hypotheses. In other words, implications $A \to B$ creep in, which are to be interpreted in an imaginary unreal sense: Suppose A held, B would result.

Il est à remarquer que cette argumentation indirecte s'impose non seulement pour des propositions élémentaires A, auquel cas cette argumentation serait aussi admissible du point de vue intuituionniste, elle s'introduit au contraire aussi pour des propositions générales, pour

It should be remarked, that this indirect argument suggests itself not only for elementary propositions A, in which case it is also admissable from the intuitionistic point of view. On the contrary, the argument imposes itself also for general propositions, for implications with gendes implications avec des propositions générales comme antécédents, et même pour des propositions de forme encore plus compliquée.

En tous cas, l'usage de la notion d'« absurdité » relativement à des propositions de forme quelconque subsiste comme moyen spécifique des raisonnements intuitionnistes.

Considération prise du fait que le point de vue finiste s'est révélé trop étroit pour les besoins de la métamathématique, la question suivante se poserait maintenant : Est-il nécessaire de reprendre toutes les suppositions méthodiques de l'intuitionnisme au compte de la théorie de la démonstration ?

Pour l'instant, nous répondrons au moins partiellement à cette question. En effet, pour le formalisme arithmétique, Gentzen a fourni une démonstration de non-contradiction dont les suppositions méthodiques représentent un terme intermédiaire entre le [147]||[148] point de vue finitiste et l'intuitionnisme. Il est

eral propositions as premisses, and even for propositions of a more complicated form.

On all accounts, the use of the concept of "absurdity"—concerning propositions of a form whatsoever—remains as a means peculiar to intuitionistic reasoning.

Now, considering the fact that the finitary point of view has proven to be too narrow for the needs of metamathematics, the following question occured: Is it necessary, in respect to proof theory, to take up all the methodological assumptions of intuitionism?

For the moment, we will give at least a partial answer to this question. In fact, Gentzen has delivered a consistency proof for the arithmetical formalism, whose methodological assumptions constitute an intermediate position between the || finitary standpoint and intuitionism. It's appropriate here to refer to bon de se rapporter ici à la seconde démonstration de Gentzen, qui se recommande non seulement par la mise en évidence de l'idée directrice, mais aussi par l'exclusion de certains moyens méthodiques compliqués. Récemment cette deuxième demonstration de Gentzen a encore été simplifiée par Kalmár qui montra en même temps que la transformation du formalisme arithmétique auquel Gentzen avait eu recours n'est pas nécessaire pour ce but. Pour faire voir de quelle façon Gentzen dépasse les méthodes finies, nous allons indiquer le schéma logique de sa démonstration (avec quelques petites variations).

Gentzen's second proof. It recommends itself not only by putting emphasis on the main idea, but also by excluding certain complicated methodological means. Recently, Gentzen's second proof has again been simplified by Kalmár, who, at the same time, showed that the transformation of the arithmetical formalism Gentzen had to resort to is not necessary for this objective. To make visible the actual way Gentzen transcends the finite methods, we will now present (with some minor variations) the logical blueprint of his proof.

En vertu d'une remarque déjà employée dans les démonstrations antérieures de non-contradiction, affirmer la non-contradiction du formalisme arithmétique revient à affirmer la non-déducibilité de la formule $0 = 1$, – désignons-la par F –, c'est-à-dire à affirmer que toute déduction dans ce formalisme a une formule terminale différente de F. Si l'on se borne à des déductions où n'inter-

According to a remark already used in earlier consistency proofs, to assert the consistency of the arithmetical formalism is the same as to assert the non-deducibility of the formula $0 = 1$ (which we indicate by F). That is to assert that each deduction within this formalism has a final formula different from F. One can realize this in a direct way, if one restricts oneself to deductions in which viennent ni l'induction complète, ni les règles relatives à « tous » et « il existe », – nous les nommerons des déductions élémentaires, – on peut s'en rendre compte de façon directe.

Pour la démonstration générale, Gentzen fait intervenir des nombres ordinaux appartenant à un certain segment des deux premières classes cantoriennes (plus précisément le segment antérieur au premier ϵ de Cantor). L'introduction de ces nombres peut d'ailleurs se faire de façon indépendante, sans avoir recours à la théorie de Cantor : ils peuvent être caratérisés comme étant certaines figures (finies) pour lesquelles une relation « plus petit » ou « plus grand », ayant les propriétés d'une relation d'ordre, peut être intuitivement définie, – et de telle façon que pour deux nombres ordinaux différents on puisse toujours décider lequel des deux est le plus grand.

On assigne alors, par un simple procédé progressif, à chaque déduction appar-

neither complete induction nor rules related to "[for] all" and "there is" occur (which we call elementary deductions).

Throughout the proof [Pour la démonstration générale], Gentzen brings about an intervention of ordinal numbers which belong to a certain segment of the first two Cantorian number classes (more precisely, the segment before Cantor's first ϵ-number). The introduction of these numbers, by the way, can be made in an independent way, without recourse to Cantor's theory. The numbers can be characterized as certain (finite) figures, for which one can define, intuitively, a "lesser than" or "greater than" relation which has the property of a well-ordering and is defined in such a way, that for two different ordinal numbers it is always decidable which one of the two is the greater one.

Then one assigns, according to a simple progressive procedure, to each deduction tenant au formalisme arithmétique un de ces nombres ordinaux, et l'on peut maintenant, pour toute déduction non-élémentaire, passer à une déduction possédant la même formule terminale et à laquelle est attribuée un nombre ordinal plus petit. La conséquence en est la suivante : Si toute déduction possé[148]‖[149]dant un ordinal inférieur à α a une formule terminale différente de F, il en est de même pour toute déduction d'ordinal α.

within the arithmetical formalism one of these ordinal numbers. One can now pass from each non-elementary deduction to a deduction—with the same final formula—to which is related a smaller ordinal number. This results in the following: If each deduction with an ordinal number below α has ‖ a final formula different from F, the same is true of each deduction with ordinal number α.

Jusqu'ici, la démonstration ne sort pas des limites du point de vue finitiste.

So far the proof doesn't transgress the boundaries of the finitary standpoint.

Pour parvenir maintenant de cette conséquence au résultat que toute déduction du formalisme arithmétique possède une formule terminale différente de F – ce qui est précisément le fait à démontrer – il est encore nécessaire de justifier le principe de raisonnement suivant :

To get now from this consequence to the result that each deduction of the arithmetical formalism has a final formula different from F—this is precisely, what is to be established—it is still necessary to justify the following principle of reasoning:

« Si une propriété $B(\alpha)$ relative à un ordinal α est d'abord valable pour 0 (le plus petit des α) et si elle est valable pour α pourvu qu'elle le soit pour les ordininaux

"If a property $B(\alpha)$, related to an ordinal number α, holds, first, for 0 (the smallest of all α's), and if it holds for α whenever it holds for the smaller ordiantérieurs, alors elle est valable pour tous les α. »

Ce principe est une sorte de généralisation de l'induction complète. Dans la théorie des ensembles, un principe d'induction de ce genre est appelé principe d'induction transfinie puisqu'il s'étend à des nombres transfinis. Cependant pour nos besoins, cette expression n'est pas appropriée, car nous employons le mot « fini » dans un certain sens méthodique qui est tel que la différence entre induction ordinaire (passage de n à $n+1$) et induction transfinie ne coïncide aucunement avec la différence entre raisonnement fini et non-fini.

D'une part, il se peut qu'une induction complète ordinaire ne soit pas finie dans notre sens, si la propriété dont il est question pour un n a une structure logique compliquée. Et d'autre part, il existe des inductions transfinies au sens usuel qui ont encore le caractère d'un raisonnement fini.

Il s'agit ici pour nous moins de fixer

nals, then it holds for all the α's."

This principle is a kind of generalisation of complete induction. In set theory, an induction principle of this kind is called transfinite induction, because it extends to transfinite numbers. For our purposes, however, this expression is not appropriate. Since we employ the word "finite" in a certain methodological sense, which is such that the difference between ordinary induction (passage from n to $n+1$) and transfinite induction in no way coincides with the difference between finite and non-finite reasoning.

On the one hand, it is possible that an ordinary induction is not finite in our sense, if the property for the n in question has a complicated logical structure. On the other hand, there are transfinite inductions in the usual sense which still have the character of finite reasoning.

What matters for us here is less to fix

les limites exactes jusqu'où l'induction possède un caractère fini que de nous rendre compte intuitivement, en quoi consiste la légimitité du principe de raisonnement énoncé plus haut, et pourquoi il représente une généralisation appropriée de l'induction ordinaire.

the exact boundaries up to which induction [still] has finite character. Rather, it gives ourselves an contentual [intuitivement] account of what the legitimacy of the above mentioned principle of reasoning consists in, and why it represents a proper generalisation of ordinary induction.

Rappelons-nous comment on justifie l'induction ordinaire, du point de vue intuitif : On fait la supposition que A vaut pour 0, et que nous pouvons conclure de n à $n+1$. Alors, de la même [149]||[150] façon que nous pouvons parvenir à un entier n quelconque par une simple répétition de la progression d'une unité, nous pouvons conclure de $A(0)$ à $A(n)$.

Let us recall how, from the contentual [intuitif] point of view, ordinary induction is justified. One makes the assumption that A holds for 0 and that we can reason from n to $n+1$. Then we can—in the same || way as we reach an entirely arbitrary number n by a simple repitition of succesor steps—reason from $A(0)$ to $A(n)$.

Or le type d'ordre des ordinaux considérés est analogue à celui de la suite naturelle des entiers en ce qu'il possède aussi la propriété du bon ordre : après chaque segment vient un élément qui le suit immédiatement. De plus le type de ce bon ordre peut être réduit de manière récurrente au type de la suite naturelle

Now, the order type of the ordinal numbers under consideration is analogous to that of the natural succession of the natural numbers insofar also the latter has the property of being well-ordered: After every segment there comes an element which immediately succeeds it. Even more, the type of well-ordering can be re-des entiers. De cette façon il devient possible de « parcourir » en quelque sorte tout segment du type d'ordre considéré. C'est dans ce sens qu'on parle, dans la théorie cantorienne des ensembles, d'une numérotation au delà de l'infini.

duced, in a recursive manner, to the type of the natural succession of the natural numbers. In this way it becomes possible as it were to "run through" each segment of the order type under consideration. This constitues, as one says within Cantorian set theory, a counting beyond the infinite.

Cette numérotation transfinie ne doit pas être comprise comme exigeant, pour être effectuable, une représentation intuitive d'un infini actuel. Ce dont il s'agit, c'est du passage d'un processus progressif à sa conception métamathématique, de façon analogue à ce qui passe déjà dans l'induction complète, lorsque nous dépassons la constatation progressive des propositions particulières $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$,... par la constatation générale métamathématique que nous pouvons parvenir à $A(n)$ pour tout n.

This transfinite counting mustn't be understood as it were demanding, to be executable, a representation of the actual infinity. What matters is the transition from a progressive process to its metamathematical apprehension. This transition is analogous to the one which happens already in complete induction, when we leave behind the progressive stating of the particular propositions $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, $\ldots$, in favour of the general metamathematical statement that we can arrive at $A(n)$ for all n.

La différence avec l'induction complète ordinaire consiste, dans le cas du type d'ordre envisagé, dans le fait que des induction superposées interviennent, c'est-

As to the order-type under consideration, the difference to ordinary complete induction consists in the fact that superposed inductions are involved. That is, à-dire que l'on obtient des inductions supérieures à partir de l'induction ordinaire en appliquant les considérations métamathématiques susindiquées même aux procédés d'iteration des inductions. En termes de logique, cette superposition d'inductions s'exprime par une superposition de propositions hypothétiques dans lesquelles des propositions générales (Allsätze) interviennent comme antécédents. Ces propositions générales – remarquons-le – sont toujours des propositions qui trouvent leur confirmation dans l'aboutissement même du raisonnement ; la forme hypothétique de ces propositions a donc la signification de l'anticipation d'une étape dans un processus progressif.

one obtains higher inductions from ordinary inductions by employing the metamathematical considerations, hinted at above, to iteration processes of inductions. In logical terms, this superposition of inductions shows itself by a superposition of hypothetical propositions in which general propositions (Allsätze) enter as antecedents. One should emphasize that these general propositions are always propositions, which find their confirmation in the outcome of the very same reasoning; the hypothetical form of these propositions therefore has the meaning of an anticipation of one stage in a progressive process.

En définitive, l'emploi de l'induction transfinie revient à un certain élargissement du cadre méthodique de la théorie de la [150]||[151] démonstration, mais non à une acceptation entière des raisonnement intuitionnistes.

In the end, the use of transfinite induction amounts to a certain extension of the methodological frame of proof theory, but not to a complete acceptance of intuitionistic modes of reasoning.

Ce procédé d'élargissement est lui-

This extension procedure is, in princimême, en principe, susceptible d'être généralisé, car il est possible de s'élever aussi à la conception intuitive de types ordinaux plus élevés que celui dont Gentzen se sert (le premier ϵ de Cantor) et de justifier intuitivement le principe correspondant d'induction transfinie.

ple, itself capable of being generalized. For it is possible to bring oneself also to the intuitive representation of ordinal types higher than those Gentzen makes use of (Cantor's first ϵ) and to contentually [intuitivement] justify the corresponding principle of transfinite induction.

Pour l'instant, il est impossible de juger si l'adjonction d'un principe d'induction supérieur de ce genre aux méthodes finitistes pourra fournir les moyens suffisants pour une démonstration de noncontradiction de l'analyse.

At the moment, it is impossible to assess whether the addition of a higher induction principle of this kind to the finitary methods will be able to provide means sufficient for a consistency-proof of analysis.

D'après le théorème général de Gödel sur les propositions non formellement déductibles, le principe d'induction en question – qui, dans tous les cas pourrait être formulé comme un théorème sur un certain bon ordre de la suite naturelle des entiers – devrait être tel que sa déduction ne pût être effectuée dans le cadre de l'analyse formalisée.

According to Gödel's general theorem on formally undeducible propositions, the induction principle in question – which, in any case, will be expressable as a theorem about a certain well-ordering of the natural succession of the natural numbers – had to be such that its deduction within the framework of formalized analysis can't be effected.

Tout d'abord il semble impossible de satisfaire à cette exigence : car la théorie

At first, it seems impossible to satisfy this demand. For the general theory of générale du bon ordre de la suite naturelle, y compris le théorème général de l'induction transfinie, peut être établie au sein d'un formalisme assez naturel de l'analyse. Cependant, il faut se rappeler que le théorème général de l'induction transfinie ne décide pas encore si un ordre proposé de la suite des entiers est aussi un bon ordre ; or le principe d'induction supérieur en question pourrait justement revenir à une telle affirmation.

well-ordering of the natural succession (including the general theorem on transfinite induction) can be established in the context of a rather natural formalism of analysis. However, one has to recall that the general theorem of transfinite induction doesn't yet decide, whether a given order of the succession of natural numbers is also a well-order. The higher principle of induction in question could therefore just amount to such an assertion.

De toutes façons, et compte tenu des considérations précédentes, il ne paraît pas indiqué de délimiter *a priori* le cadre méthodique pour les recherches métamathématiques. L'espoir que le point de vue finitiste (dans son sens originel) pourrait suffir pour tout la théorie de la démonstration, fut suscité par le fait que les problèmes relatifs à cette théorie peuvent être énoncés déjà de ce point de vue. Mais il n'y a pas de relation générale simple entre la possibilité d'énoncer et celle de démontrer une proposition, et par conséquent non plus entre la formulation et la résolution d'un

Anyway, and in view of the preceding considerations, there seems to be no suggestion as to limit *a priori* the methodological frame for metamathematical investigations. The hope that the finitary standpoint (in the original sense) could suffice for the whole of proof theory, was raised by the fact that the problems related to this theory can already be formulated from this standpoint. But there is no simple general relation between the possibility to assert a proposition and to prove it, and hence neither between the formulation and the solution of a problem. ||

problème. [151]||[152]

Maintenant la question se pose de savoir quel est le caractère de la limitation méthodique des moyens de la théorie de la démonstration, si cette dernière ne consiste pas dans l'exigence de l'évidence élémentaire, qui distingue le point de vue finitiste. La réponse est la suivante : La tendance de la limitation méthodique reste au fond la même ; cependant il ne faut pas concevoir l'évidence et la sûreté de façon trop absolue, si l'on veut conserver ouverte la possibilité d'élargir le cadre méthodique. D'autre part, en procédant ainsi, on s'assure l'avantage de ne pas être obligé de déclarer illégitimes ou douteuses les méthodes traditionelles de l'analyse.

Le caractère spécifique du point de vue hilbertienne doit être aperçu en ceci : on s'attache à ne pas sortir d'un mode de raisonnement arithmétique au sens strict, tandis que les méthodes habituelles de l'analyse et de la théorie des ensembles s'inspirent pour une part essen-

Now the question arises: What is the character of the methodological limitation of proof theoretical means, if the latter doesn't consist in the demand for elementary evidence, which distinguishes the finitary standpoint. The answer is as follows. The tendency to limit methods remains basically the same. However, one may not conceive the evidence and the security in an utterly absolute fashion, if one wants to keep open the possibility to extend the methodological frame. On the other hand, proceeding this way, one secures the advantage not to be obliged to declare as illegitimate or doubtful the traditional methods of analysis.

The peculiar character of Hilbert's standpoint must be regarded as this: One commits oneself not to deviate from an arithmetical mode of thinking in the strict sense; although the habitual methods of analysis and set theory are, for an essential part, inspired by geomettielle, d'idées géométriques et en tirent leur force d'évidence. En effet, on peut dire – et c'est sûrement l'essentiel des critiques finitistes et intuitionnistes des méthodes usuelles en mathématiques – que l'arithmétisation de la géometrie, dans l'analyse et la théorie des ensembles, n'est pas intégrale.

La tendance méthodique de la théorie hilbertienne de la démonstration peut contribuer à développer et à mieux faire valoir la pensée spécifiquement arithmétique et à faire mieux apparaître les étapes des démarches arithmétiques.

Par ailleurs, dans le jugement porté sur les résultats de la théorie de la démonstration, il faut relever que les démonstrations de la non-contradiction du formalisme arithmétique ne représentent aucunement les seuls progrès réalisés par les recherches métamathématiques dans les dernières années. En particulier, dans les problèmes de la décidabilité et de la caculabilité effective, des résultats

ric ideas and draw their evidential force therefrom. In fact, one can say—and this surely are the essentials of the finitary and intuitionistic critiques of the usual methods in mathematics—that the arithmetization of geometry in analysis and set theory is not complete.

The methodological orientation of Hilbert's proof theory can contribute to the development of and put in a more favourable light the pecularities of arithmetical thinking and bring out more clearly the stages in arithmetical procedures.

Moreover, any judgement concerning the results of proof theory has to make clear that the consistency proofs for the arithmetical formalism by no means represent the only developments in the metamathematical investigations during recent years. Especially with regard to the problems of decidability and effective calculability, remarkable results have been achieved by the work of Gödel, très remarquables ont été obtenus par les travaux de Gödel, Church, Turing, Kleene et Rosser.

Church, Turing, Kleene and Rosser.

La métamathématique a d'ores et déjà une signification telle que son importance peut être appréciée indépendamment de toute doctrine philosophique sur les fondements. [152]‖[153]

Metamathematics has, from now on, such a significance that its importance can be appreciated independently of any philosophical doctrine about foundations. ‖